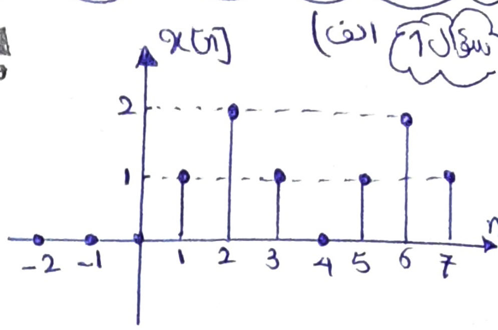
100

به نام خدا

حل تکالیف سری ششم - درس سیگنال ها و سیستم ها

محمدرضا چیاری

سوال ۱) الف)



در این مسئله با محاسبه تبدیل Z یک سیگنال نیمه متناوب یا متناوب یکطرفه روبرو هستیم. در ابتدا قطار ضربه نیمه متناوب p[n] را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$p[n]=\sum_{k=0}^{+\infty}\delta[n-kN]$$

واضح است که دوره تناوب این سیگنال N بوده و برای n<0 صفر است. تبدیل Z این سیگنال برابر است با:

$$P(Z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}p[n]Z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}\delta[n-kN]\Big)Z^{-n}$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\delta[n-kN]Z^{-n}\Big)=\sum_{k=0}^{+\infty}Z^{-kN}=\sum_{k=0}^{+\infty}(Z^{-N})^{k}\underset{\text{تصاعد هندسی}}{=}\frac{1}{1-Z^{-N}}\ ,\ |Z^{-N}|<1$$

$$\rightsquigarrow P(Z)=\frac{1}{1-Z^{-N}}\ ,\ |Z|>1$$ رابطه 1

دقت کنید که ناحیه همگرایی قطار ضربه نیمه متناوب خارج از دایره واحد بوده و تمام قطب های آن روی دایره واحد قرار دارند.

حال فرض کنید x[n] یک سیگنال نیمه متناوب با دوره تناوب N است. اگر $x_N[n]$ بیانگر x[n] در یک دوره تناوبش باشد در این صورت تبدیل Z سیگنال x[n] برابر است با:

$$x[n]=\sum_{k=0}^{+\infty}x_N[n-kN]=x_N[n]+x_N[n-N]+\cdots$$

$$=x_N[n]*\sum_{k=0}^{+\infty}\delta[n-kN]$$

اگر از دو طرف رابطه فوق تبدیل Z بگیریم:

$$X(Z)=X_N(Z)\frac{1}{1-Z^{-N}}\ ,\ ROC=ROC\{X_N(Z)\}\cap ROC\{P(Z)\}=|Z|>1$$ رابطه 2

از آنجایی که $x_N[n]$ یک سیگنال دوره محدود و علی است پس ناحیه همگرایی آن کل صفحه Z به جز Z=0 است

طبق رابطه 1: |Z|>1

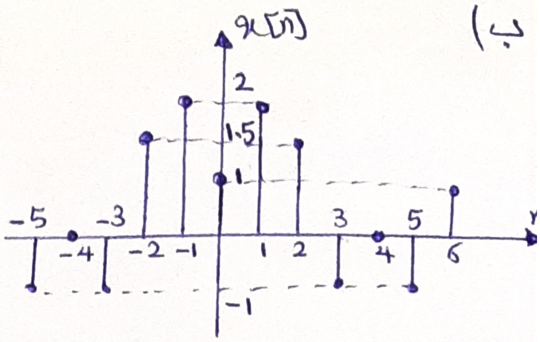
با توجه به مطالب گفته شده، تبدیل Z سیگنال داده شده در صورت مسئله را به راحتی محاسبه خود.

$$x_N[n]=\delta[n-1]+2\delta[n-2]+\delta[n-3]\rightsquigarrow X_N(Z)=Z^{-1}+2Z^{-2}+Z^{-3}$$

$$\rightsquigarrow X(Z)=\frac{X_N(Z)}{1-Z^{-N}}=\frac{Z^{-1}+2Z^{-2}+Z^{-3}}{1-Z^{-4}}\ ,\ |Z|>1$$

صفحه 2 / 3

ب)



$N=8 \rightsquigarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{4}$

$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{8}\sum_{n=-4}^{n=3} x[n] e^{-jk\frac{\pi}{4}n}$

$= \frac{1}{8}\Big[(-1)e^{jk\frac{3\pi}{4}} + (\frac{3}{2})e^{jk\frac{\pi}{2}} + (2)e^{jk\frac{\pi}{4}} + 1$

$+ (2)e^{-jk\frac{\pi}{4}} + (\frac{3}{2})e^{-jk\frac{\pi}{2}} + (-1)e^{-jk\frac{3\pi}{4}}\Big]$

$= \frac{1}{8}\Big[\underbrace{-2\cos(k\frac{3\pi}{4})}_{-2(-1)^k\cos(\frac{k\pi}{4})} + 3\cos(\frac{k\pi}{2}) + 4\cos(\frac{k\pi}{4}) + 1\Big]$

$= \frac{1}{8}\Big[2\big((-1)^{k+1}+2\big)\cos(\frac{k\pi}{4}) + 3\cos(\frac{k\pi}{2}) + 1\Big]$

سؤال 2

الف-1) $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] * 2^n u[-n-1] = x_1[n] * x_2[n]$

$X_1(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z|>\frac{1}{2}$

$\rightsquigarrow X_1(z)X_2(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})}$

$X_2(z) = -\frac{1}{1-2z^{-1}}, \quad |z|<2$

$ROC \geqslant ROC_1 \cap ROC_2 \rightsquigarrow ROC: \frac{1}{2}<|z|<2$

مشابه آنچه در تبدیل لاپلاس بیان شد در صورتی تساوی برقرار است که
هیچ حذف قطبی رخ نداده باشد

