Kalejdoskop matematyczny, Steinhaus 10.10.2018

Marian Matłoka, Matematyka dla ekonomistów

ALGEBRA MACIERZY (TABLICA)

$$\begin{bmatrix} 2, & 1, & -3 \\ 2, & 0, & 5 \end{bmatrix}^{2\times3}$$

wiersze ↑ 2×3 ↓ kolumny

zbiór liczb - uporządkowany! (w tablicy)
tablica liczb

Może służyć do pokazania temperatury co godzinę w ciągu całej doby. Te dane można zebrać dla np. 10 miast (10 wierszy, 24 kolumny - liczba godzin w dobie).

Macierz jest odwzorowanie pary liczb naturalnych w pewną liczbę rzeczywistą

$$(i,j) \to a_{ij}$$

$$(1,1) \to 2$$
$$(1,2) \to 1$$
$$(1,3) \to -3$$
$$(2,1) \to 2$$
$$(2,2) \to 0$$
$$(2,3) \to 5$$

Szczególną macierzą jest macierz diagonalna. To macierz, która ma tyle samo wierszy co kolumn (= macierz kwadratowa); na przekątnej ma liczby (niekoniecznie zerowe), a poza tym ma same zera.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \dots 0 \\ & a_2 \dots 0 \end{bmatrix}$$

Macierz jednostkowa - kolejna szczególna macierz

$$I_n = \begin{bmatrix} 1, & 0 & \dots, & 0 \\ 0, & 1 & \dots & 0 \\ \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -1 \end{bmatrix}^{n \times n}$$

wymiar

wiersze ↑ n×n ↓ kolumny

$$\begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Po przekątnej same 1, reszta to zera

Każdą liczbę da się przedstawić w systemie dwójkowym (binarnym, 0-1)

Macierz zerowa - składa się z samych zer

Θ

$$\Theta^{4\times2} = \begin{bmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \\ 0, & 0 \\ 0, & 0 \end{bmatrix}$$

nie musi być kwadratowa, ale może być

$$\Theta^{3\times3} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}^{3\times3}$$

Macierz symetryczna

$A = [a_{ij}]^{n \times n}$ ← tyle samo wierszy co kolumn

$a_{ij} = a_{ji}$ $i \neq j$ (dla $i \neq j$)

$$A = \begin{bmatrix} 1, & 5, & 7 \\ 5, & 10, & -3 \\ 7, & -3, & 15 \end{bmatrix}$$

$\left.\begin{array}{l} a_{12} = 5 \\ a_{21} = 5 \end{array}\right\}$ (a 1-2 ← np. od 1, kol. 2) muszą być równe ze wzorem - symetrycznie

$a_{13} = 7$
$a_{31} = 7$

a_{22} może być dowolne
$a_{23} = -3$
$a_{32} = -3$
a_{33} może być dowolne

Symetria względem przekątnej. Jeśli złożyć kartkę na skos, to liczby na siebie zejdą.

$$A = \begin{bmatrix} 2, & 1, & -1, & 3 \\ 1, & 7, & 3, & -1 \\ -1, & 3, & 15, & 4 \\ 3, & -1, & 4, & -6 \end{bmatrix}$$

przykład symetrycznej macierzy. Nie może być symetryczna względem drugiej przekątnej.

DZIAŁANIA (ALGEBRA) NA MACIERZACH

1. TRANSPONOWANIE - polega na tym, że wiersze zastępujemy kolumnami (a kolumny wierszami)
(wiersz zamieniamy w kolumnę)

A^T

$$A = \begin{bmatrix} 2, & 1, & 3 \\ -1, & 0, & 5 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

obrócony o $90°$

$A = [a_{ij}]$

$A^T = [b_{ij}]^{m \times n}$ $b_{ij} = a_{ji}$

takiej operacji jak transponowanie nie ma w świecie liczb - a tu jest

2. Równe macierze - wymiary muszą być takie same

$A^{n \times m} = B^{n \times m}$ $a_{ij} = b_{ij}$

3. DODAWANIE - muszą mieć takie same wymiary

$A + B$

$A^{n \times m} + B^{n \times m} = C^{n \times m}$

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

4. ODEJMOWANIE

$A - B$ $A^{n \times m} - B^{n \times m} = C^{n \times m}$

$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

5. MNOŻENIE LICZBY × MACIERZ

$\alpha \; A$

$\alpha \in \mathbb{R}$ (α jest l. rzeczywistą)

