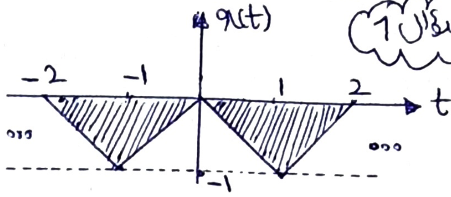
به نام خدا

حل تکلیف سری چهارم - تجزیه و تحلیل سیگنال ها و سیستم ها

محمدرضا چپاری

سوال 1

الف)




اگر دوره تناوب در مسئله ذکر نشده بود، دوره تناوب اصلی سیگنال را درنظر بگیرید.

$T=2 \rightsquigarrow \omega_0=\pi$

$$x(t)=\begin{cases}-t & 0\leq t<1\\ t & -1\leq t\leq 0\end{cases}$$

می توانستیم رابطه ریاضی در بازه ی $[0,2]$ یا $[-2,0]$ را نیز درنظر بگیریم ولی همیشه سعی کنید بازه ای از دوره تناوب اصلی را درنظر بگیرید که رابطه ریاضی آن ساده تر است.

روش اول ⟶ استفاده از فرمول

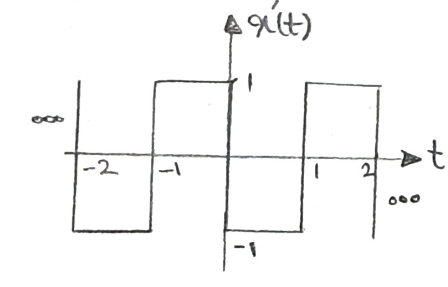
$$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x(t)e^{-jk\pi t}dt=\frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0}te^{-jk\pi t}dt-\int_0^1 te^{-jk\pi t}dt\right]$$

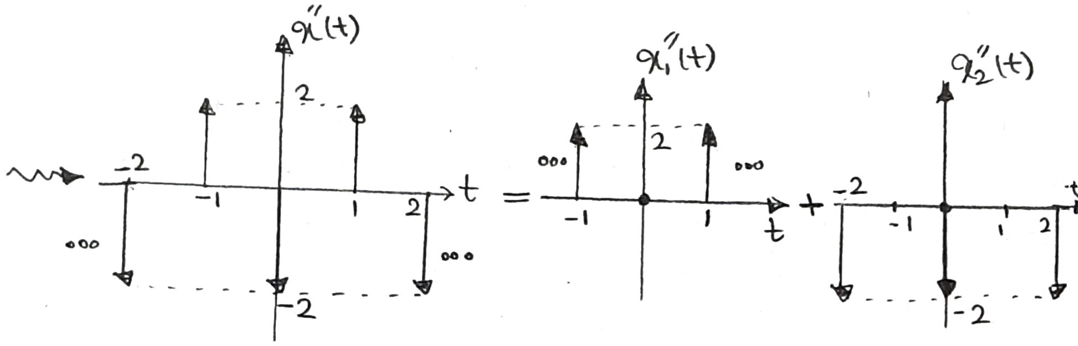
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{te^{-jk\pi t}}{-jk\pi t}-\frac{e^{-jk\pi t}}{(-jk\pi t)^2}\right]_{-1}^{0}-\frac{1}{2}\left[\frac{te^{-jk\pi t}}{-jk\pi t}-\frac{e^{-jk\pi t}}{(-jk\pi t)^2}\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{-2}{(-jk\pi)^2}+\frac{1}{-jk\pi}\underbrace{\left(e^{jk\pi}-e^{-jk\pi}\right)}_{=0}+\frac{1}{(-jk\pi)^2}\underbrace{\left(e^{jk\pi}+e^{-jk\pi}\right)}_{2(-1)^k}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{-2}{(-jk\pi)^2}+\frac{2(-1)^k}{(-jk\pi)^2}\right]$$

$$=\frac{(-1)^k-1}{(-jk\pi)^2}=\boxed{\frac{(-1)^k-1}{(jk\pi)^2}}\ \checkmark$$

روش دوم ⟶ استفاده از خواص




$F.S\{x_1''(t)\}=1\times e^{-jk\pi}=(-1)^k$

$F.S\{x_2''(t)\}=-1$

$\rightsquigarrow F.S\{x''(t)\}=F.S\{x_1''(t)\}+F.S\{x_2''(t)\}=(-1)^k-1$

توجه داشته باشید که خاصیت جمع پذیری در سری فوریه تنها زمانی برقرار است که فرکانس پایه (دوره تناوب اصلی) دو سیگنال یکسان باشند.

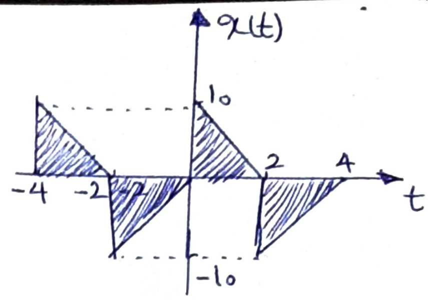
$F.S\{x''(t)\}=(jk\pi)^2\,F.S\{x(t)\}$

$$\rightsquigarrow F.S\{x(t)\}=\frac{F.S\{x''(t)\}}{(jk\pi)^2}=\boxed{\frac{(-1)^k-1}{(jk\pi)^2}}\ \checkmark$$

یکی از روش های بررسی صحت جواب بدست آمده، بررسی $a_0$ است که باید برابر با مقدار متوسط سیگنال در یک دوره تناوب باشد.

صفحه 2

ب) $T=4 \rightsquigarrow w_0=\frac{\pi}{2}$




$$x(t)=\begin{cases}5t & -2\leq t\leq 0\\ 10-5t & 0\leq t\leq 2\end{cases}$$

$$a_k=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}x(t)e^{-jk\frac{\pi}{2}t}\,dt=\frac{1}{4}\int_{-2}^{0}5te^{-jk\frac{\pi}{2}t}\,dt+\frac{1}{4}\int_{0}^{2}(10-5t)e^{-jk\frac{\pi}{2}t}\,dt$$

$$=\frac{5}{4}e^{-jk\frac{\pi}{2}t}\left[\frac{t}{(-jk\frac{\pi}{2})}-\frac{1}{(-jk\frac{\pi}{2})^2}\right]_{-2}^{0}+\frac{1}{4}e^{-jk\frac{\pi}{2}t}\left[\frac{10-5t}{(-jk\frac{\pi}{2})}+\frac{5}{(-jk\frac{\pi}{2})^2}\right]_{0}^{2}$$

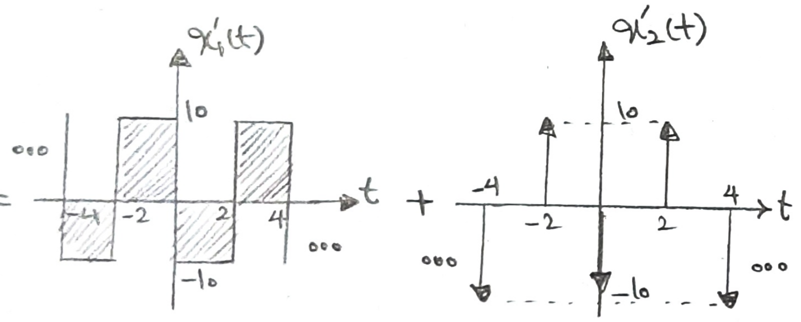
$$=\frac{5}{4}\left[\frac{(-1)^k-1}{(-jk\frac{\pi}{2})^2}+\frac{2(-1)^k}{(-jk\frac{\pi}{2})}\right]+\frac{5}{4}\left[\frac{(-1)^k-1}{(-jk\frac{\pi}{2})^2}-\frac{2}{(-jk\frac{\pi}{2})}\right]=\frac{5}{2}\left[(-1)^k-1\right]\left[\frac{1}{(-jk\frac{\pi}{2})^2}+\frac{1}{(-jk\frac{\pi}{2})}\right]$$

