بسم الله الرّحمن الرّحیم

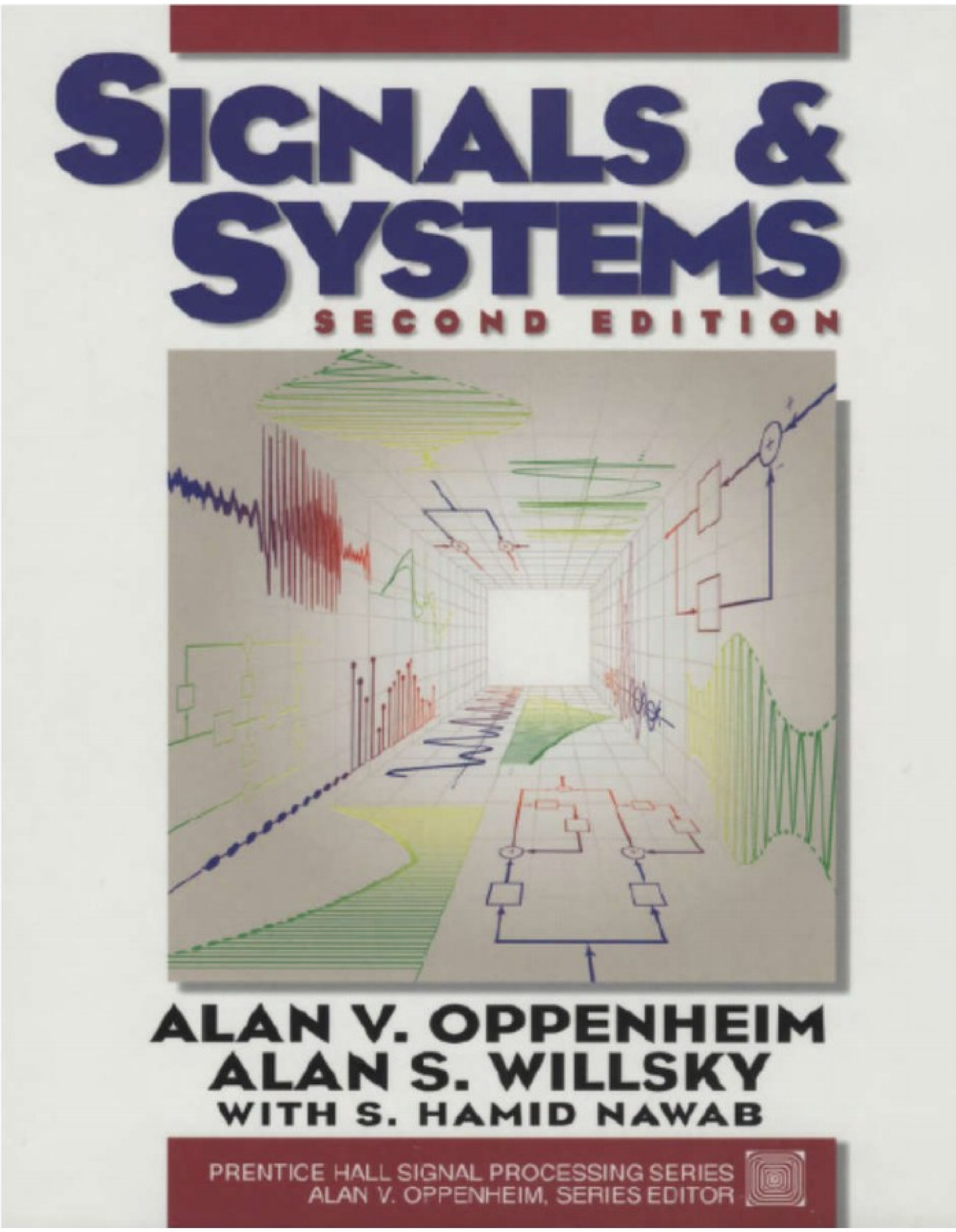
دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده برق و کامپیوتر

تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مدرس: مسعود عمومی

جلسه اول _ ۲۹ بهمن ۹۹

با سلام خدمت دانشجویان محترم



✓ مرجع اصلی درس

Library of Congress Cataloging-in-Publication Data

Oppenheim, Alan V.
Signals and systems / Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, with S. Hamid Nawab. - 2nd ed.
p. cm. - Prentice-Hall signal processing series
Includes bibliographical references and index.
ISBN 0-13-814757-4
1. System analysis. 2. Signal theory (Telecommunication)
I. Willsky, Alan S. II. Nawab, Syed Hamid. III. Title.
IV. Series
QA402.063 1996
621.382'23–dc20 96-19945
CIP

Published by Prentice-Hall, Inc.
Simon & Schuster / A Viacom Company
Upper Saddle River, New Jersey 07458

○ مقدمه:

- ✓ مفاهیم سیگنال‌ها و سیستم‌ها دامنهٔ بسیار گسترده‌ای در شاخه‌های مختلف علوم مهندسی، تجربی، اقتصادی و اجتماعی مرتبط با زندگی روزمرهٔ بشر دارد.
- ✓ تأکید اصلی این درس بر جنبه‌های مهندسی این مفاهیم، به ویژه در شاخه‌های مرتبط با مهندسی برق و کامپیوتر است.
- ✓ این درس ابزار ریاضی کارآمدی را برای توصیف دقیق عملکرد بسیاری از پدیده‌ها و فرآیندهای مطرح در مباحث مختلف مهندسی برق و کامپیوتر فراهم خواهد کرد.
- ✓ آشنایی با مفاهیم اساسی ریاضیات عمومی و حساب دیفرانسیل و انتگرال، کار با اعداد مختلط، معادلات دیفرانسیل پایه و مدارهای الکتریکی به فهم بهتر مطالب این درس کمک خواهد کرد.
- ✓ آشنایی با نرم‌افزارهای محاسباتی به ویژه MATLAB برای درک بهتر و عمیق‌تر درس و انجام پروژه‌ها بسیار مفید است.

✓ مطالب درس:

فصل اول: معرفی سیگنال‌ها و سیستم‌ها Ch. 1

فصل دوم: سیستم‌های خطی و تغییرناپذیر با زمان Ch. 2

فصل سوم: تبدیل لاپلاس Ch. 9

فصل چهارم: سری فوریهٔ سیگنال‌های متناوب زمان‌پیوسته Ch. 3

فصل پنجم: تبدیل فوریهٔ سیگنال‌های زمان‌پیوسته Ch. 4

فصل ششم: تبدیل Z Ch. 10

فصل هفتم: سری فوریهٔ سیگنال‌های متناوب زمان‌گسسته Ch. 3

فصل هشتم: تبدیل فوریهٔ سیگنال‌های زمان‌گسسته Ch. 5

فصل نهم: نمونه‌برداری Ch. 7

✓ نحوهٔ ارزیابی:

میان‌ترم ۵ نمره پایان‌ترم ۷ نمره تمرین ۲ نمره

فعالیت کلاسی شامل کوئیز و پرسش کلاسی ۵ نمره

پروژه ۲ نمره

مجموع ۲۱ نمره

✓ برگزاری کلاس‌های مجازی: آنلاین؟ / آفلاین ؟

❖ فصل اول: معرفی سیگنال‌ها و سیستم‌ها

1 SIGNALS AND SYSTEMS 1

تعاریف کلی سیگنال و سیستم

سیگنال: به زبان ریاضی، تابعی از یک یا چند متغیر مستقل است که حاوی اطلاعاتی در مورد رفتار یا ماهیت یک پدیده یا فرآیند است. این فرآیند می‌تواند فیزیکی و یا حتی طبیعی، اجتماعی و اقتصادی باشد.

اگر چه سیگنال‌ها را می‌توان در گسترهٔ بسیار وسیعی از پدیده‌ها مشاهده و تعریف کرد، اما می‌توان برخورد مشترکی با همهٔ آنها به عنوان توابع ریاضی یک یا چندمتغیره داشت.

مثال‌ها: انواع سیگنال‌های مخابراتی / سیگنال‌های صوتی و تصویری / سیگنال‌های پزشکی و تشخیصی / تغییرات آب و هوایی / تغییرات شاخص‌های اقتصادی (تورم، بورس، ارز و ...) / داده‌های آماری و ...

در این درس، تنها برروی سیگنال‌های یک‌بعدی (توابع یک متغیره) تأکید می‌شود. بررسی و تحلیل سیگنال‌های چندبعدی فراتر از سطح این درس است.

صرف‌نظر از جنس و نوع متغیر مستقل در یک سیگنال یک‌بعدی، از این پس این متغیر را متغیر زمان می‌نامیم.

متغیر زمان در یک سیگنال می‌تواند پیوسته (یک عدد حقیقی) یا گسسته (یک عدد صحیح) باشد. بنابراین:

سیگنال‌های یک‌بعدی

زمان‌پیوسته (CT) Continuous-Time

$x(t), \quad t \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یا $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

زمان‌گسسته (DT) Discrete-Time

(دنباله) $x[n], \quad n \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ یا $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$

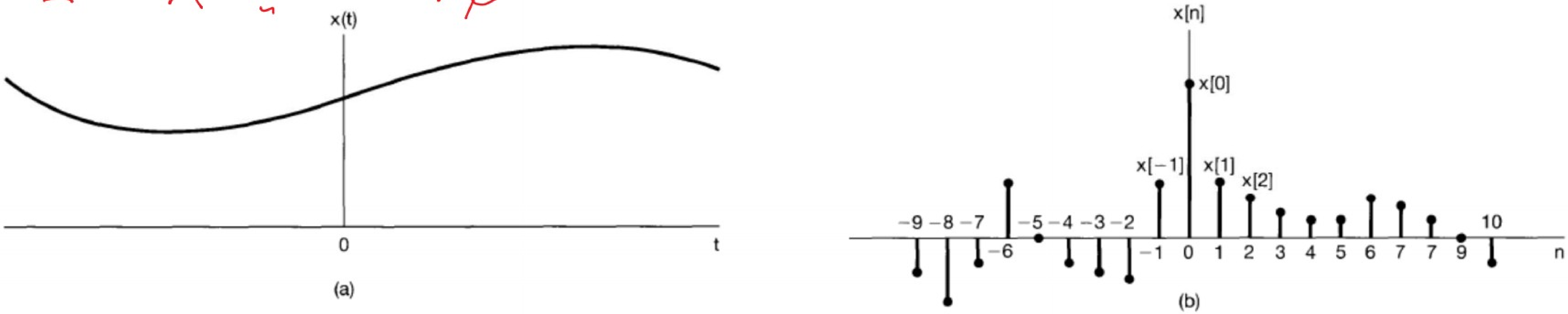


Figure 1.7 Graphical representations of (a) continuous-time and (b) discrete-time signals.

