# Parabolická evoluční úloha ve 2D

Vladislav Belov

FJFI ČVUT

7. prosince 2017

# Obsah

# Obsah

# Úvod

**Cíl:**

Aproximace řešení parabolické PDR ve 2D pomocí metody Monte Carlo.

Buďte $u : (0, T) \times \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$, kde $T \in \mathbb{R}$, $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, $D > 0$, pak počáteční úloha vypadá následovně:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u - D \cdot \triangle u &= f, \\ u|_{\partial \Gamma} &= g, \\ u|_{t=0} &= h. \end{aligned}$$

**Zjednodušení:**

$$f \equiv 0;$$
$$\Gamma = (-b, b) \times (-b, b),\ b \in \mathbb{R}.$$

# Obsah

# Trochu numerické matematiky (1)

**Numerická matematika $\implies$ pro danou počáteční úlohu existuje tzv. *explicitní* diferenční schéma:**

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k}}{\tau} = D \cdot \Big(\frac{u_{i+1,j}^{k} - 2u_{i,j}^{k} + u_{i-1,j}^{k}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1}^{k} - 2u_{i,j}^{k} + u_{i,j-1}^{k}}{h^2}\Big),$$
$$\forall (i,j) \in \omega_h,\ \forall k \in \{0, 1, \ldots, N_T - 1\};$$

$$u_{i,j}^{k} = g_{i,j}, \forall (i,j) \in \overline{\omega}_h \setminus \omega_h,\ \forall k \in \{0, 1, \ldots, N_T\};$$
$$u_{i,j}^{0} = h_{i,j},\ \forall (i,j) \in \overline{\omega}_h.$$

Zvolíme-li vhodný poměr $\frac{\tau}{h^2}$ a položíme-li $D = 1$, dostaneme určité *stabilní* explicitní schéma...

# Trochu numerické matematiky (2)

## Stabilní explicitní diferenční schéma:

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1,j}^{k} + u_{i-1,j}^{k} + u_{i,j+1}^{k} + u_{i,j-1}^{k}\right),$$
$$\forall (i,j) \in \omega_h,\ \forall k \in \{0, 1, \ldots, N_T - 1\};$$

$$u_{i,j}^{k} = g_{i,j}, \forall (i,j) \in \overline{\omega}_h \setminus \omega_h,\ \forall k \in \{0, 1, \ldots, N_T\};$$
$$u_{i,j}^{0} = h_{i,j},\ \forall (i,j) \in \overline{\omega}_h.$$

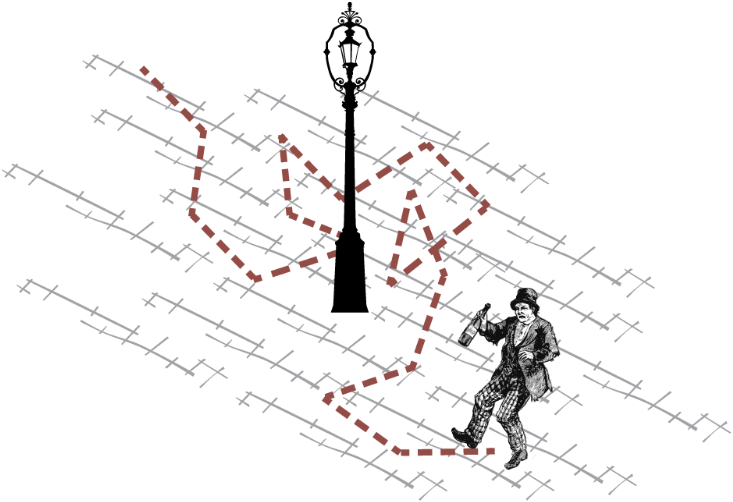
## Chyba aproximace:

$$O(\tau + h^2).$$

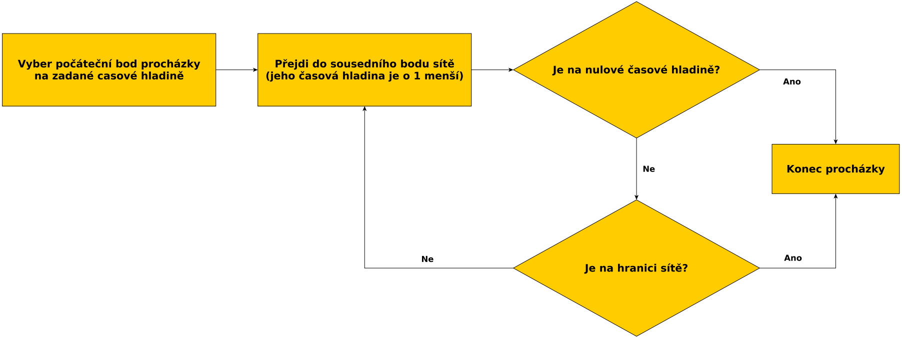
# Obsah

# *N*-krát se náhodně projdeme po síti...

... a aproximujeme hodnotu řešení v jednom bodě



# Průběh jedné simulace



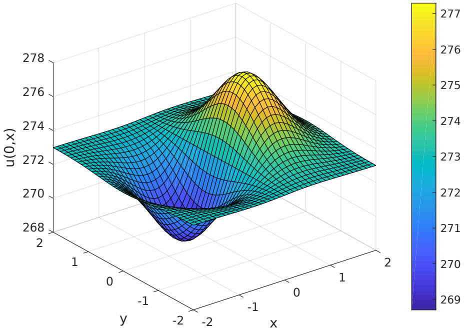

$W_{ini}$ - počáteční bod náhodné procházky, $W_{fin}$ - její konečný bod, pak definujeme náhodnou veličinu $Y_{W_{ini}}$ následovně:

- $Y_{W_{ini}} = h(W_{fin})$, pokud $W_{fin} \in \omega_h$, ale $W_{fin} \notin \overline{\omega}_h$;
- $Y_{W_{ini}} = g(W_{fin})$, pokud $W_{fin} \in \overline{\omega}_h \setminus \omega_h$.

# Obsah

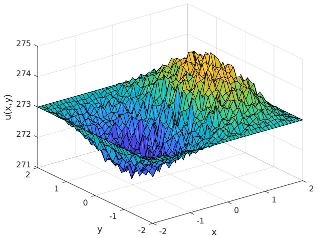
# Nastavení parametrů:

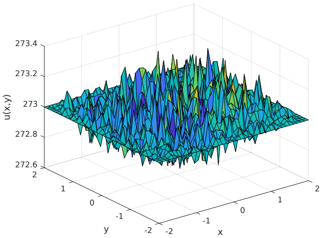
- krok sítě: $h = 0.1$;
- časové hladiny: $k_0 \in \{50, 250\}$;
- okrajová podmínka: $g \equiv 273$;
- počáteční podmínka: $u(0, x) = h(x) = 10x \cdot \exp(-x^2 - y^2) + 273$.