$A = [a_{ij}]^{n \times m} \quad b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$

$$5 \cdot \begin{bmatrix} 2, & -1 \\ 3, & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10, & -5 \\ 15, & 20 \end{bmatrix}$$

6. MNOŻENIE

$A^{n \times k} \cdot A^{k \times m}$ – ilość kolumn dowolne, ale wiersz musi być równa kolumnom w pierwszej

$$A^{n \times k} \cdot A^{k \times m} = C^{n \times m}$$

$$\begin{bmatrix} 1, & 3, & -1 \end{bmatrix}^{\overset{n\ k}{1 \times 3}} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}^{\overset{k\ m}{3 \times 1}} = {}^{1 \times 1} = 1 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) + [(-1) \cdot 2]$$

1 z 1
2 z 2
3 z 3

$$= 1 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2$$

$$[1, 2] \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = [1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1), \; 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5] = [1, 12]^{1 \times 12}$$

$$\begin{bmatrix} 1, & 3 \\ -1, & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2, & 1 \\ 3, & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11, & 1 \\ 4, & -1 \end{bmatrix}^{2 \times 2}$$

wiersz × kolumna

$-1 \cdot 2 = -2 + (2 \cdot 3) = -2 + 6 = 4$

$$\begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{bmatrix}$$

$0 \cdot a_{11} + 1$

$$I_n \cdot A^{n \times n} = A^{n \times n}$$

$$1 \cdot a = a$$

$$A^{n\times n} + \Theta^{n\times n} = A^{n\times n}$$

macierz po dodaniu macierzy zerowej daje macierz A

$$\underline{I}_n \cdot A^{n\times n} = A^{n\times n}$$

$$A^{n\times n} \cdot \underline{I}_n = A^{n\times n}$$

macierz jednostkowa to takie 1 ze świata liczb

Dwie macierze można pomnożyć wtedy, gdy liczba kolumn macierzy z lewej równa jest liczbie wierszy macierzy z prawej

Mnożenie macierzy przez siebie nie jest przemienne
$A \cdot B \neq B \cdot A$

rząd × kolumna

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 3+9-1 = 11 \\ 6-12+2 = -4 \\ 2-6+0 = -4 \\ 4+8+0 = 12 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 11 & -4 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 11 & -4 \\ -4 & 12 \end{matrix} \end{array}$$

kolumna × rząd

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 3+9-1 = 11 \\ 6-12+2 = -4 \\ 2-6+0 = -4 \\ 4+8+0 = 12 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 11 & -4 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 11 & -4 \\ -4 & 12 \end{matrix} \\ \text{I K} \quad \text{II K} & \text{I K} \quad \text{II K} \end{array}$$

WŁASNOŚCI DZIAŁAŃ

$$A + B = B + A$$

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

$$A + \Theta = A$$

$$A - A = \Theta$$

$$k(A+B) = kA + kB$$

$$(AB)C = A(BC)$$

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$(A+B)C = AB + AC$$

$$A\Theta = \Theta$$

$$\Theta A = \Theta$$

$$A1 = A$$

$$1A = A$$

$$AB \neq BA$$

WYZNACZNIK MACIERZY (determinant)

$\det(A)$ lub $W(A)$

$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^k a_{ij_k}$ ← numer kolumny jest losowy (permutacja)

suma iloczynów od $i=1$ do n

$\det[a_{11}] = a_{11}$

$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = +a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

METODA SARRUSA (tylko do macierzy 3×3)

$\Downarrow$

dopisujemy dwie pierwsze kolumny

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

\ iloczyny plusowe
/ iloczyny minusowe

$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$
$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$

$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{matrix} = 6 + 2 + 0 + 3 - 8 - 0 = -1$

$\det \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix} = 30 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 30$

jeżeli poniżej lub powyżej przekątnej, to wynik jest po postaci iloczynem liczb na diagonalnej

