Metodo de Elementos Finitos para analisis estructural

Instructor: Carlos X. Azua Gonzalez, PhD

Contenidos del curso

6 sesiones FEM estatico + 1 sesion FEM dinamico:

8 horas (3s)(8-9 Feb, 18:00-22:00) + 4 horas (1s + prueba)(16 Feb,18:00-22:00)

8 horas (3 s) (14-15 Feb, 18:00-22:00)

Total horas (contacto): 8h x2 + 4h x1 = 20 horas

1 prueba final:

Calculos en mathcad y parte teoria (8 Julio,14:00-16:00)

1 prueba inicial de conocimiento:

Estatica basica + Mecanica de Materiales + Algebra lineal

Contenido de sesiones

#1 Introduccion:

- Reseña de metodos modernos de analisis de estructuras.
- Introduccion al uso de mathcad.

#2 Ecuaciones matriciales de equilibrio I:

- Derivacion de ecuaciones de equilibrio en el Continuo y forma debil.
- Introduccion a interpolacion en elementos finitos.

#3 Ecuaciones matriciales de equilibrio II:

- La matriz de rigidez en elementos de armadura (2D).
- EL Jacobiano y la cuadratura de Gauss.
- Evaluacion numerica de la matriz de rigidez.

Contenido de sesiones

#4 Ensamblaje de elementos finitos:

- **Topologia de elementos, conectividad, y esparsidad global.**
- **Aplicacion al ensamblaje matricial en armaduras.**

#5 Condiciones de borde I:

- **Modificar matriz de rigidez y vector de carga para condiciones de borde mixtas.**
- **Computo de deformaciones para condiciones de borde mixtas.**

#6 Condiciones de borde II:

- **Computo de reacciones y verificacion.**
- **Pos-procesamiento basico**

Contenido de sesiones

#7 Dinamica estructural:

- **Introduccion al analisis de problemas de vibracion libre.**
- **Frecuencias propias en sistemas estructurales con masas discretas.**

Prueba de conocimientos

Prueba de 20 min – en linea

Inicios de los metodos de elementos finitos:

Hrennikof, A. (1941). Solution of Problems of Elasticity by the Framework Method, J. Appl. Mech. Dec 1941, 8(4): A169-A175 (7 pages)
https://doi.org/10.1115/1.4009129

Condicion Estatica:

Balance Momento:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + X = 0\\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + Y = 0\end{aligned}\right\}$$

Compatibilidad:

Relacion cinematica:

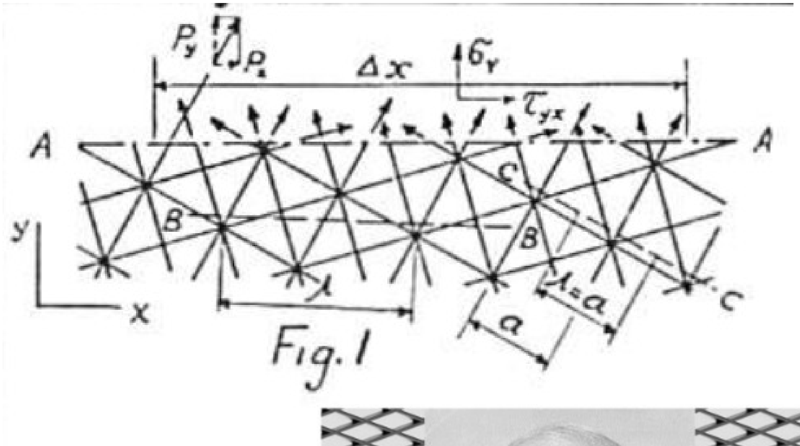
$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

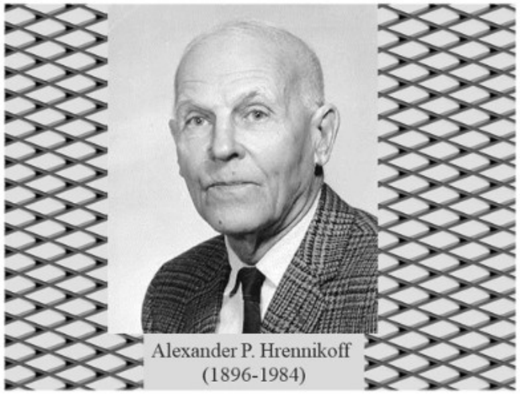
Material elastico:

Relacion constitutiva:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu \sigma_y\right)$$

+Condiciones de borde/+Condiciones borde e iniciales





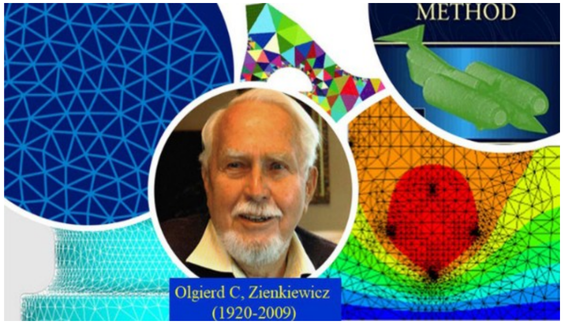
Alexander P. Hrennikoff (1896-1984)

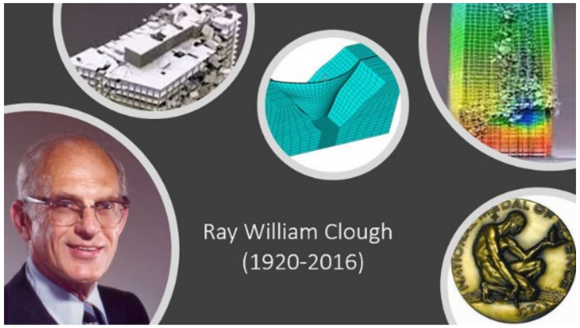
Negro = Metodo de subdivisiones **Azul = Elementos finitos modernos**

Liu, WK, Li, S., Park, H. (2022). Eighty Years of the Finite Element Method: Birth, Evolution, and Future. Archives of Computational Methods in Engineering, 29:4431–4453
https://doi.org/10.1007/s11831-022-09740-9