✓

روش دوم ⟶ استفاده از خواص

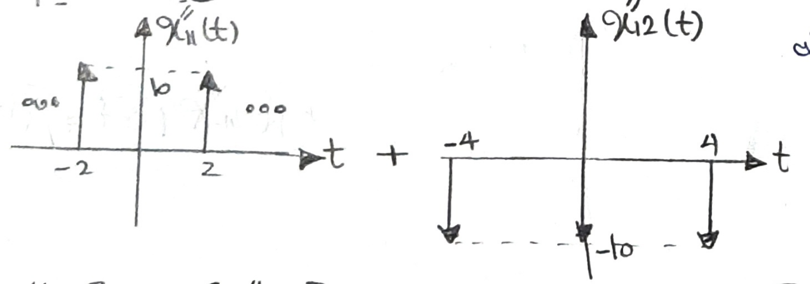
در اینجا نیز مشابه قسمت «الف» عمل می‌کنیم، فقط توجه داشته باشید که سیگنال $x(t)$ ناپیوسته است و لذا در مشتق اول آن تابع ضربه ایجاد می‌شود.

$x'(t) =$




برای محاسبه ضرایب سری فوریه $x'_1(t)$ مشابه قسمت «الف» عمل کرده و یکبار دیگر از آن مشتق می‌گیریم؛ پس داریم:

$x''_1(t) =$




واضح است که $\underbrace{x''_{12}(t)} = x'_2(t)$

$$\rightsquigarrow F.S\{x''_1(t)\}=F.S\{x''_{11}(t)\}+F.S\{x''_{12}(t)\}=\frac{5}{2}\left[(-1)^k-1\right]=F.S\{x'_2(t)\}$$ رابطه 1

$$F.S\{x'_1(t)\}=\frac{F.S\{x''_1(t)\}}{(+jk\frac{\pi}{2})}=\frac{5}{2}\,\frac{(-1)^k-1}{(+jk\frac{\pi}{2})}$$ رابطه 2

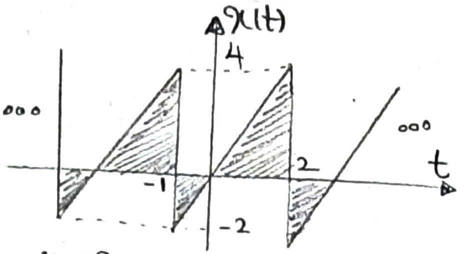
$$F.S\{x'(t)\}=\underbrace{F.S\{x'_1(t)\}}_{\text{رابطه 2}}+\underbrace{F.S\{x'_2(t)\}}_{\text{رابطه 1}}=\frac{5}{2}\left[\frac{(-1)^k-1}{(-jk\frac{\pi}{2})}+(-1)^k-1\right]$$

$$F.S\{x(t)\}=\frac{F.S\{x'(t)\}}{(+jk\frac{\pi}{2})}=\frac{5}{2}\left[(-1)^k-1\right]\left[\frac{1}{(+jk\frac{\pi}{2})^2}+\frac{1}{(+jk\frac{\pi}{2})}\right]$$

✓

ادامه

ج) $x(t)=2t \,,\ -1\leqslant t\leqslant 2$ و $T=3 \rightsquigarrow \omega_0=\frac{2\pi}{3}$




روش اول

$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{2}{3}\int_{-1}^{2} te^{-jk\frac{2\pi}{3}t}dt$

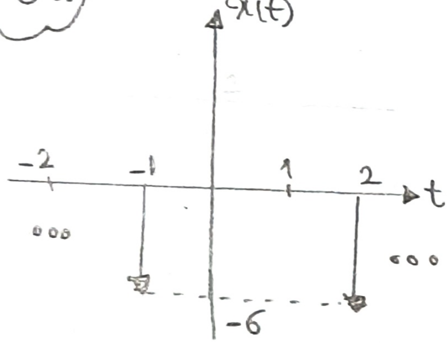
$=\frac{2}{3}e^{-jk\frac{2\pi}{3}t}\left[\frac{t}{(-jk\frac{2\pi}{3})}-\frac{1}{(-jk\frac{2\pi}{3})^2}\right]_{-1}^{2}=\frac{2}{3}\left[\frac{2e^{-jk\frac{4\pi}{3}}}{-jk\frac{2\pi}{3}}-\frac{e^{-jk\frac{4\pi}{3}}}{(-jk\frac{2\pi}{3})^2}+\frac{e^{jk\frac{2\pi}{3}}}{-jk\frac{2\pi}{3}}\right.$

$\left.+\frac{e^{jk\frac{2\pi}{3}}}{(-jk\frac{2\pi}{3})^2}\right]=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{-jk\frac{2\pi}{3}}\left(2e^{-jk\frac{4\pi}{3}}+e^{jk\frac{2\pi}{3}}\right)+\frac{1}{(-jk\frac{2\pi}{3})^2}\left(e^{jk\frac{2\pi}{3}}-e^{-jk\frac{4\pi}{3}}\right)\right]$

داریم

$e^{jk\frac{2\pi}{3}}=e^{-jk\frac{4\pi}{3}}$ $=\boxed{\frac{2e^{jk\frac{2\pi}{3}}}{-jk\frac{2\pi}{3}}}$ ✓

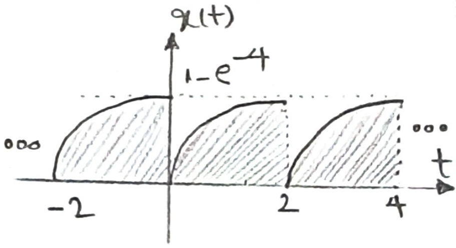
روش دوم




$\rightsquigarrow F.S\{x(t)\}=\frac{F.S\{x'(t)\}}{jk\frac{2\pi}{3}}=\boxed{\frac{-2e^{jk\frac{2\pi}{3}}}{jk\frac{2\pi}{3}}}$ ✓ , $k\neq 0$

---

د) $x(t)=1-e^{-2t} \,,\ 0\leqslant t<2$ و $T=2 \rightsquigarrow \omega_0=\pi$




روش اول

$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{2}\int_0^2(1-e^{-2t})e^{-jk\pi t}dt$

$=\frac{1}{2}\left[\int_0^2 e^{-jk\pi t}dt-\int_0^2 e^{-(2+jk\pi)t}dt\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-jk\pi t}}{-jk\pi}+\frac{e^{-(2+jk\pi)t}}{(2+jk\pi)}\right]_0^2$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-4}\cancel{e^{-j2k\pi}}^{\,1}-1}{(2+jk\pi)}\right]=\boxed{\frac{e^{-4}-1}{2(2+jk\pi)}}$ ✓

---

$x(t)=2j\sin(\frac{3}{2}t)+\cos(t-\frac{\pi}{2})+2$

هنگامی که با سیگنال های مثلثاتی سروکار داریم، اولین و احتمالاً ساده ترین روش نوشتن آن سیگنال ها به صورت مجموعی از نمایی های مختلط است.

