

Metodo de Elementos Finitos para analisis estructural

Instructor: Carlos X. Azua Gonzalez, PhD

Contenidos del curso

6 sesiones FEM estatico + 1 sesion FEM dinamico:

8 horas (3s)(8-9 Feb, 18:00-22:00) + 4 horas (1s + prueba)(16 Feb,18:00-22:00)

8 horas (3 s) (14-15 Feb, 18:00-22:00)

Total horas (contacto): 8h x2 + 4h x1 = 20 horas

1 prueba final:

Calculos en mathcad y parte teoria (sesion del 16 Feb,18:00-22:00)

1 prueba inicial de conocimiento:

Estatica basica + Mecanica de Materiales + Algebra lineal

Contenido de sesiones

#1 Introduccion:

- Reseña de metodos modernos de analisis de estructuras.
- Introduccion al uso de mathcad.

#2 Ecuaciones matriciales de equilibrio I:

- Derivacion de ecuaciones de equilibrio en el Continuo y forma debil.
- Introduccion a interpolacion en elementos finitos.

#3 Ecuaciones matriciales de equilibrio II:

- La matriz de rigidez en elementos de armadura (2D).
- EL Jacobiano y la cuadratura de Gauss.
- Evaluacion numerica de la matriz de rigidez.

Contenido de sesiones

#4 Ensamblaje de elementos finitos:

- Topologia de elementos, conectividad, y esparsidad global.
- Aplicacion al ensamblaje matricial en armaduras.

#5 Condiciones de borde I:

- Modificar matriz de rigidez y vector de carga para condiciones de borde mixtas.
- Computo de deformaciones para condiciones de borde mixtas.

#6 Condiciones de borde II:

- Computo de reacciones y verificacion.
- Pos-procesamiento basico

Contenido de sesiones

#7 Dinamica estructural:

- **Introduccion al analisis de problemas de vibracion libre.**
- **Frecuencias propias en sistemas estructurales con masas discretas.**

Prueba de conocimientos

Prueba de 20 min - en linea

Sesion 1

Inicios de los metodos de elementos finitos:

Hrennikof, A. (1941). Solution of Problems of Elasticity by the Framework Method, J. Appl. Mech. Dec 1941, 8(4): A169-A175 (7 pages)
<https://doi.org/10.1115/1.4009129>

Condicion Estatica:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + Y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Balance Momento:

Compatibilidad:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

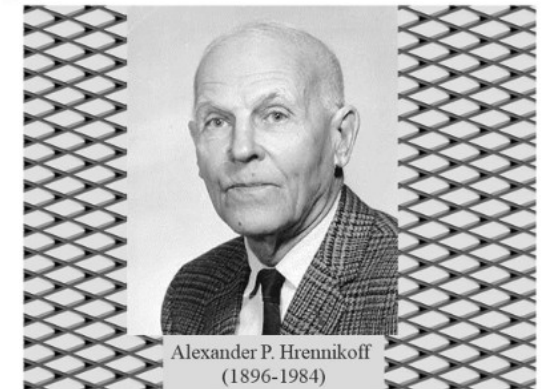
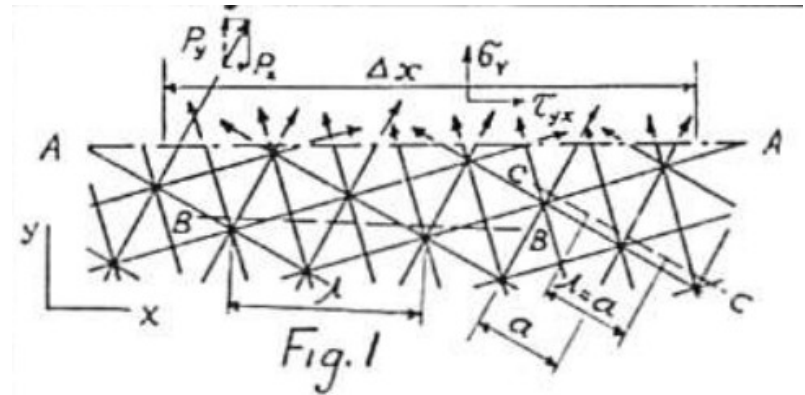
Relacion cinematica:

Material elastico:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y)$$

Relacion constitutiva:

+Condiciones de borde/+Condiciones borde e iniciales



Negro = Metodo de subdivisiones

Azul = Elementos finitos modernos

Liu, WK, Li, S., Park, H. (2022). Eighty Years of the Finite Element Method: Birth, Evolution, and Future. Archives of Computational Methods in Engineering, 29:4431-4453
<https://doi.org/10.1007/s11831-022-09740-9>

Sesion 1

Inicios de los metodos de elementos finitos:

Diferencias Finitas

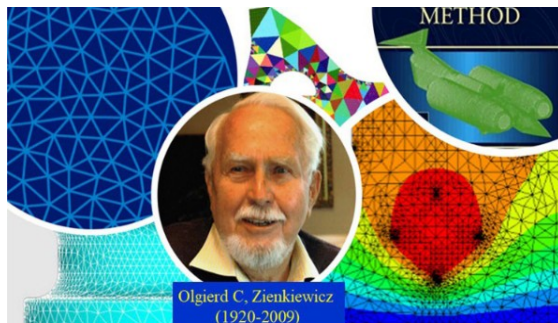
Resuelve PDE fisica

Variables en celda

Geometrias simples

Calculo directo de gradientes

Errores dependen de la malla



Elementos Finitos

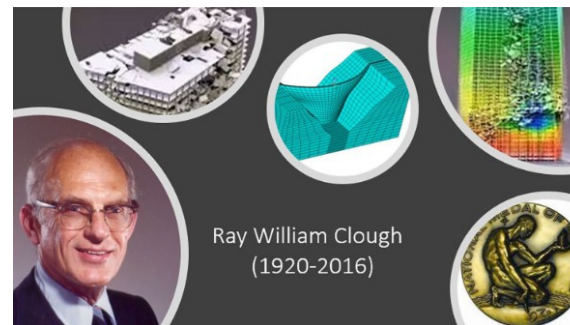
Resuelve PDE fisica

Variables unicas en nodos entre elementos

Metodo se adapta a geometrias complejas

Gradientes dependen del grado interpolacion

Errores dependen de la malla e interpolacion



UK → Fundador UKACM

Liu, WK, Li, S., Park, H. (2022). Eighty Years of the Finite Element Method: Birth, Evolution, and Future. Archives of Computational Methods in Engineering, 29:4431-4453 <https://doi.org/10.1007/s11831-022-09740-9>

