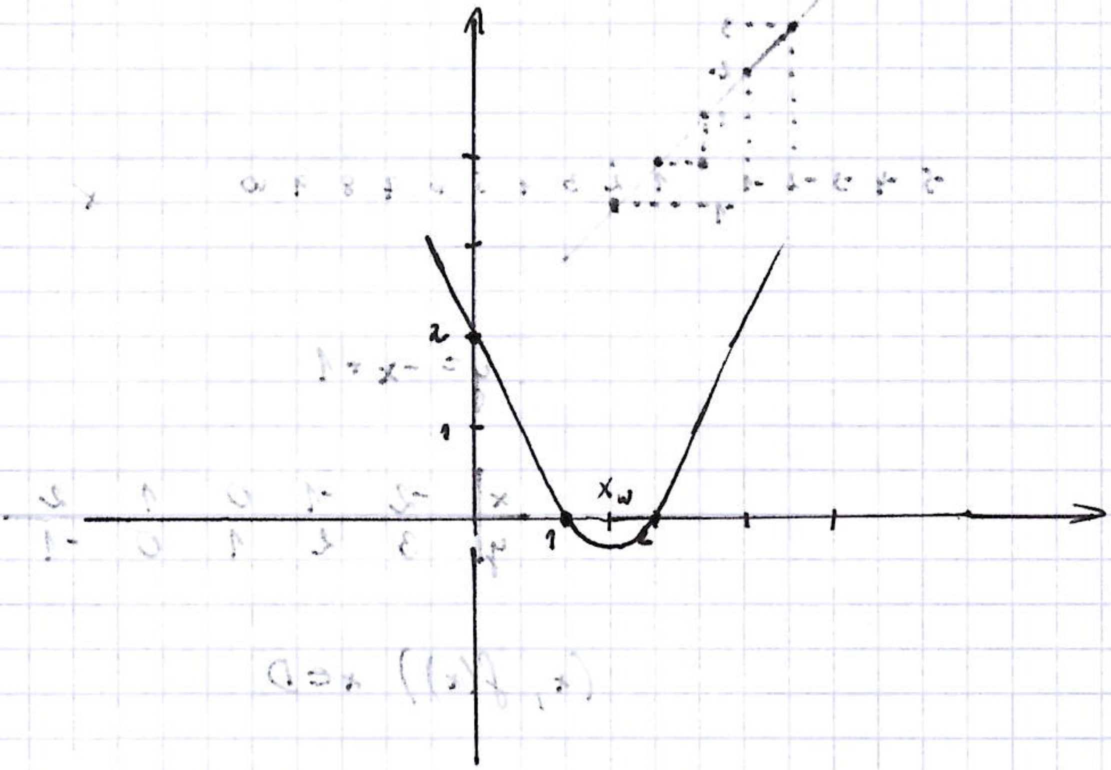
$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta \geqslant 0$ $\quad x_{1,2}$ miejsca zerowe

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 = 1$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} = 1, 2$$



znak przy najwyższej potędze wyznacza kierunek ramion paraboli

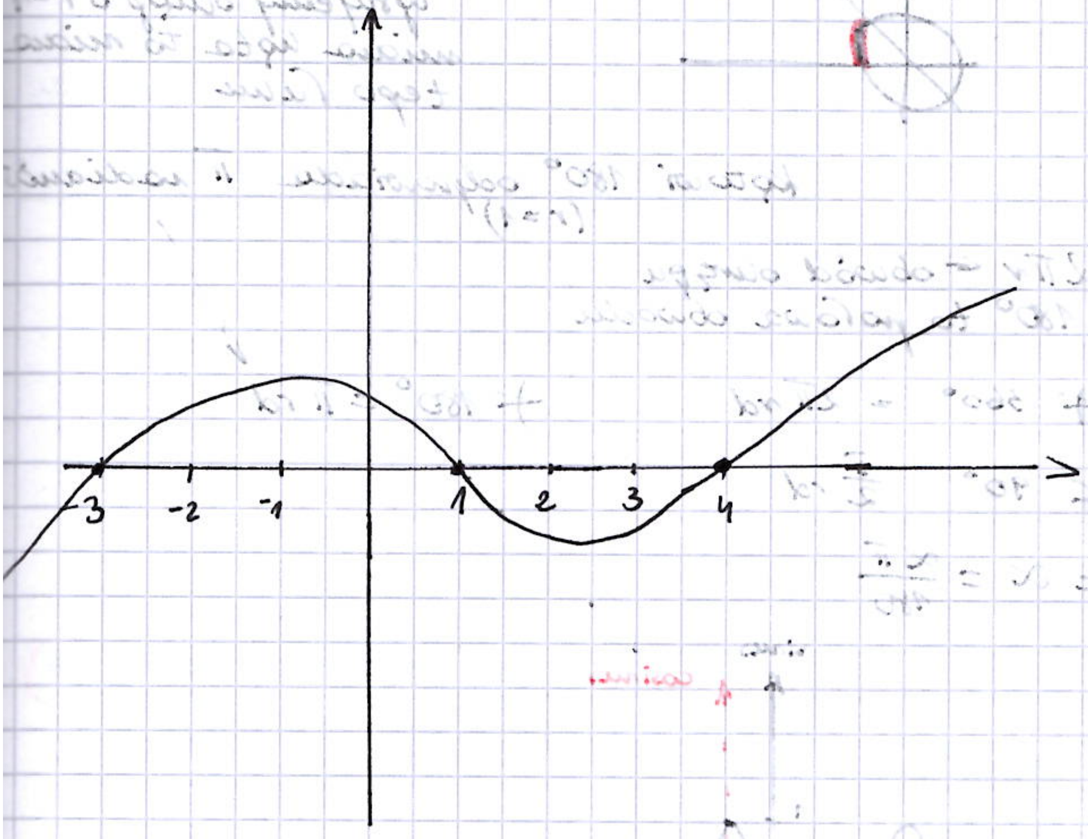
jeżeli: $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_w = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b \cancel{+\sqrt{\Delta}} - b \cancel{- \sqrt{\Delta}}}{2 \cdot 2a} = \frac{-\cancel{2}b}{\cancel{2} \cdot 2a} = -\frac{b}{2a}$$