Inicios de los metodos de elementos finitos:

Diferencias Finitas	**Elementos Finitos**
Resuelve PDE fisica	Resuelve PDE fisica
Variables en celda	Variables unicas en nodos entre elementos
Geometrias simples	Metodo se adapta a geometrias complejas
Calculo directo de gradientes	Gradientes dependen del grado interpolacion
Errores dependen de la malla	Errores dependen de la malla e interpolacion





UK → Fundador UKACM

US → Metodo Matriz Rigidez (54’) / Elementos Finitos (60’)

Liu, WK, Li, S., Park, H. (2022). Eighty Years of the Finite Element Method: Birth, Evolution, and Future. Archives of Computational Methods in Engineering, 29:4431–4453 https://doi.org/10.1007/s11831-022-09740-9

Clough RW (1960) The finite element method in plane stress analysis. In: Proceedings of 2nd ASCE conference on electronic computation. Pittsburgh PA, 8–9 Sept

Sesion 1

Demostracion practica de Mathcad:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{array}{l}
MSYMCK\left(n, m, M_a\right) := \\
\quad check \leftarrow 1 \\
\quad \text{for } j \in 1 \,..\, m \\
\quad\quad \text{if } check = 0 \\
\quad\quad\quad \text{break} \\
\quad\quad \text{for } i \in 1 \,..\, n \\
\quad\quad\quad \text{if } M_{a_{i,j}} \neq M_{a_{j,i}} \\
\quad\quad\quad\quad check \leftarrow 0 \\
\quad\quad\quad\quad \text{break} \\
\quad check
\end{array}
$$

Sesion 1

Demostracion practica de Mathcad:

$$a_d := \det(A)$$

$$a_d = 1$$

$$d_d := \det\left(\mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right)\right)$$

$$d_d = 0$$

$$D_i := A^{-1}$$

$$D_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_i := \mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right)$$

$$E_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_i := {I_{3x3}}^{-1}$$

$$F_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_e := \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

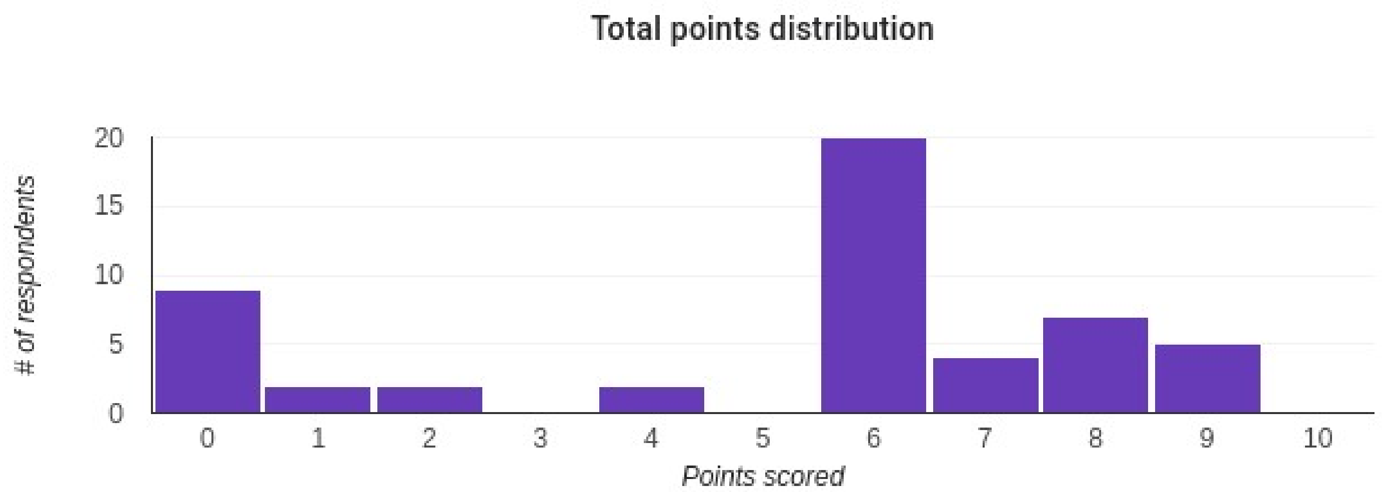
$$\mathrm{eigenvals}\left(\sigma_e\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{eigenvecs}\left(\sigma_e\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sesion 1

Resultados de la prueba:

Average	Median	Range
5.16 / 10 points	6 / 10 points	0 - 9 points



Sesion 1 - recapituacion

$[0\ 0\ 1]^T \times r = |r|\ [-\sin(\theta)\ \cos(\theta)\ \ 0]^T$; $r = |r|\ [\cos(\theta)\ \sin(\theta)\ \ 0]^T$

$|r| = \sqrt{(r\cdot r)}$; $\sin(\theta)/\cos(\theta) = r_y/r_x$

=>

$$u'_{el} = T_u u_{el}$$

$X_u' = |1|\ [\cos(\theta)\ \sin(\theta)\ \ 0]^T$

$y_u' = [0\ 0\ 1]^T \times x_u' = |1|\ [-\sin(\theta)\ \cos(\theta)\ \ 0]^T$; $z_u' = z_u = [0\ 0\ 1]^T$

$[u_x\ u_y\ 0]^T \rightarrow [u_{x'}\ u_{y'}\ 0]^T$

$[u_x\ u_y\ 0]^T = (x_u'\cdot u)\ i' + (y_u'\cdot u)\ j' + (z_u'\cdot u)\ k' = (x_u'^T\cdot u)\ i' + (y_u'^T\cdot u)\ j' + (z_u'^T\cdot u)\ k'$

$[u_x\ u_y\ 0]^T = (\cos(\theta)u_x + \sin(\theta)u_y + 0\cdot 0)\ i' + (-\sin(\theta)u_x + \cos(\theta)u_y + 0\cdot 0)\ j'$

