

FJFI ČVUT

METODA MONTE CARLO

SEMINÁRNÍ PRÁCE

Parabolická evoluční úloha ve 2D

Autor
Vladislav BELOV

4. prosince 2017

1 Úvod

Znalosti způsobů řešení různých diferenciálních rovnic je podstatná pro každého, kdo je aspoň nějak spojen s vědou a technikou. Tato seminární práce se zabývá řešením parabolické diferenciální rovnice popisující vedení tepla ve dvou dimenzích pomocí metody Monte Carlo.

Obecně parabolická evoluční úloha ve 2D na oblasti $(0, T) \times \Gamma$, kde $T \in \mathbb{R}_+$ a $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, vypadá následovně:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) - D \cdot \Delta u(t, x) &= f(t, x), \\ u|_{\partial\Gamma} &= g(x), \\ u(0, x) &= h(x). \end{aligned} \tag{1}$$

V dané notaci funkce $u = u(t, x)$ popisuje rozložení teploty na oblasti Γ (tj. $x \in \Gamma \subset \mathbb{R}^2$) v časech $t \in (0, T)$, D je termální difuzivita ($D > 0$), $g = g(x)$ je okrajová podmínka evoluční úlohy $\forall t \in (0, T)$ a $h = h(x)$ je počáteční podmínka. V rámci této seminární práce položíme pravou stranu $f \equiv 0$.

2 Diskretizace úlohy

V numerické matematice se podobné úlohy řeší pomocí metody konečných diferencí (metody sítí), která spočívá v diskretizaci oblasti $(0, T) \times \Gamma$ a konstrukci diferenčního schématu (viz [Ben17]). Pro jednoduchost budeme hledat řešení úlohy (1) na čtverci $\Gamma = (-b, b) \times (-b, b)$, $b > 0$, pak lze definovat na uzavřeném čtverci $\bar{\Gamma}$ čtvercovou síť $\bar{\omega}_h$ s krokem $h > 0$, tj. $\Gamma \leftrightarrow \omega_h$ a $\partial\Gamma \leftrightarrow \bar{\omega}_h \setminus \omega_h$. Potom, rozdělíme-li interval $[0, T]$ na časové hladiny s krokem $\tau = \frac{T}{N_T}$, kde N_T je počet hladin, a označíme-li $u_{i,j}^k$ hodnoty funkce u na časových hladinách $k \in \{0, 1, \dots, N_T\}$ pro všechny (i, j) body sítě $\bar{\omega}_h$, dostaneme podle [Ben17] následující diferenční schéma:

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\tau} &= D \cdot \left(\frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{h^2} + \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{h^2} \right), \forall (i, j) \in \omega_h, \forall k \in \{0, 1, \dots, N_T - 1\}; \\ u_{i,j}^k &= g_{i,j}, \forall (i, j) \in \bar{\omega}_h \setminus \omega_h, \forall k \in \{0, 1, \dots, N_T\}; \\ u_{i,j}^0 &= h_{i,j}, \forall (i, j) \in \bar{\omega}_h. \end{aligned} \tag{2}$$

Takovému-to diferenčnímu schématu se říká *explicitní* a jeho chyba aproximace je $O(\tau + h^2)$. Budeme-li volit kroky τ a h v poměru $\frac{h^2}{\tau} = 4$ a položíme-li $D = 1$, pak (2) se přepíše následovně:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^k &= \frac{1}{4} (u_{i+1,j}^{k-1} + u_{i-1,j}^{k-1} + u_{i,j+1}^{k-1} + u_{i,j-1}^{k-1}), \forall (i, j) \in \omega_h, \forall k \in \{0, 1, \dots, N_T - 1\}; \\ u_{i,j}^k &= g_{i,j}, \forall (i, j) \in \bar{\omega}_h \setminus \omega_h, \forall k \in \{0, 1, \dots, N_T\}; \\ u_{i,j}^0 &= h_{i,j}, \forall (i, j) \in \bar{\omega}_h. \end{aligned} \tag{3}$$

Stojí za zmínění, že schéma (3) je stabilní, neboť podmínka stability pro (2) má tvar:

$$\frac{1}{2} \geq D \cdot \frac{\tau}{h^2}.$$

Získanou soustavu lineárních algebraických rovnic budeme řešit pomocí metody Monte Carlo.