توجه: مقداری که یک سیگنال دارد می‌تواند حقیقی و یا مختلط باشد. Real-Valued or Complex-Valued

تعریف انرژی و توان یک سیگنال در یک بازهٔ زمانی محدود

the total energy over the time interval $t_1 \leq t \leq t_2$ in a continuous-time signal $x(t)$ is defined as

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt, \tag{1.4}$$

The time-averaged power is obtained by dividing eq. (1.4) by the length, $t_2 - t_1$, of the time interval.

and the total energy in a discrete-time signal $x[n]$ over the time interval $n_1 \leq n \leq n_2$ is defined as

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2, \tag{1.5}$$

dividing by the number of points in the interval, $n_2 - n_1 + 1$, yields the average power over the interval.

توجه: تعاریف فوق مستقل از نوع و جنس مقدار سیگنال است و لزوماً مفهوم فیزیکی انرژی را نمی‌رساند.

تعریف انرژی و توان یک سیگنال در یک بازهٔ زمانی نامحدود (انرژی کل سیگنال)

Furthermore, in many systems we will be interested in examining power and energy in signals over an infinite time interval, i.e., for $-\infty < t < +\infty$ or for $-\infty < n < +\infty$. In these cases, we define the total energy as limits of eqs. (1.4) and (1.5) as the time interval increases without bound. That is, in continuous time,

$$E_\infty \triangleq \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt, \tag{1.6}$$

and in discrete time,

$$E_\infty \triangleq \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2. \tag{1.7}$$

Note that for some signals the integral in eq. (1.6) or sum in eq. (1.7) might not converge—e.g., if $x(t)$ or $x[n]$ equals a nonzero constant value for all time. Such signals have infinite energy, while signals with $E_\infty < \infty$ have finite energy.

In an analogous fashion, we can define the time-averaged power over an infinite interval as

$$P_\infty \triangleq \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt = \lim_{T \to \infty} \frac{E_\infty}{2T} \qquad (1.8)$$

and

$$P_\infty \triangleq \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2 = \lim_{N \to \infty} \frac{E_\infty}{2N+1} \qquad (1.9)$$

in continuous time and discrete time, respectively.

سه دستهٔ مهم سیگنال‌ها:

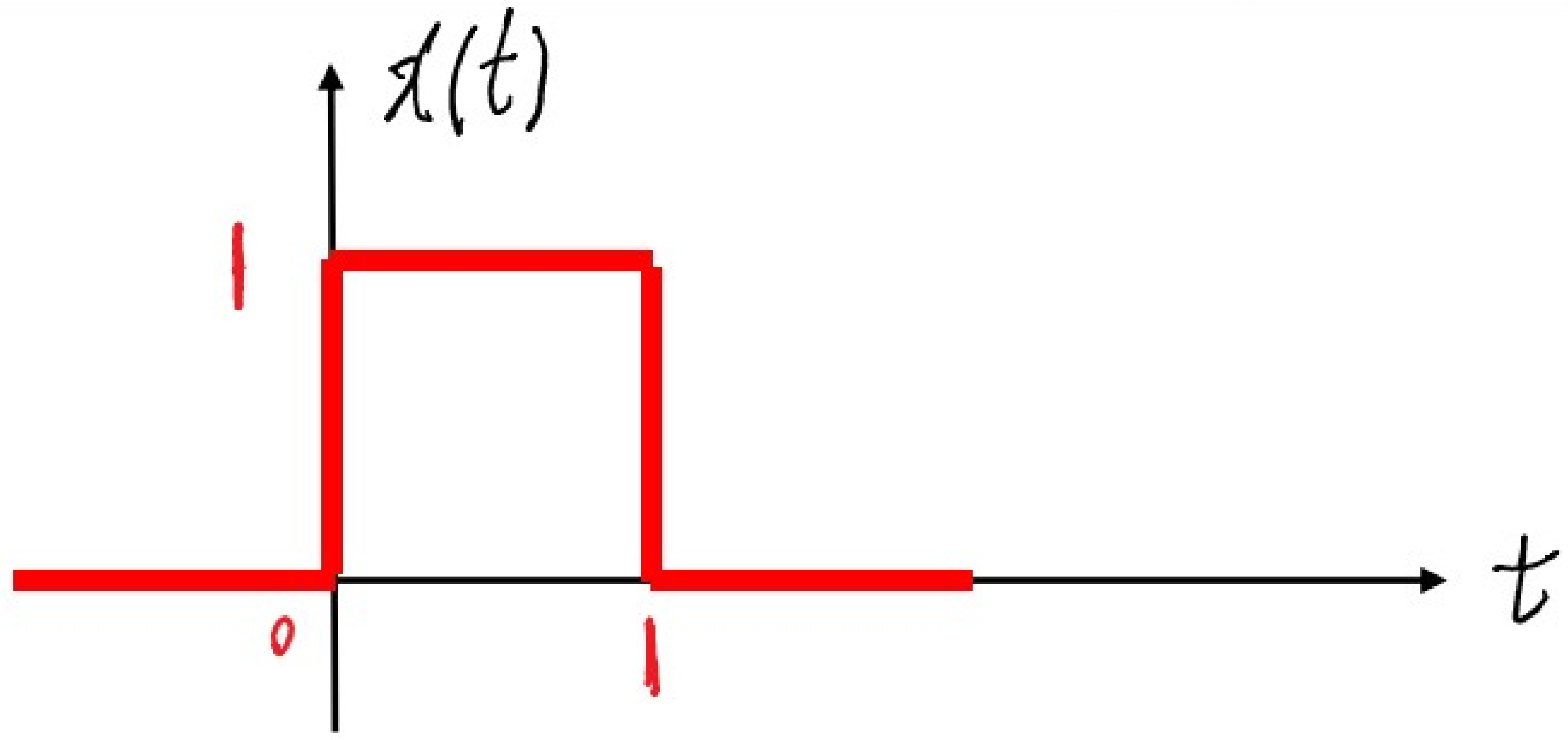
With these definitions, we can identify three important classes of signals.