$+ (0\cdot u_x + 0\cdot u_y + 1\cdot 0)\ k'$

$$\begin{bmatrix} u_{x'} \\ u_{y'} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)u_x + \sin(\theta)u_y + 0\cdot 0 \\ -\sin(\theta)u_x + \cos(\theta)u_y + 0\cdot 0 \\ (0)u_x + (0)u_y + 1\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sesion 1 - recapituacion

$$\mathbf{u}'_{el} = \mathbf{T}_u \mathbf{u}_{el}$$

$$\begin{bmatrix} u_{x'} \\ u_{y'} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)u_x + \sin(\theta)u_y + 0 \cdot 0 \\ -\sin(\theta)u_x + \cos(\theta)u_y + 0 \cdot 0 \\ (0)u_x + (0)u_y + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} [u]'_1 \\ [u]'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T]_b & [0] \\ [0] & [T]_b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [u]_1 \\ [u]_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_u = \begin{bmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) & 0 & 0 \\ -sin(\theta) & cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos(\theta) & sin(\theta) \\ 0 & 0 & -sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_b = \begin{bmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ -sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$[u]'_1 = [\ u_{1x'}\ \ u_{1y'}\ ]^T$; $[u]'_2 = [\ u_{2x'}\ \ u_{2y'}\ ]^T$

Sesion 2

Balance de momento en solidos continuos:

$$\mathrm{Div}[\boldsymbol{\sigma}] + \mathbf{b} = \rho\ddot{\mathbf{u}}$$

- Segunda ley de Newton aplicada en un volumen diferencial

- Conservacion de momento en unidades : Fuerza / volumen

- Tensor de esfuerzo es simetrico (momento angular)

$s_{xy}=s_{yx}$ $s_{yz}=s_{zy}$ $s_{xz}=s_{zx}$

Sesion 2

Forma debil de balance de momento:

$$\underbrace{\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \cdot (\rho \ddot{\mathbf{u}}) d\Omega}_{1} + \underbrace{\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega}_{2} = \underbrace{\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{b} d\Omega}_{3} + \underbrace{\int_{\Gamma_{\sigma}} \delta \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{t} d\Gamma}_{4}$$

- 1: Energia debido a efectos de inercia (analisis dinamico)

- 2: Energia interna debido a deformacion del solido

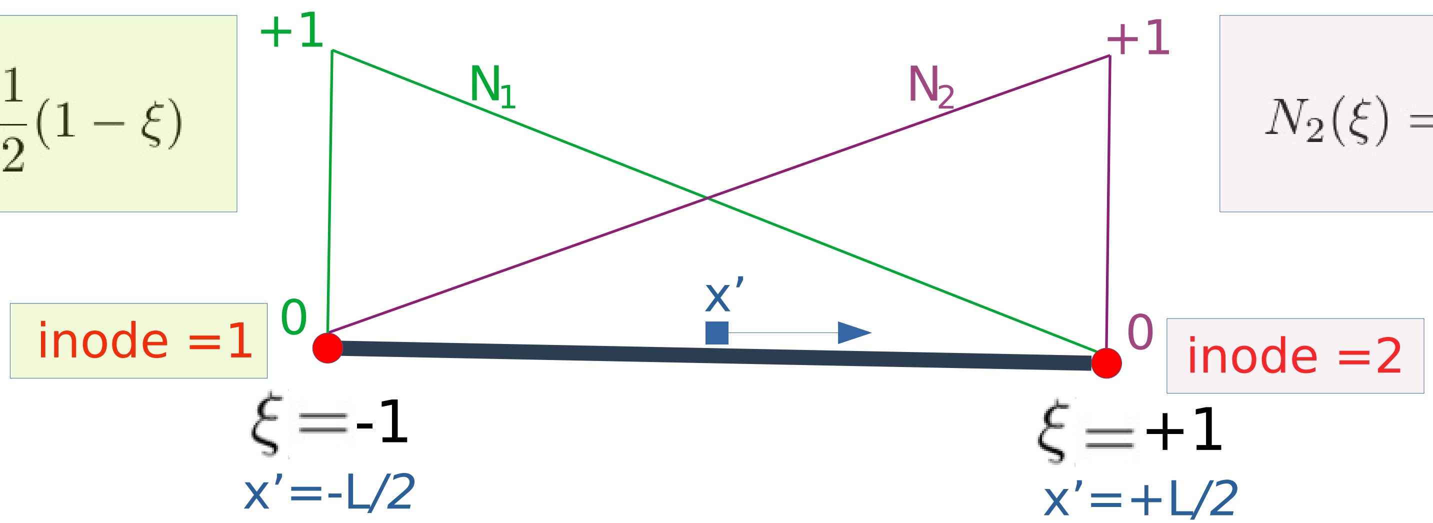
- 3: Energia debido a la atraccion de masas (e.j. gravedad)

- 4: Energia debido a tracciones en las superficies del solido

Interpolacion en FEM

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi)$$



$$\mathbf{u}' = \sum_{inode=1}^{nnode} N_{inode}\mathbf{u}'_{inode}$$

$$x' = \sum_{inode=1}^{nnode} N_{inode}x'_{inode}$$

Sesion 2

Funciones de interpolacion (mathcad)

$$N_{vec}(\xi) := \left[\frac{1}{2} \cdot (1-\xi) \quad \frac{1}{2} \cdot (1+\xi) \right]^{T}$$

Matriz de interpolacion (mathcad)

$$N(\xi) := \left\| \begin{array}{l} [N_1 \;\; N_2] \leftarrow N_{vec}(\xi)^{T} \\ \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Ejercicio - Funciones de interpolacion

Determine el vector de desplazamiento local en xi =-1, xi=0, xi=+1

Para los siguientes desplazamientos nodales locales

$u'_{el}=[u'_{1x}\ \ u'_{1y}\ \ u'_{2x}\ \ u'_{2y}]^T=[1.0\ \ 0.0\ \ 1.0\ \ 1.0\ ]^T$

Ejercicio - Matriz de interpolacion

Determine la matriz de interpolacion N en xi=0

(Nota: recuerda que la matriz de interpolacion convierte desplazamientos nodales locales directamente a vector de desplacamiento)

$$\mathbf{u}'_{el} = \mathbf{T}_u \mathbf{u}_{el} \qquad \mathbf{u}' = \mathbf{N}\mathbf{T}_u \mathbf{u}_{el}$$