در ابتدا باید فرکانس اصلی (دوره تناوب اصلی) سیگنال $x(t)$ را بدست آوریم:

$\omega_{0_1}=\frac{3}{2} \rightsquigarrow T_1=\frac{2\pi}{\omega_{0_1}}=\frac{4}{3}\pi$

$\omega_{0_2}=1 \rightsquigarrow T_2=\frac{2\pi}{\omega_{0_2}}=2\pi$

$\rightsquigarrow T=\mathrm{lcm}(T_1,T_2)=4\pi \rightsquigarrow \omega_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{1}{2}$

$$x(t)=2j\sin\left(\tfrac{3}{2}t\right)+\cos\left(t-\tfrac{\pi}{2}\right)+2 = e^{j\frac{3}{2}t}-e^{-j\frac{3}{2}t}+\underbrace{\tfrac{1}{2}e^{j(t-\frac{\pi}{2})}}_{\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{jt}}+\underbrace{\tfrac{1}{2}e^{-j(t-\frac{\pi}{2})}}_{\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-jt}}+2$$

$$\equiv \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

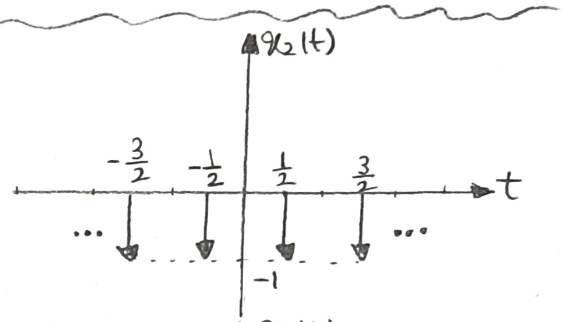
$$\rightsquigarrow a_{-3}=-1,\ a_{-2}=\tfrac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}},\ a_0=2,\ a_2=\tfrac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}},\ a_3=1$$

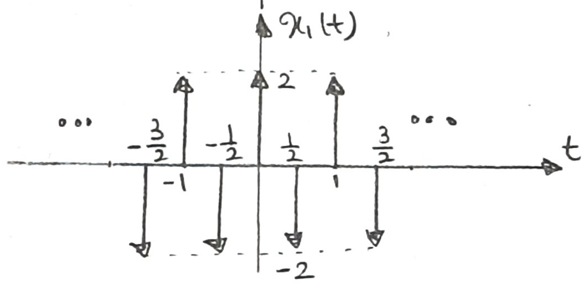
---

g) $$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[2(-1)^k\delta\left(t-\tfrac{k}{2}\right)-\underbrace{\delta\left(t-\tfrac{1+2k}{2}\right)}_{\delta(t-\frac{1}{2}-k)}\right]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2(-1)^k\delta\left(t-\tfrac{k}{2}\right)-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-\tfrac{1}{2}-k\right)$$

$$=x_1(t)+x_2(t)$$

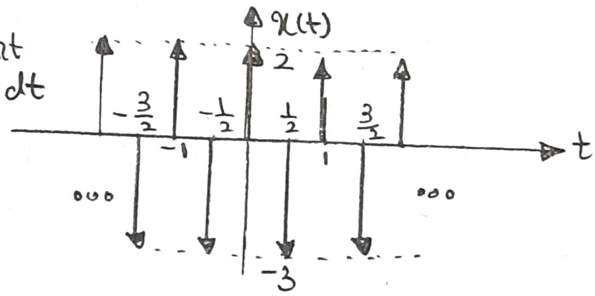



$\omega_0=2\pi$ ⟿ پس دوره تناوب اصلی سیگنال $T=1$ است

$$a_k=\int_{0^-}^{1^-}x(t)e^{-jk2\pi t}dt=\int_{0^-}^{1^-}\left[2\delta(t)-3\delta\left(t-\tfrac{1}{2}\right)\right]e^{-jk2\pi t}dt$$

$$=2-3e^{-jk2\pi(\frac{1}{2})}=\boxed{2-3(-1)^k}\checkmark$$




ضرایب سری فوریه $x(t)$ را با استفاده از خاصیت جمع پذیری از روی مجموع ضرایب سری فوریه $x_1(t)$ و $x_2(t)$ بدست آورید:

$$a_k=F.S\{x(t)\}=F.S\{x_1(t)\}+F.S\{x_2(t)\}=?$$

---

j) $$x(t)=\begin{cases}\frac{3}{4} & \frac{1}{2}\le t\le\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{4} & -1\le t\le\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\le t\le 3\end{cases}$$ و $T=4 \rightsquigarrow \omega_0=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

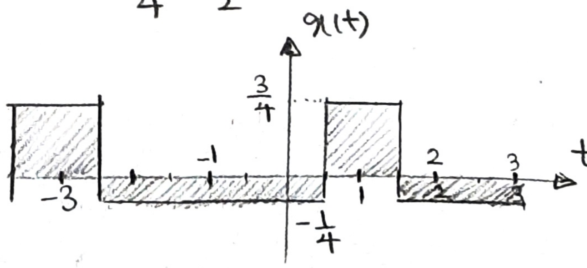
$$x(t)=x_1(t)-\tfrac{1}{4}$$

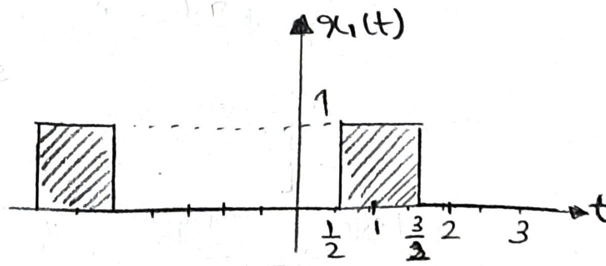
$$b_k=\frac{1}{T}\int_T x_1(t)e^{-jk\frac{\pi}{2}t}dt$$

$$=\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}(1)e^{-jk\frac{\pi}{2}t}dt=\frac{1}{4}\times\left.\frac{e^{-jk\frac{\pi}{2}t}}{-jk\frac{\pi}{2}}\right|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{e^{-jk\frac{3\pi}{4}}-e^{-jk\frac{\pi}{4}}}{-jk\frac{\pi}{2}}=\frac{e^{-jk\pi}e^{+jk\frac{\pi}{4}}-e^{-jk\frac{\pi}{4}}}{-jk\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{e^{-jk\frac{\pi}{2}}\left(e^{jk(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2})}-e^{-jk(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2})}\right)}{-jk\pi/2}$$



$$= \frac{1}{4} \times \frac{\overbrace{e^{-jk\frac{\pi}{2}}}^{(-j)^k}\left(\underbrace{e^{-jk\frac{\pi}{4}} - e^{jk\frac{\pi}{4}}}_{-2j\sin(k\frac{\pi}{4})}\right)}{-jk\frac{\pi}{2}} = \frac{(-j)^k \sin(k\frac{\pi}{4})}{k\pi} \quad \text{for } k \neq 0$$

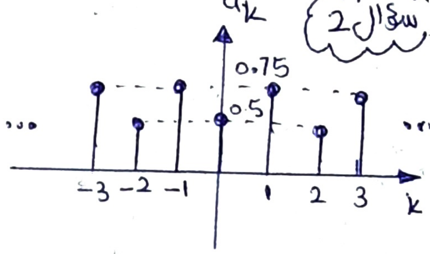
ضرایب سری فوریه $x(t)$ و $x_1(t)$ یکسان هستند صرفاً در نقطه‌ی صفر تفاوت دارند ⟵ $F.S\{x(t)\} = F.S\{x_1(t)\} = b_k$

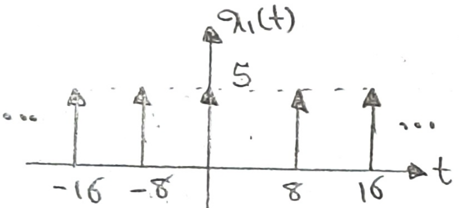
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt = \frac{1}{4}\left[\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{4}\right) dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{4}\right) dt + \int_{\frac{3}{2}}^{3} \left(-\frac{1}{4}\right) dt\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right] = 0$$