الف-2) $x[n] = (\frac{1}{2})^{|n|}\big(u[n+9]-u[n-9]\big)$

if $x_1[n] \triangleq (\frac{1}{2})^n, \quad 1\leqslant n\leqslant 9 \rightsquigarrow x[n] = x_1[n] + x_1[-n] + \delta[n]$

$\rightsquigarrow X(z) = X_1(z) + X_1(z^{-1}) + 1$

$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n]z^{-n} = \sum_{n=1}^{9}(\frac{1}{2})^n z^{-n} = \sum_{n=1}^{9}(\frac{1}{2z})^n = \frac{(\frac{1}{2z})^1 - (\frac{1}{2z})^{10}}{1-\frac{1}{2z}}, \quad |\frac{1}{2z}|<1$

$= \frac{(\frac{z^{-1}}{2}) - (\frac{z^{-1}}{2})^{10}}{1-\frac{z^{-1}}{2}}, \quad |z|>\frac{1}{2}$

$\rightsquigarrow X(z) = \frac{(z^{-1}/2) - (z^{-1}/2)^{10}}{1-\frac{z^{-1}}{2}} + \frac{(\frac{z}{2}) - (\frac{z}{2})^{10}}{1-\frac{z}{2}} + 1 \quad ✓ \quad ROC = \frac{1}{2}<|z|<2$

صفحه 3

3 - الف) $x[n] = 4^n \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) u[-n-1]$

$$x[n] = 4^n \left(\frac{e^{j\frac{n\pi}{3}} + e^{-j\frac{n\pi}{3}}}{2}\right) u[-n-1] = \frac{1}{2} e^{j\frac{n\pi}{3}} 4^n u[-n-1] + \frac{1}{2} e^{-j\frac{n\pi}{3}} 4^n u[-n-1]$$

$$= x_1[n] + x_2[n]$$

$$4^n u[-n-1] \xrightarrow{Z} \frac{-1}{1-4z^{-1}} \ , \ |z|<4$$

! می‌دانیم $(z_0^n)\, x[n] \xrightarrow{Z} X\left(\frac{z}{z_0}\right) \ , \ \alpha|z_0|<|z|<\beta|z_0|$

$\alpha<|z|<\beta$

با توجه به خاصیت فوق داریم:

$$\frac{1}{2} e^{j\frac{n\pi}{3}} 4^n u[-n-1] \xrightarrow{Z} \frac{1}{2} \times \frac{-1}{1-4e^{j\frac{\pi}{3}} z^{-1}} \ , \ |z| < \underbrace{|e^{j\frac{\pi}{3}}|}_{1}\, 4 = 4$$

$$\frac{1}{2} e^{-j\frac{n\pi}{3}} 4^n u[-n-1] \xrightarrow{Z} \frac{1}{2} \times \frac{-1}{1-4e^{-j\frac{\pi}{3}} z^{-1}} \ , \ |z|<4$$

$$\Rightarrow \boxed{X(z) = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-4e^{j\frac{\pi}{3}} z^{-1}} + \frac{1}{1-4e^{-j\frac{\pi}{3}} z^{-1}}\right] \ , \ |z|<4} \ ✓$$

! در خاصیت جابجایی فرکانسی تبدیل Z ، وقتی سیگنال در $(z_0)^n$ ضرب می‌شود ناحیه همگرایی تبدیل Z در $|z_0|$ ضرب می‌گردد. در این سوال چون $|e^{-j\frac{\pi}{3}}| = |e^{j\frac{\pi}{3}}| = 1$ است پس ناحیه همگرایی تغییر نکرد.

---

4 - الف) $x[n] = |n| \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$

$$x[n] = n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - n\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n] = x_1[n] + x_1[-n]$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xrightarrow{Z} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \ , \ |z|>\frac{1}{2}$$

در خاصیت مشتق گیری از تبدیل Z ، ناحیه همگرایی تغییر نمی‌کند

$$n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xrightarrow{Z} -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right) = \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2} \ , \ |z|>\frac{1}{2}$$

$$-n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xrightarrow[\text{وارونگی زمان}]{Z} \frac{\frac{1}{2}z}{(1-\frac{1}{2}z)^2} \ , \ |z|<2$$

در خاصیت وارونگی زمان ، ناحیه همگرایی نیز معکوس می‌شود

$$\Rightarrow X(z) = X_1(z) + X_1(z^{-1}) = \frac{1}{2}\left[\frac{z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2} + \frac{z}{(1-\frac{1}{2}z)^2}\right] \ , \ \boxed{\frac{1}{2}<|z|<2} \ ✓$$

آگر دوره تناوب اصلی درصورت مسئله داده نشده بود خودتان باید آن را محاسبه کنید.

ب-1) $x[n] = 1 + \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

$$= 1 + \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = x_1[n] + x_2[n] + x_3[n]$$

درابتدا باید دوره تناوب اصلی سیگنال را بدست آوریم:

$$N_2 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} m = 4m \xrightarrow[m\in\mathbb{Z}]{m=1} N_2 = 4$$

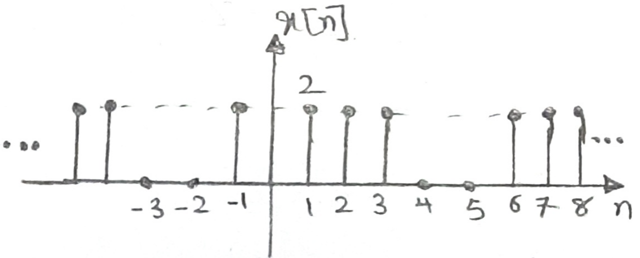
$$N_3 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} m = 8m \xrightarrow[m\in\mathbb{Z}]{m=1} N_3 = 8$$

$$\rightarrow N_0 = \operatorname{lcm}(4,8) = 8 \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} = \frac{\pi}{4}$$