Sesion 2

Derivadas locales de funciones de interpolacion

$$\frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial N_2(\xi)}{\partial \xi} = \frac{1}{2}$$

En mathcad:

$$N_\xi(\xi) := \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T$$

Ecuacion de movimiento (a nivel de elemento)

$$\mathbf{M}_{el}\ddot{\mathbf{u}}_{el} + \mathbf{C}_{el}\dot{\mathbf{u}}_{el} + \mathbf{K}_{el}\mathbf{u}_{el} = \mathbf{F}^{el}_{ext}$$

Matriz de amortiguacion C es usualmente un artificio numerico (no fisico)

Matriz de masa: $$\mathbf{M}_{el} = \mathbf{T}_u^{\mathrm{T}} \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \mathbf{N} d\Omega \mathbf{T}_u$$

Matriz de rigidez: $$\mathbf{K}_{el} = \mathbf{T}_u^{\mathrm{T}} \int_{\Omega} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} E \mathbf{B} d\Omega \mathbf{T}_u$$

Vector de fuerzas: $$\mathbf{F}^{el}_{ext} = \mathbf{T}_u^{\mathrm{T}} \int_{\Omega} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \mathbf{T}_b \mathbf{b} d\Omega + \mathbf{T}_u^{\mathrm{T}} \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \mathbf{t}' d\Gamma + \mathbf{T}_u^{\mathrm{T}} \mathbf{F}'_p$$

Equilibrio lineal cuasi-estatico (a nivel de elemento)

PTV:

$$\mathbf{F}_{int}^{el} = \mathbf{F}_{ext}^{el}$$

$$\mathbf{F}_{int}^{el} = \underbrace{\mathbf{T}_u^{\mathrm{T}} \int_{\Omega} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \sigma_{x'x'} d\Omega}_{\mathbf{K}_{el}\mathbf{u}_{el}}$$

Matriz de deformacion-desplazamiento: $\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial N_1}{\partial x'} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x'} & 0 \end{array} \right]$

Nota: deformaciones infinitesimales? (=>no-lineal)

Relacion constitutiva (esfuerzo-deformacion): $\sigma_{x'x'} = E\mathbf{B}\mathbf{T}_u\mathbf{u}_{el}$

Nota: Esfuerzos inadmisibles? (=>no-lineal) $\varepsilon_{x'x'} = \mathbf{B}\mathbf{T}_u\mathbf{u}_{el}$

Sesion 3

Derivadas cartesianas (regla de la cadena):

$$\left\{ \begin{array}{cc} \dfrac{\partial N_1(\xi)}{\partial x'} & \dfrac{\partial N_2(\xi)}{\partial x'} \end{array} \right\} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \left\{ \begin{array}{cc} \dfrac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi} & \dfrac{\partial N_2(\xi)}{\partial \xi} \end{array} \right\}$$

Jacobiano (gradiente del vector posicion):

$$\mathbf{J} = \frac{\partial x'}{\partial \xi} = \left\{ \begin{array}{cc} \dfrac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi} & \dfrac{\partial N_2(\xi)}{\partial \xi} \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} x'_1 \\ x'_2 \end{array} \right\}$$

X'_1 = -L/2 & X'_2 = +L/2 ; L = Longitud del elemento

Transformacion de grados de libertad:

DOF globales → DOF local

$$\mathbf{u}'_{el} = \mathbf{T}_u \mathbf{u}_{el}$$

Matriz de transformacion

$$\mathbf{T}_u = \begin{bmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) & 0 & 0 \\ -sin(\theta) & cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos(\theta) & sin(\theta) \\ 0 & 0 & -sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Integracion Gausiana en la matriz de rigidez:

Volumen = f(Area de la seccion) → dV = A dx'

$$\int_{\Gamma} f(x')dx' = \int_{-1}^{1} f\big(x'(\xi)\big)\det(\mathbf{J})d\xi = \sum_{i_p=1}^{n_p} f\big(x'(\xi_{i_p})\big)\cdot\det(\mathbf{J})\cdot w_{i_p}$$

Integracion exacta si funcion es aproximable con un polinomio de orden ($2n_p$-1)

Point-rule	Positions	Weighting
1	0.0	2.0
2	$[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$	$[1.0, 1.0]$
3	$[-\sqrt{3/5}, 0.0, \sqrt{3/5}]$	$[5/9, 8/9, 5/9]$

Sesion 3

Integracion Gaussiana (mathcad):

Coeficientes y posicion local

$$\xi := \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}^{T}$$

$$w := \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^{T}$$

Longitud de un elemento lineal (mathcad):

$$LBARPN(x_a, x_b) := \left\| \begin{array}{l} dx \leftarrow x_b - x_a \\ Lsqr \leftarrow dx^{T} \cdot dx \\ L \leftarrow \sqrt[2]{Lsqr} \end{array} \right.$$

Sesion 3

Jacobiano (mathcad):

$$
J\left(\xi, x_{coord}\right) := \left\|
\begin{array}{l}
x_a \leftarrow \begin{bmatrix} x_{coord_1} & x_{coord_2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\
x_b \leftarrow \begin{bmatrix} x_{coord_3} & x_{coord_4} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\
L \leftarrow LBARPN\left(x_a, x_b\right) \\
\chi \leftarrow \begin{bmatrix} \dfrac{-L}{2} & \dfrac{L}{2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\
N_{der} \leftarrow N_{\xi}\left(\xi\right) \\
{N_{der}}^{\mathrm{T}} \cdot \chi
\end{array}
\right.
$$

Derivadas Cartesianas de funciones de interpolacion (mathcad):

$$N_{dxdy}(\xi, x_{coord}) := \left[J(\xi, x_{coord})\right]^{-1} \cdot N_{\xi}(\xi)^{T}$$

Matriz de deformacion-desplazamiento (mathcad):

$$B_{mat}(\xi, x_{coord}) := \left\| \begin{array}{l} N_{cart} \leftarrow N_{dxdy}(\xi, x_{coord})^{T} \\ \begin{bmatrix} N_{cart_1} & 0 & N_{cart_2} & 0 \\ \end{bmatrix} \end{array} \right|$$