US → Metodo Matriz Rigidez (54') / Elementos Finitos (60')

Clough RW (1960) The finite element method in plane stress analysis. In: Proceedings of 2nd ASCE conference on electronic computation. Pittsburgh PA, 8-9 Sept

Sesion 1

Demostracion practica de Mathcad:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

```
MSYMCK(n,m,Ma) := || check ← 1
|| for j ∈ 1..m
|| || if check = 0
|| || || break
|| || for i ∈ 1..n
|| || || if Mai,j ≠ Maj,i
|| || || || check ← 0
|| || || || break
|| || ||
|| || check
```

Sesion 1

Demostracion practica de Mathcad:

$$a_d := \det(A)$$

$$a_d = 1$$

$$d_d := \det(\text{diag}([1 \ 0 \ 1]^T))$$

$$d_d = 0$$

$$D_i := A^{-1}$$

$$D_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_i := \text{diag}([1 \ 0 \ 1]^T)$$

$$E_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_i := I_{3 \times 3}^{-1}$$

$$F_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_e := \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{eigenvals}(\sigma_e) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{eigenvecs}(\sigma_e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sesion 1

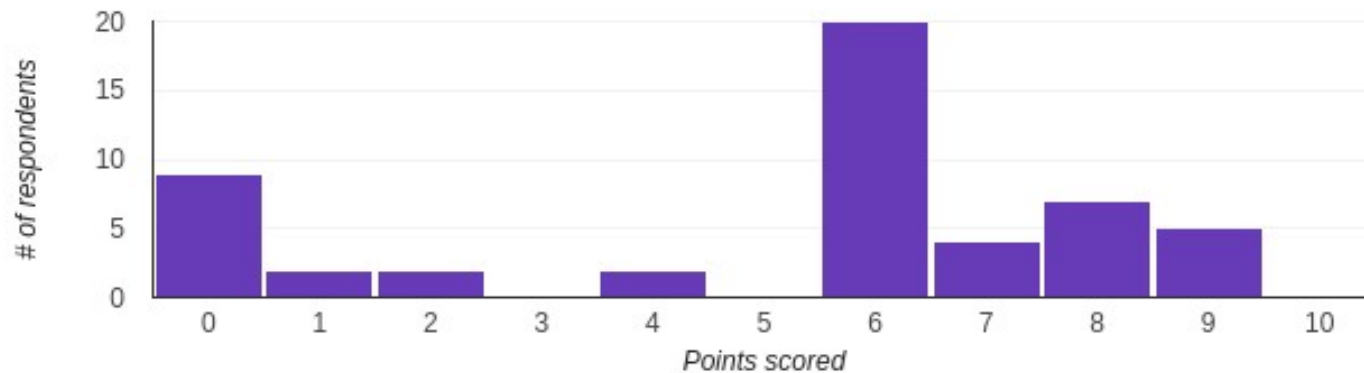
Resultados de la prueba:

Average
5.16 / 10 points

Median
6 / 10 points

Range
0 - 9 points

Total points distribution



Sesion 1 - recap. (grados libertad)

$$[0 \ 0 \ 1]^T \times r = |r| [-\sin(\theta) \ \cos(\theta) \ 0]^T; r = |r| [\cos(\theta) \ \sin(\theta) \ 0]^T$$

$$|r| = \sqrt{r \cdot r}; \quad \sin(\theta)/\cos(\theta) = r_y/r_x$$

=>

$$x_u' = |1| [\cos(\theta) \ \sin(\theta) \ 0]^T$$

$$y_u' = [0 \ 0 \ 1]^T \times x_u' = |1| [-\sin(\theta) \ \cos(\theta) \ 0]^T; \quad z_u' = z_u = [0 \ 0 \ 1]^T$$

$$u_{el}' = T_u u_{el}$$

$$[u_x \ u_y \ 0]^T \rightarrow [u_{x'} \ u_{y'} \ 0]^T$$

$$[u_x \ u_y \ 0]^T = (x_u' \cdot u) i' + (y_u' \cdot u) j' + (z_u' \cdot u) k' = (x_u'^T \cdot u) i' + (y_u'^T \cdot u) j' + (z_u'^T \cdot u) k'$$

$$[u_x \ u_y \ 0]^T = (\cos(\theta)u_x + \sin(\theta)u_y + 0 \cdot 0) i' + (-\sin(\theta)u_x + \cos(\theta)u_y + 0 \cdot 0) j' \\ + (0 \cdot u_x + 0 \cdot u_y + 1 \cdot 0) k'$$

$$\begin{bmatrix} u_{x'} \\ u_{y'} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)u_x + \sin(\theta)u_y + 0 \cdot 0 \\ -\sin(\theta)u_x + \cos(\theta)u_y + 0 \cdot 0 \\ (0)u_x + (0)u_y + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sesion 1 - recapituacion

$$\mathbf{u}'_{el} = \mathbf{T}_u \mathbf{u}_{el}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{x'} \\ \mathbf{u}_{y'} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)\mathbf{u}_x + \sin(\theta)\mathbf{u}_y + 0 \cdot 0 \\ -\sin(\theta)\mathbf{u}_x + \cos(\theta)\mathbf{u}_y + 0 \cdot 0 \\ (0)\mathbf{u}_x + (0)\mathbf{u}_y + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{u}]'_1 \\ [\mathbf{u}]'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{T}]_b & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{T}]_b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\mathbf{u}]_1 \\ [\mathbf{u}]_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_u = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{u}]'_1 = [\mathbf{u}_{1x'} \quad \mathbf{u}_{1y'}]^T ; [\mathbf{u}]'_2 = [\mathbf{u}_{2x'} \quad \mathbf{u}_{2y'}]^T$$