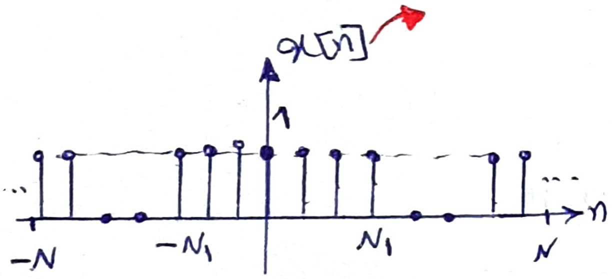
$$x[n] = 1 + e^{j\frac{\pi}{4}} e^{j2(\frac{\pi}{4})n} + e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{-j2(\frac{\pi}{4})n} + \frac{1}{2j} e^{j(1)\frac{\pi}{4}n} - \frac{1}{2j} e^{-j(1)\frac{\pi}{4}n}$$

$$\rightarrow a_0 = 1 \,,\; a_2 = e^{j\frac{\pi}{4}} \,,\; a_{-2} = e^{-j\frac{\pi}{4}} \,,\; a_1 = \frac{1}{2j} \,,\; a_{-1} = -\frac{1}{2j}$$

ب-2) $x[n] = \begin{cases} 2 & -1 \le n \le 3 \\ 0 & 4 \le n \le 5 \end{cases}$ و $N = 7$



سیگنال پالس متناوب در حالت زمان گسسته



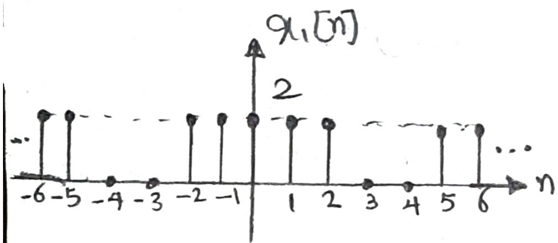
$2N_1 \triangleq$ عرض پالس

$N \triangleq$ دوره تناوب اصلی

در حالت کلی رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$\xrightarrow{F.S} a_k = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(k\pi \frac{2N_1+1}{N}\right)}{N \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right)} & k \ne 0, \pm N, \dots \\ \dfrac{2N_1+1}{N} & k = 0, \pm N, \dots \end{cases}$$

لذا با توجه به نکته فوق برای سیگنال داده شده در مسئله داریم:



$$\xrightarrow{F.S} b_k = \begin{cases} \dfrac{2}{7} \dfrac{\sin\left(k\pi \frac{5}{7}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)} & k \ne 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 2 \times \dfrac{5}{7} = \dfrac{10}{7} & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \end{cases}$$

$$x[n] = x_1[n-1] \rightarrow F.S\{x[n]\} = a_k = e^{-jk\frac{2\pi}{7}} b_k$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{7} e^{-jk\frac{2\pi}{7}} \dfrac{\sin\left(\frac{5\pi}{7}k\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)} & k \ne 7m ,\; m \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{10}{7} & k = 7m ,\; m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

صفحه 5

3

3-ب) $x[n] = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{3n\pi}{5}\right)$

$$x[n] = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{3n\pi}{5}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{3n\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{11n\pi}{10}\right)+\cos\left(\frac{n\pi}{10}\right)\right]$$

$$= x_1[n] + x_2[n]$$

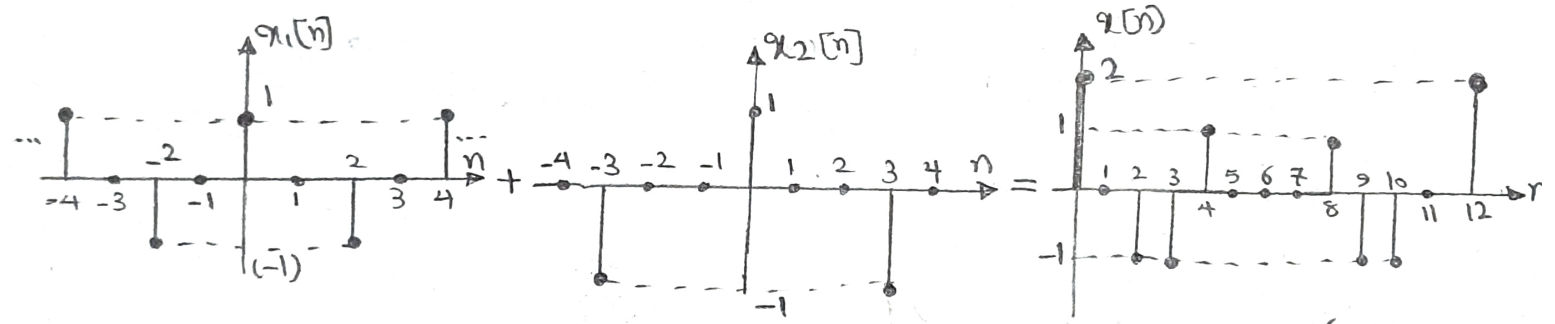
$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \frac{2\pi}{\frac{11\pi}{10}}m = \frac{20m}{11} \xrightarrow{m=11} N_1 = 20 \\ N_2 &= \frac{2\pi}{\frac{\pi}{10}} = 20m \xrightarrow{m=1} N_2 = 20 \end{aligned}\right\} \rightsquigarrow N_0 = \mathrm{Lcm}(N_1, N_2) = 20 \rightsquigarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} = \frac{\pi}{10}$$

$$\rightsquigarrow x[n] = \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_{11}} e^{j(11)\left(\frac{\pi}{10}\right)n} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_{-11}} e^{-j(11)\left(\frac{\pi}{10}\right)n} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_1} e^{j(1)\left(\frac{\pi}{10}\right)n} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_{-1}} e^{-j(1)\left(\frac{\pi}{10}\right)n}$$

4-ب) $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m \left(\delta(n-2m) + \delta(n+3m)\right)$

ابتدا شکل $x[n]$ را رسم می‌کنیم تا دوره تناوب اصلی آن مشخص شود:

$$x_1[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m \delta(n-2m) \quad و \quad x_2[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m \delta(n+3m)$$



پس دوره تناوب سیگنال $N=12$ بوده و $\omega_0 = \frac{\pi}{6}$ است.