$y = (x+3)(x-1)(x-4)$

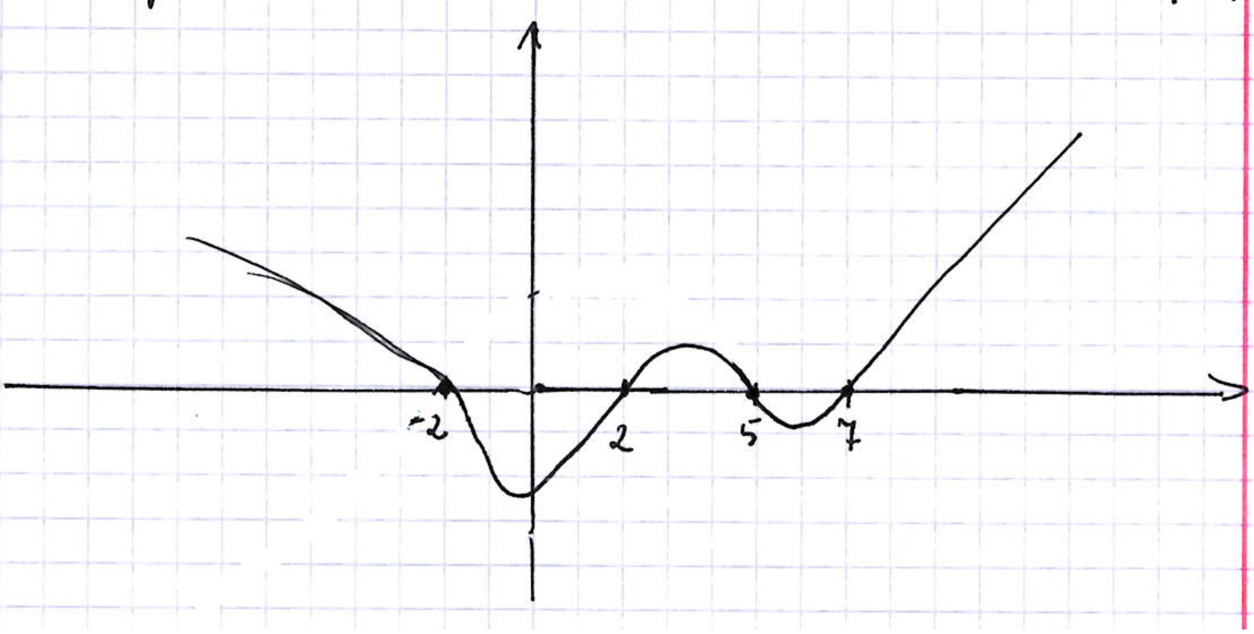
miejsca zerowe



Trzeba sprawdzić, co się dzieje dla dużych x, żeby odczytać kierunek ramion. Po podstawieniu pod x dowolnej dużej liczby wyjdzie liczba dodatnia.
Przebieg jest ciągły.
Ta funkcja jest więc funkcją ciągłą.

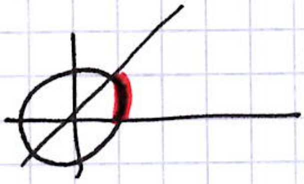
− + − + duże liczby

$y = (2-x)(x-5)(7-x)(x+2)$ $\quad$ m.0 = 2, 5, 7, -2



4) FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE

Sinus przechodzi w stopniach po 180°
Radian = miara łukowa kąta



wyznajemy okrąg o $r=1$
miara kąta to miara tego łuku

kątowi 180° odpowiada π radianów
($r=1$)