Sesion 3

Matriz de rigidez local (mathcad):

$$
\begin{aligned}
K_{L2D}(E, A, x_{coord}, n_p, ndof, nnode) := \; & K \leftarrow 0 \cdot \mathrm{identity}(ndof \cdot nnode) \\
& \text{if } n_p = 2 \\
& \quad \text{for } i_p \in 1 .. n_p \\
& \quad \quad detJ_{ip} \leftarrow detJ\left(\xi_{i_p}, x_{coord}\right) \\
& \quad \quad B \leftarrow B_{mat}\left(\xi_{i_p}, x_{coord}\right) \\
& \quad \quad dV \leftarrow A \cdot detJ_{ip} \cdot w_{i_p} \\
& \quad \quad dK \leftarrow B^{T} \cdot E \cdot B \cdot dV \\
& \quad \quad K \leftarrow K + dK \\
& K
\end{aligned}
$$

Sesion 3

Matriz de transformacion (mathcad):

$$
T_{2D}\left(x_{coord}\right) := \left\|\begin{array}{l}
x_a \leftarrow \begin{bmatrix} x_{coord_1} & x_{coord_2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\
x_b \leftarrow \begin{bmatrix} x_{coord_3} & x_{coord_4} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\
\begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix} \leftarrow \left(x_b - x_a\right)^{\mathrm{T}} \\
L \leftarrow LBARPN\left(x_a, x_b\right) \\
c \leftarrow \dfrac{dx}{L} \\
s \leftarrow \dfrac{dy}{L} \\
\begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}
\end{array}\right.
$$

Sesion 3

Matriz de rigidez (mathcad):

$$K_{2D}\left(E, A, x_{coord}, n_p, ndof, nnode\right) := \left\| \begin{array}{l} K_L \leftarrow K_{L2D}\left(E, A, x_{coord}, n_p, ndof, nnode\right) \\ T_u \leftarrow T_{2D}\left(x_{coord}\right) \\ K_{el} \leftarrow {T_u}^{\mathrm{T}} \cdot K_L \cdot T_u \end{array} \right.$$

Ensamblaje de matriz y vector global:

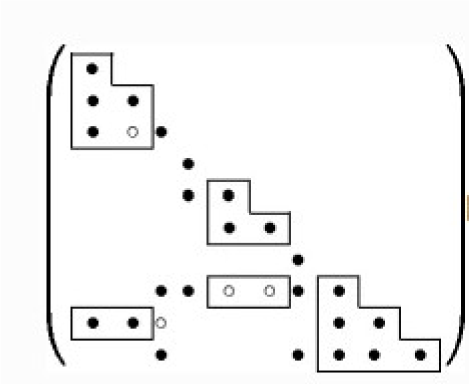
$$\underbrace{\left(\bigcup_{ielem=1}^{nelem} \mathbf{K}_{el}\right)}_{\mathbf{K}_g} \mathbf{u}_g = \underbrace{\bigcup_{ielem=1}^{nelem} \mathbf{F}_{ext}^{el}}_{\mathbf{F}_{ext}}$$

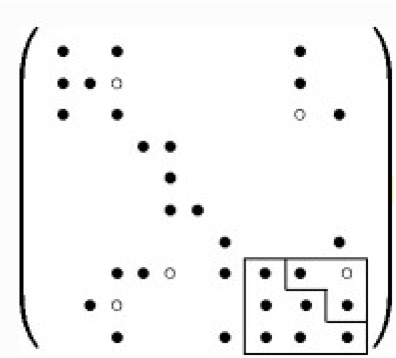
La topologia del elemento nos indica la correspondencia:

#nodo local → #nodo global

Lnodes = [inodg$_{ielem}$ jnodeg$_{ielem}$] ([nodo global #1, nodo global #2] en elemento ielem)

Tipos de matrices globales:

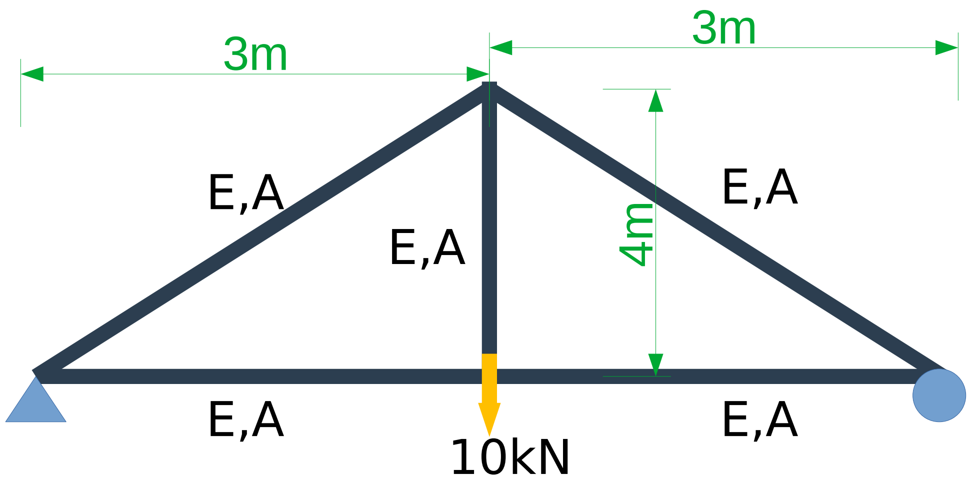


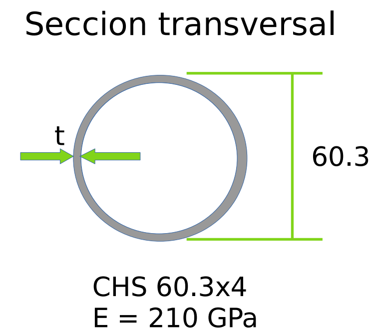


Schenk, O., Gärtner, K. (2011). PARDISO. In: Padua, D. (eds) Encyclopedia of Parallel Computing. Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09766-4_90