3 Algoritmus výpočtu aproximace

Postup pro řešení soustavy rovnic (3) získané diskretizací úlohy (1) je velmi jednoduchý - použijeme lehce upravenou náhodnou procházku. Aproximaci $u_{i,j}^{k_0}$ pro jistou pevnou časovou hladinu $k_0 \in \{0, 1, \dots, N_T\}$ dostaneme jako výběrovou střední hodnotu jisté náhodné veličiny $Y_{W_{ini}}$ definované následujícím způsobem ([Vir10]):

1. označíme počáteční bod náhodné procházky $W_{ini} = (i, j) \in \omega_h$, který se nachází na časové hladině k_0 ;
2. z bodu W_{ini} přejde náhodná procházka s pravděpodobností $\frac{1}{4}$ do libovolného sousedního bodu, který je na časové hladině $k_0 - 1$;
3. pokud je náhodná procházka stále ve vnitřním bodě sítě $\bar{\omega}_h$ a není na nulové časové hladině, vrátíme se na krok 2, jinak jdeme na krok 4;
4. označíme-li W_{fin} bod sítě, ve kterém se nachází náhodná procházka v daném okamžiku, pak definujeme náhodnou veličinu $Y_{W_{ini}}$ takto:
 - $Y_{W_{ini}} = h(W_{fin})$, pokud $W_{fin} \in \omega_h$, ale $W_{fin} \notin \bar{\omega}_h$;
 - $Y_{W_{ini}} = g(W_{fin})$, pokud $W_{fin} \in \bar{\omega}_h \setminus \omega_h$.

Zopakujeme-li tento postup pro všechny body $(i, j) \in \omega_h$, dostaneme aproximaci¹ řešení diferenčního schématu (3).

Označíme-li $\hat{\mu}$ výběrovou střední hodnotu náhodné veličiny Y_W pro všechna W a \hat{s}^2 její výběrový rozptyl, potom chybu δ vypočítané aproximace nalezneme pomocí vzorce, který přímo vyplývá z Čebyševovy nerovnosti:

$$\delta = |EY_W - \hat{\mu}| = \sqrt{\frac{\hat{s}^2}{N \cdot \varepsilon}}, \quad (4)$$

kde N je počet simulací v rámci metody Monte Carlo (tzn. $N \equiv$ počet náhodných procházek vycházejících z bodu W sítě ω_h) a $0 < \varepsilon < 1$ je hladina významnosti.

4 Implementace

Součástí této seminární práce je také implementace v programovacím jazyce Matlab, která se skládá z čtyř souborů. Tři z nich obsahují definice funkcí, jež budou popsány podrobněji v následujících podsekcích. V čtvrtém souboru `main.m` lze nalézt pouze vyvolání řešiče rovnice vedení tepla, který je implementován v `parabolicPDESolver.m`.

4.1 Funkce `parabolicPDESolver`

Tato funkce odpovídá za výpočet aproximace řešení diferenčního schématu (2) podle algoritmu popsaného v sekci 3.

- Vstupní parametry:
 - `numOfSim` - číslo simulací v rámci metody Monte Carlo;
 - `b` - číslo $b > 0$ určující oblast $\Gamma = (-b, b) \times (-b, b)$;
 - `meshStep` - krok h sítě $\bar{\omega}_h$;
 - `maxTime` - časová hladina k_0 , pro niž hledáme aproximaci řešení;
 - `verbose` - parametr podrobného výpisu.
- Výstupní parametry:
 - `solution` - hledaná aproximace řešení (3);
 - `solutionErr` - chyba aproximace.

¹Ve zdroji [Vir10] lze nalézt důkaz toho, že střední hodnoty Y_W pro všechna W řeší soustavu rovnic (3).

4.2 Funkce `meshRandomWalk`

Tato funkce odpovídá za simulaci náhodné procházky na síti $\bar{\omega}_h$ definované v sekci 2.