۱) سیگنال‌های انرژی $\left(0 < E_\infty < \infty \quad \text{و} \quad P_\infty = 0\right)$

The first of these is the class of signals with finite total energy, i.e., those signals for which $E_\infty < \infty$. Such a signal must have zero average power, since in the continuous time case, for example, we see from eq. (1.8) that

$$P_\infty = \lim_{T \to \infty} \frac{E_\infty}{2T} = 0. \tag{1.10}$$

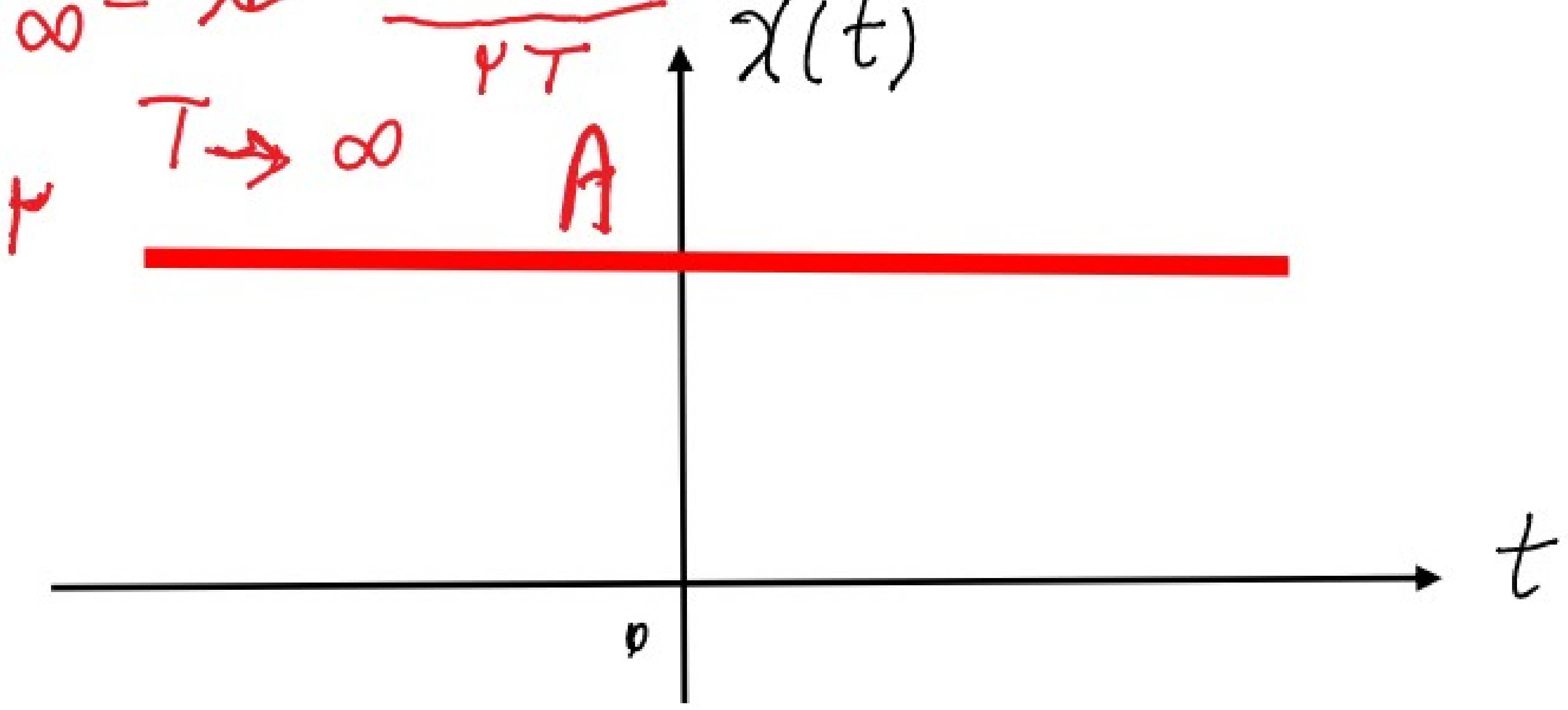
An example of a finite-energy signal is a signal that takes on the value 1 for $0 \le t \le 1$ and 0 otherwise. In this case, $E_\infty = 1$ and $P_\infty = 0$.