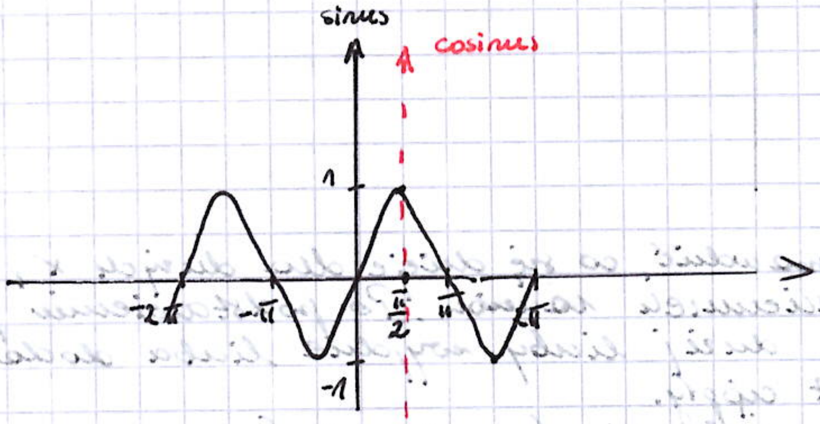
$2\pi r$ ← obwód okręgu
180° to połowa obwodu

$\measuredangle\ 360° = 2\pi\ rd$

$\measuredangle\ 180° = \pi\ rd$

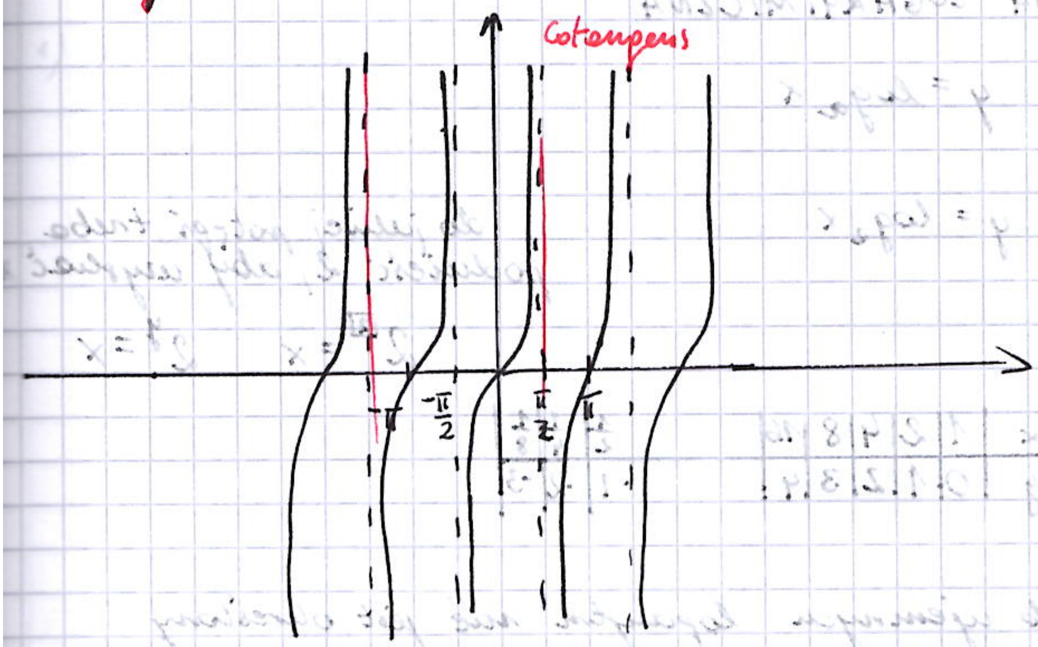
$\measuredangle\ 90° \quad \frac{\pi}{2}\ rd$