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{12}\sum_{n=0}^{11} x[n]e^{-jk\frac{\pi}{6}n}$$

$$= \dots = \frac{1}{6}\left[1+\cos\left(\frac{2\pi}{3}k\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)\right]$$

سوال 3

1-الف) $X(z) = \mathrm{Ln}(1-2z)$ و $|z|\ \frac{1}{2}$

از $X(z)$ مشتق می‌گیریم:

$$\frac{dX(z)}{dz} = \frac{-2}{1-2z} = \frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \rightsquigarrow -z\frac{dX(z)}{dz} = \frac{-1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad , \quad |z|<\frac{1}{2}$$

از دو طرف عکس سری فوریه می‌گیریم:

$$\rightsquigarrow n x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] \rightsquigarrow x[n] = \frac{2^{-n}}{n}u[-n-1]$$

صفحه 6 / 3

2- الف) $X(Z) = \dfrac{Z^{-1}}{1-Z^{-1}-2Z^{-2}}$ و $1<|Z|<2$

$$X(Z) = \frac{Z^{-1}}{(1-2Z^{-1})(1+Z^{-1})} = \frac{A}{1-2Z^{-1}} + \frac{B}{1+Z^{-1}}$$

$$\left.\begin{aligned} A &= (1-2Z^{-1})X(Z)\Big|_{Z^{-1}=\frac{1}{2}} = \frac{1/2}{1+1/2} = \frac{1}{3} \\ B &= (1+Z^{-1})X(Z)\Big|_{Z^{-1}=-1} = \frac{-1}{1+2} = -\frac{1}{3} \end{aligned}\right] \rightsquigarrow X(Z) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1-2Z^{-1}} - \frac{1}{1+Z^{-1}}\right]$$

$ROC: 1<|Z|<2$

$$\rightsquigarrow x[n] = -\frac{1}{3}(2^n)u[-n-1] - \frac{1}{3}(-1)^n u[n] \checkmark$$

3- الف) $X(Z) = \dfrac{16Z^{-1}}{(1-Z^{-1})^2(1+3Z^{-1})}$ و $|Z|>3$

اگر $X(Z)$ دارای قطب مرتبه دوم یا بالاتر باشد، بهتر است که صورت و مخرج را در Z^m (m تعداد قطب ها) ضرب کرده و سپس تجزیه به کسرهای جزئی را انجام دهیم

$$X(Z) = \frac{16Z^2}{(Z-1)^2(Z+3)} = \frac{A}{(Z-1)^2} + \frac{B}{Z-1} + \frac{C}{Z+3}$$

$$A = (Z-1)^2 X(Z)\Big|_{Z=1} = \frac{16}{4} = 4$$

$$B = (Z+3)X(Z)\Big|_{Z=-3} = \frac{16\times 9}{16} = 9$$

برای محاسبه‌ی B می‌توان از مقداردهی استفاده کرد:

$$X(Z=0) = 0 = A - B + \frac{C}{3} \xrightarrow[C=9]{A=4} B = 7$$

$$\rightsquigarrow X(Z) = \frac{4}{(Z-1)^2} + \frac{7}{Z-1} + \frac{9}{Z+3} = \underbrace{\frac{4Z^{-2}}{(1-Z^{-1})^2}}_{X_1(Z)} + \underbrace{\frac{7Z^{-1}}{1-Z^{-1}}}_{X_2(Z)} + \underbrace{\frac{9Z^{-1}}{1+3Z^{-1}}}_{X_3(Z)}$$ و $|Z|>3$ رابطه 1

برای محاسبه‌ی $x_1[n]$ داریم:

$$F.S\{u[n]\} = \frac{1}{1-Z^{-1}} \rightsquigarrow F.S\{nu[n]\} = -Z\frac{d}{dZ}\left\{\frac{1}{1-Z^{-1}}\right\} = \frac{Z^{-1}}{(1-Z^{-1})^2}$$

$$F.S\{4(n-1)u[n-1]\} = \frac{4Z^{-2}}{(1-Z^{-1})^2} \rightsquigarrow x_1[n] = 4(n-1)u[n-1]$$

برای محاسبه $x_2[n]$ داریم:

$$F.S\{u[n]\} = \frac{1}{1-Z^{-1}} \rightsquigarrow F.S\{7u[n-1]\} = \frac{7Z^{-1}}{1-Z^{-1}} \rightsquigarrow x_2[n] = 7u[n-1]$$

و در آخر برای $x_3[n]$ داریم:

$$F.S\{(-3)^n u[n]\} = \frac{1}{1+3Z^{-1}} \rightsquigarrow F.S\{9(-3)^{n-1}u[n-1]\} = \frac{9Z^{-1}}{1+3Z^{-1}}$$

صفحه 7

$$\rightsquigarrow x[n] = 4(n-1)u[n-1] + 7u[n-1] + 9(-3)^{n-1}u[n-1]$$

دقت کنید طبق ناحیه‌ی همگرایی داده‌شده و عبارات $X_1(Z)$ و $X_2(Z)$ و $X_3(Z)$ بدست آمده در رابطه‌ی 1، سیگنال‌های زمانی متناظر هر یک از بخش‌های $X_1(Z)$ و $X_2(Z)$ و $X_3(Z)$ سمت راستی هستند.