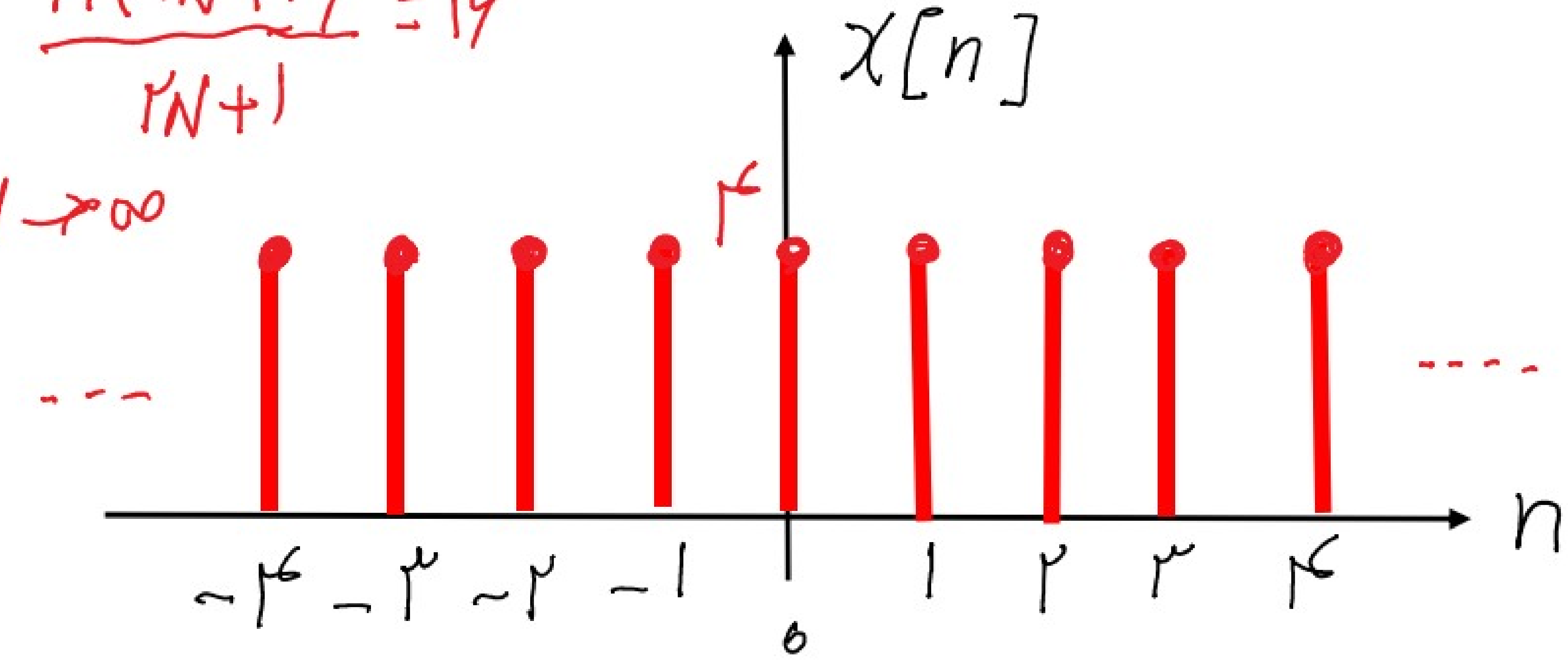
۲) سیگنال‌های توان $\left(E_\infty = \infty \quad \text{و} \quad 0 < P_\infty < \infty \right)$

A second class of signals are those with finite average power P_∞. From what we have just seen, if $P_\infty > 0$, then, of necessity, $E_\infty = \infty$. This, of course, makes sense, since if there is a nonzero average energy per unit time (i.e., nonzero power), then integrating or summing this over an infinite time interval yields an infinite amount of energy. For example, the constant signal $x[n] = 4$ has infinite energy, but average power $P_\infty = 16$.