$\measuredangle\ \alpha = \frac{\alpha\pi}{180}$



Cosinus jest przesunięty w lewo o 90°

Tangens



5) FUNKCJA WYKŁADNICZA

$y = a^x \quad a \in R$ a to jakaś liczba

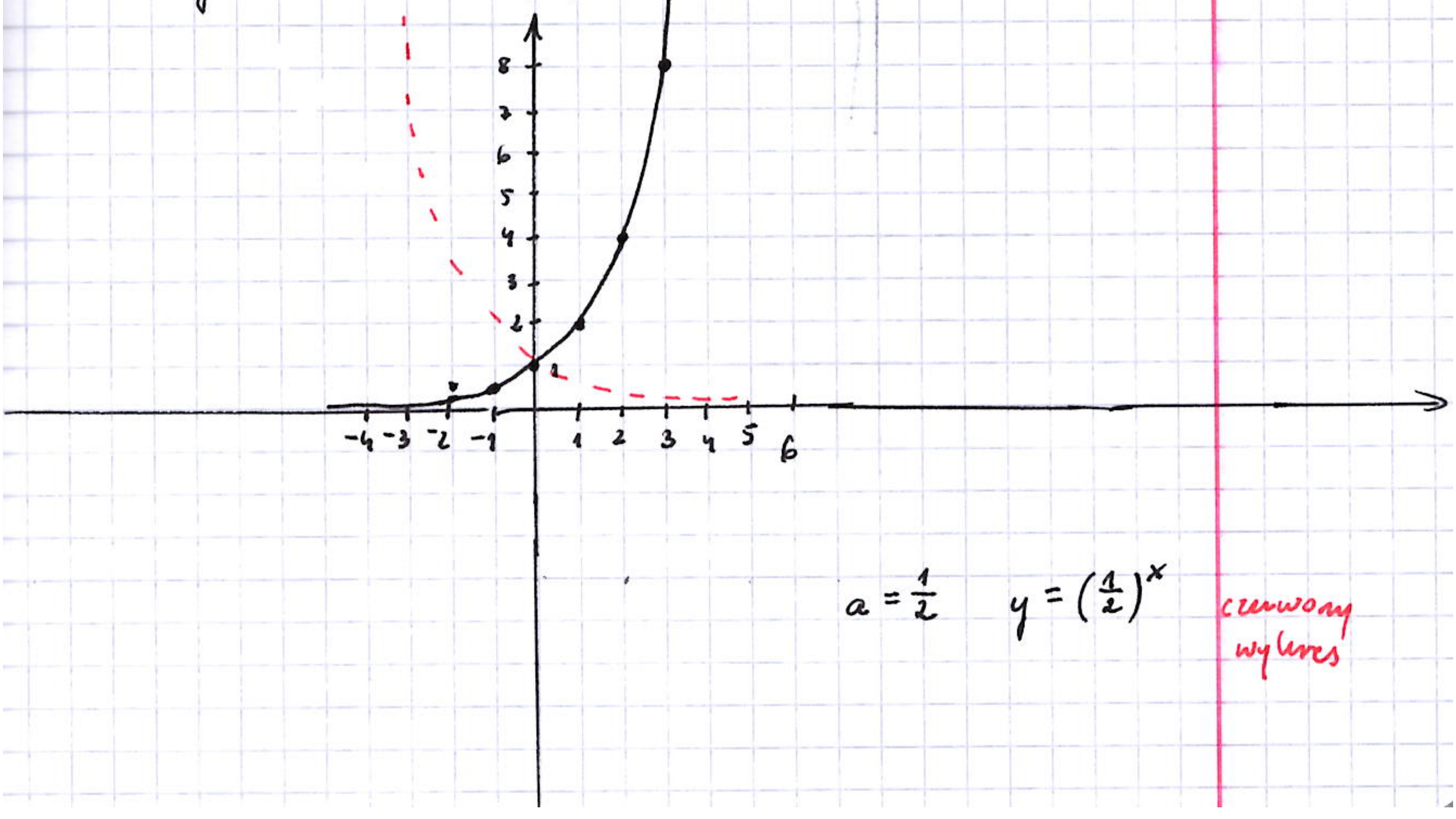
$y = 2^x$

$2^{-2} = \frac{1}{2^2}$

$2^0 = 1$

$\underline{a^0 = 1}$!

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16



$a = \frac{1}{2} \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

czerwony wykres

6) FUNKCJA LOGARYTMICZNA

$y = \log_a x$

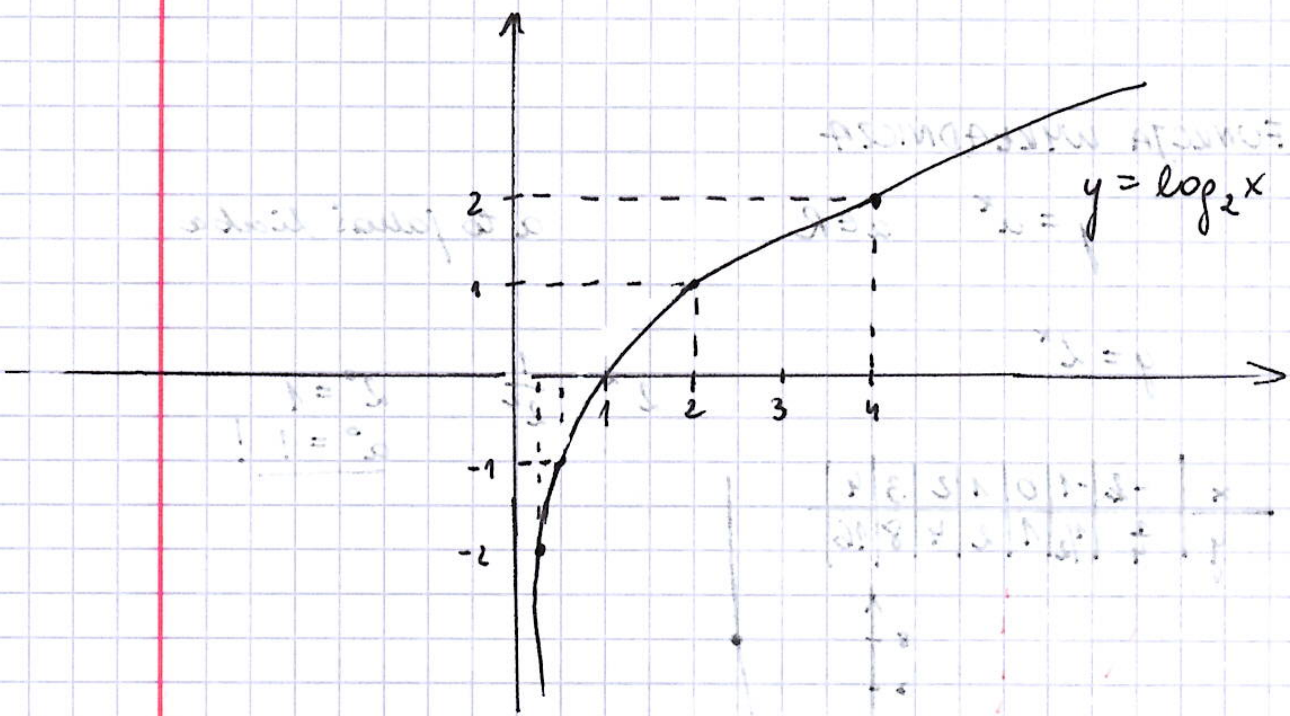
$y = \log_2 x$

do jakiej potęgi trzeba podnieść 2, aby uzyskać x

$2^{\boxed{3}} = x \qquad 2^{y} = x$

x	1	2	4	8	16	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
y	0	1	2	3	4	-1	-2	-3