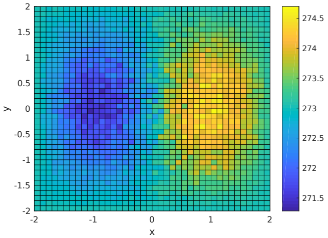


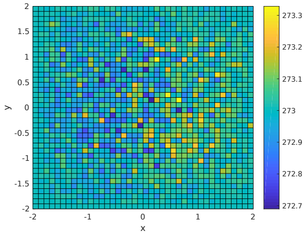
# Počet simulací $N = 100$

## časové hladiny $k_0 = 50$ (vlevo) a $k_0 = 250$ (vpravo)



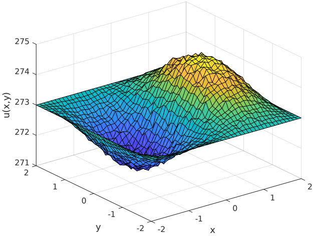



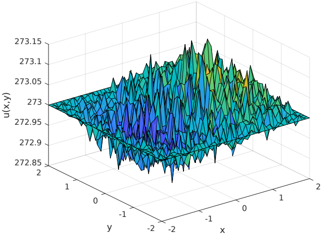



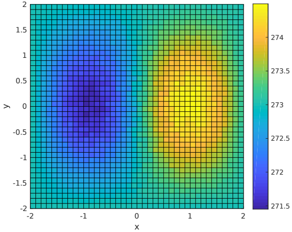



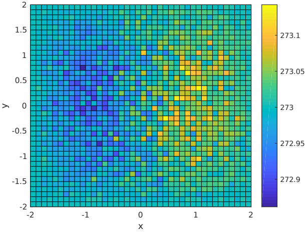
# Počet simulací $N = 1000$

## časové hladiny $k_0 = 50$ (vlevo) a $k_0 = 250$ (vpravo)



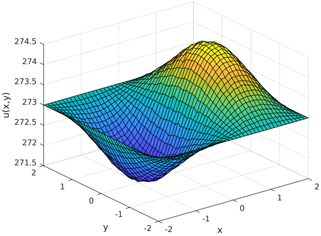



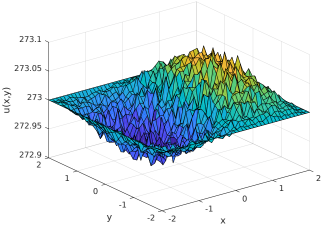



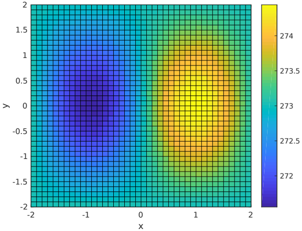



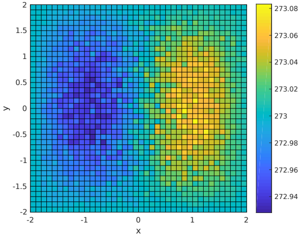
# Počet simulací $N = 10000$

## časové hladiny $k_0 = 50$ (vlevo) a $k_0 = 250$ (vpravo)



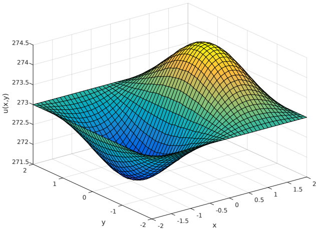



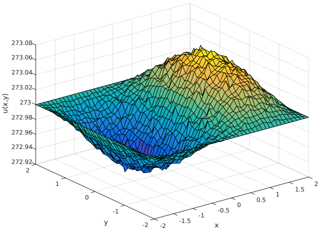



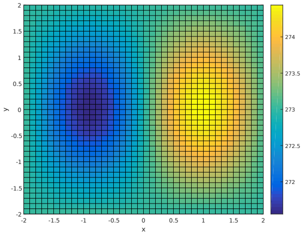



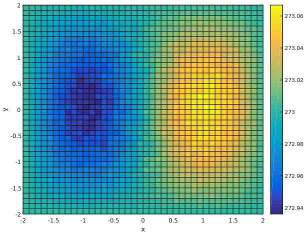
# Počet simulací $N = 100000$

## časové hladiny $k_0 = 50$ (vlevo) a $k_0 = 250$ (vpravo)



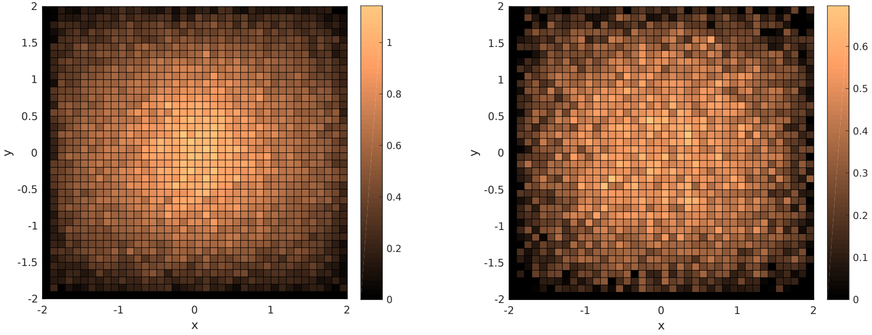



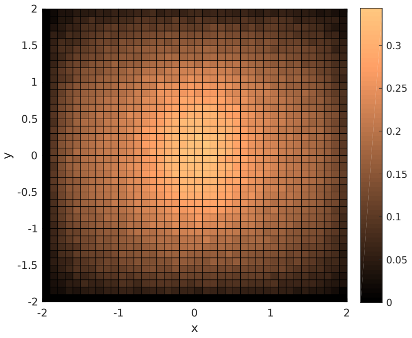