$$P_\infty = \lim_{T \to \infty} \frac{A^2(2T)}{2T} = A^2$$

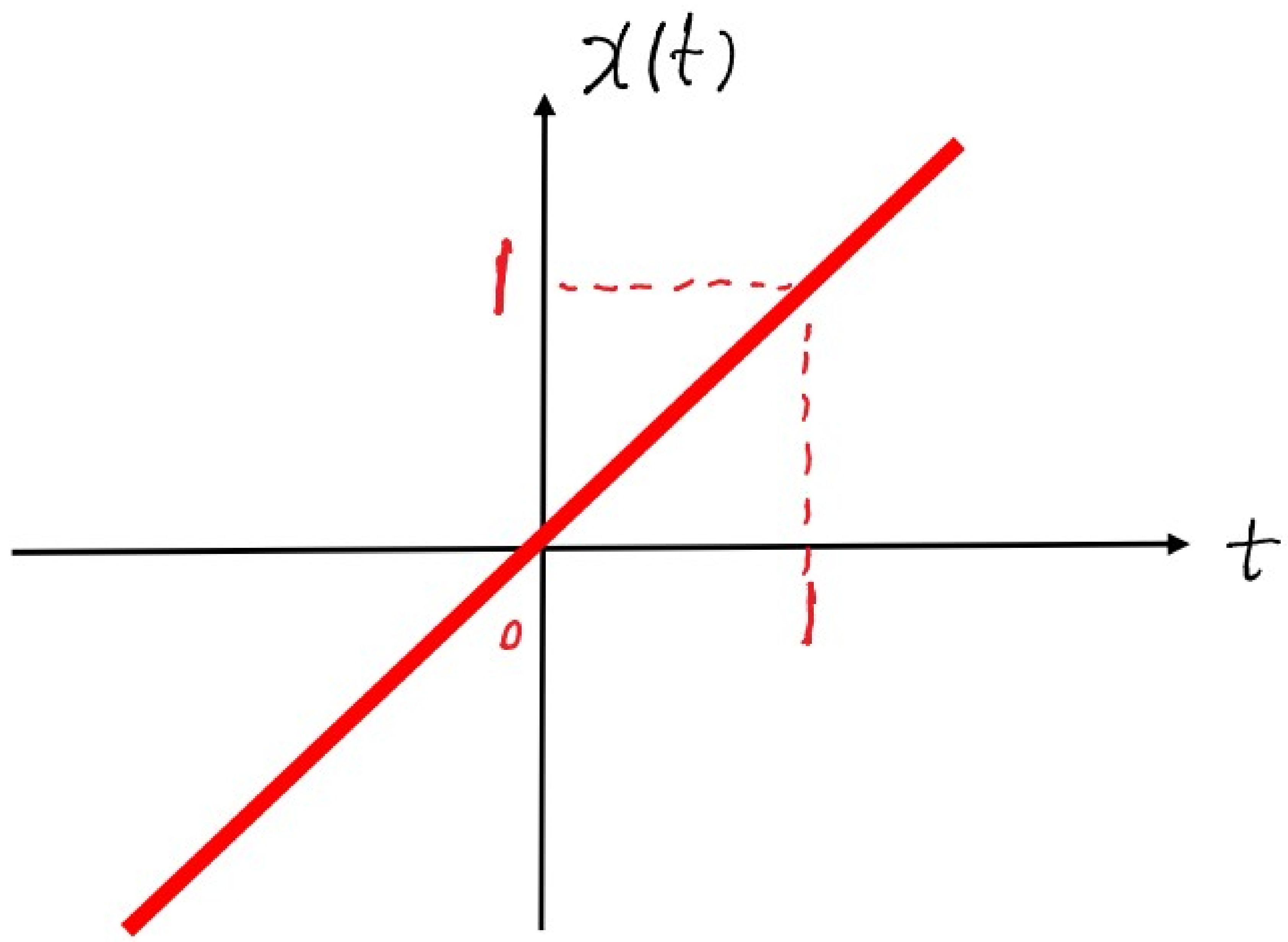


$$P_\infty = \lim_{N \to \infty} \frac{16(2N+1)}{2N+1} = 16$$



۳) نه سیگنال انرژی و نه سیگنال توان   ($E_\infty = \infty$ و $P_\infty = \infty$)

There are also signals for which neither P_∞ nor E_∞ are finite. A simple example is the signal $x(t) = t$. We will encounter other examples of signals in each of these classes in the remainder of this and the following chapters.



$$E_\infty = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} t^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{3} t^3 \Big|_{-T}^{T} = \infty$$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{E_\infty}{2T} = \lim_{T\to\infty} \frac{\frac{2}{3} T^3}{2T} = \lim_{T\to\infty} \frac{T^2}{3} = \infty$$

مثال) انرژی و توان کل سیگنال زیر را محاسبه کنید.

$$x[n]=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n & ,\ n\geq 0\\ 0 & ,\ n<0\end{cases}$$

$$|x[n]|^2=\left|\left(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right|^2=\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}\right)^n=\left(\frac{3}{4}\right)^n \quad ,\ n\geq 0$$

$$E_\infty=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=4$$

تصاعد هندسی

$$P_\infty=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|x[n]|^2=\lim_{N\to\infty}\frac{E_\infty}{2N+1}=\lim_{N\to\infty}\frac{4}{2N+1}=0$$

سیگنال از نوع انرژی است.