$$\mathbf{T}_b = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Sesion 2

Balance de momento en solidos continuos:

$$\text{Div}[\sigma] + b = \rho \ddot{u}$$

- Segunda ley de Newton aplicada en un volumen diferencial
- Conservacion de momento en unidades : Fuerza / volumen
- Tensor de esfuerzo es simetrico (momento angular)

$$s_{xy} = s_{yx} \quad s_{yz} = s_{zy} \quad s_{xz} = s_{zx}$$

Sesion 2

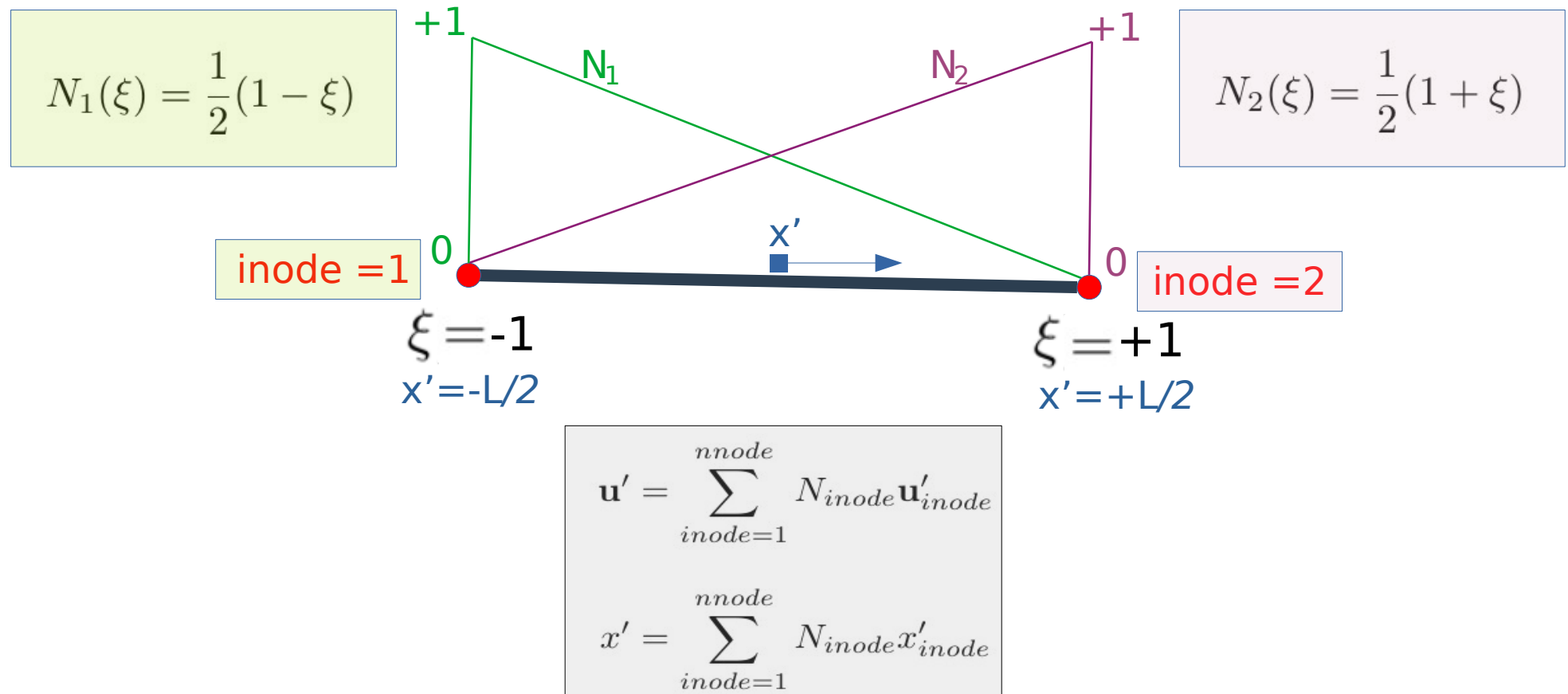
Forma debil de balance de momento:

$$\underbrace{\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \cdot (\rho \ddot{\mathbf{u}}) d\Omega}_1 + \underbrace{\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega}_2 = \underbrace{\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{b} d\Omega}_3 + \underbrace{\int_{\Gamma_{\sigma}} \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{t} d\Gamma}_4$$

- **1: Energia debido a efectos de inercia (analisis dinamico)**
- **2: Energia interna debido a deformacion del solido**
- **3: Energia debido a la atraccion de masas (e.j. gravedad)**
- **4: Energia debido a tracciones en las superficies del solido**

Sesion 2

Interpolacion en FEM



Sesion 2

Funciones de interpolacion (mathcad)

$$N_{vec}(\xi) := \left[\frac{1}{2} \cdot (1 - \xi) \quad \frac{1}{2} \cdot (1 + \xi) \right]^T$$

Matriz de interpolacion (mathcad)

$$N(\xi) := \left\| \begin{array}{c} [N_1 \ N_2] \leftarrow N_{vec}(\xi)^T \\ [N_1 \ 0 \ N_2 \ 0] \\ [0 \ N_1 \ 0 \ N_2] \end{array} \right\|$$

Sesion 2

Ejercicio - Funciones de interpolacion

Determine el vector de desplazamiento local en $\xi = -1$, $\xi = 0$, $\xi = +1$

Para los siguientes desplazamientos nodales locales

$$\mathbf{u}'_{el} = [u'_{1x} \ u'_{1y} \ u'_{2x} \ u'_{2y}]^T = [1.0 \ 0.0 \ 1.0 \ 1.0]^T$$

