تمرین سری ۴

س ۱) الف) فرض کنید در ائتلاف فراگیر سودها به صورت (x'_A, x'_B, x'_C, x'_D) باشد که هر x'_i و جمع‌شان برابر 133 است

در این حالت باید نامساوی‌ها زیر برقرار باشند:

$$\left.\begin{aligned} x'_A + x'_C &\geq \frac{5}{4}(x_A + x_C) = 25 \\ x'_B + x'_D &\geq \frac{5}{4}(x_B + x_D) = 15 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x'_A + x'_B + x'_C + x'_D \geq 25 + 15 = 40$$

که غیرممکن است. پس ائتلاف فراگیر نداریم.

برای آن که ائتلاف فراگیر تشکیل شود باید مجموعه نامساوی‌های زیر برقرار باشد

$$* \; x'_A + x'_C \geq 25 \;,\quad \overset{**}{,}\; x'_B + x'_D \geq 15 \;,\quad x'_A + x'_D \geq 25 \;,\quad x'_A + x'_B \geq 20 \;,\quad x'_B + x'_C \geq 15$$

$$x'_C + x'_D \geq 20 \;,\quad x'_A + x'_B + x'_C \geq \frac{9}{8}(12 + 4 + 8) = 27 \;,\quad x'_A + x'_B + x'_D \geq 27$$

$$x'_A + x'_C + x'_D \geq \frac{9}{8}(12 + 8 + 8) = 31.5 \;,\quad x'_B + x'_C + x'_D \geq \frac{9}{8}(4 + 8 + 8) = 22.5$$

$$x'_A \geq 12 \;,\quad x'_B \geq 4 \;,\quad x'_C \geq 8 \;,\quad x'_D \geq 8$$

با ترکیب نامساوی‌های مختلف در بالا می‌توان مشاهده کرد که سنگین‌ترین شرط از ترکیب * و ** به دست می‌آید که $x'_A + x'_B + x'_C + x'_D \geq 40$ است. حال می‌توان دید که با تخصیص سود (15, 5, 10, 10) ائتلاف فراگیر داریم. (البته با توجه به این که در صورت مساله، ضریب $\frac{5}{4}$ بزرگترین ضریب سود همکاری را می‌دهد، می‌توان فهمید که کافی است ائتلاف‌های دونفره را چک کنیم و نیاز به نوشتن همه ائتلاف‌ها یک و سه‌نفره نبود)

ب) با این فرض، در حالت دونفره:

$$X_i = \frac{X_i}{X_i + X_j} \times \frac{5}{4}(X_i + X_j) = \frac{5}{4} X_i = \frac{40}{32} X_i$$

در حالت سه‌نفره:

$$X_i = \frac{X_i}{X_i + X_j + X_k} \times \frac{9}{8}(X_i + X_j + X_k) = \frac{9}{8} X_i = \frac{36}{32} X_i$$

و در حالت ٤ نفره:

$$x_i = \frac{x_i}{x_i + x_j + x_k + x_n} \times 33 = \frac{33}{32} x_i$$

پس واضح است که ائتلاف‌ها دو نفره برای همه جذاب‌تر است و تفاوتی نمی‌کند که نفر i با کدام فرد ائتلاف کند.

لذا این ایالت‌ها به صورت اتحادهای دوتایی تجزیه می‌شوند یعنی یکی از حالت‌های زیر:

$\{(A,B), (C,D)\}$ یا $\{(A,C), (B,D)\}$ یا $\{(A,D), (B,C)\}$

س ۲ - اول باید mixed-NE ها را بیابیم (شاید خالص هم باشند البته)

