

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

בחינה במבוא להסתברות ולסטטיסטיקה (80430)
מועד א', ז' אדר א' תשפ"ב (8/2/2022)

שם המרצים: נעה ניצן, אוהד נ. פלדהיים.
משך הבחינה: **שלוש שעות**.

מספר מחברת _____ מספר תעודת זהות _____

הנחיות:

- יש לענות על ארבע מתוך חמש השאלות בבחינה.
- יש להתחיל תשובה לכל שאלה בדף חדש ולכתוב רק בעמוד השמאלי בכל דף.
- כל סעיף שיענה בתשובה "איני יודע/ת" – מזכה בנקודה אחת.
- בכל שאלה, בפתרון סעיף מתקדם ניתן להתייחס לפתרון סעיף קודם כקבוע ולהתבסס עליו בלי לאבד נקודות.
- כל חומר עזר, לרבות מכונות חישוב ואמצעי תקשורת אסור בשימוש.
- מותר להשתמש בכל משפט שגלמד בשיעור כל עוד הוכחתו אינה מטרת השאלה.
- לקבלת הניקוד המירבי יש לצטט במדויק את המשפטים שנעשה בהם שימוש ולנמק כל תשובה.

השאלות שנבחרו				
שאלה 1	שאלה 2	שאלה 3	שאלה 4	שאלה 5

בהצלחה!

שאלה 1

יש להוכיח את הטענות הבאות:

[10 נק.] (א) לכל שני משתנים בדידים X ו- Y בעלי תוחלת סופית. מתקיים $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.

[15 נק.] (ב) לכל משתנה מקרי בדיד X ולכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים $\text{Var}(X) \leq \mathbb{E}((X - a)^2)$.

שאלה 2

לאלי ולבלה סיכויים שווים ובלתי תלויים לנצח בכל סיבוב של משחק דוקים. הם משחקים שבעה משחקים והמנצח המוחלט הוא מי שזכה ביותר משחקים.

[7 נק.] (א) מה ההסתברות שתוצאת המשחק האחרון קבעה את זהות המנצח?

[8 נק.] (ב) בהנתן שבלה היא המנצחת המוחלטת, מה ההסתברות שהיא ניצחה בחמישה משחקים או פחות?

[10 נק.] (ג) בהנתן שאלי הוא המנצח המוחלט, מהי תוחלת מספר הזכיות שלו ומהי תוחלת מספר הזכיות של בלה?

שאלה 3

יהי X, Y וקטור מקרי המתפלג אחיד במשולש התחום על ידי הישרים $x = 0, y = 0, x + y = 2$. נסמן ב- A וב- B את המאורעות $A = \{X < 1, Y < 1\}$ ו- $B = \{X + Y < 1\}$.

[9 נק.] (א) יש לחשב את צפיפותו המותנית של Y בהנתן $X = a$ לכל $a \in [0, 2]$.

[8 נק.] (ב) יש לחשב את הסתברותם של המאורעות A ו- B .

[8 נק.] (ג) האם X ו- Y בלתי-תלויים? האם בהנתן A הם בלתי-תלויים?

שאלה 4

בטבלה בגודל $(n+1) \times (n+1)$ נצבע כל ריבוע בשחור או בלבן בהסתברות שווה ובאופן בלתי תלוי. שני ריבועים נקראים מחוברים אם הם סמוכים (אחד לצד השני או אחד מעל השני) וצבועים באותו הצבע. נסמן ב- $A_{i,j}$ את המאורע שהריבוע במיקום ה- (i, j) בטבלה מחובר לריבוע במיקום ה- $(i+1, j)$. נסמן ב- $B_{i,j}$ את המאורע שהריבוע במיקום ה- (i, j) בטבלה מחובר לריבוע במיקום ה- $(i, j+1)$. נסמן ב- Z_n את מספר זוגות הריבועים המחוברים בסך הכל.

8 נק. (א) האם אוסף המאורעות $\{A_{i,j}, B_{i,j}\}_{i,j \in [n]}$ בלתי-תלויים? האם הם בלתי-תלויים בזוגות?

9 נק. (ב) יש לבטא באמצעות n את תוחלת ושונות Z_n .

8 נק. (ג) יש להראות כי לכל $\epsilon > 0$ מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{Z_n - \mathbb{E}(Z_n)}{2n(n+1)} \right| > \epsilon \right) = 0.$$

שאלה 5

נתונות שתי השערות בנוגע להתפלגותו של משתנה מקרי X : השערת האפס היא שהוא מתפלג אחיד ב- $[0, 10]$ וההשערה החלופית - שהוא מתפלג מעריכית עם פרמטר 0.2. נערכה למשתנה דגימה בודדת. על סמך דגימה זו:

10 נק. (א) יש למצא מבחן מיטבי עם מובהקות 0.05 (הלא היא α) להפרדה בין ההשערות. מה עוצמתו $(1-\beta)$?

(כדאי לשים לב שערכי הדגימה האפשריים כוללים גם את התחום $(10, \infty)$)

5 נק. (ב) יש למצא מבחן מיטבי עם מובהקות 0 ועוצמה חיובית ממש.

10 נק. (ג) הנסיין ביצע דגימות חוזרות, בלתי תלויות ושוות התפלגות של של המשתנה המקרי. נסמן דגימות

אלה ב- $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. הוא הסתכל על

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - 5n}{\sqrt{n}}$$

כאשר $n \rightarrow \infty$ לאיזו התפלגות תשאפנה הדגימות לפי השערת האפס ולאיזו התפלגות לפי ההשערה החלופית?