سؤال 2

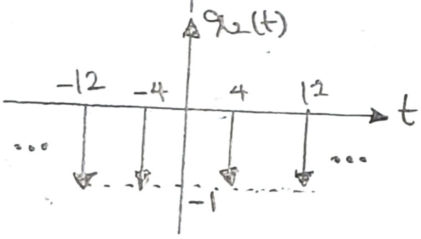
(الف) $T = 8 \rightsquigarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

$$\rightsquigarrow a_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\left(1 - (-1)^k\right) = \frac{5}{8} - \frac{1}{8}(-1)^k = \underbrace{\frac{5}{8}}_{x_1(t)} - \underbrace{\frac{1}{8}e^{-jk\pi}}_{x_2(t)}$$

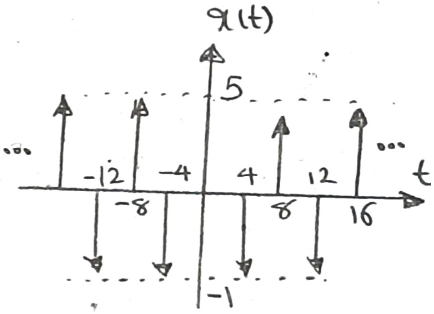



$\rightsquigarrow F.S\{x_1(t)\} = \frac{5}{8}$



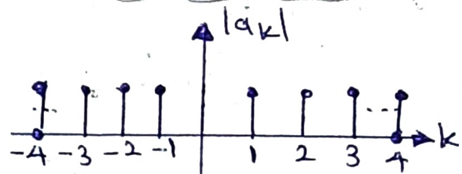

$$\rightsquigarrow F.S\{x_2(t)\} = \frac{1}{8}e^{-jk\frac{\pi}{4}\times 4} = \frac{1}{8}e^{-jk\pi}$$

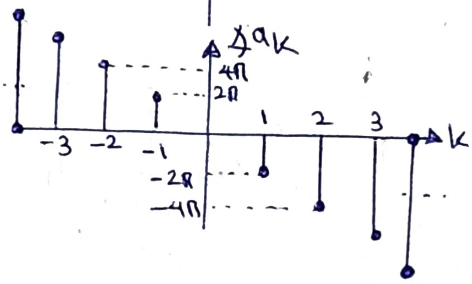



اگر ضرایب سری فوریه سیگنال زمان پیوسته $x(t)$ متناوب باشند ، سیگنال $x(t)$ فقط دنباله‌ای از توابع ضربه است.

(ب) $T = 1 \rightsquigarrow \omega_0 = 2\pi$

$$a_k = |a_k| e^{+j\measuredangle a_k} = \begin{cases} e^{-j2\pi k} & -4 \leq k \leq 4 \\ 0 & o.w \end{cases}$$




$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-4}^{4} e^{-jk2\pi} e^{jk2\pi t}$$

$$= \sum_{k=-4}^{4} e^{jk2\pi(t-1)} = \frac{\left[e^{j2\pi(t-1)}\right]^{-4} - \left[e^{j2\pi(t-1)}\right]^{5}}{1 - e^{j2\pi(t-1)}}$$

فرمول تصاعد هندسی:

$$\sum_{n=m_1}^{m_2} a^n = \begin{cases} \frac{a^{m_1} - a^{m_2+1}}{1-a} & , a \neq 1 \\ m_1 + m_2 - 1 & , a = 1 \end{cases}$$

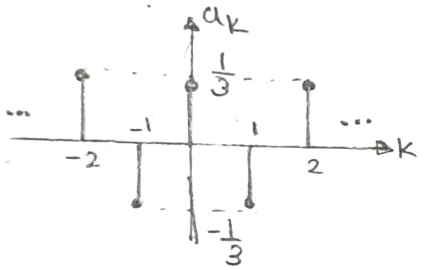
ادامه

$$= \frac{e^{-j8\pi(t-1)} - e^{j10\pi(t-1)}}{1-e^{j2\pi(t-1)}} = \frac{e^{j\pi(t-1)}\left[e^{-j9\pi(t-1)} - e^{j9\pi(t-1)}\right]}{e^{j\pi(t-1)}\left[e^{-j\pi(t-1)} - e^{j\pi(t-1)}\right]}$$

$$= \frac{-2j\sin(9\pi(t-1))}{-2j\sin(\pi(t-1))} = \frac{\sin(9\pi t)}{\sin(\pi t)}$$ ✓

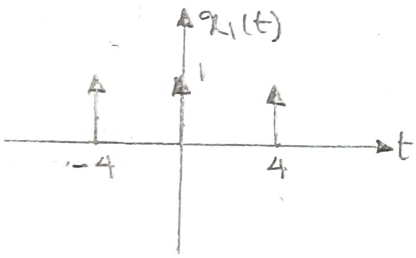
---

ج) $a_k = \frac{(-1)^k}{3}$ , $T=4 \rightsquigarrow \omega_0 = \frac{\pi}{2}$



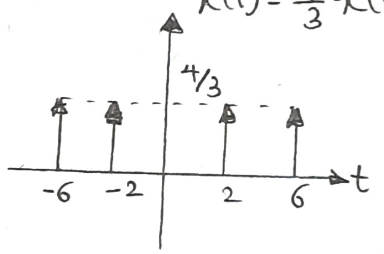

چون $a_k$ متناوب است پس سیگنال $x(t)$ فقط شامل ضربه است. همچنین چون ضرایب سری فوریه زوج و حقیقی است پس سیگنال $x(t)$ نیز زوج و حقیقی خواهد بود.

$$a_k = \left(\frac{1}{3}\right)(-1)^k = \frac{1}{3}e^{-jk\pi} = \frac{1}{3}e^{-jk\frac{2\pi}{4}(2)}$$




$\rightsquigarrow F.S\{x_1(t)\} = \frac{1}{4}$

$x(t) = \frac{4}{3}x(t-2)$




✓

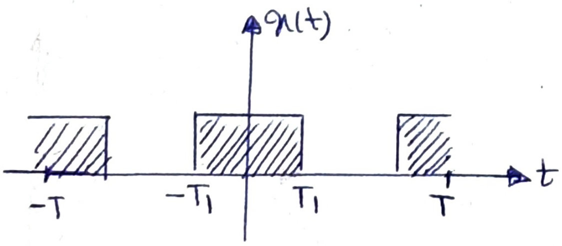
$$F.S\{x(t)\} = \frac{4}{3}\times\frac{1}{4}\times e^{-jk\frac{2\pi}{4}(2)}$$
$$= \frac{1}{3}e^{-jk\frac{2\pi}{4}(2)}$$

---

د) $a_k = \frac{\sin(\frac{k\pi}{3})}{k\pi}\left[2\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) + e^{-j\frac{k\pi}{3}}\right]$ , $T=3 \rightsquigarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{3}$

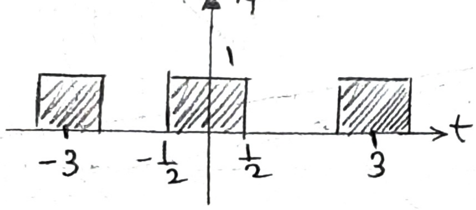
$$a_k = \frac{\sin(\frac{k\pi}{3})}{k\pi}\left(e^{j\frac{k\pi}{3}} + e^{-j\frac{k\pi}{3}} + e^{-j\frac{k\pi}{3}}\right) = 2\frac{\sin(\frac{k\pi}{3})}{k\pi}e^{-j\frac{k\pi}{3}} + \frac{\sin(\frac{k\pi}{3})}{k\pi}e^{j\frac{k\pi}{3}}$$