Dla liczb ujemnych logarytm nie jest określony



Własności:

1) Monotoniczność.

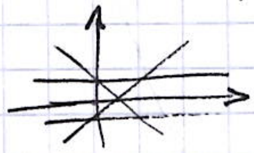
a) ściśle rosnące - wzrost x powoduje wzrost y

b) ściśle malejące - odwrotnie

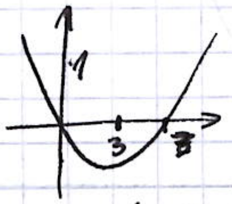
c) nierosnące - albo maleje albo utrzymuje poprzednią wartość

d) niemalejące - albo rośnie albo pozostaje

f liniowa - może być w 4 kategoriach



f kwadratowe nie jest monotoniczna



$(-\infty, 3)$ $(3, \infty)$

w pewnym obszarze maleje,
w pewnym rośnie
może mieć monotoniczność tylko w pewnych przedziałach

f wykładnicza

ściśle rosnące lub
ściśle malejące

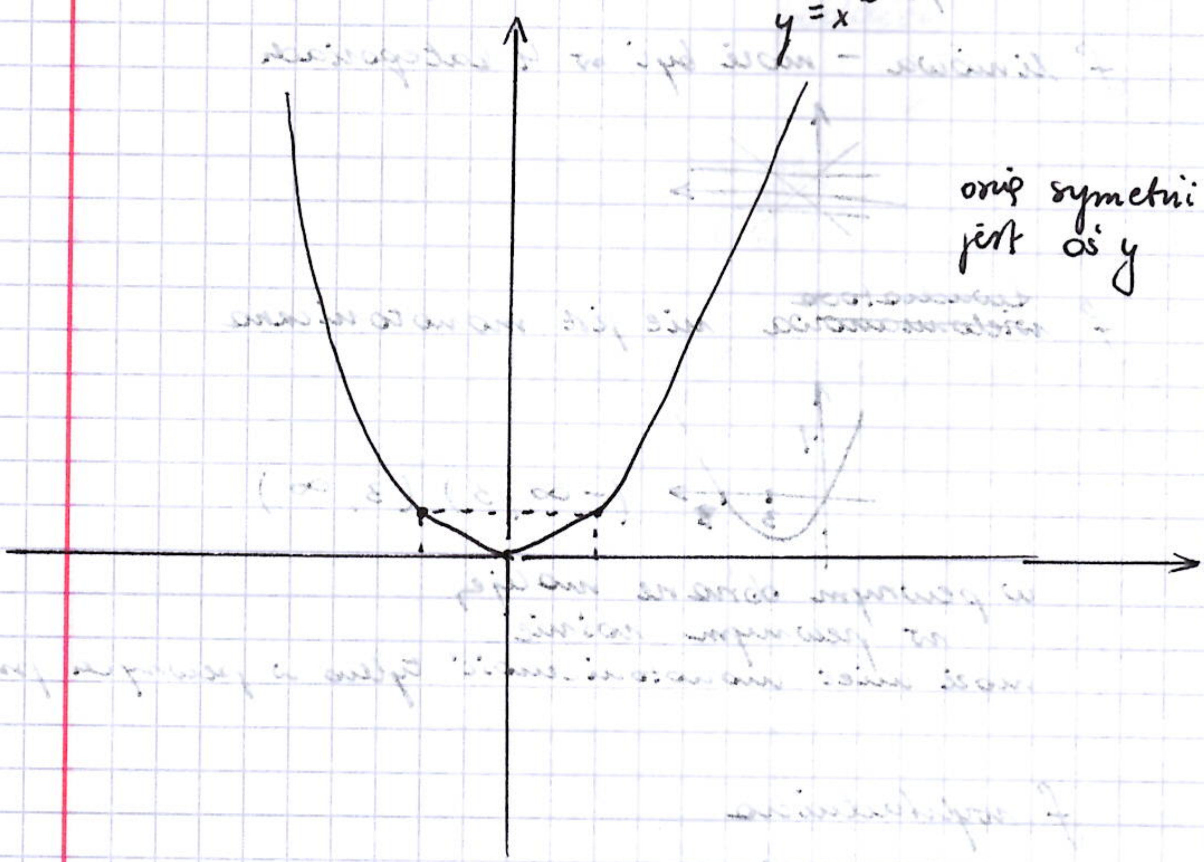
f trygonometryczne - tylko w danym obszarze
jest ściśle rosnąca lub malejąca
(to sinus i cosinus)
Tangens ma tylko monotoniczność
w obszarach $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})(\frac{\pi}{2}, \dots)$

