

האוניברסיטה העברית בירושלים  
החוג למתמטיקה

**בחינה במבוא להסתברות ולסטטיסטיקה (80430)**  
**מועד ב', א' אדר ב' תשפ"ב (4/3/2022)**

שם המרצים: נעה ניצן, אוהד נ. פלדהיים.  
משך הבחינה: **שלוש שעות**.

מספר מחברת \_\_\_\_\_ מספר תעודת זהות \_\_\_\_\_

**הנחיות:**

- יש לענות על ארבע מתוך חמש השאלות בבחינה.
- יש להתחיל תשובה לכל שאלה בדף חדש ולכתוב רק בעמוד השמאלי בכל דף.
- כל סעיף שיענה בתשובה "איני יודע/ת" – מזכה בנקודה אחת.
- בכל שאלה, בפתרון סעיף מתקדם ניתן להתייחס לפתרון סעיף קודם כקבוע ולהתבסס עליו בלי לאבד נקודות.
- כל חומר עזר, לרבות מכונות חישוב ואמצעי תקשורת אסור בשימוש.
- מותר להשתמש בכל משפט שגלמד בשיעור כל עוד הוכחתו אינה מטרת השאלה.
- לקבלת הניקוד המירבי יש לצטט במדויק את המשפטים שנעשה בהם שימוש ולנמק כל תשובה.

השאלות שנבחרו				
שאלה 1	שאלה 2	שאלה 3	שאלה 4	שאלה 5

**בהצלחה!**

### שאלה 1

יהי  $X$  משתנה מקרי בדיד בעל פונקציה יוצרת מומנטים  $M_X(t)$ .

[11 נק.] (א) יש להוכיח את אי שוויון צ'בישב הקובע כי  $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{\text{Var } X}{a^2}$  לכל  $a > 0$ .

[14 נק.] (ב) יש להוכיח את אי שוויון צ'רנוף (שגילה רובין), הקובע כי לכל  $t > 0$  ו- $a \in \mathbb{R}$  מתקיים

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{M_X(t)}{e^{at}}.$$

(בשאלה זו מותר לצטט את אי-שוויון מרקוב ולהשתמש בו בלי להוכיחו.)

### שאלה 2

בשק אטום חמישה כדורים שחורים ושלושה כדורים לבנים. בכל פעם מוציאים מתוך השק שני כדורים, בזה אחר זה בלי החזרה, וממשיכים בכך עד שנשלפים ביחד שני כדורים באותו צבע. יהי  $X$  משתנה מקרי המתאר את מספר הכדורים שנשלפו ו- $Y$  משתנה מציין לכך שבשליפה האחרונה נשלפו שני כדורים לבנים.

[8 נק.] (א) מהי התפלגותם המשותפת של  $X$  ו- $Y$ ? האם הם בלתי-תלויים?

[8 נק.] (ב) מהי תוחלת מספר הכדורים **השחורים** שנשלפו?

[9 נק.] (ג) מהי תוחלת מספר הכדורים (שחורים ולבנים גם יחד) שנשלפו, בהנתן שבשליפה האחרונה נשלפו שני כדורים לבנים?

### שאלה 3

יהי  $X$  משתנה מקרי המתפלג מעריכית עם פרמטר 1.

[8 נק.] (א) יש לחשב את צפיפותו של  $X^2$ .

[8 נק.] (ב) יש לחשב את התפלגותו המצטברת של  $X$  בהנתן המאורע  $\{X > 1\}$ .

[9 נק.] (ג) עבור אילו ערכי  $\alpha$  קיימת התוחלת  $\mathbb{E}(e^{\alpha X})$  ומה ערכה?

#### שאלה 4

$2n$  נורות מסודרות במעגל. כל נורה כבויה בסיכוי  $2/3$  באופן בלתי-תלוי. אם שתי נורות סמוכות כבויות נאמר כי המקטע שביניהן חשוך. נסמן ב- $Z$  את מספר המקטעים החשוכים.

[8 נק.] (א) יש לחשב את תוחלת ושונות  $Z$ .

[8 נק.] (ב) יש להראות כי לכל  $d > 0$  קיימים קבועים  $c, C > 0$  כך שלכל  $n > 0$  מתקיים:

$$\mathbb{P}(Z - \mathbb{E}(Z) \geq dn) \leq Ce^{-cd^2n}.$$

[8 נק.] (ג) נאמר שמקטע הוא זוגי אם הוא מפריד בין כלומר בין הנורה ה- $(2k-1)$  לנורה ה- $2k$  ונסמן ב- $W$

את מספר המקטעים הזוגיים החשוכים. יש למצא קבועים  $a, b, c$  כך שהמשתנה המקרי  $\frac{W-an}{bn^c}$  יתכנס בהתפלגות להתפלגות נורמלית תקנית  $N(0, 1)$ , כאשר  $n$  שואף לאינסוף.

#### שאלה 5

מדידת לחץ האוויר בת"א (ביחידות של אטמוספירה) מתפלגת נורמלית עם תוחלת 1 וסטיית תקן 0.1. מדידת לחץ אוויר כזו בירושלים מתפלגת נורמלית עם תוחלת 0.9 וסטיית תקן 0.1. מדידות שונות הן בלתי-תלויות.

לצורך השאלה ניתן להשתמש בכך שמשנתה נורמלי תקני  $X$  (סטנדרטי) מקיים:

$$\mathbb{P}(X < 1.65) = 0.95 = 1 - \mathbb{P}(X < -1.65).$$

[12 נק.] (א) מתבצעת מדידת לחץ אוויר בתל-אביב או בירושלים. השערת האפס היא שהמדידה נערכה בתל-אביב.

מהו המבחן המיטבי בעל מובהקות של 0.05 (כלומר ערך סמך 0.95) המכריע בין ההשערות? יש לבטא את עוצמת מבחן זה (הלא היא  $1 - \beta$ ) באמצעות פונקציית ההתפלגות המצטברת של משתנה מקרי נורמלי.

[13 נק.] (ב) כמה מדידות לחץ אוויר באותו מקום דרושות כדי להכריע בערך סמך של 0.95 ובעוצמה של 0.95 לפחות בין שתי ההשערות?

לצורך סעיף זה מותר להסתמך (ללא הוכחה) על כך שמבחן אופטימלי הוא מבחן רף עבור סכום ערכי המדידות; כלומר שהמבחן מקבל את השערת האפס כאשר סכום הערכים של  $n$  המדידות נמצא מעל רף מסויים ודוחה אותה אחרת.