موج مربعی

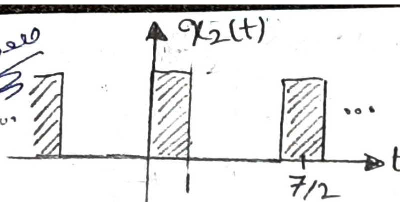


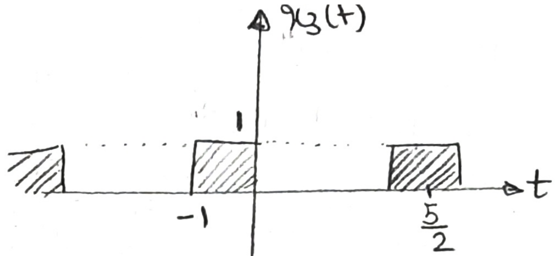

$\rightsquigarrow F.S\{x(t)\} = a_k = \frac{\sin(k\pi\frac{2T_1}{T})}{k\pi}$

پس خواهیم داشت:




$\rightsquigarrow F.S\{x_1(t)\} = \frac{\sin(\frac{k\pi}{3})}{k\pi}$

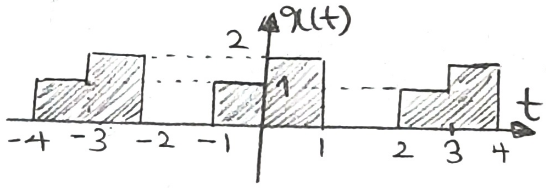




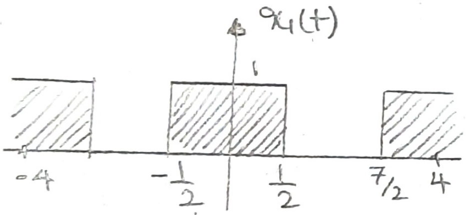
$$F.S\{x_2(t)\} = 2\frac{\sin(\frac{k\pi}{3})}{k\pi} e^{-jk(\frac{2\pi}{3})(\frac{1}{2})} = 2\frac{\sin(k\pi/3)}{k\pi} e^{-jk\frac{\pi}{3}}$$

$$F.S\{x_3(t)\} = \frac{\sin(k\pi/3)}{k\pi} e^{-jk(\frac{2\pi}{3})(-\frac{1}{2})} = \frac{\sin(k\pi/3)}{k\pi} e^{jk\frac{\pi}{3}}$$

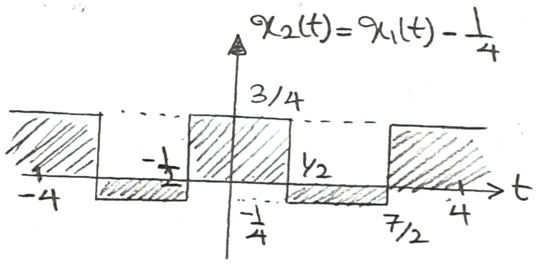
$$\rightsquigarrow F.S\{x(t)\} = F.S\{x_2(t)\} + F.S\{x_3(t)\} \rightsquigarrow x(t) = x_2(t) + x_3(t)$$



ه)
$$a_k = \begin{cases} \frac{(-j)^k \sin(\frac{k\pi}{4})}{k\pi} & k \neq 0 \\ 0 & k=0 \end{cases} \quad , \quad T=4 \rightsquigarrow \omega_0 = \frac{\pi}{2}$$



$\rightsquigarrow$



$$F.S\{x_1(t)\} = \begin{cases} \frac{\sin(\frac{k\pi}{4})}{k\pi} & k \neq 0 \\ \frac{1}{4} & k=0 \end{cases}$$

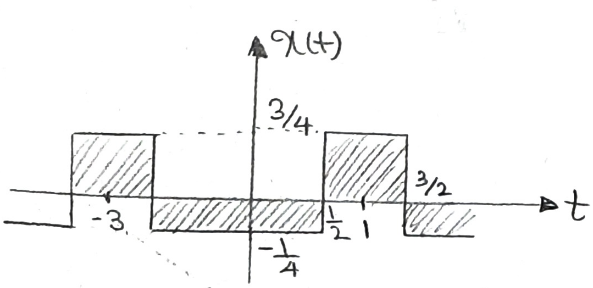
$$F.S\{x_2(t)\} = \begin{cases} \frac{\sin(k\pi/4)}{k\pi} & k \neq 0 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

پس برای اینکه $a_0$ را صفر کنیم سیگنال را به اندازه $\frac{1}{4}$ به پایین شیفت می‌دهیم

حال باید اثر $(-j)^k$ را پیدا کنیم

$$(-j)^k = (e^{-j\frac{\pi}{2}})^k = e^{-jk\frac{\pi}{2}} = e^{-jk\frac{2\pi}{4}\times 1}$$

$\rightsquigarrow$ پس کافی است که سیگنال را در حوزه زمان یک واحد به سمت راست شیفت دهیم



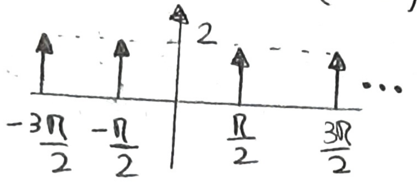
چون ضرایب سری فوریه دارای تقارن مزدوجی هستند ($a_k = a_{-k}^*$) بنابراین سیگنال زمانی متناظر باید حقیقی باشد.

9) $a_k = \frac{2(-1)^k}{\pi(1-4k^2)}$ و $T=\pi \rightsquigarrow \omega_0 = 2$

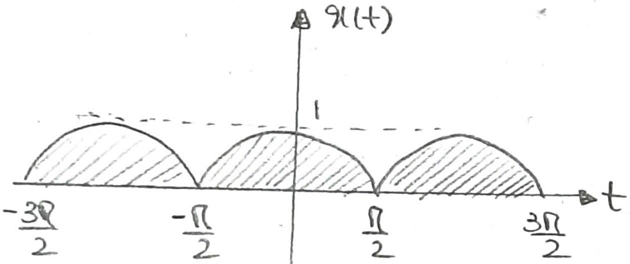
چون ضرایب سری فوریه حقیقی و زوج است پس سیگنال $x(t)$ نیز حقیقی و زوج است.

$$a_k(1-4k^2) = \frac{2}{\pi}(-1)^k \rightsquigarrow a_k + (jk2)^2 a_k = \frac{2}{\pi}e^{jk\pi} = \frac{2}{\pi}e^{jk\frac{2\pi}{\pi}\times\frac{\pi}{2}}$$

$$x(t) + \frac{d^2x(t)}{dt^2} =$$

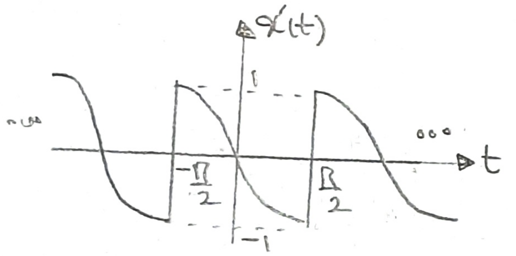



بنابراین سیگنال $x(t)$ باید به گونه‌ای باشد که تفاضل خودش و مشتق دومش صفر شده و صرفاً در نقاط ... و $\frac{\pi}{2}$ و $-\frac{\pi}{2}$ و ... مشتق اولش دارای ناپیوستگی باشد. یکی از سیگنال‌های کاندید، سیگنال مثلثاتی خواهد بود:

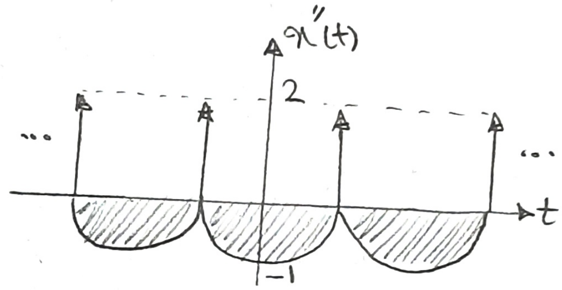



$= |\cos(t)|$

به وضوح مشخص است که:

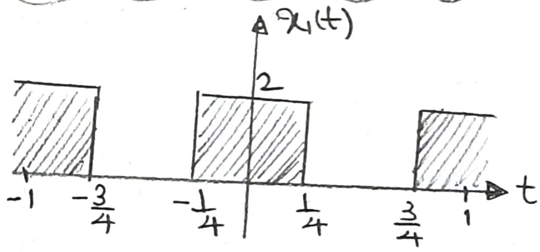



$\rightsquigarrow$




---

j) $a_k = [\text{sinc}(\frac{k}{2})]^2$ و $T=1$



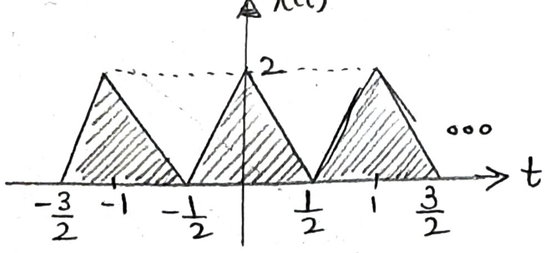

$$a_k = \left(\frac{2\sin(\frac{k\pi}{2})}{k\pi}\right)^2 = b_k^2 \xrightarrow[\text{با } b_k]{\text{سیگنال زمانی متناظر}}$$

پس برای اینکه $b_k$ به توان ۲ برسد کافی است که سیگنال زمانی آن کانولوشن متناوب با خودش شود:

می‌دانیم if $x(t) \circledast y(t) \xrightarrow{F.S} Ta_kb_k$

$x(t) = x_1(t) \circledast x_1(t) \rightsquigarrow$ همانطور که از تکالیف قبل می‌دانیم برای انجام کانولوشن متناوب کافی است یک پریود از سیگنال $x_1(t)$ را در کل سیگنال $x_1(t)$ کانوالو معمولی کنیم در این صورت خواهیم داشت:

$= \underbrace{\tilde{x}_1(t)}_{\text{یک پریود از سیگنال } x_1(t)} \circledast x_1(t)$



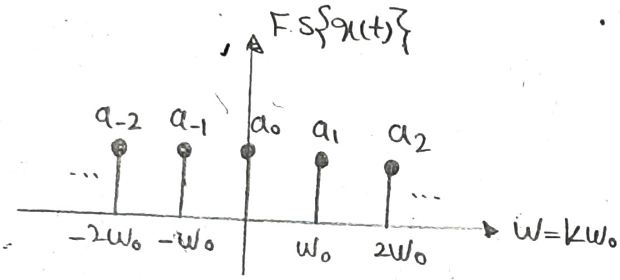

$\rightsquigarrow F.S\{x(t)\} = \underbrace{T}_{1}b_k^2 = b_k^2$ ✓

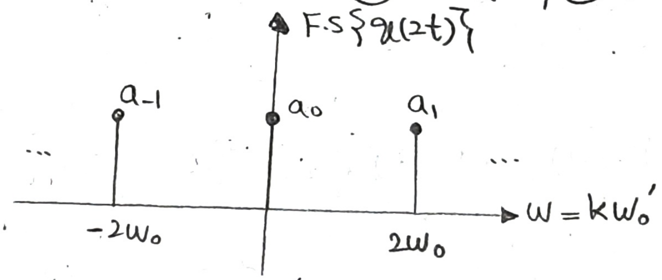
صفحه ۹ سوال 3

الف) $y(t)=x(t)+x(2t)$ و $T_x=T_0 \rightsquigarrow \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$

if $F.S\{x(t)\}=a_k \rightsquigarrow F.S\{x(at)\}=a_k$ if $a>0$

! مقیاس زمانی، ضرایب سری فوریه سیگنال را تغییر نمی‌دهد: ولی باید به تغییر فرکانس پایه توجه داشته باشیم. بنابراین بهتر است که به‌جای رسم ضرایب سری فوریه برحسب $k$، برحسب $\omega=k\omega_0$ رسم نماییم.



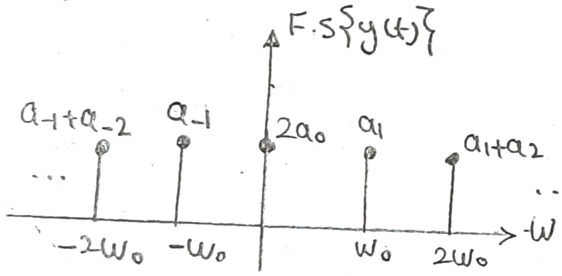




واضح است که دوره تناوب اصلی سیگنال $x(2t)$ برابر $\frac{T_0}{2}$ است پس فرکانس پایه آن:

$$\omega_0'=\frac{2\pi}{\frac{T_0}{2}}=2\times\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)=2\omega_0$$

همان فرکانس پایه سیگنال $x(t)$

بنابراین خواهیم داشت:




دقت کنید که فرکانس پایه $y(t)$ برابر $\omega_0$ است $\rightsquigarrow b_2=a_1+a_2$

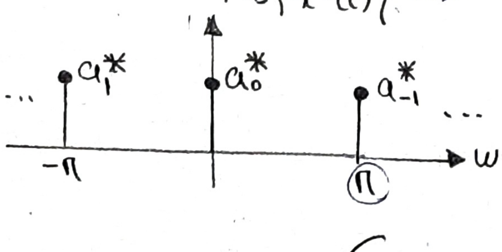
یعنی مقداری که در $2\omega_0$ قرار می‌گیرد

! به خاطر بیاورید که قبلاً اشاره کردیم که خاصیت جمع‌پذیری تنها در صورتی برای ضرایب سری فوریه نیز برقرار است که فرکانس پایه‌ی دوسیگنال یکسان باشند چون در آنجا از رسم شکل استفاده نمی‌کردیم و بررسی فرکانس‌های پایه در حالت تحلیلی مشکل است. اما در اینجا چون ضرایب سری فوریه‌ی هر سیگنال به صورت جداگانه برحسب فرکانس پایه سیگنال اصلی ($\omega_0$) رسم می‌شوند می‌توانیم دو ضریب سری فوریه را راحت جمع کنیم.

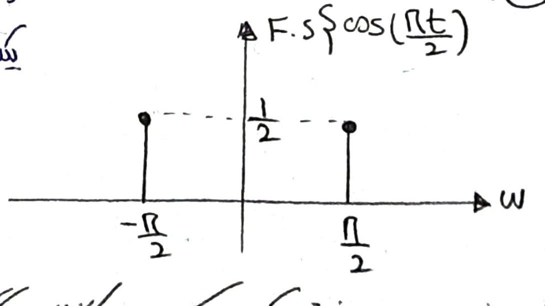
ب) $y(t)=x^*(t)\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ و $T_x=2 \rightsquigarrow \omega_0=\pi$

! مشابه قسمت قبل، در صورتی می‌توان ضرایب سری فوریه‌ی $x(t)\,y(t)$ را به صورت $a_k * b_k$ نوشت که فرکانس‌های پایه‌ی دوسیگنال یکسان باشند. اما اگر از نمایش $\omega=k\omega_0$ به جای $k$ برای ضرایب سری فوریه استفاده کنیم دیگر نیازی به شرط یکسان بودن فرکانس‌های پایه نیست.