Ejercicio - Matriz de interpolacion

Determine la matriz de interpolacion \mathbf{N} en $\xi = 0$

(Nota: recuerda que la matriz de interpolacion convierte desplazamientos nodales locales directamente a vector de desplazamiento)

$$\mathbf{u}'_{el} = \mathbf{T}_u \mathbf{u}_{el}$$

$$\mathbf{u}' = \mathbf{N} \mathbf{T}_u \mathbf{u}_{el}$$

Sesion 2

Derivadas locales de funciones de interpolacion

$$\frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial N_2(\xi)}{\partial \xi} = \frac{1}{2}$$

En mathcad:

$$N_{\xi}(\xi) := \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^T$$

Sesion 3

Ecuacion de movimiento (a nivel de elemento)

$$\mathbf{M}_{el}\ddot{\mathbf{u}}_{el} + \mathbf{C}_{el}\dot{\mathbf{u}}_{el} + \mathbf{K}_{el}\mathbf{u}_{el} = \mathbf{F}_{ext}^{el}$$

Matriz de amortiguacion \mathbf{C} es usualmente un artificio numerico (no fisico)

Matriz de masa: $\mathbf{M}_{el} = \mathbf{T}_u^T \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \mathbf{T}_u$

Matriz de rigidez: $\mathbf{K}_{el} = \mathbf{T}_u^T \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} d\Omega \mathbf{T}_u$

Vector de fuerzas: $\mathbf{F}_{ext}^{el} = \mathbf{T}_u^T \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{T}_b \mathbf{b} d\Omega + \mathbf{T}_u^T \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{N}^T \mathbf{t}' d\Gamma + \mathbf{T}_u^T \mathbf{F}'_p$

Sesion 3

Equilibrio lineal cuasi-estatico (a nivel de elemento)

PTV:

$$\mathbf{F}_{int}^{el} = \mathbf{F}_{ext}^{el}$$

$$\mathbf{F}_{int}^{el} = \underbrace{\mathbf{T}_u^T \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \sigma_{x'x'} d\Omega}_{\mathbf{K}_{el} \mathbf{u}_{el}}$$

Matriz de deformacion-desplazamiento: $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x'} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x'} & 0 \end{bmatrix}$

Nota: deformaciones infinitesimales? (=>no-lineal)

Relacion constitutiva (esfuerzo-deformacion): $\sigma_{x'x'} = E \mathbf{B} \mathbf{T}_u \mathbf{u}_{el}$

Nota: Esfuerzos inadmisibles? (=>no-lineal)

$$\varepsilon_{x'x'} = \mathbf{B} \mathbf{T}_u \mathbf{u}_{el}$$

Sesion 3

Derivadas cartesianas (regla de la cadena):

$$\left\{ \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial x'} \quad \frac{\partial N_2(\xi)}{\partial x'} \right\} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \left\{ \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi} \quad \frac{\partial N_2(\xi)}{\partial \xi} \right\}$$

Jacobiano (gradiente del vector posicion):

$$\mathbf{J} = \frac{\partial x'}{\partial \xi} = \left\{ \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi} \quad \frac{\partial N_2(\xi)}{\partial \xi} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{X}'_1 = -L/2 \quad \& \quad \mathbf{X}'_2 = +L/2 \quad ; \quad L = \text{Longitud del elemento}$$

Sesion 3

Transformacion de grados de libertad:

DOF globales \rightarrow DOF local

$$\mathbf{u}'_{el} = \mathbf{T}_u \mathbf{u}_{el}$$

Matriz de transformacion

$$\mathbf{T}_u = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Sesion 3

Integracion Gausiana en la matriz de rigidez:

Volumen = f(Area de la seccion) $\rightarrow dV = A dx'$

$$\int_{\Gamma} f(x') dx' = \int_{-1}^1 f(x'(\xi)) \det(\mathbf{J}) d\xi = \sum_{i_p=1}^{n_p} f(x'(\xi_{i_p})) \cdot \det(\mathbf{J}) \cdot w_{i_p}$$

Integracion exacta si funcion es aproximable con un polinomio de orden $(2n_p-1)$

Point-rule	Positions	Weighting
1	0.0	2.0
2	$[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$	$[1.0, 1.0]$
3	$[-\sqrt{3/5}, 0.0, \sqrt{3/5}]$	$[5/9, 8/9, 5/9]$

Sesion 3

Integracion Gaussiana (mathcad):

Coefficientes y posicion local

$$\xi := \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}^T$$

$$w := \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

Longitud de un elemento lineal (mathcad):

$$LBARPN(x_a, x_b) := \left\| \begin{array}{l} dx \leftarrow x_b - x_a \\ Lsqr \leftarrow dx^T \cdot dx \\ L \leftarrow \sqrt{Lsqr} \end{array} \right\|$$

Sesion 3

Jacobiano (mathcad):

$$J(\xi, x_{coord}) := \left| \begin{array}{l} x_a \leftarrow \begin{bmatrix} x_{coord_1} & x_{coord_2} \end{bmatrix}^T \\ x_b \leftarrow \begin{bmatrix} x_{coord_3} & x_{coord_4} \end{bmatrix}^T \\ L \leftarrow LBARN(x_a, x_b) \\ \chi \leftarrow \begin{bmatrix} -L & L \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^T \\ N_{der} \leftarrow N_{\xi}(\xi) \\ N_{der}^T \cdot \chi \end{array} \right|$$

Sesion 3

Derivadas Cartesianas de funciones de interpolacion (mathcad):

$$N_{dxdy}(\xi, x_{coord}) := [J(\xi, x_{coord})]^{-1} \cdot N_{\xi}(\xi)^T$$

Matriz de deformacion-desplazamiento (mathcad):

$$B_{mat}(\xi, x_{coord}) := \left\| \begin{array}{l} N_{cart} \leftarrow N_{dxdy}(\xi, x_{coord})^T \\ \left[\begin{array}{cccc} N_{cart_1} & 0 & N_{cart_2} & 0 \end{array} \right] \end{array} \right\|$$