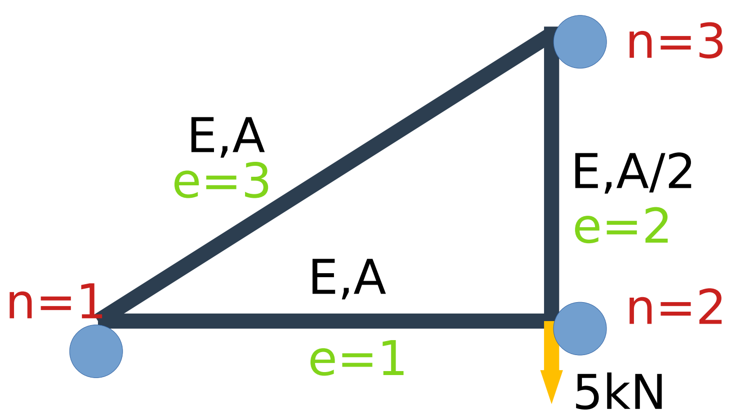
Nota: Nodos numerados muy distantes en un mismo elemento genera una matriz dispersa → Eliminacion Gaussiana en algoritmo secuencial es ineficiente !

Ejemplo de armadura:





Nota: Se puede reducir el sistema por simetria (sistema equivalente en fuerzas)



Sesion 4

Ensamblaje practico de matriz de rigidez (mathcad):

$nelem := 3 \qquad ndof := 2 \qquad nnode := 2 \qquad npoin := 3$

$$coordg := \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 3.0 & 0.0 \\ 3.0 & 4.0 \end{bmatrix} \qquad lnodes := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{steel} = 2 \cdot 10^{11} \qquad A_{CHS60.3x4} = 7.075 \cdot 10^{-4}$$

$$Eelem := E_{steel} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad Aelem := A_{CHS60.3x4} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

nelem = numero de elementos ; coordg = coordenadas globales de nodos

ndof = numero de grados de libertad por nodo ; lnodes = topologia de elementos

nnode = numero de nodos por elemento ; Eelem = Modulo de Young por elemento

npoin = numero total de nodos en la estructura ; Aelem = Area transversal por elemento

Sesion 4

Extraer coordenadas de elemento (mathcad):

$$
\begin{aligned}
coord_{extr}(coord, lnodes, ielem, ndof, nnode) := \; & \text{for } inode \in 1 \,..\, nnode \\
& \quad ipoin \leftarrow lnodes_{ielem,\, inode} \\
& \quad \text{for } idof \in 1 \,..\, ndof \\
& \quad \quad xcoord_{(inode-1)\cdot ndof + idof} \leftarrow coord_{ipoin,\, idof} \\
& xcoord
\end{aligned}
$$

Sesion 4

Ensamblaje de matriz global de rigidez (mathcad):

```
K_2D_g(nelem, npoin, nnode, ndof, lnodes, coordg, Eelem, Aelem) :=
    K2D_g ← 0·identity(npoin·ndof)
    for ielem ∈ 1..nelem
        coordi ← coord_extr(coordg, lnodes, ielem, ndof, nnode)
        Ei ← Eelem_ielem
        Ai ← Aelem_ielem
        n_p ← 2
        K2D ← K_2D(Ei, Ai, coordi, n_p, ndof, nnode)
        for inode ∈ 1..nnode
            for idof ∈ 1..ndof
                for jnode ∈ 1..nnode
                    for jdof ∈ 1..ndof
                        i ← (inode − 1)·ndof + idof
                        j ← (jnode − 1)·ndof + jdof
                        ig ← (lnodes_ielem,inode − 1)·ndof + idof
                        jg ← (lnodes_ielem,jnode − 1)·ndof + jdof
                        K2D_g_ig,jg ← K2D_g_ig,jg + K2D_i,j
    K2D_g
```

Condiciones de borde mixtas:

$$\underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \text{1-st} & \text{2-nd} & \cdots & r\text{-th} & \cdots & \cdots & n\text{-th} \end{array} \\ \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_{rr} & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & \ddots & & \\ & & & 0 & & \ddots & \\ \text{symm} & & & 0 & & & K_{nn} \end{bmatrix} \end{array}}_{\mathbf{K}_g^{mod}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}_g} = \underbrace{\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_r \\ \vdots \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix}}_{\mathbf{F}_{ext}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} -\sum^{n_{pu}} K_{1r} \cdot u_r \\ -\sum^{n_{pu}} K_{2r} \cdot u_r \\ \vdots \\ -F_r + K_{rr} \cdot u_r \\ \vdots \\ \vdots \\ -\sum^{n_{pu}} K_{nr} \cdot u_r \end{Bmatrix}}_{\mathbf{F}_{ext}^{add}}$$

u_r= desplazamiento impuesto

Nota: artificio matematico para asegurar que la matriz se pueda invertir det(K)>0

Condiciones de borde mixtas:

$$ntpfix := 3 \qquad poinfx := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad ufx := \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0 \\ 0.0 & 0 \end{bmatrix}$$

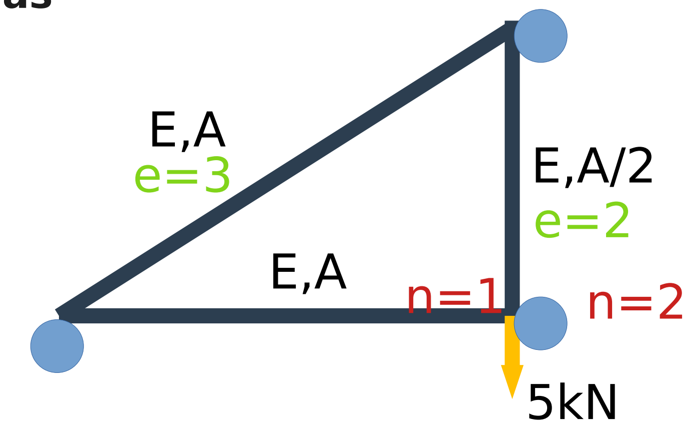
$$Fext := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -5000 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{T}$$

ntpfix = numero total de nodos fijos (global)

Poinfx = nodos (globales) y sus grados de libertad impuestos (1= impuesto, 0=libre)

ufx = desplazamientos impuestos (incl. valores nulos para completar matriz)