		q	$1-q$
		x	y
p	x	1,1	0,2
$1-p$	y	2,0	-1,-1

$$U_1 = pq + 2(1-p)q - (1-p)(1-q)$$

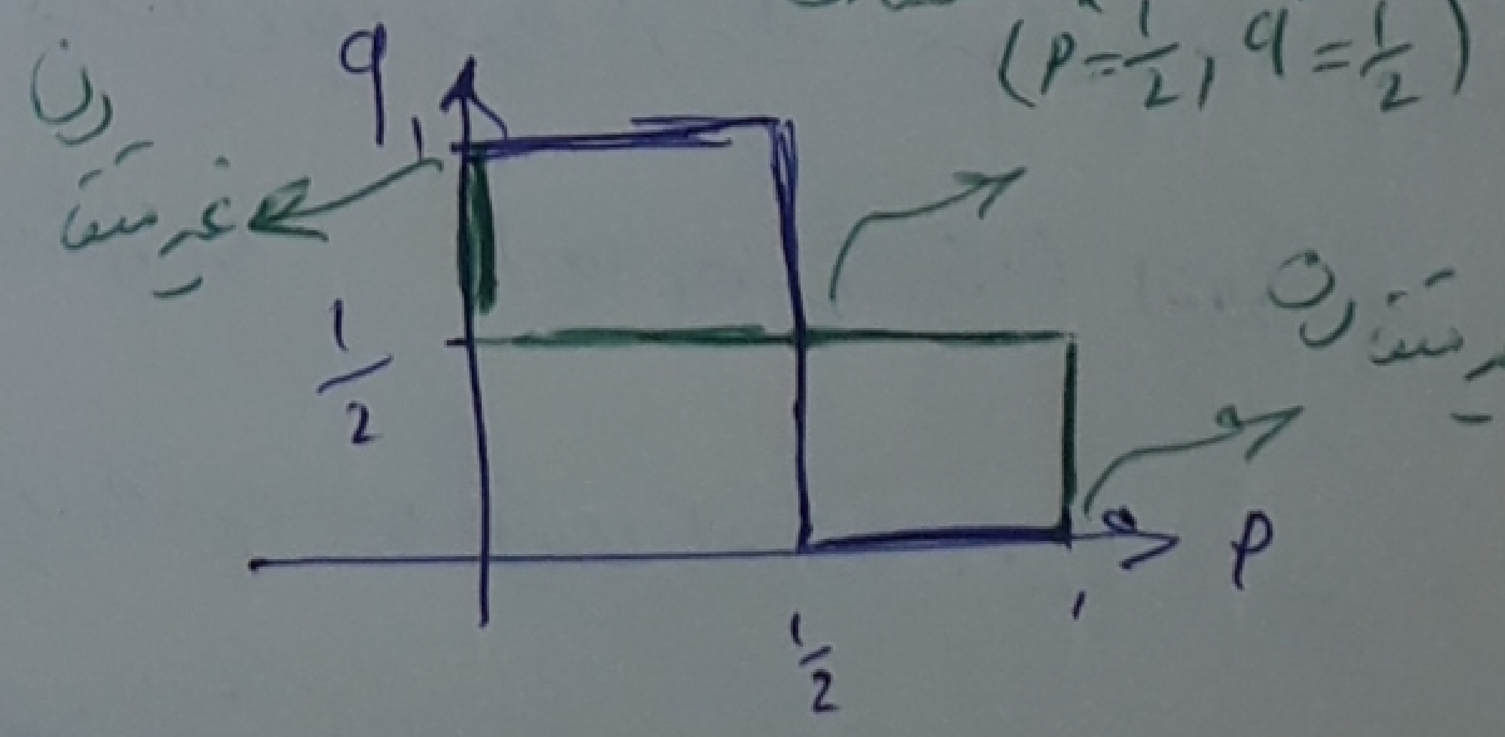
$$= p[q - 2q + 1 - q] + \underbrace{\cdots}_{\text{مستقل از } p}$$

$$= p[1-2q] + \cdots$$

$$\Rightarrow B_1(q) = \begin{cases} 0 & q > \frac{1}{2} \\ [0,1] & q = \frac{1}{2} \\ 1 & q < \frac{1}{2} \end{cases}$$

به صورت مشابه، با توجه به تقارن داریم:

$$B_2(p) = \begin{cases} 0 & p < \frac{1}{2} \\ [0,1] & p = \frac{1}{2} \\ 1 & p < \frac{1}{2} \end{cases}$$



حال باید چک کنیم که $\alpha^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ در شرط دوم تعریف ESS صدق می‌کند؟ یعنی آیا

$$U(\beta,\beta) < U(\alpha^*,\beta)$$

$$\text{for all } \beta \in BR(\alpha^*), \beta \neq \alpha^*$$

پس ابتدا $BR(\alpha^*)$ را بدست می‌آوریم. فرض کنید $\beta = (p, 1-p)$ باشد. آنگاه:

$$U(\beta,\alpha^*) = 1 \times p \times \frac{1}{2} + 0 + 2(1-p) \times \frac{1}{2} + (-1) \times (1-p) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow BR(\alpha^*) = [0,1]$$

پس باید برای هر $p \neq \alpha^* = \frac{1}{2}$، داشته باشیم $U(\beta,\beta) < U(\alpha^*,\beta)$ یا به طور معادل باید داشته باشیم:

$0 < U(\alpha^*, B) - U(B, B)$ for all $p \neq \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 0 < \left[\frac{1}{2}p + 0 + 2\times\frac{1}{2}p + (-1)\times\frac{1}{2}(1-p)\right] - \left[p^2 + 0 + 2(1-p)p + (-1)(1-p)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow 0 < 2p^2 - 2p + \frac{1}{2} = 2\left[p^2 - p + \frac{1}{4}\right] = 2\left(p - \frac{1}{2}\right)^2$$

که برای هر $p \neq \frac{1}{2}$ برقرار است.