---

4 - الف) $X(Z) = \dfrac{4-\frac{7}{4}Z^{-1}+\frac{1}{4}Z^{-2}}{1-\frac{3}{4}Z^{-1}+\frac{1}{8}Z^{-2}}$ و $|Z|>\frac{1}{2}$

چون صورت و مخرج هم‌مرتبه هستند، ابتدا صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم:

$$X(Z) = 2 + \frac{\frac{1}{4}Z^{-1}+2}{1-\frac{3}{4}Z^{-1}+\frac{1}{8}Z^{-2}} = 2 + \frac{A}{1-\frac{1}{2}Z^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{1}{4}Z^{-1}} \quad \text{و} \quad |Z|>\frac{1}{2}$$

A و B را مشابه روشی که در قسمت "الف- 3" استفاده کردیم، بدست می‌آوریم:

$$A = \left(1-\tfrac{1}{2}Z^{-1}\right)X(Z)\Big|_{Z^{-1}=2} = 3 \quad \text{و} \quad B = \left(1-\tfrac{1}{4}Z^{-1}\right)X(Z)\Big|_{Z^{-1}=4} = -1$$

$$\rightsquigarrow X(Z) = 2 + \underbrace{\frac{3}{1-\frac{1}{2}Z^{-1}}}_{X_1(Z)} + \underbrace{\frac{-1}{1-\frac{1}{4}Z^{-1}}}_{X_2(Z)} \quad \text{و} \quad |Z|>\frac{1}{2}$$

با توجه به ناحیه‌ی همگرایی سیگنال زمانی متناظر با $X_1(Z)$ و $X_2(Z)$، سمت راستی است:

$$x[n] = 2\delta[n] + 3\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n]$$ ✓

1- ب) $a_k = \cos\left(\frac{8\pi k}{21}\right)$

$$N = \frac{2\pi}{\frac{8\pi}{21}} m = \frac{21}{4} m \xrightarrow{\text{if } m=4} N=21 \rightsquigarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{21}$$

$$a_k = \frac{1}{2}\left[e^{-j(-4)\left(\frac{2\pi}{21}\right)k} + e^{-j(4)\left(\frac{2\pi}{21}\right)k}\right] \equiv \frac{1}{21}\sum_{n=-10}^{10} x[n]e^{-jn\left(\frac{2\pi}{21}\right)k}$$

$$\rightsquigarrow x[n] = \begin{cases} \frac{21}{2} & n=-4,4 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ درواقع منظور بقیه‌ی نمونه‌های درون یک دوره تناوب است یعنی: $-10 \leq n \leq 10$.

2- ب) $a_k = \begin{cases} 3^{-|k|} & -2\leq k\leq 2 \\ 0 & k=3 \end{cases}$ و $N=6 \rightsquigarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=-2}^{2} 3^{-|k|} e^{jk\left(\frac{\pi}{3}\right)n}$$

صفحه 3

$$= 3^{-2}\left(e^{j\frac{2\pi}{3}n} + e^{-j\frac{2\pi}{3}n}\right) + 3^{-1}\left(e^{j\frac{\pi}{3}n} + e^{-j\frac{\pi}{3}n}\right) + 1$$

$$= \boxed{\frac{2}{9}\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + 1} \checkmark$$

3-ب) $a_k = \begin{cases} 1 & -1 \leqslant k \leqslant +1 \\ 0 & k=2 \end{cases}$ و $N=4 \rightsquigarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$$x[n] = \sum_{k=-1}^{2} a_k e^{jk\frac{\pi}{2}n} = 1 + e^{-j\frac{\pi}{2}n} + e^{j\frac{\pi}{2}n} + 0 = \boxed{1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)} \checkmark$$

4-ب)

با توجه به شکل داده شده مشخص است که $N=15 \rightsquigarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{15}$

$$a_k = |a_k| e^{j\measuredangle a_k} = e^{-jk\left(\frac{\pi}{6}\right)} \quad , \quad -4 \leqslant k \leqslant 4$$

$$x[n] = \sum_{k=-4}^{4} e^{-jk\left(\frac{\pi}{6}\right)} e^{jk\left(\frac{2\pi}{15}\right)n} = \sum_{k=-4}^{4} e^{jk\pi\left(\frac{2n}{15} - \frac{1}{6}\right)} = \sum_{k=-4}^{4} \left[e^{j\pi\left(\frac{2n}{15} - \frac{1}{6}\right)}\right]^k$$

$m = k+4$ تغییر متغیر $\rightsquigarrow x[n] = e^{-j4\pi\left(\frac{2n}{15} - \frac{1}{6}\right)} \sum_{m=0}^{8} \left[e^{j\pi\left(\frac{2n}{15} - \frac{1}{6}\right)}\right]^m$

$$= e^{-j\pi 4\left(\frac{2n}{15} - \frac{1}{6}\right)} \frac{1 - e^{j9\pi\left(\frac{2n}{15} - \frac{1}{6}\right)}}{1 - e^{j\pi\left(\frac{2n}{15} - \frac{1}{6}\right)}} = \boxed{\frac{\sin\left(\frac{9\pi}{2}\left(\frac{2n}{15} - \frac{1}{6}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{2n}{15} - \frac{1}{6}\right)\right)}}$$