Fext = vector de fuerzas externas



Condiciones de borde mixtas (mathcad):

```
Kg_F_2D_mod(nelem, npoin, nnode, ndof, lnodes, coordg, Eelem, Aelem, ntpfix, poinfx, ufx, Fext) :=
    Kg ← K_2D_g(nelem, npoin, nnode, ndof, lnodes, coordg, Eelem, Aelem)
    Kgmod ← Kg
    Fgmod ← Fext
    for ipfix ∈ 1..ntpfix
        for idof ∈ 1..ndof
            if poinfx[ipfix, idof+1] = 1
                ig ← (poinfx[ipfix, 1] − 1) · ndof + idof
                for iv ∈ 1..npoin · ndof
                    if ig ≠ iv
                        Kgmod[ig, iv] ← 0
                        Kgmod[iv, ig] ← 0
                        Fgmod[iv] ← Fgmod[iv] − Kg[iv, ig] · ufx[ipfix, idof]
    for ipfix ∈ 1..ntpfix
        for idof ∈ 1..ndof
            if poinfx[ipfix, idof+1] = 1
                ig ← (poinfx[ipfix, 1] − 1) · ndof + idof
                Fgmod[ig] ← Kg[ig, ig] · ufx[ipfix, idof]
    [Kgmod  Fgmod]^T
```

$$ug := Kgmod^{-1} \cdot Fgmod$$

Calculo de reacciones:

$$\mathbf{F}_{reac} = \mathbf{K}_g \cdot \mathbf{u}_g - \mathbf{F}_{ext}$$

Nota: solo filas correspondientes a desplazamientos impuestos son de importancia

Reacciones (Mathcad):

$$Freac := Kg \cdot ug - Fext$$

Nota: Esta forma puede ser refinada para evitar errores de truncamiento en filas sin desplazamientos impuestos. Para caso practico de este curso, esto es suficiente.

Verificacion de analisis:

1. Las reacciones siempre deben estar en balance con fuerzas externas

2. Verificar que la deformacion de la estructura sea consistente con las direcciones de carga. No siempre es muy intuititvo.

3. Verificar que el orden de magnitud de los desplazamientos sea dentro de lo esperado

4. Verificar que la malla es la adecuada. Este paso no es usualmente necesario en estructuras mas complejas.

Post-procesamiento (mathcad):

Extraer desplazamientos (Cartesianos) nodales por elemento

$$uext(ielem, nnode, ndof, lnodes, ug) := \left\| \begin{array}{l} \text{for } inode \in 1..nnode \\ \quad \left\| \begin{array}{l} \text{for } idof \in 1..ndof \\ \quad \left\| \begin{array}{l} ig \leftarrow \left(lnodes_{ielem, inode} - 1\right) \cdot ndof + idof \\ i \leftarrow (inode - 1) \cdot ndof + idof \\ uelem_i \leftarrow ug_{ig} \end{array} \right. \end{array} \right. \\ uelem \end{array} \right.$$

Deformaciones por elemento en puntos de integracion (puntos de Gauss)

$$snelem(ielem, lnodes, ndof, nnode, coordg, ug) := \left\| \begin{array}{l} n_p \leftarrow 2 \\ \text{for } i_p \in 1..n_p \\ \quad \left\| \begin{array}{l} coordi \leftarrow coord_{extr}(coordg, lnodes, ielem, ndof, nnode) \\ T_u \leftarrow T_{2D}(coordi) \\ B \leftarrow B_{mat}\left(\xi_{i_p}, coordi\right) \\ uelem \leftarrow uext(ielem, nnode, ndof, lnodes, ug) \\ sn_{i_p} \leftarrow B \cdot T_u \cdot uelem \end{array} \right. \\ sn \end{array} \right.$$

Post-procesamiento (mathcad):

Extraer desplazamientos (Cartesianos) nodales por elemento

$$uext(ielem, nnode, ndof, lnodes, ug) := \left| \begin{array}{l} \text{for } inode \in 1..nnode \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{for } idof \in 1..ndof \\ \quad \left| \begin{array}{l} ig \leftarrow \left(lnodes_{ielem, inode} - 1\right) \cdot ndof + idof \\ i \leftarrow (inode - 1) \cdot ndof + idof \\ uelem_i \leftarrow ug_{ig} \end{array} \right. \end{array} \right. \\ uelem \end{array} \right.$$

Deformaciones por elemento en puntos de integracion (puntos de Gauss)

$$snelem(ielem, lnodes, ndof, nnode, coordg, ug) := \left| \begin{array}{l} n_p \leftarrow 2 \\ \text{for } i_p \in 1..n_p \\ \quad \left| \begin{array}{l} coordi \leftarrow coord_{extr}(coordg, lnodes, ielem, ndof, nnode) \\ T_u \leftarrow T_{2D}(coordi) \\ B \leftarrow B_{mat}\left(\xi_{i_p}, coordi\right) \\ uelem \leftarrow uext(ielem, nnode, ndof, lnodes, ug) \\ sn_{i_p} \leftarrow B \cdot T_u \cdot uelem \end{array} \right. \\ sn \end{array} \right.$$

Post-procesamiento (mathcad):

Esfuerzos por elemento en puntos de integracion (puntos de Gauss)

$$selem(ielem, lnodes, ndof, nnode, coordg, ug, Eelem) := \left\| \begin{array}{l} E \leftarrow Eelem_{ielem} \\ sn \leftarrow snelem(ielem, lnodes, ndof, nnode, coordg, ug) \\ s \leftarrow E \cdot sn \\ s \end{array} \right.$$

Fuerzas axiales por elemento en puntos de integracion (+=tension, -=compresion)

$$fxelem(ielem, lnodes, ndof, nnode, coordg, ug, Eelem, Aelem) := \left\| \begin{array}{l} A \leftarrow Aelem_{ielem} \\ s \leftarrow selem(ielem, lnodes, ndof, nnode, coordg, ug, Eelem) \\ faxial \leftarrow A \cdot s \\ faxial \end{array} \right.$$

Dinamica estructural (vibraciones libres):