پس $\alpha^* = \frac{1}{2}$ یک ESS است.

س ۳

	A	P
A	$\frac{v-c}{2}, \frac{v-c}{2}$	$\frac{2v}{3}, \frac{v}{3}$
P	$\frac{v}{3}, \frac{2v}{3}$	$\frac{v}{2}, \frac{v}{2}$

v و $c \geq 0$

اول نرم خالص را نگاه کنیم تا بعضی حالت‌ها ساده شوند:

چون $\frac{2v}{3} > \frac{v}{2}$ است، واضح است که (P,P) نمی‌تواند NE باشد.

اما برای تعیین وضعیت (A,A) باید روی مقدار v, c بحث کنیم.

$$(A,A)\ \text{SNE} \Leftrightarrow \frac{v-c}{2} > \frac{v}{3} \Leftrightarrow v > 3c$$

پس اگر $v > 3c$ باشد، $\alpha^* = (1,0)$ یک ESS است و ESS دیگری نداریم.

اگر $v = 3c$ باشد، (A,A) یک تعادل نش غیراکید است و ممکن است A یک ESA باشد اما چون صورت مسأله، سوال نکرده است می‌گذریم.

در ادامه برای حالت $3c > v$ بازی را به صورت آمیخته مدل می‌کنیم.

		A q	P $1-q$
p	A	---	--
$1-p$	P	--	---

$$\Rightarrow U_1 = pq\left(\frac{v-c}{2}\right) + p(1-q)\frac{2v}{3} + (1-p)q\frac{v}{3} + (1-p)(1-q)\frac{v}{2}$$

$$= p\left[q\left(\frac{v-c}{2} - \frac{2v}{3} - \frac{v}{3} + \frac{v}{2}\right) + \frac{2v}{3} - \frac{v}{2}\right] + \cdots$$

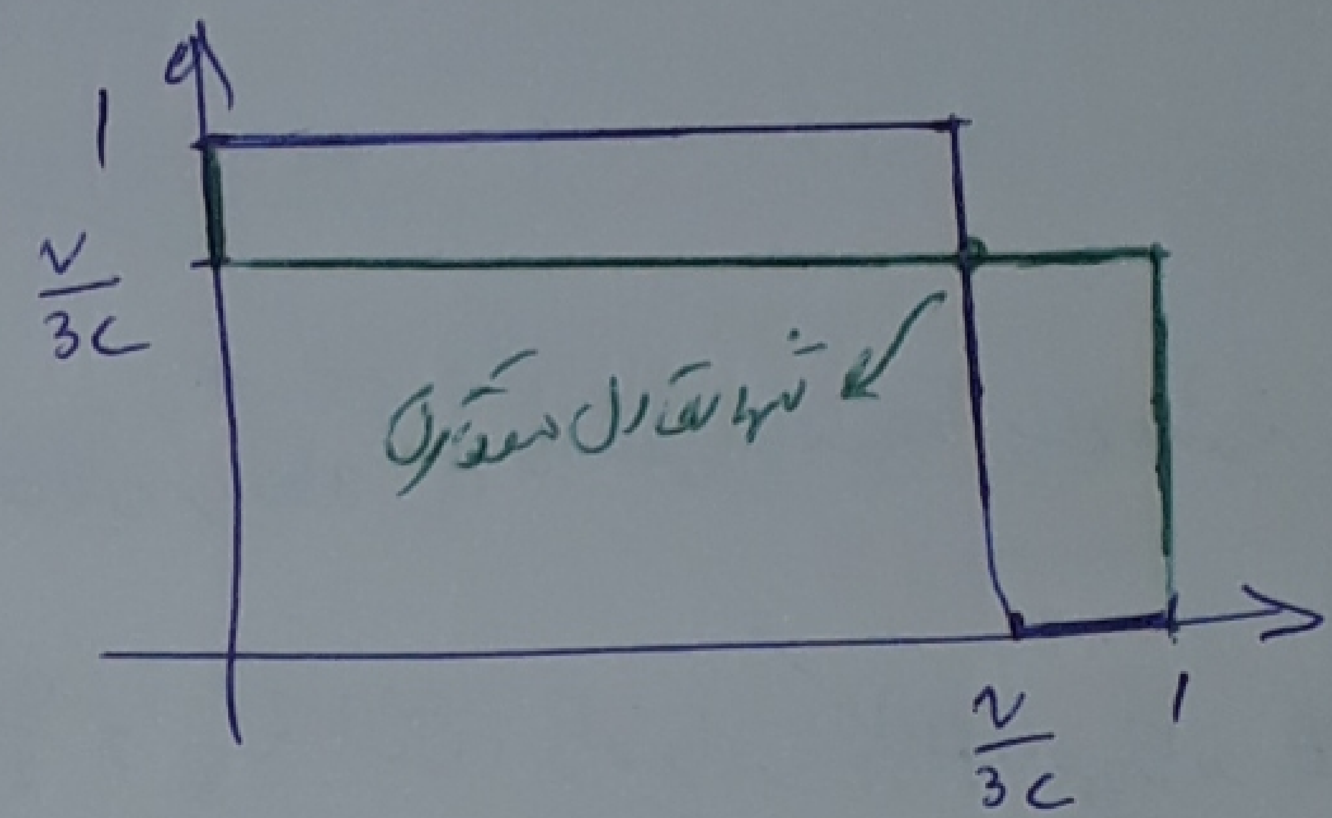
$$= p\left[q\left(-\frac{c}{2}\right) + \frac{v}{6}\right] + \cdots$$