TWIERDZENIE LAPLACE'A

Wyznacznik to suma następujących iloczynów

$$\det A = a_{i1} D_{i1} + a_{i2} D_{i2} + \dots a_{in}$$

dopełnienie
(rozwinięcie wzdłuż wiersza)

$$\det A = a_{1j} \cdot D_{1j} + a_{2j} \cdot D_{2j} + \dots a_{nj}$$

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$ ← minor

to

wyznacznik macierzy powstały z macierzy po wykreśleniu i-tego wiersza i j-otej kolumny

wykreśliliśmy 1 wiersz i 1 kolumnę

wiersz kolumna

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} =$$

trzeba brać dowolny wiersz lub dowolną kolumnę (rozwinięcie)

np. to

$$= 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = -2 + 1 = -1$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot$$

$$\cdot \det\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot (\overset{20}{4 \cdot 5} - 0) = 3 \cdot 20 = \underline{60}$$

lub Laplacem $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \underline{60}$

! DOM

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} = 0\cdot(-1)^{1+4}\cdot\det\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} + 2\cdot(-1)^{2+1}\cdot\det\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$= 0 + 2\cdot\det \begin{matrix} 5 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 5 & 1 & -1 \end{matrix} = -2\cdot(100+0+0-0-0-0) =$$

$$= \underline{-200}$$

$$= 0\cdot(-1)^{1+4}\cdot\det\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} + 0\cdot\det\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

WŁASNOŚCI WYZNACZNIKÓW

1. Wiersz macierzy A jest złożony z samych 0
Wyznacznik tej macierzy będzie równy 0. $\det A = 0$
Jeżeli cała kolumna z 0 — to samo.

2. Wyznacznik z macierzy transponowanej jest równy wyznacznikowi tej macierzy

$$\det(A^T) = \det A$$

3. Przestawienie dwóch wierszy (kolumn) powoduje zmianę znaku wyznacznika

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = -1$$

swap (przestawiono wiersz 1 z 3)

$$\det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

4. Jeżeli w macierzy A dwa wiersze (lub 2 kolumny) są identyczne, to wyznacznik z takiej macierzy $= 0$

$$\det(A) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 0$$

5. Wspólny czynnik można wynieść przed znak wyznacznika

$$\det\begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 10 & 12 \\ -4 & -2 & 6 \end{bmatrix} = 2 \cdot \det\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

RZĄD MACIERZY

jest wektorem

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{bmatrix}$$

$\vec{a}_1 = (1, 2, -1)$

$\vec{a}_2 = (2, 3, 5)$

$\vec{a}_3 = (3, 5, 4)$ ← suma 1 i 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Wektory liniowo zależne = jeżeli daje się znaleźć takie liczby $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ nie wszystkie równe 0, takie że

$$\alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \alpha_n \cdot \vec{a}_n = \Theta$$

$$\vec{a}_3 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$$

$$\vec{a}_3 - \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad 1+2\cdot 2$$

$$\vec{a}_3 = \vec{a}_1 + 2\cdot\vec{a}_2$$

Wektory liniowo niezależne, kiedy nie da się znaleźć takich współczynników, aby iloczyn = 0

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

RZĄD MACIERZY = maksymalna liczba liniowo niezależnych wierszy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 8 & -3 & 5 \end{bmatrix} \leq 2$$ rząd nie jest większy niż 3 (bo są 3 wiersze)

$$\vec{a}_3 = \cancel{a_2}\, 2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2$$

$$\text{rząd} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} = 1$$

$$\vec{a}_2 = 2\vec{a}_1$$

$$\vec{a}_3 = 3\vec{a}_1$$

$$\operatorname{rząd}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} = 1 \quad (\text{dodano } 1 : 2)$$

$$\operatorname{rząd}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 10 & 15 \end{bmatrix} = \cancel{a_1 + a_2}\ 1$$

$$a_2 = 2a_1$$

$$a_3 = a_1 + 2a_2$$

UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH

(1.) PODSTAWIANIE

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 3 - 2x_2$$

$\Rightarrow$

$2(3 - 2x_2) - x_2 = 1$

$6 - 4x_2 - x_2 = 1$

$-5x_2 = 1 - 6$

$-5x_2 = -5 \quad / : (-5)$

$x_2 = \underline{1}$

$\Downarrow$

$x_1 = 3 - 2 \cdot 1$

$x_1 = 3 - 2$

$x_1 = 1$

(2) PRZECIWNE WSPÓŁCZYNNIKI

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \quad / \cdot (-2) \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