مثال) انرژی و توان کل سیگنال $x(t) = A\cos\omega t$ را محاسبه کنید.

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 \cos^2\omega t \, dt = \frac{A^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (1+\cos 2\omega t)\, dt$$

$$= \frac{A^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dt + \frac{A^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \cos 2\omega t \, dt = \infty + 0 = \infty$$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A^2\cos^2\omega t \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{4T}\int_{-T}^{T} dt + \underbrace{\lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{4T}\int_{-T}^{T} \cos 2\omega t \, dt}_{0}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{(A^2)(2T)}{4T} = \frac{A^2}{2}$$

سیگنال از نوع توان است.

بسم الله الرّحمن الرّحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده برق و کامپیوتر

تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مدرس: مسعود عمومی

جلسه دوم _ بخش 1.2.1 کتاب

با سلام خدمت دانشجویان محترم

تبدیلات خطی متغیر مستقل (زمان) در سیگنال‌های یک بعدی (بخش 1.2.1)

$t \rightarrow \alpha t + \beta \quad (CT)$

$n \rightarrow \alpha n + \beta \quad (DT)$

$y(t) = x(\alpha t + \beta)$

$y[n] = x[\alpha n + \beta]$

α و β اعداد ثابت حقیقی هستند.

سؤال: شکل $y(t)$ چه ارتباطی با شکل $x(t)$ دارد؟ شکل $y[n]$ چه ارتباطی با شکل $x[n]$ دارد؟

در ادامه برای حالت های مختلف مقادیر α و β در دو حالت پیوسته و گسسته بحث می‌شود.

حالت زمان پیوسته (CT)

$t \to \alpha t + \beta$

$\alpha = 1$ و $\beta \neq 0$ (Time Shifting) انتقال زمانی

$\beta < 0$ (انتقال به راست) $\beta > 0$ (انتقال به چپ)

$$y(t) = x(t+\beta)$$

$\alpha = -1$ و $\beta = 0$ (Time Reversing) وارونگی زمانی

$$y(t) = x(-t)$$

$\alpha \neq 1$ و $\beta = 0$ (Time Scaling) تغییر مقیاس زمانی

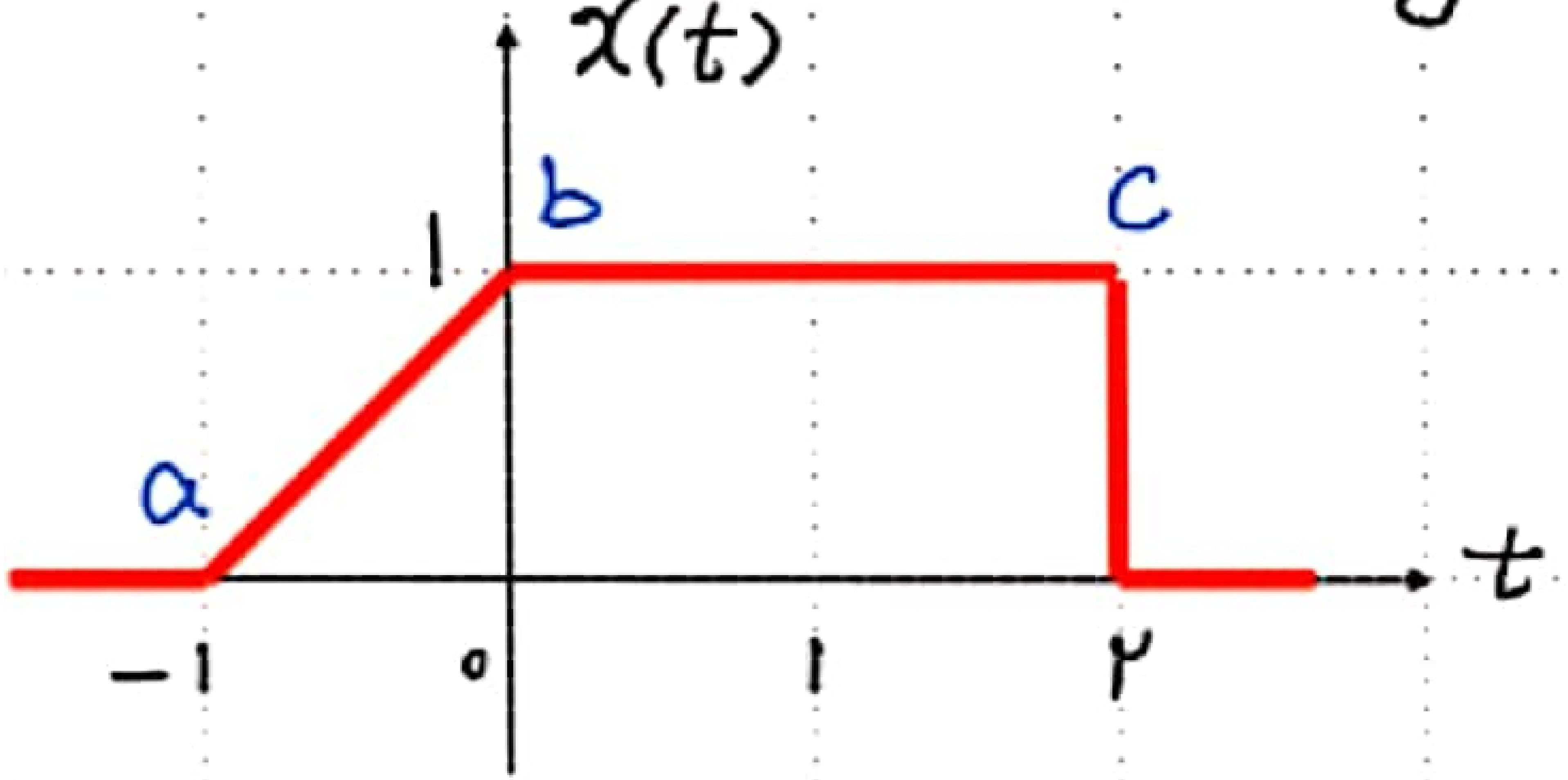
$0 < \alpha < 1$ (گستردگی زمانی) $\alpha > 1$ (فشردگی زمانی)