$F.S\{x^*(t)\} \rightsquigarrow$ فرکانس پایه $x^*(t)$ با $x(t)$ یکسان است



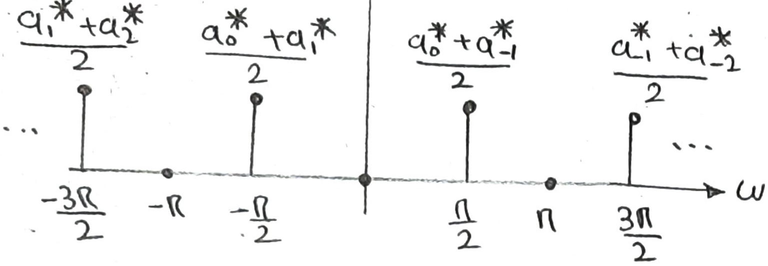

و




پس کافی است که دو نمودار فوق که در حکم دوسیگنال گسسته‌زمان هستند را کانوالو کنیم:

صفحه ۱۰

$$F.S\{y(t)\} = F.S\{x(t)\} * F.S\{\cos(\tfrac{\pi t}{2})\} = b_k$$




فرکانس پایه سیگنال $y(t)$ برابر $\frac{\pi}{2}$ است

$b_0 = 0$

$b_1 = \frac{a_0^* + a_{-1}^*}{2}$

$b_2 = 0$

$b_3 = \frac{a_{-1}^* + a_{-2}^*}{2}$

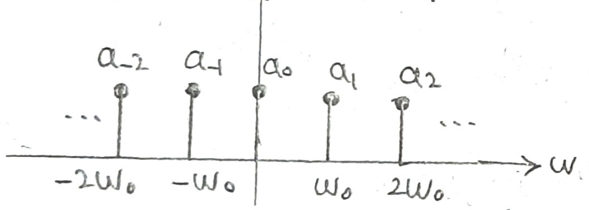
---

2) $y(t) = x^*(2t) + x(-\frac{t}{2})$ و $T_x = T_0 \rightsquigarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

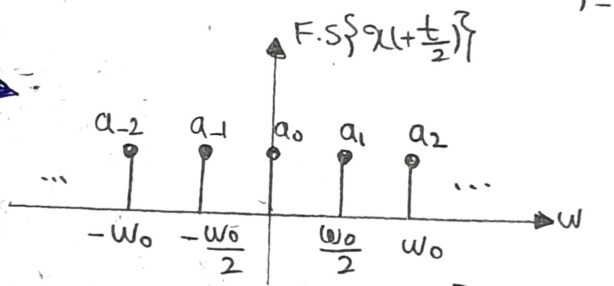
دوره تناوب اصلی $x^*(2t)$ $= \frac{T_0}{2} \rightsquigarrow$ فرکانس پایه $x^*(2t)$ $= \frac{2\pi}{\frac{T_0}{2}} = 2\,\frac{2\pi}{T_0} = 2\omega_0$

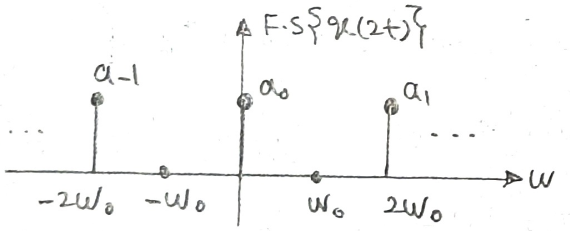
دوره تناوب اصلی $x(-\frac{t}{2})$ $= 2T_0 \rightsquigarrow$ فرکانس پایه $x(-\frac{t}{2})$ $= \frac{2\pi}{2T_0} = \frac{\omega_0}{2}$

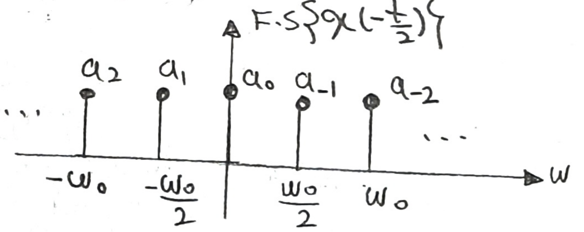
بنابراین خواهیم داشت:

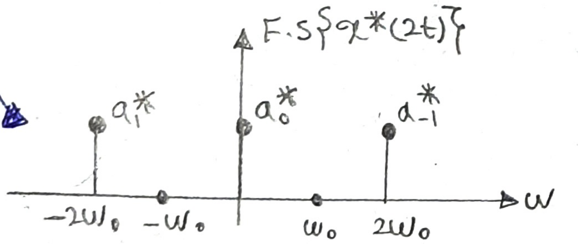



و

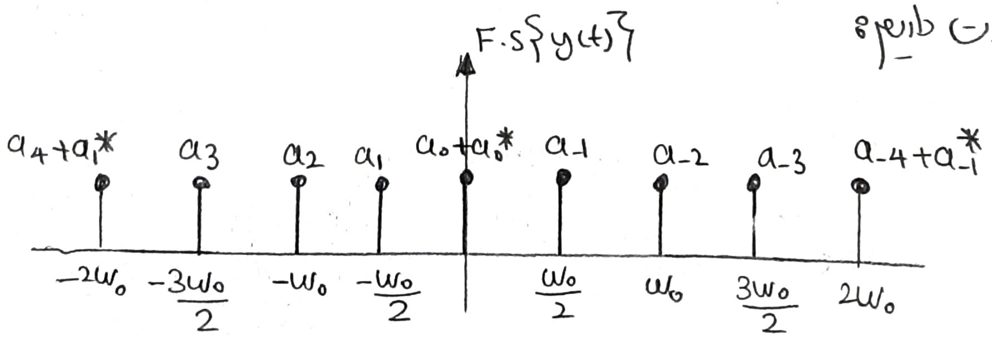


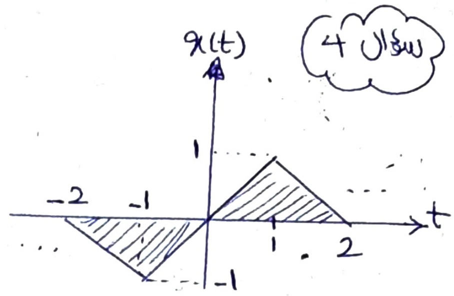

لذا در نهایت داریم:




فرکانس پایه سیگنال $y(t)$ برابر $\frac{\omega_0}{2}$ است $\rightsquigarrow \boxed{b_4 = a_{-4} + a_{-1}^*}$ ✓

سوال 4

$$F.S\{x(t)\} = a_k \rightsquigarrow F.S\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = jk\omega_0 a_k$$



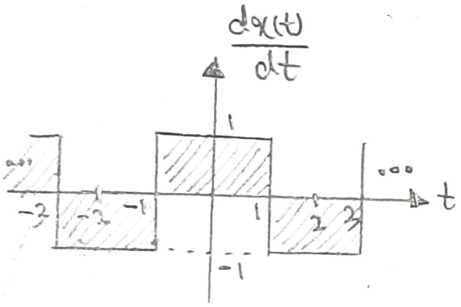

$$\rightsquigarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |jk\omega_0 a_k|^2 = \frac{1}{T}\int_T \left|\frac{dx(t)}{dt}\right|^2 dt$$

رابطه پارسوال

$$T=4 \rightsquigarrow \omega_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\rightsquigarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\pi^2}{4}|ka_k|^2 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2}\left|\frac{dx(t)}{dt}\right|^2 dt$$

پس کافی است که حاصل انتگرال را محاسبه نماییم:




$$\rightsquigarrow \int_{-2}^{2}\left|\frac{dx(t)}{dt}\right|^2 dt = 4$$

$$\rightsquigarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |ka_k|^2 = \frac{4}{\pi^2}\times\frac{1}{4}\times 4 = \boxed{\frac{4}{\pi^2}}$$

