

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

בחינה במבוא להסתברות ולסטטיסטיקה (80430)
מועד ג', כ"ח ניסן (29.4.22)

שם המרצים: נעה ניצן, אוהד נ. פלדהיים.
משך הבחינה: **שלוש שעות.**

מספר מחברת _____ מספר תעודת זהות _____

הנחיות:

- יש לענות על ארבע מתוך חמש השאלות בבחינה.
- ציון הבחינה מתחיל מ-4 וכל שאלה שווה 25 נקודות
- יש להתחיל תשובה לכל שאלה בדף חדש ולכתוב רק בעמוד השמאלי בכל דף.
- כל סעיף שיענה בתשובה "איני יודע/ת" – מזכה בנקודה אחת.
- בכל שאלה, בפתרון סעיף מתקדם ניתן להתייחס לפתרון סעיף קודם כקבוע ולהתבסס עליו בלי לאבד נקודות.
- כל חומר עזר, לרבות מכונות חישוב ואמצעי תקשורת אסור בשימוש.
- מותר להשתמש בכל משפט שנלמד בשיעור כל עוד הוכחתו אינה מטרת השאלה.
- לקבלת הניקוד המירבי יש לצטט במדויק את המשפטים שנעשה בהם שימוש ולנמק כל תשובה.

השאלות שנבחרו				
שאלה 1	שאלה 2	שאלה 3	שאלה 4	שאלה 5

בהצלחה!

שאלה 1

יש לפתור את הסעיפים הבאים.

- [15 נק.] (א) יש לנסח את חסם האיחוד (אי-שוויון בול) ולהוכיח אותו עבור איחוד מספר סופי של מאורעות.
- [10 נק.] (ב) בחדר n אנשים שנולדו בתאריכים מקריים שהוגרלו באופן אחיד בשנה בת 365 ימים. נסמן ב- A את המאורע ששניים מהאנשים לפחות נולדו באותו יום. יש להוכיח כי

$$\mathbb{P}(A) \leq \frac{\binom{n}{2}}{365}.$$

שאלה 2

בכד אטום כדור שחור, כדור לבן וכדור אפור. שולפים כדורים מתוך הכד שוב ושוב עד לקבלת כדור שחור. בכל פעם ששולפים כדור לבן - מחזירים אותו לכד, אך אם שולפים אפור – משאירים אותו מחוץ לכד.

- [8 נק.] (א) מה ההסתברות שהכדור האפור נותר בכד בסוף התהליך?
- [8 נק.] (ב) מה ההסתברות שתדרשנה k שליפות עד לשליפה של הכדור השחור (כולל השליפה האחרונה)?
- [9 נק.] (ג) בהנתן שהכדור האפור נותר בכד בסוף התהליך, מה ההסתברות שתדרשנה k שליפות עד לשליפה של הכדור השחור (כולל השליפה האחרונה)?

תזכורת: לכל $\alpha \neq 1$ מתקיים

$$\sum_{i=1}^k \alpha^i = \alpha \frac{1 - \alpha^k}{1 - \alpha}$$

שאלה 3

יהיו X ו- Y משתני מקריים בלתי תלויים המתפלגים מעריכית עם פרמטר 1 ונסמן $Z = X + Y$.

- [10 נק.] (א) מה היא הסתברות המאורע $Z < 2$?
- [6 נק.] (ב) מהי תוחלת המכפלה XY ?
- [9 נק.] (ג) תוך שימוש בכך שצפיפותם המשותפת של Y ו- Z היא $f_{YZ}(y, z) = e^{-z} \mathbb{I}(0 < y < z)$ (אין צורך להראות עובדה זו), יש לחשב לכל $a > 0$ את צפיפותו המותנית של Y בהנתן $X + Y = a$.

שאלה 4

יהיו $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ משתנים מקריים בלתי-תלויים שכל אחד מהם מתפלג אחיד על $\{0, 1, 2\}$. נסמן $Y_i = \mathbb{I}(X_i > X_{i+1})$ ונסמן $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$.

(א) יש לחשב את תוחלת Z_n (כתלות ב- n). [8 נק.]

(ב) יש לחשב את שונות Z_n (כתלות ב- n). [8 נק.]

(ג) יש להראות כי קיימים $a, b > 0$ כך שמתקיים לכל $n \in \mathbb{N}$: [9 נק.]

$$\mathbb{P}\left(Z_{2n} - \mathbb{E}(Z_{2n}) > \frac{2n}{100}\right) \leq be^{-an}.$$

שאלה 5

אלכס מצא במכרה בסיביר אבן שעשויה להיות אחד משני גבישים רדיו-אקטיביים. הזמן (בדקות) עד לפליטה של פרוטון מגביש מסוג א' מתפלג מעריכית עם פרמטר 1 ואילו מסוג ב' – מעריכית עם פרמטר $1/100$. הוא ממתין עד לפליטת פרוטון ראשונה שמתרחשת בזמן X . כלומר:

השערת האפס היא $X \sim \text{Exp}(1)$,

ההשערה החליפית היא $X \sim \text{Exp}(0.01)$.

(א) יש לנסח משפחה של מבחנים אופטימליים (ניימן-פירסון), להכרעה איזה סוג גביש מצא אלכס, על סמך זמן ההמתנה עד לפליטה הראשונה. [9 נק.]

(ב) יש לזהות את המבחן האופטימלי עבור מובהקות $\alpha = e^{-1}$ ולקבוע את עוצמתו β ? [8 נק.]

(ג) אלכס בירר וגילה שבמכרה שבו כרה אחוז אחד מהאבנים הן מסוג א' והיתר מסוג ב'. כעת הבעיה הפכה מבעיה סטטיסטית לבעיה הסתברותית. [8 נק.]

בהנתן שב-50 הדקות הראשונות לא ארעה פליטה, מה ההסתברות שמדובר בגביש מסוג א'?