- Vstupní parametry:
 - `xStartPos` - x-ová souřadnice bodu W_{ini} ;
 - `yStartPos` - y-ová souřadnice bodu W_{ini} ;
 - `meshStep` - analogický význam jako v podsekcí 4.1;
 - `b` - analogický význam jako v podsekcí 4.1;
 - `maxTime` - analogický význam jako v podsekcí 4.1;
- Výstupní parametry:
 - `xFinPos` - x-ová souřadnice bodu W_{fin} ;
 - `yFinPos` - y-ová souřadnice bodu W_{fin} .

4.3 Funkce `calcStats`

Tato funkce odpovídá za výpočet statistických vlastností náhodné veličiny Y_W definované v sekci 3.

- Vstupní parametry:
 - `rv` - vektor hodnot náhodné veličiny Y_W ;
 - `signLvl` - hladina významnosti;
 - `verbose` - parametr podrobného výpisu.
- Výstupní parametry:
 - `ex` - výběrová střední hodnota náhodné veličiny Y_W ;
 - `dx` - výběrový rozptyl náhodné veličiny Y_W ;
 - `err` - chyba aproximace.

5 Simulace a výsledky

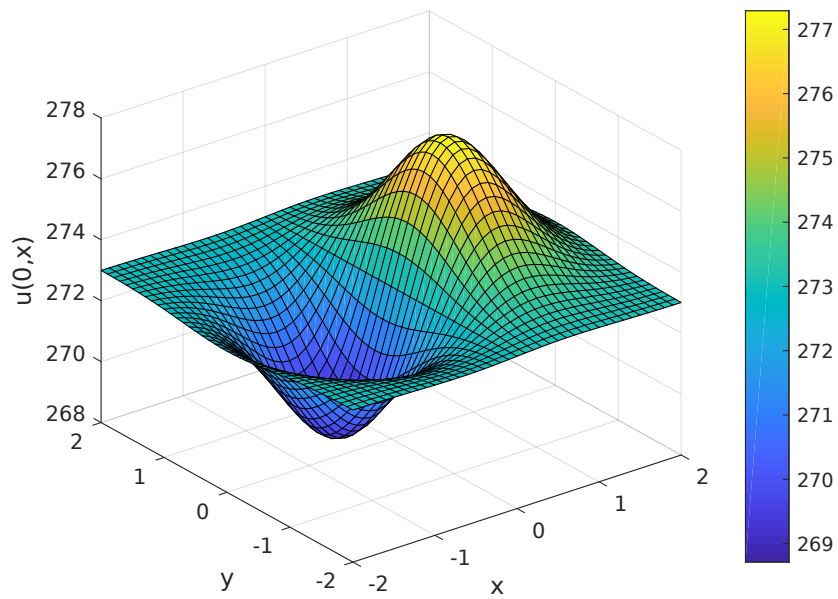
Pro demonstraci funkčnosti algoritmu uvedeného v sekci 3 a jeho implementace popsané v sekci 4 okrajová a počáteční podmínky úlohy (1) byly zvoleny v následujícím tvaru²:

$$u|_{\partial\Gamma} = g(x) = 273; \quad (5)$$

$$u(0, x) = h(x) = 10x \cdot \exp(-x^2 - y^2) + 273. \quad (6)$$

Počáteční podmínka (6) popisuje rozložení teploty na čtverci $\bar{\Gamma}$ v čase $t = 0$; toto rozložení je znázorněno na Obr. 1. Čekali bychom, že by časem pozorovaný systém měl prostřednictvím šíření tepla dosáhnout nějaké střední teploty na celém čtverci $\bar{\Gamma}$.

²Kdyby byla potřeba, v implementačním souboru lze tyto podmínky snadno měnit.



Obrázek 1: Grafické znázornění počáteční podmínky (6).

Reference

- [Ben17] M. Beneš. Numerická matematika 2. Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská Českého vysokého učení technického v Praze (FJFI ČVUT), 2017.
- [Vir10] M. Virius. *Metoda Monte Carlo*. Skripta. České vysoké učení technické, 2010.