Sesion 3

Matriz de rigidez local (mathcad):

```

$$K_{L2D}(E, A, x_{coord}, n_p, ndof, nnode) := \left\| \begin{array}{l} K \leftarrow 0 \cdot \text{identity}(ndof \cdot nnode) \\ \text{if } n_p = 2 \\ \quad \text{for } i_p \in 1 \dots n_p \\ \quad \quad \left\| \begin{array}{l} detJ_{ip} \leftarrow detJ(\xi_{i_p}, x_{coord}) \\ B \leftarrow B_{mat}(\xi_{i_p}, x_{coord}) \\ dV \leftarrow A \cdot detJ_{ip} \cdot w_{i_p} \\ dK \leftarrow B^T \cdot E \cdot B \cdot dV \\ K \leftarrow K + dK \end{array} \right\| \\ K \end{array} \right\|$$

```

Sesion 3

Matriz de transformacion (mathcad):

$$T_{2D}(x_{coord}) := \left| \begin{array}{l} x_a \leftarrow [x_{coord_1} \ x_{coord_2}]^T \\ x_b \leftarrow [x_{coord_3} \ x_{coord_4}]^T \\ [dx \ dy] \leftarrow (x_b - x_a)^T \\ L \leftarrow LBARPN(x_a, x_b) \\ c \leftarrow \frac{dx}{L} \\ s \leftarrow \frac{dy}{L} \\ \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \end{array} \right|$$

Sesion 3

Matriz de rigidez (mathcad):

$$K_{2D}(E, A, x_{coord}, n_p, ndof, nnode) := \left\| \begin{array}{l} K_L \leftarrow K_{L2D}(E, A, x_{coord}, n_p, ndof, nnode) \\ T_u \leftarrow T_{2D}(x_{coord}) \\ K_{el} \leftarrow T_u^T \cdot K_L \cdot T_u \end{array} \right\|$$

Sesion 4

Ensamblaje de matriz y vector global:

$$\underbrace{\left(\bigcup_{ielem=1}^{nelem} \mathbf{K}_{el} \right)}_{\mathbf{K}_g} \mathbf{u}_g = \underbrace{\bigcup_{ielem=1}^{nelem} \mathbf{F}_{ext}^{el}}_{\mathbf{F}_{ext}}$$

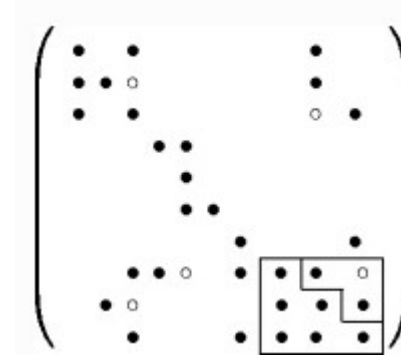
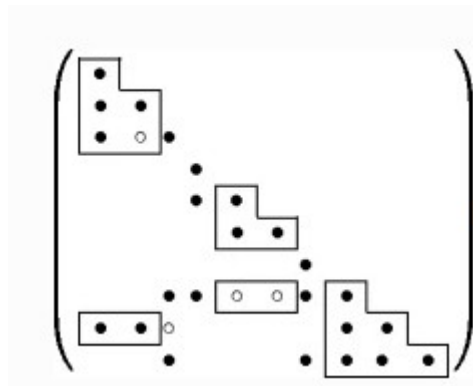
La topologia del elemento nos indica la correspondencia:

#nodo local → #nodo global

$\mathbf{Lnodes} = [\text{inodg}_{ielem} \quad \text{jnodeg}_{ielem}]$ ([nodo global #1, nodo global #2] en elemento $ielem$)

Sesion 4

Tipos de matrices globales:

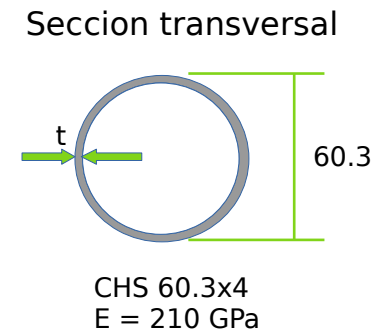
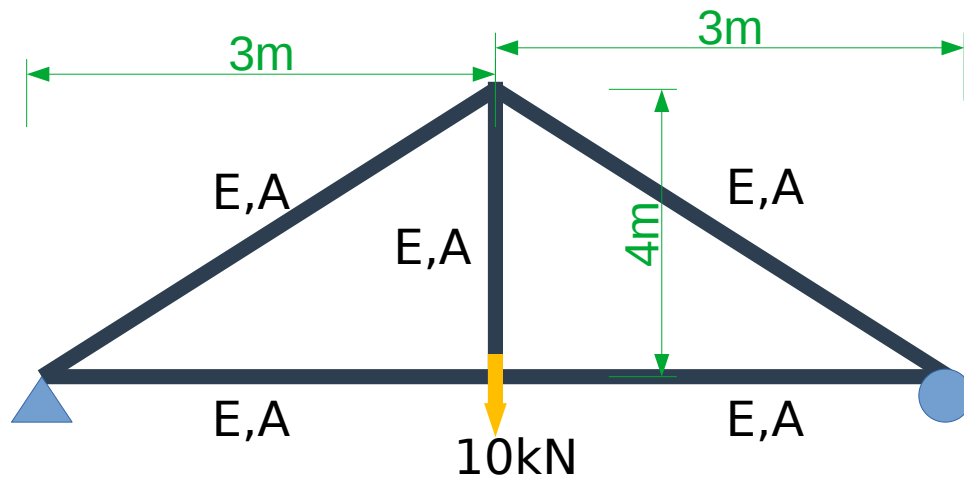


Schenk, O., Gärtner, K. (2011). PARDISO. In: Padua, D. (eds) Encyclopedia of Parallel Computing. Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09766-4_90

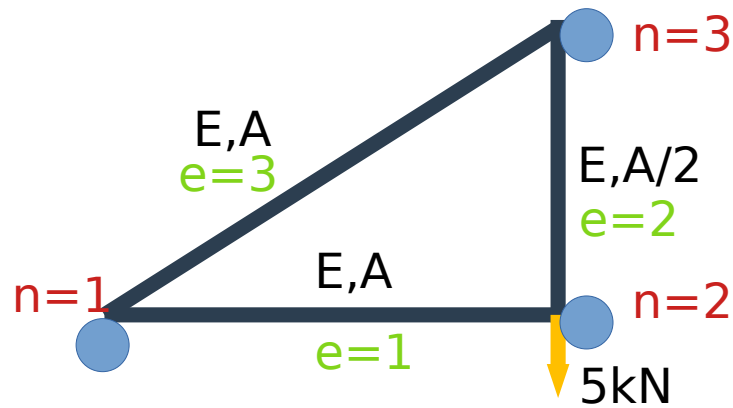
Nota: Nodos numerados muy distantes en un mismo elemento genera una matriz dispersa → Eliminacion Gaussiana en algoritmo secuencial es ineficiente !