f wielomianowe - nie jest monotoniczna, ma
x przedziałów monotoniczności

2) Parzystość

F. parzysta

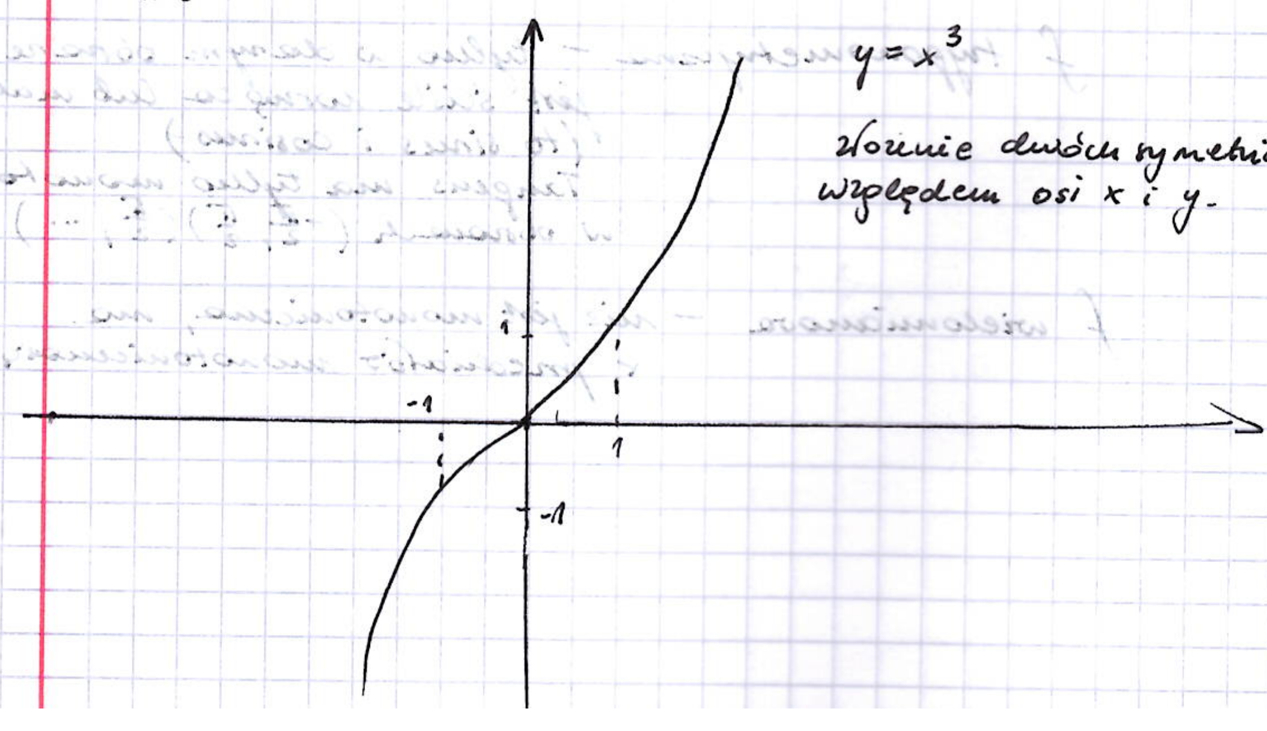
$$\bigwedge_{x\in D} f(x) = f(-x) \wedge -x \in D$$



oś symetrii jest oś y

F. nieparzysta

$$\bigwedge_{x\in D} f(x) = -f(-x) \wedge -x \in D$$



złożenie dwóch symetrii: względem osi x i y.

Własności parzystości i nieparzystości nie dotyczą każdej z funkcji.

$y = \frac{1}{2}x - 1$ $\qquad$ $\frac{1}{2}x = y + 1$

$x = 2y + 2$

F. różnowartościowa

$x_1 \neq x_2$

f. odwrotna

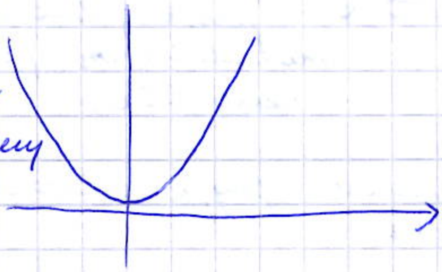
$x = 2y + 2$

$y = x^2$ $\qquad$ $x = \sqrt{y}$ $\qquad$ $x = -\sqrt{y}$

$y = f(x) \rightarrow x = f^{-1}(y)$

$y \Rightarrow x$ taki $y = f(x)$

Funkcje x jako funkcje y.
Liczymy funkcję x
Y przyporządkujemy
te samą X



Funkcja złożona

$y = \sin^2 x$

$y = t^2$

$t = \sin x$

$y = \sin^2(2x+1)$

$$\begin{cases} y = u^2 \\ u = \sin t \\ t = 2x+1 \end{cases}$$

$y = \sqrt{\sin^3(2x^2+1) - 1}$

$$\begin{cases} y = \sqrt{u} \\ u = t^3 - 1 \\ t = \sin v \\ v = 2x^2 + 1 \end{cases}$$