سوال 4

الف-1) $y[n] = e^{-jn} x^*[n]$

$$x[n] \xrightarrow{Z} X(z) \rightsquigarrow x^*[n] \xrightarrow{Z} X^*(z^*) \rightsquigarrow e^{-jn} x^*[n] \xrightarrow{Z} X^*\left((ze^{j})^*\right)$$
$$= X^*(z^* e^{-j})$$

$$\boxed{Y(z) = X^*(z^* e^{-j})} \checkmark$$

الف-) $y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right] & n \in \text{even} \\ x\left[\frac{n-1}{2}\right] & n \in \text{odd} \end{cases}$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] z^{-n} = \sum_{n \in \text{even}} y[n] z^{-n} + \sum_{n \in \text{odd}} y[n] z^{-n} = \underbrace{\sum_{n \in \text{even}} x\left[\frac{n}{2}\right] z^{-n}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\sum_{n \in \text{odd}} x\left[\frac{n-1}{2}\right] z^{-n}}_{\mathrm{II}}$$

در عبارت I و II به ترتیب قرار میدهیم $n=2k$ و $n=2k+1$

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] z^{-2k} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] z^{-(2k+1)}$$

صفحه ۶

$$= (1+z^{-1}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] z^{-2k} = \boxed{(1+z^{-1})\, X(z^2)} \checkmark$$

ب-1) $y[n] = x^*[\frac{n}{2}]$

$$F.S\{x[n]\} = a_k \rightsquigarrow F.S\{x[\tfrac{n}{2}]\} = \tfrac{1}{2} a_k \rightsquigarrow F.S\{x^*[\tfrac{n}{2}]\} = \tfrac{1}{2} a^*_{-k}$$

$$\rightsquigarrow F.S\{y[n]\} \triangleq b_k = \boxed{\tfrac{1}{2} a^*_{-k}} \checkmark$$

ب-2) $y[n] = x^*[n-1] + x[-n+1]$

$$F.S\{x[n]\} = a_k \rightsquigarrow F.S\{x[n+1]\} = a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}} \rightsquigarrow F.S\{x[-n+1]\} = a_{-k} e^{-jk\frac{2\pi}{N}}$$

$$\rightsquigarrow F.S\{x[n-1]\} = a_k e^{-jk\frac{2\pi}{N}} \rightsquigarrow F.S\{x^*[n-1]\} = \left(a_{-k} e^{jk\frac{2\pi}{N}}\right)^*$$

$$= a^*_{-k} e^{-jk\frac{2\pi}{N}}$$

$$F.S\{y[n]\} \triangleq b_k = a_{-k} e^{-jk\frac{2\pi}{N}} + a^*_{-k} e^{-jk\frac{2\pi}{N}}$$

$$= e^{-jk\frac{2\pi}{N}} \left(a_{-k} + a^*_{-k}\right) = \boxed{2\,Re\{a_k\}\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}}} \checkmark$$

سؤال 5

الف) $a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n} \rightsquigarrow a_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} x[n]$

پس a_0 بیانگر متوسط (میانگین) مقادیر نمونه های سیگنال $x[n]$ در یک دوره تناوب است؛ پس داریم:

$$a_0 = \frac{1}{6}\left[0+1+2+(-2)+1+(-1)\right] = \boxed{\frac{1}{6}} \checkmark$$

ب) $\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N\rangle} |a_k|^2$ رابطه پارسوال

$$\sum_{k=0}^{5} |a_k|^2 = \frac{1}{6}\left[(0)^2+(1)^2+(2)^2+(-2)^2+(1)^2+(-1)^2\right] = \boxed{\frac{11}{6}} \checkmark$$

ج) $\sum_{k=-79}^{-74} a_k = ?$

هر بازه ای با طول برابر با دوره تناوب را می توان در نظر گرفت

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \rightsquigarrow \underbrace{x[0]}_{0} = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k = \sum_{k=-79}^{-74} a_k \Longrightarrow \boxed{\sum_{k=-79}^{-74} a_k = 0}$$

د) $\sum_{k=0}^{5} \left(Im(a_k)\right)^2$

سیگنال $x[n]$ یک سیگنال حقیقی بوده و لذا دارای تقارن هرمیتی است:

if $\underbrace{x(t)=x^*(t)}_{\text{سیگنال حقیقی}}$ $\rightsquigarrow$ $\underbrace{a_k = a_{-k}^*}_{\text{تقارن هرمیتی ضرایب سری فوریه}}$ $\rightsquigarrow$ $F.S\{\underbrace{x_o[n]}_{\text{قسمت فرد سیگنال}}\} = j\,Im(a_k)$

حال اگر رابطه پارسوال را برای قسمت فرد سیگنال بکار ببریم داریم:

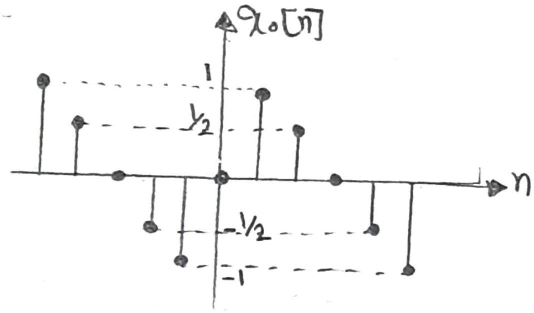
$$\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} |x_o[n]|^2 = \sum_{n=0}^{5} |j\,Im(a_k)|^2$$

$$= \sum_{n=0}^{5} (Im(a_k))^2$$

به تبدیل شدن $|\cdot|^2$ به $(\cdot)^2$ دقت کنید

پس برای محاسبه حاصل عبارت داده شده در صورت سوال کافی است که قسمت فرد سیگنال را بدست آوریم:

می‌دانیم: $x_o[n] = \dfrac{x[n]-x[-n]}{2}$



$$\rightsquigarrow \sum_{n=0}^{5} (Im(a_k))^2 = \frac{1}{6}\left[0+1+\frac14+0+\frac14+1\right] = \boxed{\frac{5}{12}}$$