← przez taką liczbę, aby dostać przeciwne współczynniki

$$\begin{cases} -2x_1 - 4x_2 = -6 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

$-2x_1 + 2x_1 - 4x_2 - x_2 = -5$

$-5x_2 = -5$

$x_2 = 1$

i znowu x_2 podstawiamy do równania jak w podstawianiu

(3) WZORY CRAMERA

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nn} \cdot x_n = b_n$$

nr równania

przy której zmiennej liczba stoi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}, a_{21}, \dots & a_{n1} \\ a_{21}, a_{22}, \dots & a_{n2} \\ \vdots & \\ a_{n1}, a_{n2} \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \underline{A \cdot x = b}$$

Wiersy tyle, ile równań,
kolumn tyle, ile niewiadomych:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{2\times 2} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$\det A = -1 - 4 = -5$

macierz powstała z macierzy A poprzez zastąpienie I kolumny przez wektor b

zamieniona I kolumna

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \det \cdot A^{(1)} = -3 - 2 = -5$$

$$\boxed{x_1 = \frac{\det A^{(1)}}{\det A} = 1}$$

zamieniona II kolumna

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det A^{(2)} = 1 - 6 = -5$$

$$\boxed{x_2 = \frac{\det A^{(2)}}{\det A} = 1}$$

$$x_i = \frac{\det A^{(i)}}{\det A}$$

$A^{(i)}$ - powstała z macierzy A poprzez zastąpienie i-tej kolumny macierzy A wektorem b.

④ METODA GAUSA-JORDANA

Operacje elementarne na wierszach macierzy:

1. Pomnożenie wiersza przez dowolną liczbę
   (mnożenie to dzielenie przez odwrotność!)
2. Do wiersza macierzy dodajemy inny wiersz pomnożony przez dowolną liczbę

$Ax = b$ Postulujemy macierz rozszerzoną $\bar{A}$. Zawiera ona macierz A z dołączoną kolumną b

$$\bar{A} = [A \vdots b]^{n \times (n+1)}$$ ← tyle samo wierszy co macierz A a kolumn o jedną więcej

⇓ po zastosowaniu operacji elementarnych doprowadzam do następującej postaci

$$[\underbrace{I}_{\text{macierz jednostkowa}} \vdots x]$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{2\times 2} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

musimy wyeliminować 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \end{bmatrix}$$ ← gdyby nie było 1 na pierwszym miejscu, to całą macierz trzeba byłoby mnożyć przez odwrotność (czyli np. $4 \cdot \frac{1}{4}$)

row → $r_2 := r_2 - 2 \cdot r_1$ ← żeby wyeliminować 2

z macierzy A

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2-2\cdot 1 & -1-2\cdot 2 & 1-2\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

2 - 2·1

z macierzy A

$r_1 := r_1 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)$

wyeliminować 2, na 0

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$r_1 := r_1 - 2 \cdot r_2$

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

tak naprawdę to metoda to uogólniona metoda przeciwnych współczynników (= metoda eliminacji)

DOM 1

3 ; 4

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

3 równania
3 niewiadome

$$\det A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = 4 + 0 + 2 + 12 - 0 + 8 = \underline{26}$$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 9 & 0 & 2 & 9 & 0 \end{bmatrix} = 16 + 0 + 0 - 36 - 0 - 24 = 16 - 60 = -44$$

$$x_1 = \frac{\det A^{(1)}}{\det A} = -\frac{44}{26} = -\frac{22}{13}$$

$$\det A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & 2 & 3 & 9 \end{bmatrix} = 12 + 0 + 18 + 18 - 0 + 8 = 20$$