to nie f

to jest f

$h(x) = g(z)$

$z = u(x)$

$h(x) = g(u(x))$

$h = g \circ u$

$\circ$ ← symbol złożenia dwóch funkcji

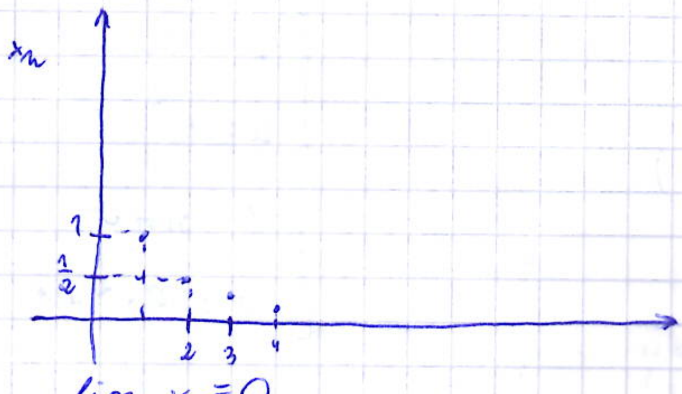
GRANICA ~~FUNKCJA~~ CIĄGU

granica to element, do którego się zbliżamy, ale go nie osiągamy.

ciąg liczbowy $N \to R$ przyporządkowanie liczbom naturalnym pewnych liczb rzeczywistych

$x_n = \frac{1}{n}$ każdej liczbie przyporządkowujemy jej odwrotność

n	1	2	3	4
x_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$



$\lim_{n \to \infty} x_n = 0$

lim = granica (limes)

$x_n = \frac{n}{n+1}$

n	1	2	3
x_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$

$\lim_{n \to \infty} x_n = 1$

$x_n = 1$ $\lim_{x_n \to \infty} = 1$ granica tutaj zostaje osiągnięta od razu

Granicą ciągu x_n, $x \to n$, $= g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\bigwedge_{\varepsilon > 0}$ ...

$$\lim_{n\to\infty} = g \iff \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{N(\varepsilon)} n > N_{(\varepsilon)} \Rightarrow |x_n - g| < \varepsilon$$

$\varepsilon = 2$ $N = 1$ zawsze już od pierwszego jest mniejsze od 2

$\varepsilon = 0{,}7$ $N = 2$ od drugiego wyrazu

$\varepsilon = 0{,}1$ $N = 11$

$\varepsilon = 0{,}01$ $N = 101$

$\boxed{N = \frac{1}{\varepsilon}}$ $\left(N = \underbrace{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]}_{\text{część całkowita}} + 1\right)$

$x_n = (-1)^n$ Granica nie istnieje:

$(-1)^1 = -1$

$(-1)^2 = 1$

$(-1)^3 = -1$

$-1, 1, -1, 1, -1, 1$ ← Ten ciąg waha się od -1 do 1, i nie będzie miał granicy.

Nie każdy ciąg musi mieć granicę

$x_n = 5 + \frac{3}{n^2}$ $\lim_{n\to\infty}\left(5 + \frac{3}{n^2}\right) = 5$ $\frac{3}{n^2} \to 0$ (będzie dążyło do 0)

$x_n = \frac{3n-1}{n+2}$ $\lim \frac{\cancel{n}\left(3 - \frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}\left(1 + \frac{2}{n}\right)} = \underline{3}$ $\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{2}{n} \to 0$

$x_n = \frac{5n^2 + 6n - 7}{3n^2 - n + 6} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(5 + \frac{6}{n} - \frac{7}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(3 - \frac{1}{n} + \frac{6}{n^2}\right)} = \frac{5}{3}$

$$x_n = \frac{5n^3 + 6n - 7}{3n^2 - n + 6} = \frac{n^{\cancel{3}}\left(5 + \frac{6}{n^2} - \frac{7}{n^3}\right)}{n^{\cancel{2}}\left(3 - \frac{1}{n} + \frac{6}{n^2}\right)} = n\,\frac{5}{3} = \infty$$

$\to 0$ $\quad \to 0$

bo $n \to \infty$

$x_n = 2^n$ będzie ciąg wykładniczo, bo potęga wykładnicza

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$

$x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$ → mianownik dąży do nieskończoności

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$

$$\boxed{\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e}$$

2; 2,25; ... $e = 2{,}71$

$i = \sqrt{-1}$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} = \left[\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^3 = e^3$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^n = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{5n}\right)^{5n}\right]^{\frac{1}{5}} \qquad e^{\frac{1}{5}}$$

$$\lim \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{4n} = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^2 = e^2$$