سوال 6

$$y[n] - \frac34 y[n-1] + \frac18 y[n-2] = x[n]$$

الف) از دو طرف رابطه دیفرنس فوق تبدیل Z می‌گیریم:

$$Y(Z)\left(1-\frac34 Z^{-1}+\frac18 Z^{-2}\right) = X(Z)$$

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{1}{1-\frac34 Z^{-1}+\frac18 Z^{-2}} = \frac{Z^2}{Z^2-\frac34 Z+\frac18} = \frac{Z^2}{(Z-\frac12)(Z-\frac14)} \quad , \quad |Z|>\frac12$$

رابطه ۱

برای راحتی می‌توانید تابع تبدیل را برحسب چند جمله‌ای برحسب Z تبدیل کنید

از آنجایی که سیستم دارای دو قطب $Z=\frac12$ و $\frac14$ است پس برای اینکه علّی باشد ناحیه همگرایی باید خارج دایره مربوط به قطب بزرگتر باشد.

$$H(Z) = \frac{1}{(1-\frac12 Z^{-1})(1-\frac14 Z^{-1})} = \frac{2}{1-\frac12 Z^{-1}} - \frac{1}{1-\frac14 Z^{-1}} \quad , \quad |Z|>\frac12$$

$$\rightsquigarrow h[n] = 2\left(\tfrac12\right)^n u[n] - \left(\tfrac14\right)^n u[n] = \boxed{\left[2\left(\tfrac12\right)^n - \left(\tfrac14\right)^n\right]u[n]}$$

ب) if $x[n]=u[n] \rightsquigarrow X(Z) = \dfrac{1}{1-Z^{-1}}$, $|Z|>1$

صفحه ۱

$$Y(z)=X(z)H(z)=\frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-z^{-1})} \quad \text{و} \quad |z|>1$$

دقت کنید که RoC خروجی، اشتراک RoC ورودی و RoC تابع تبدیل است

$$Y(z)=\frac{8/3}{1-z^{-1}}+\frac{-2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{1/3}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \quad \text{و} \quad |z|>1$$

$$\rightsquigarrow y[n]=s[n]=\boxed{\left[\frac{8}{3}-2\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u[n]}$$

ج) $(z_0)^n$ توابع ویژه تبدیل Z محسوب می‌شوند. به عبارتی اگر ورودی سیستم LTI گسسته به صورت $x[n]=(z_0)^n$ باشد،
خروجی آن $y[n]=(z_0)^n H(z_0)$ خواهد بود مشروط به اینکه z_0 درون ناحیه همگرایی تابع تبدیل $H(z)$ باشد:

$$\text{if } x[n]=(z_0)^n \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y[n]=\begin{cases}(z_0)^n H(z_0) & \text{if } z_0\in RoC_h \text{ و } \forall n \\ \infty \ \text{(بی‌کران)} & \text{if } z_0\notin RoC_h \text{ و } \forall n\end{cases}$$

پس برای ورودی‌های داده شده در مسئله داریم:

$$x_1[n]=\left(\tfrac{1}{3}\right)^n \rightsquigarrow \boxed{y_1[n]\underbrace{=}_{\frac{1}{3}\notin RoC_h}\infty} \quad \forall n$$

$$x_2[n]=\left(\tfrac{2}{3}\right)^n+5=x_{21}[n]+x_{22}[n] \rightsquigarrow y[n]=y_{21}[n]+y_{22}[n]$$

$$y_{21}[n]=\left(\tfrac{2}{3}\right)^n H\left(\tfrac{2}{3}\right)\underbrace{=}_{\text{رابطه 1}}\left(\tfrac{2}{3}\right)^n\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)}=\frac{32}{5}\left(\tfrac{2}{3}\right)^n$$

ورودی $x_{22}[n]=5$ یک مقدار DC است و می‌توان فرض کرد $z_0=1$ بوده است؛ یعنی:

$$x_{22}[n]=5(1)^n \rightsquigarrow y_{22}[n]\underbrace{=}_{z_0=1\in RoC_h}5(1)^n H(1)=5\times\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{4})}=\frac{40}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_2[n]=y_{21}[n]+y_{22}[n]=\frac{32}{5}\left(\tfrac{2}{3}\right)^n+\frac{40}{3}} \quad \text{رابطه 2}$$

دقت کنید اگرچه $z_0=\frac{2}{3}$ و $z_0=1$ درون ناحیه همگرایی تابع تبدیل قرار داشتند و خروجی به صورت رابطه‌ی 2 بدست آمد، اما همچنان خروجی به ازای بعضی مقادیر n کران‌دار نیست! (خروجی به ازای چه مقادیری از n بی‌کران می‌شود؟)

د) $x[n]=\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)+3\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{4}\right)$

$$x[n]=\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)+3\cos\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{\pi}{4}n}-e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right)+\frac{3}{2}\left(e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j\frac{n\pi}{2}}+e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j\frac{n\pi}{2}}\right)$$

برای تعیین ضرایب سری فوریه‌ی ورودی باید دوره تناوب اصلی سیگنال ورودی را بدست آوریم:

$$N_1=\frac{2\pi}{\pi/4}m=8m \rightsquigarrow N_1=8$$

$$N_2 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} m = 4m \xrightarrow{m=1} N_2 = 4$$

$$\boxed{N = \text{Lcm}(N_1, N_2) = 8 \rightsquigarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}} \checkmark$$

$$x[n] = \underbrace{\frac{1}{2j}}_{a_1} e^{j(1)(\frac{2\pi}{8})n} - \underbrace{\frac{1}{2j}}_{a_{-1}} e^{-j(1)(\frac{2\pi}{8})n} + \underbrace{\frac{3}{2} e^{j\frac{\pi}{4}}}_{a_2} e^{j(2)(\frac{2\pi}{8})n} + \underbrace{\frac{3}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}}_{a_{-2}} e^{j(2)(\frac{2\pi}{8})n}$$

$$\rightsquigarrow a_{8k+1} = \frac{1}{2j}, \quad a_{8k-1} = -\frac{1}{2j}, \quad a_{8k+2} = \frac{3}{2} e^{j\frac{\pi}{4}}, \quad a_{8k-2} = \frac{3}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$a_k = 0 \quad \text{for} \quad k \neq 8k \pm 1, 8k \pm 2$$