Sesion 4

Ejemplo de armadura:



Nota: Se puede reducir el sistema por simetria (sistema equivalente en fuerzas)



Sesion 4

Ensamblaje practico de matriz de rigidez (mathcad):

$$\begin{array}{llll} nelem := 3 & ndof := 2 & nnode := 2 & npoin := 3 \\ \\ coordg := \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 3.0 & 0.0 \\ 3.0 & 4.0 \end{bmatrix} & & lnodes := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} & & \\ \\ E_{steel} = 2 \cdot 10^{11} & & A_{CHS60.3x4} = 7.075 \cdot 10^{-4} & & \\ \\ Eelem := E_{steel} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & & Aelem := A_{CHS60.3x4} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} & & \end{array}$$

nelem = numero de elementos ; **coordg** = coordenadas globales de nodos
ndof = numero de grados de libertad por nodo ; **lnodes** = topologia de elementos
nnode = numero de nodos por elemento ; **Eelem** = Modulo de Young por elemento
npoin = numero total de nodos en la estructura ; **Aelem** = Area transversal por elemento

Sesion 4

Extraer coordenadas de elemento (mathcad):

```

$$\text{coord}_{\text{extr}}(\text{coord}, \text{lnodes}, \text{ielem}, \text{ndof}, \text{nnode}) := \begin{array}{l} \text{for } \text{inode} \in 1.. \text{nnode} \\ \quad \parallel \text{ipoin} \leftarrow \text{lnodes}_{\text{ielem}, \text{inode}} \\ \quad \parallel \text{for } \text{idof} \in 1.. \text{ndof} \\ \quad \quad \parallel \text{xcord}_{(\text{inode} - 1) \cdot \text{ndof} + \text{idof}} \leftarrow \text{coord}_{\text{ipoin}, \text{idof}} \\ \quad \parallel \text{xcord} \end{array}$$

```

Sesion 4

Ensamblaje de matriz global de rigidez (mathcad):

```
 $K_{2D\_g}(nelem, npoin, nnode, ndof, lnodes, coordg, Eelem, Aelem) :=$   
 $K_{2D\_g} \leftarrow 0 \cdot \text{identity}(npoin \cdot ndof)$   
for  $ielem \in 1..nelem$   
   $coordi \leftarrow coord_{extr}(coordg, lnodes, ielem, ndof, nnode)$   
   $Ei \leftarrow Eelem_{ielem}$   
   $Ai \leftarrow Aelem_{ielem}$   
   $n_p \leftarrow 2$   
   $K_{2D} \leftarrow K_{2D}(Ei, Ai, coordi, n_p, ndof, nnode)$   
  for  $inode \in 1..nnode$   
    for  $idof \in 1..ndof$   
      for  $jnode \in 1..nnode$   
        for  $jdof \in 1..ndof$   
           $i \leftarrow (inode - 1) \cdot ndof + idof$   
           $j \leftarrow (jnode - 1) \cdot ndof + jdof$   
           $ig \leftarrow (lnodes_{ielem, inode} - 1) \cdot ndof + idof$   
           $jg \leftarrow (lnodes_{ielem, jnode} - 1) \cdot ndof + jdof$   
           $K_{2D\_g}_{ig, jg} \leftarrow K_{2D\_g}_{ig, jg} + K_{2D}_{i, j}$   
 $K_{2D\_g}$ 
```

Sesion 5

Condiciones de borde mixtas:

$$\underbrace{\begin{matrix} \text{1-st} & \text{2-nd} & \dots & \textcolor{blue}{r\text{-th}} & \dots & \dots & \text{n-th} \\ \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & 0 & \dots & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & 0 & \dots & \dots & K_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ \textcolor{blue}{0} & \textcolor{blue}{0} & \dots & \textcolor{blue}{K_{rr}} & \dots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & \ddots & & \\ & & & \textcolor{blue}{0} & & \ddots & \\ & & & \textcolor{blue}{0} & & & K_{nn} \end{bmatrix} \\ \text{symm} \end{matrix}}_{\mathbf{K}_g^{mod}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \textcolor{blue}{u_r} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}_g} = \underbrace{\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_r \\ \vdots \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix}}_{\mathbf{F}_{ext}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} -\sum^{n_{pu}} K_{1r} \cdot u_r \\ -\sum^{n_{pu}} K_{2r} \cdot u_r \\ \vdots \\ -F_r + K_{rr} \cdot u_r \\ \vdots \\ \vdots \\ -\sum^{n_{pu}} K_{nr} \cdot u_r \end{Bmatrix}}_{\mathbf{F}_{ext}^{add}}$$

u_r = desplazamiento impuesto

Nota: artificio matematico para asegurar que la matriz se pueda invertir $\det(\mathbf{K}) > 0$

Sesion 5

Condiciones de borde mixtas:

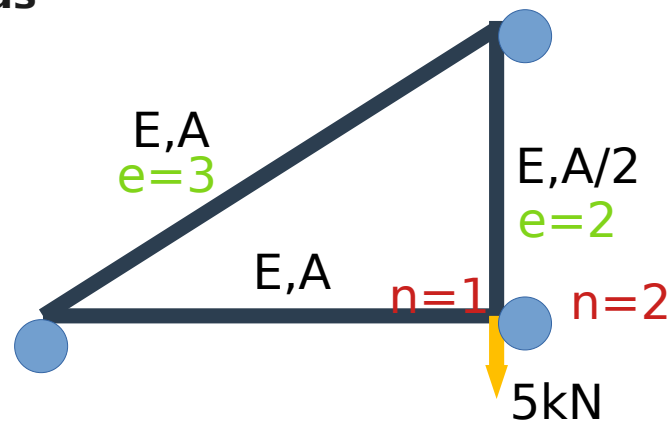
$$\begin{aligned} ntpfix &:= 3 & poinfx &:= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} & ufx &:= \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0 \\ 0.0 & 0 \end{bmatrix} \\ Fext &:= [0 \ 0 \ 0 \ -5000 \ 0 \ 0]^T \end{aligned}$$

ntpfix = numero total de nodos fijos (global)

Poinfx = nodos (globales) y sus grados de libertad impuestos (1= impuesto, 0=libre)

ufx = desplazamientos impuestos (incl. valores nulos para completar matriz)

Fext = vector de fuerzas externas



Sesion 5

Condiciones de borde mixtas (mathcad):

```

Kg_F_2D_mod(nelem,npoin,nnode,ndof,lnodes,coordg,Eelem,Aelem,ntpfix,poinfx,ufx,Fext):=
Kg ← K_2D_g(nelem,npoin,nnode,ndof,lnodes,coordg,Eelem,Aelem)
Kgmod ← Kg
Fgmod ← Fext
for ipfix ∈ 1..ntpfix
  for idof ∈ 1..ndof
    if poinfxipfix,idof+1 = 1
      ig ← (poinfxipfix,1 - 1) • ndof + idof
      for iv ∈ 1..npoin • ndof
        if ig ≠ iv
          Kgmodig,iv ← 0
          Kgmodiv,ig ← 0
          Fgmodiv ← Fgmodiv - Kgiv,ig • ufxipfix,idof
      for ipfix ∈ 1..ntpfix
        for idof ∈ 1..ndof
          if poinfxipfix,idof+1 = 1
            ig ← (poinfxipfix,1 - 1) • ndof + idof
            Fgmodig ← Kgig,ig • ufxipfix,idof
      [Kgmod Fgmod]T

```

$$ug := Kgmod^{-1} \cdot Fgmod$$

Sesion 6

Calculo de reacciones:

$$\mathbf{F}_{reac} = \mathbf{K}_g \cdot \mathbf{u}_g - \mathbf{F}_{ext}$$

Nota: solo filas correspondientes a desplazamientos impuestos son de importancia

Reacciones (Mathcad):

$$Freac := Kg \cdot ug - Fext$$

Nota: Esta forma puede ser refinada para evitar errores de truncamiento en filas sin desplazamientos impuestos. Para caso practico de este curso, esto es suficiente.

Sesion 6

Verificacion de analisis:

- 1. Las reacciones siempre deben estar en balance con fuerzas externas**
- 2. Verificar que la deformacion de la estructura sea consistente con las direcciones de carga. No siempre es muy intuitivo.**
- 3. Verificar que el orden de magnitud de los desplazamientos sea dentro de lo esperado**
- 4. Verificar que la malla es la adecuada. Este paso no es usualmente necesario en estructuras mas complejas.**

Sesion 6

Post-procesamiento (mathcad):

Extraer desplazamientos (Cartesianos) nodales por elemento

```
uext(ielem, nnode, ndof, lnodes, ug) :=  
  for inode ∈ 1..nnode  
    for idof ∈ 1..ndof  
      ig ← (lnodesielem, inode - 1) • ndof + idof  
      i ← (inode - 1) • ndof + idof  
      uelemi ← ugig  
    uelem
```

Deformaciones por elemento en puntos de integracion (puntos de Gauss)

```
snelem(ielem, lnodes, ndof, nnode, coordg, ug) :=  
  np ← 2  
  for ip ∈ 1..np  
    coordi ← coordextr(coordg, lnodes, ielem, ndof, nnode)  
    Tu ← T2D(coordi)  
    B ← Bmat(ξip, coordi)  
    uelem ← uext(ielem, nnode, ndof, lnodes, ug)  
    snip ← B • Tu • uelem  
  sn
```

Sesion 6

Post-procesamiento (mathcad):

Extraer desplazamientos (Cartesianos) nodales por elemento

```
uext(ielem, nnode, ndof, lnodes, ug) :=  
  for inode ∈ 1..nnode  
    for idof ∈ 1..ndof  
      ig ← (lnodesielem, inode - 1) • ndof + idof  
      i ← (inode - 1) • ndof + idof  
      uelemi ← ugig  
    uelem
```

Deformaciones por elemento en puntos de integracion (puntos de Gauss)

```
snelem(ielem, lnodes, ndof, nnode, coordg, ug) :=  
  np ← 2  
  for ip ∈ 1..np  
    coordi ← coordextr(coordg, lnodes, ielem, ndof, nnode)  
    Tu ← T2D(coordi)  
    B ← Bmat(ξip, coordi)  
    uelem ← uext(ielem, nnode, ndof, lnodes, ug)  
    snip ← B • Tu • uelem  
  sn
```

Sesion 6

Post-procesamiento (mathcad):

Esfuerzos por elemento en puntos de integracion (puntos de Gauss)

$$selem(ielem,lnodes,ndof,nnode,coordg,ug,Eelem) := \left\| \begin{array}{l} E \leftarrow Eelem_{ielem} \\ sn \leftarrow snelem(ielem,lnodes,ndof,nnode,coordg,ug) \\ s \leftarrow E \cdot sn \\ s \end{array} \right\|$$

Fuerzas axiales por elemento en puntos de integracion (+=tension, -=compresion)

$$fxelem(ielem,lnodes,ndof,nnode,coordg,ug,Eelem,Aelem) := \left\| \begin{array}{l} A \leftarrow Aelem_{ielem} \\ s \leftarrow selem(ielem,lnodes,ndof,nnode,coordg,ug,Eelem) \\ faxial \leftarrow A \cdot s \\ faxial \end{array} \right\|$$