GRANICA FUNKCJI — oznaczamy tak samo

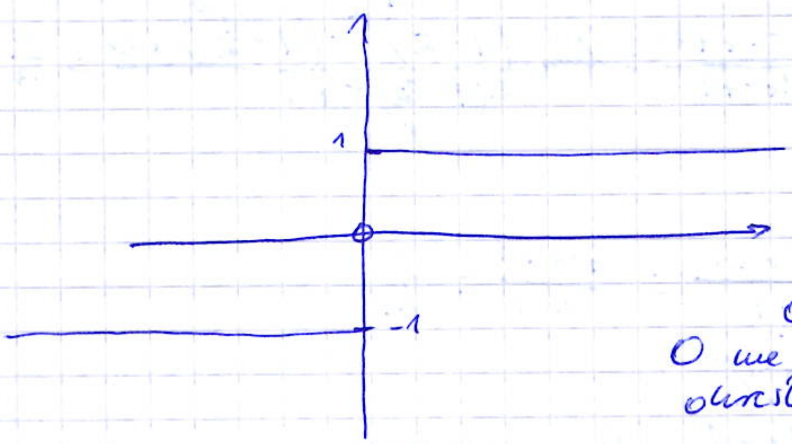
$\lim_{x \to x_0} f(x)$ definiujemy granicę f poprzez granicę ciągu

$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = g$

f ma granicę, jeżeli jakkolwiek byśmy nie wybrali ciągu x_n to dla każdego tego ciągu granica ciągu liczbowego musi być taka sama.

$y = \text{sign}(x)$ signum = znak

f przyporządkowuje liczbie jej znak ($1 \vee -1$)
Dla dodatnich $+1$
Dla ujemnych -1



dla 0 jest nieokreślona
bo 0 nie ma znaku
0 nie ma wartości
0 nie leży w dziedzinie określoności tej f

$\lim_{x \to 0} f(x)$

$x_n = \frac{1}{n}$

$\lim_{(n \to \infty)} \text{sign}\left(\frac{1}{n}\right) = 1$

$x_n = -\frac{1}{n}$

$\lim_{n \to \infty} \text{sign}\left(-\frac{1}{n}\right) = -1$

Granica sumy 2 f jest równa sumie granic
Granica iloczynu ... iloczynowi ...
Granica ilorazu ... ilorazowi ...

$$\lim_{x \to 5} \frac{2x+3}{x-1} = \frac{13}{4}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x+3}{x-1} = \frac{\cancel{x}\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{1}{\cancel{x}}\right)} = 2$$

19.12.2018 GRANICA FUNKCJI

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-x+2}{2x^2+1}$$

$$x_n = 1 - \frac{1}{n} \qquad \lim_{n \to \infty} x_n = 1$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-x+2}{2x^2+1} = \lim \frac{\left(1-\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}\right)^2 - \left(1-\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}\right)+2}{2\left(1-\underset{0}{\underset{\downarrow}{\frac{1}{n}}}\right)^2+1} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-2x+1}{x-1} = \frac{4-4+1}{2-1} = 1$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\overbrace{x^2-2x+1}^{(x-1)^2}}{x-1} = \frac{0}{0}$$ wyrażenie nieoznaczone

$$(a \pm b)^2 = (a^2 \pm 2ab + b^2)$$

POCHODNA FUNKCJI

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+\overset{h\to 0}{h}) - f(x)}{h}$$

granica ilorazu różnicowego to pochodna funkcji

$$\Downarrow$$

daje nam to znowu wyrażenie nieoznaczone, a więc istotą tutaj jest nieoznaczoność

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

y to nasza funkcja $f(x)$

$$y = f(x)$$
$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

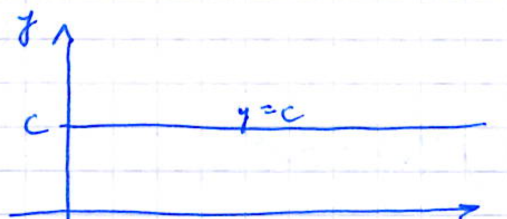
przyrost wartości w stosunku do przyrostu wartości

Pochodna mierzy tempo $\underbrace{\text{wzrostu}}_{\text{zmiana wartości}}$ (malenia) funkcji

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \nearrow \text{różniczka}$$

Funkcja stała

$$f(x) = c$$



$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\overset{0}{\widetilde{c-c}}}{h} = 0.$$

Tempo wzrostu f stałej jest zerowe

Funkcja liniowa

$$f(x) = x$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x} + h - \cancel{x}}{h} = \frac{h}{h} = \underline{1}.$$

Funkcja kwadratowa

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{\cancel{h}} = 2x + h =$$ znika nieoznaczoność

$$= 2x$$

$$f(x) = x^3$$

trzecia potęga dwumianu:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b \mp 3ab^2 \pm b^3$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3 + b^2 + b^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ Funkcje potęgowe

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ log naturalny Funkcje wykładnicze

$(e^x)' = e^x$ e-liczba naturalna

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(tg(x))' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(ctg x)' - \frac{1}{\sin^2 x}$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ log naturalny

$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g(x)$

$[a \cdot f(x)]' = a \cdot f'(x)$

Pochodna jest operatorem liniowym. Pochodna z sumy jest równa sumie pochodnych

$(x^3 - 2x^2 + x - 1)' = 3x^2 - 2 \cdot 2x + 1 + 0 = 3x^2 - 4x + 1$

$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2 \cdot x^{-2-1} = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

Pochodna to kąt nachylenia stycznej