$$\Rightarrow B_1(q) = \begin{cases} 0 & q > \frac{v}{3c} \\ [0,1] & q = \frac{v}{3c} \\ 1 & q < \frac{v}{3c} \end{cases}$$

و به همین ترتیب، با تقارن:

$$B_2(p) = \begin{cases} 0 & p > \frac{v}{3c} \\ [0,1] & p = \frac{v}{3c} \\ 1 & p < \frac{v}{3c} \end{cases}$$

و توجه کنیم که $v \le 3c$ است پس $1 \ge \frac{v}{3c}$ است و ضابطه‌های فوق، محقق می‌شوند.



حال شرط دوم را برای $\alpha^* = (\frac{v}{3c}, 1-\frac{v}{3c})$ چک می‌کنیم.

$BR(\alpha^*) = ?$:

$$B = (p, 1-p) \Rightarrow U(B,\alpha^*) = \frac{v-c}{2} \times p \times \frac{v}{3c} + \frac{2v}{3} \times p \times \left(1 - \frac{v}{3c}\right) + \frac{v}{3} \times (1-p) \times \frac{v}{3c} + \frac{v}{2} \times (1-p)\left(1-\frac{v}{3c}\right)$$

$$= p\underbrace{\left[\frac{v-c}{2} \times \frac{v}{3c} + \frac{2v}{3}\left(1-\frac{v}{3c}\right) - \frac{v}{3} \times \frac{v}{3c} - \frac{v}{2}\left(1-\frac{v}{3c}\right)\right]}_{0} + \cdots$$

یعنی به p وابسته نیست $\Leftarrow$ $BR(\alpha^*) = [0,1]$

پس باید $U(B,B) < U(\alpha^*,B) \quad \forall p \neq \frac{v}{3c}$ باشد تا α^* یک ESS باشد. در ادامه این شرط را چک می‌کنیم

$$0 < U(\alpha^*,B) - U(B,B) \Leftrightarrow 0 < \frac{v-c}{2} \times p\left[\frac{v}{3c} - p\right] + \frac{2v}{3} \times (1-p)\left(\frac{v}{3c} - p\right) + \frac{v}{3} \times p\left[1 - \frac{v}{3c} - p\right] + \frac{v}{2} \times (1-p)\left[1 - \frac{v}{3c} - (1-p)\right]$$

$$\Leftrightarrow 0 < \left(\frac{v}{3c} - p\right)\left(\frac{v}{6} - \frac{pc}{2}\right) = \frac{1}{18c}(v - 3pc)^2 = \frac{c}{2}\left(p - \frac{v}{3c}\right)^2$$

که برای هر $p \neq \frac{v}{3c}$ برقرار است.

$\Leftarrow$ برای $v < 3c$، $\alpha^* = (\frac{v}{3c}, 1-\frac{v}{3c})$ یک ESS است.