Sesion 7

Dinamica estructural (vibraciones libres):

Tiempo:

$$M_{el}\ddot{u}_{el} + C_{el}\dot{u}_{el} + K_{el}u_{el} = \cancel{F_{ext}^{el}}$$

$$u_g = \tilde{u}_g \cdot e^{i\omega t}$$



Frecuencia:

$$\left(-\omega^2 M_g + i\omega C_g + K_g \right) \tilde{u}_g \cdot e^{i\omega t} = 0$$

Sin disipacion ↓

$$\left(-\omega^2 M_g + K_g \right) \tilde{u}_g \cdot e^{i\omega t} = 0$$

Frecuencias propias y modos de vibracion

$$T_i = 2 \pi / \omega_i \quad i=1,2,\dots \text{ numero de grados de libertad}$$

Sesion 7

Frecuencias propias y modos de vibracion (deformacion relativa)

$$T_n = 2 \pi / \omega_n \rightarrow$$

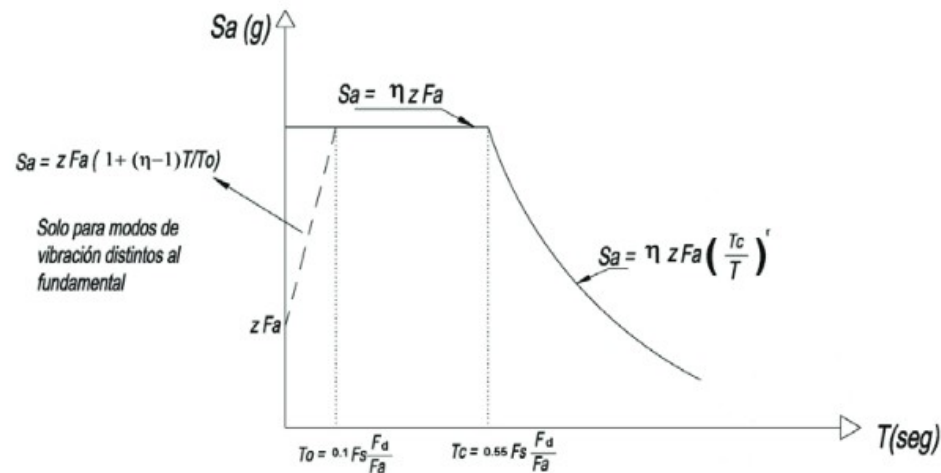
$$\left(-\omega^2 M_g + K_g \right) \tilde{u}_g \cdot e^{i\omega t} = 0$$

\rightarrow

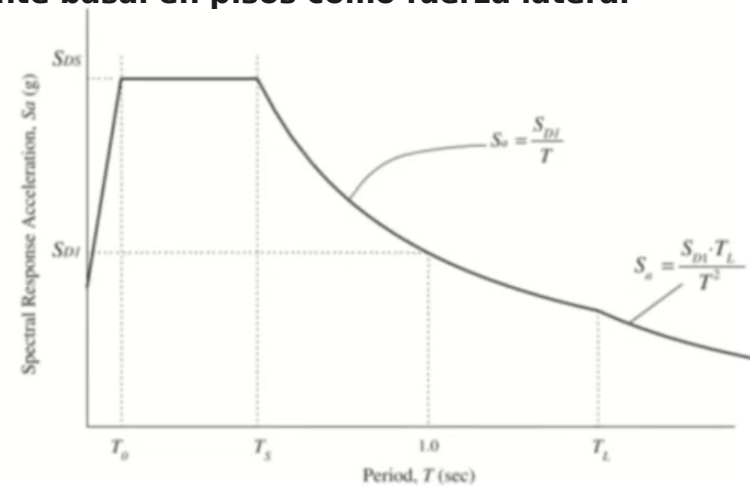
$$\det \left(M_g^{-1} K_g - \omega^2 I \right) = 0$$

Nota: Menor frecuencia característica corresponde al periodo fundamental T_n

Aceleracion espectral \rightarrow Cortante basal \rightarrow distribucion de cortante basal en pisos como fuerza lateral



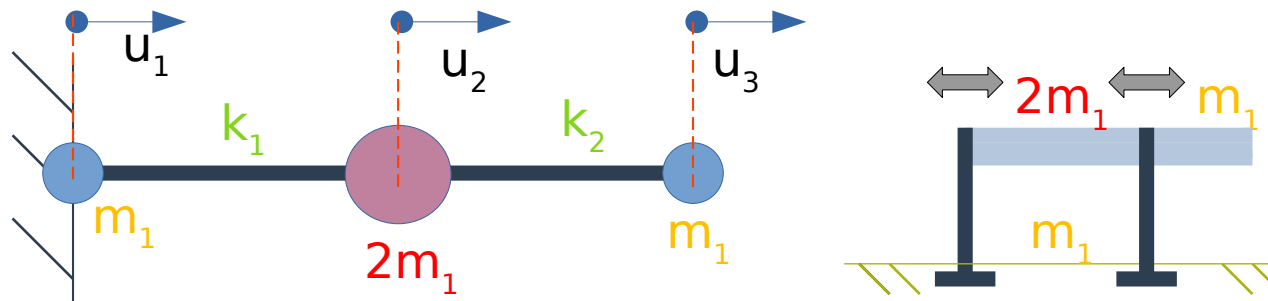
NEC



ASCE 7-16 ($T_n \approx 0.1N$ [s])

Sesion 7

Frecuencias propias y modos de vibracion



$$k_1 = E_1 A_1 / L_1 ; k_2 = E_2 A_2 / L_2$$

$$c_1 = c_2 = 0$$

$$f_1 = f_2 = f_3 = 0$$

Determinar las frecuencias propias y modos de vibracion para una constante de rigidez unitaria $k_1 = k_2 = 1$ y masa unitaria $m_1 = 1$

Nota: Eliminar filas y columnas de ceros debido a condiciones de borde para reducir sistema de ecuaciones. Deformaciones son relativas \rightarrow esfuerzos y reacciones no son absolutas!