# Počet simulací $N = 100$

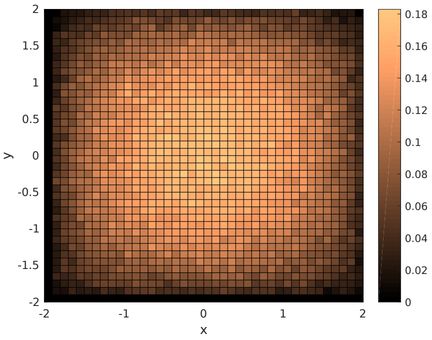
časové hladiny $k_0 = 50$ (vlevo) a $k_0 = 250$ (vpravo); hladina významnosti - 5%



# Počet simulací $N = 1000$

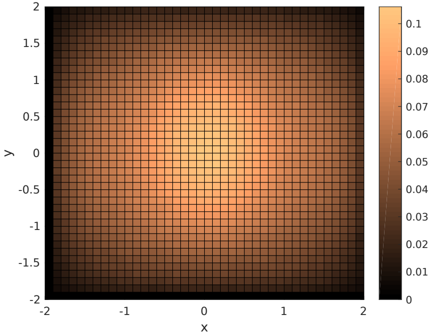
časové hladiny $k_0 = 50$ (vlevo) a $k_0 = 250$ (vpravo); hladina významnosti - 5%

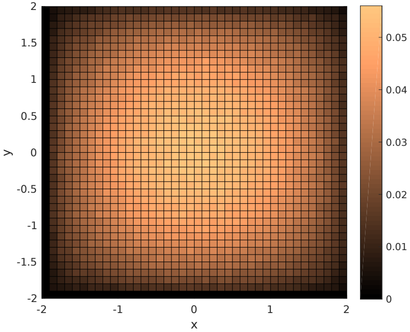


# Počet simulací $N = 10000$

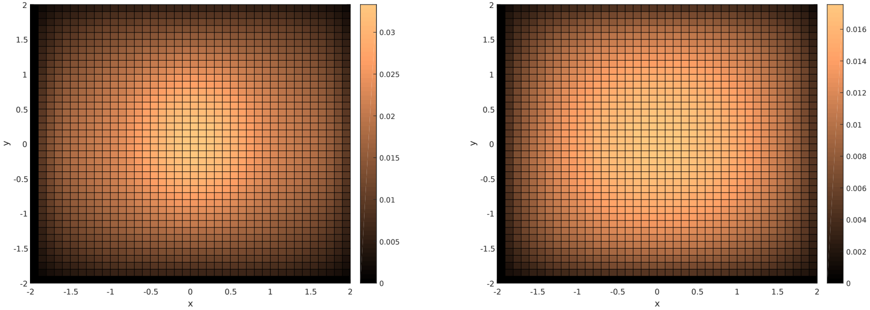
## časové hladiny $k_0 = 50$ (vlevo) a $k_0 = 250$ (vpravo); hladina významnosti - 5%



# Počet simulací $N = 100000$

## časové hladiny $k_0 = 50$ (vlevo) a $k_0 = 250$ (vpravo); hladina významnosti - 5%



# Maximální chyba aproximace

## na hladině významnosti 5%

| Počet simulací, $N$ | Max. chyba, $k_0 = 50$ | Max. chyba, $k_0 = 250$ |
|---|---|---|
| $10^2$ | 1.1434 | 0.6963 |
| $10^3$ | 0.3433 | 0.1830 |
| $10^4$ | 0.1061 | 0.0560 |
| $10^5$ | 0.0333 | 0.0176 |

Tabulka 1 : Maximální chyba aproximace řešení diskretizované parabolické evoluční úlohy pro časové hladiny $k_0 \in \{50, 250\}$.

Děkuji za pozornost.