---

سوال 5

$$\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = x(t)$$

$x(t)$, $a_k$ → سیستم LTI → $y(t)$, $b_k = H(jk\omega_0)a_k$

از دو طرف معادله دیفرانسیل تبدیل لاپلاس می‌گیریم

$$\rightsquigarrow SY(S) + 4Y(S) = X(S) \rightsquigarrow H(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{1}{S+4}$$

$$\rightsquigarrow H(jk\omega_0) = \frac{1}{jk\omega_0 + 4} \quad \begin{cases} |H(jk\omega_0)| = \dfrac{1}{\sqrt{k^2\omega_0^2+16}} \\ \measuredangle H(jk\omega_0) = -\tan^{-1}\left(\dfrac{k\omega_0}{4}\right) \end{cases}$$

$$x(t) = \cos(3\pi t) + \sin\left(8\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + 1$$

$$= \frac{1}{2}e^{j3\pi t} - \frac{1}{2}e^{-j3\pi t} + \frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi}{3}}e^{j8\pi t} - \frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{-j8\pi t} + 1$$

برای اینکه ضرایب سری فوریه $x(t)$ را مشخص کنیم نیاز به فرکانس پایه آن داریم:

$$T_1 = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{8\pi} = \frac{1}{4} \rightsquigarrow T=2 \rightsquigarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\rightsquigarrow a_{-8} = \frac{e^{-j\pi/3}}{2j}, \quad a_{-3} = +\frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{2}, \quad a_8 = \frac{e^{j\pi/3}}{2j}, \quad a_0 = 1$$

$$\rightsquigarrow b_{-8} = a_{-8}H(-j8\pi) = \left(-\frac{e^{-j\pi/3}}{2j}\right)\left(\frac{1}{4-8j\pi}\right), \quad b_8 = a_8 H(j8\pi) = \left(\frac{e^{j\pi/3}}{2j}\right)\left(\frac{1}{4+j8\pi}\right)$$

$$b_{-3} = a_{-3}H(-j3\pi) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4-3j\pi}\right), \quad b_3 = a_3 H(j3\pi) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4+3j\pi}\right)$$

ادامه صفحه 3

$$b_0 = a_0 H(0) = \frac{1}{4}$$ ✓

---

سوال 6) 1- $x^*(t)=x(t)$ پس سیگنال $x(t)$ حقیقی است پس ضرایب سری فوریه آن دارای تقارن هرمیتی هستند:

$a_k = a^*_{-k} \rightsquigarrow a_2 = a^*_{-2}$ و $a_1 = a^*_{-1}$ $\rightsquigarrow$ طبق "الف" مابقی $a_k$ ها صفر هستند

2- $x(t) = x(t \pm 4n)$ و $n \in \mathbb{Z}$ پس دوره تناوب سیگنال $x(t)$ برابر 4 = T است ولذا $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$.

3- طبق خاصیت "ب" داریم:

$$x(t) = -x(t-2) \rightsquigarrow a_k = -a_k e^{-jk\frac{\pi}{2}\times 2} = -a_k e^{-jk\pi} \rightsquigarrow a_k = -a_k(-1)^k$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \text{if } k \in \text{odd} \rightsquigarrow a_k = a_k \\ \text{if } k \in \text{even} \rightsquigarrow a_k = -a_k \end{cases}$$ $\rightsquigarrow$ به ازای $k$ های زوج $a_k=0$ است؛ اصطلاحاً سیگنال

دارای تقارن نیم موج است و ضرایب هارمونیک های زوج صفر است

بنابراین $a_2 = a_{-2} = 0$

4- تا به اینجا صرفاً دو ضریب غیر صفر داریم که باید مشخص شوند ($a_1$ و $a_{-1}$). طبق خاصیت 4 و استفاده از رابطه پارسوال داریم:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt \rightsquigarrow |a_1|^2 + |a_{-1}|^2 = \frac{1}{4}\int_0^4 |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2}$$

طبق آنچه در بند "1" بدست آوردیم داریم:

$$a_1 = a^*_{-1} \rightsquigarrow |a_1| = |a_{-1}| \rightsquigarrow |a_1|^2 = \frac{1}{4} \rightsquigarrow |a_1| = |a_{-1}| = \frac{1}{2}$$

5- همچنین طبق خاصیت "الف" داریم:

$$a_1 = a_1^* \rightsquigarrow a_1 \text{ حقیقی است } \xrightarrow{a_1<0} a_1 = \frac{-1}{2}$$

$$\rightsquigarrow a_{-1} = a_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\rightsquigarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = a_{-1} e^{j(-1)\frac{2\pi}{4}t} + a_1 e^{j(1)\frac{2\pi}{4}t} = -\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}t} - \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}t}$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$ ✓

Bonus (الف)

$$* \ x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = a_0+\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \underbrace{e^{jk\omega_0 t}} + a_{-k}\underbrace{e^{-jk\omega_0 t}}$$

$\cos(k\omega_0 t) \pm j\sin(k\omega_0 t)$ ← فرمول اویلر

$$= a_0+\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k+a_{-k})\cos(k\omega_0 t) + j(a_k-a_{-k})\sin(k\omega_0 t)$$

$$\equiv \frac{C_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty} C_k\cos(k\omega_0 t)+b_k\sin(k\omega_0 t) \rightsquigarrow \begin{cases} a_0=\frac{C_0}{2} \\ a_k+a_{-k}=C_k \\ j(a_k-a_{-k})=b_k \end{cases}$$

$$* \ x(t)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty} B_k\cos(k\omega_0 t-\theta_k) = A_k+\sum_{k=1}^{+\infty} B_k\cos(k\omega_0 t)\cos(\theta_k)+B_k\sin(k\omega_0 t)\sin(\theta_k)$$

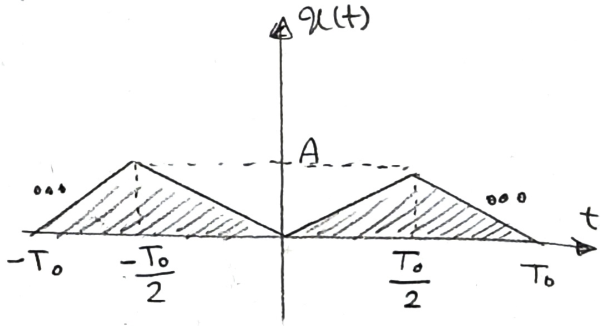
$$= A_0+\sum_{k=1}^{+\infty} B_k\cos(\theta_k)\cos(k\omega_0 t)+B_k\sin(\theta_k)\sin(k\omega_0 t)$$

$$\equiv \frac{C_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty} C_k\cos(k\omega_0 t)+b_k\sin(k\omega_0 t) \rightsquigarrow \begin{cases} A_0=\frac{C_0}{2} \\ C_k=B_k\cos(\theta_k) \\ b_k=B_k\sin(\theta_k) \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} B_k=\sqrt{C_k^2+b_k^2}=2\sqrt{a_k a_{-k}} \\ \theta_k=\tan^{-1}\left(\frac{b_k}{C_k}\right) \end{cases}$$

---

$$x(t)=\begin{cases} \frac{2A}{T_0}t & 0\leq t\leq \frac{T_0}{2} \\ -\frac{2A}{T_0}t+2A & \frac{T_0}{2}\leq t\leq T_0 \end{cases}$$




$$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$a_k=\begin{cases} 0 & k=2m\neq 0 \\ -\frac{2A}{\pi^2 k^2} & k=2m+1 \\ \frac{A}{2} & k=0 \end{cases} \rightsquigarrow x(t)=\frac{A}{2}-\frac{2A}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{j(2m+1)\omega_0 t}}{(2m+1)^2}$$

و نمایش مثلثاتی آن به صورت زیر است :

$b_k = 0$ for all $k$

$$c_k = \begin{cases} 0 & k = 2m \neq 0 \\ \dfrac{-4A}{\pi^2 k^2} & k = 2m+1 \\ A & k = 0 \end{cases} \quad \leadsto \quad x(t) = \frac{A}{2} - \frac{4A}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)\omega_0 t}{(2m+1)^2}$$