می‌دانیم اگر $x[n]$ ورودی یک سیستم LTI باشد در این صورت داریم:

$$\underset{a_k}{x[n]} \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow \underset{b_k}{y[n]} \qquad \rightsquigarrow b_k = a_k H(z)\Big|_{z = e^{jk\omega_0}}$$

پس با استفاده از نکته فوق بدست می‌آوریم:

$$b_{8k+1} = a_{8k+1} H(e^{j(8k+1)\frac{\pi}{4}}) = \frac{1}{2j} \frac{e^{j(8k+1)\frac{\pi}{2}}}{(e^{j(8k+1)\frac{\pi}{4}} - 1)(e^{j(8k+1)\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{4})}$$

$$= \dots$$

$$b_{8k-1} = a_{8k-1} H(e^{j(8k-1)\frac{\pi}{4}}) = -\frac{1}{2j} \frac{e^{j(8k-1)\frac{\pi}{2}}}{(e^{j(8k-1)\frac{\pi}{4}} - 1)(e^{j(8k+1)\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{4})} = \dots$$

$$b_{8k\pm 2} = a_{8k\pm 2} H(e^{j(8k\pm 2)\frac{\pi}{4}})$$

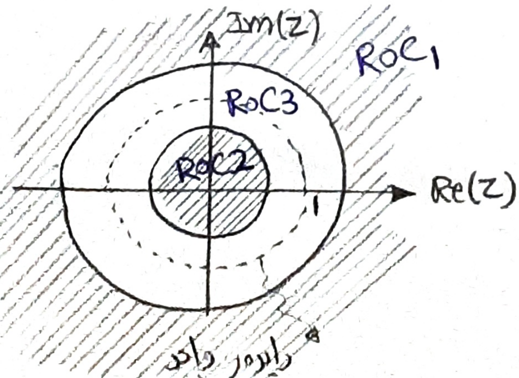
سؤال 7

الف) $$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 + kz^{-1} + z^{-2}} = \frac{z}{z^2 + kz + 1}$$

اگر ریشه‌های معادله درجه دوم x^2+bx+c را x_0 و x_1 بنامیم، در این صورت داریم:

$$x_0 x_1 = c \quad , \quad x_0 + x_1 = -b$$

پس حاصلضرب قطب‌های $H(z)$ داده شده برابر 1 است ($z_0 z_1 = 1$). لذا همیشه یکی از قطب‌ها داخل دایره واحد و دیگری خارج از دایره واحد قرار خواهد گرفت؛ بنابراین طبق شکل روبرو، 3 ناحیه همگرایی قابل تصور است:



RoC_1 ← سیستم علی است ولی پایدار نیست

RoC_2 ← سیستم نه علی است و نه پایدار

RoC_3 ← سیستم پایدار است ولی علی نیست

لذا این سیستم نمی‌تواند توأمان علی و پایدار باشد.

1-ب) $G(Z) = H(Z)\, H^*(Z^*)$

برای اینکه یک سیستم LTI توأمان علی و پایدار باشد، باید تمامی قطب‌های آن داخل دایره‌ی واحد قرار داشته باشند.

اگر $h[n]$ پاسخ ضربه‌ی سیستم مورد نظر باشد بنابراین $H^*(Z^*)$ تبدیل Z سیگنال $h^*[n]$ خواهد بود و لذا ناحیه‌ی همگرایی آن تغییر نمی‌کند.

$$g[n] = h[n] * h^*[n] \xrightarrow{Z} G(Z) = H(Z)\, H^*(Z^*)$$

$$ROC\{G(Z)\} \geq ROC\{H(Z)\} \cap \underbrace{ROC\{H^*(Z^*)\}}_{ROC\{H(Z)\}}$$

$$ROC\{G(Z)\} \underset{\text{هیچ حذف قطبی رخ نمی‌دهد}}{=} ROC\{H(Z)\}$$

هیچ حذف قطبی رخ نمی‌دهد چون هر دو ROC یکسان هستند

بنابراین $G(Z)$ نیز علی و پایدار است.

2-ب) $G(Z) = H(Z^{-1})$

$$g[n] = h[-n] \xrightarrow{Z} G(Z) = H(Z^{-1}) \quad \text{و} \quad ROC\{G(Z)\} = ROC\{H(Z)\}^{-1}$$

پس تمامی قطب‌های درون دایره‌ی واحد به خارج دایره‌ی واحد منتقل می‌شوند و سیستم ناپایدار خواهد بود.

از طرفی از آنجایی که سیستم اولیه علی است پس $n<0$ و $h[n]=0$ ولی $g[n] = h[-n]$ بوده و لذا در $n<0$ نیز مقدار پیدا می‌کند پس $G(Z)$، علی نیز نخواهد بود.

3-ب) $G(Z) = H(-Z)$

$$g[n] = (-1)^n h[n] \xrightarrow{Z} G(Z) = H(-Z) \quad \text{و} \quad ROC\{G(Z)\} = |-1|\, ROC\{H(Z)\} = ROC\{H(Z)\}$$

پس سیستم $G(Z)$ نیز علی و پایدار خواهد بود.