$$x_2 = \frac{20}{26} = \frac{10}{13}$$

$$\det A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 9 & 3 & 0 \end{bmatrix} = 36 + 36 + 0 - 24 - 0 + 36 = 108 - 24 = 84$$

$$x_3 = \frac{84}{26} = \frac{42}{13}$$

MACIERZ ODWROTNA

$5 \cdot \frac{1}{5} = 1$

$\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

Liczba jest odwrotnością danej liczby, jeśli ich iloczyn = 1

Macierz odwrotna to taka macierz, że ich iloczyn daje macierz jednostkową

$$A \cdot A^{-1} = \underline{I}$$

$$A^{-1} \cdot A = \underline{I}$$

$A \cdot x = b$ taki tam układ równań

$A^{-1} \cdot (A \cdot x) = A^{-1} \cdot b$

$\underline{I} \cdot x = A^{-1} \cdot b$ macierz jednostkowa * x to x

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$ $\underline{I}$ wiersz $\cdot$ $\underline{I}$ kolum.

$$\boxed{x = A^{-1} \cdot b}$$

$\alpha \cdot x = \beta$

$x = \alpha^{-1} \cdot \beta = \frac{\beta}{\alpha}$

Metoda Gausa-Jordana na liczenie macierzy odwrotnej

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

rozszerzamy macierz wyjściową o jednostkową:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$r_2 := r_2 - 2 \cdot r_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$r_2 := r_2 \,|\, :(-5)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$r_1 := r_1 - 2r_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]$$

⇐ macierz jednostkowa = macierz odwrotna

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

sprawdzenie
$A \cdot A^{-1} = \underline{I}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = A^{-1} \cdot b$$

macierz odwrotna razy b
- można tak zapisać układ równań

$$x = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Operacje elementarne:

3. Zamiana 2 dowolnych wierszy miejscami

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

... i dalej kontynuować

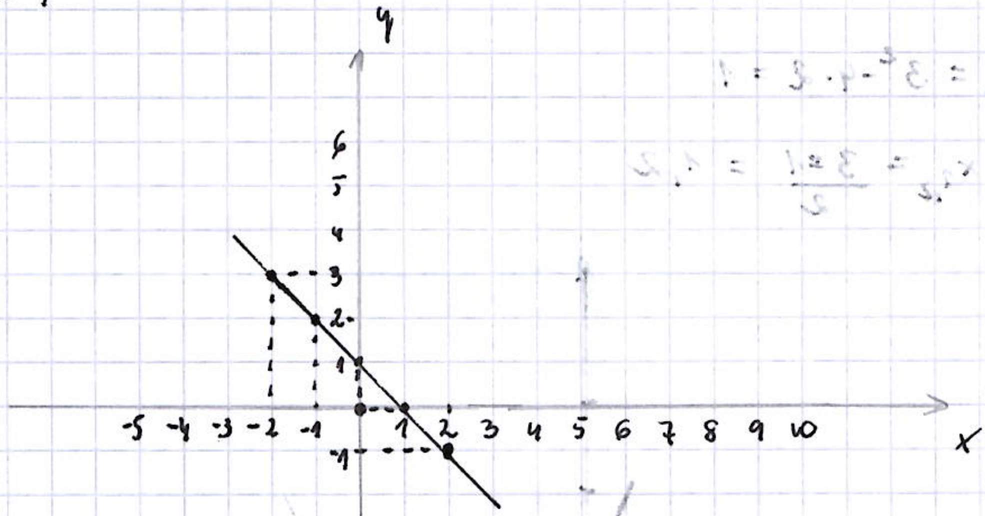
FUNKCJE

Funkcja jest pewnym przyporządkowaniem

$f(x): X$ (dziedzina) $\Rightarrow Y$ (zbiór wartości)

$x \in R$ (zbiór liczb rzeczywistych)

$y \in Y$



wykres funkcji

$y = -x + 1$

x	-2	-1	0	1	2
y	3	2	1	0	-1

$(x, f(x)) \quad x \in D$

1) FUNKCJA LINIOWA

$$y = ax + b \qquad a, b \in R$$

2) FUNKCJA WIELOMIANOWA

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

3) FUNKCJA KWADRATOWA

$$y = x^2 - 3x + 2$$