Tiempo:

$$\mathbf{M}_{el}\ddot{\mathbf{u}}_{el} + \mathbf{C}_{el}\dot{\mathbf{u}}_{el} + \mathbf{K}_{el}\mathbf{u}_{el} = \cancel{\mathbf{F}^{el}_{ext}}$$

$$\mathbf{u}_g = \tilde{\mathbf{u}}_g \cdot e^{i\omega t}$$

Frecuencia:

$$\Big(-\omega^2\mathbf{M}_g + i\omega\mathbf{C}_g + \mathbf{K}_g \Big)\tilde{\mathbf{u}}_g \cdot e^{i\omega t} = \mathbf{0}$$

Sin disipacion

$$\Big(-\omega^2\mathbf{M}_g + \mathbf{K}_g \Big)\tilde{\mathbf{u}}_g \cdot e^{i\omega t} = \mathbf{0}$$

Frecuencias propias y modos de vibracion

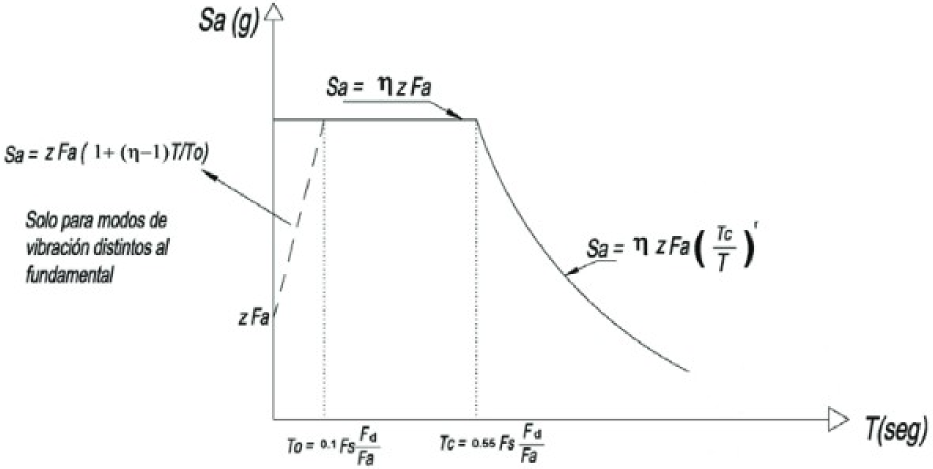
$T_i = 2\pi/\omega_i$ i=1,2,... numero de grados de libertad

Frecuencias propias y modos de vibracion (deformacion relativa)

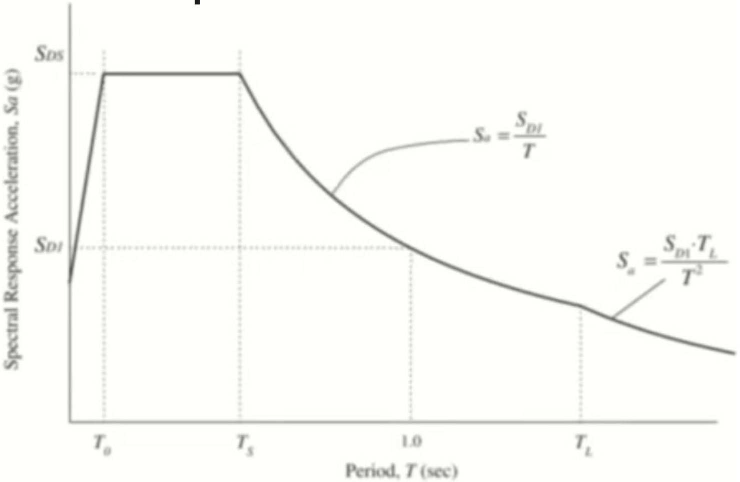
$T_n = 2\pi / \omega_n$ → $$\left(-\omega^2 \mathbf{M}_g + \mathbf{K}_g\right)\tilde{\mathbf{u}}_g \cdot e^{i\omega t} = \mathbf{0}$$ → $$\det\left(\mathbf{M}_g^{-1}\mathbf{K}_g - \omega^2 \mathbf{I}\right) = 0$$

Nota: Menor frecuencia caracteristica corresponde al periodo fundamental T_n

Aceleracion espectral → Cortante basal → distribucion de cortante basal en pisos como fuerza lateral

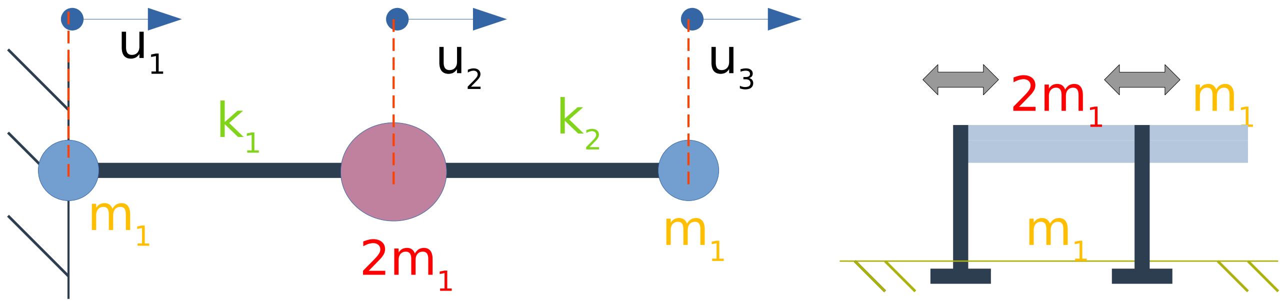


NEC



ASCE 7-16 ($T_n \approx 0.1N$ [s])

Frecuencias propias y modos de vibracion



$k_1 = E_1A_1/L_1$; $k_2 = E_2A_2/L_2$

$c_1 = c_2 = 0$

$f_1 = f_2 = f_3 = 0$

Determinar las frecuencias propias y modos de vibracion para una constante de rigidez unitaria $k_1 = k_2 = 1$ y masa unitaria $m_1 = 1$

Nota: Eliminar filas y columnas de ceros debido a condiciones de borde para reducir sistema de equaciones. Deformaciones son relativas → esfuerzos y reacciones no son absolutas!