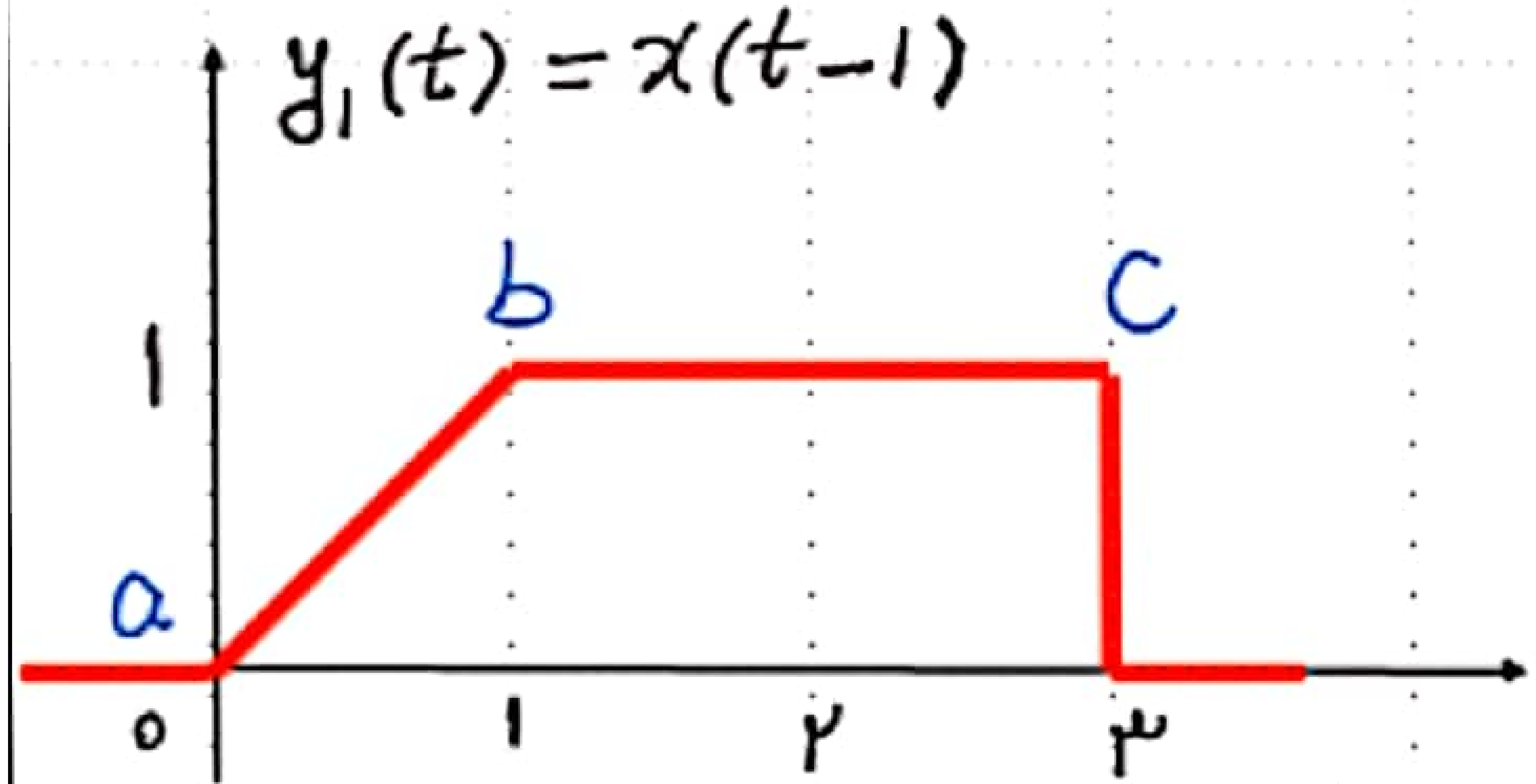
Expanding / Stretching $\quad y(t) = x(\alpha t) \quad$ Compressing

مثال ۱) انتقال زمانی

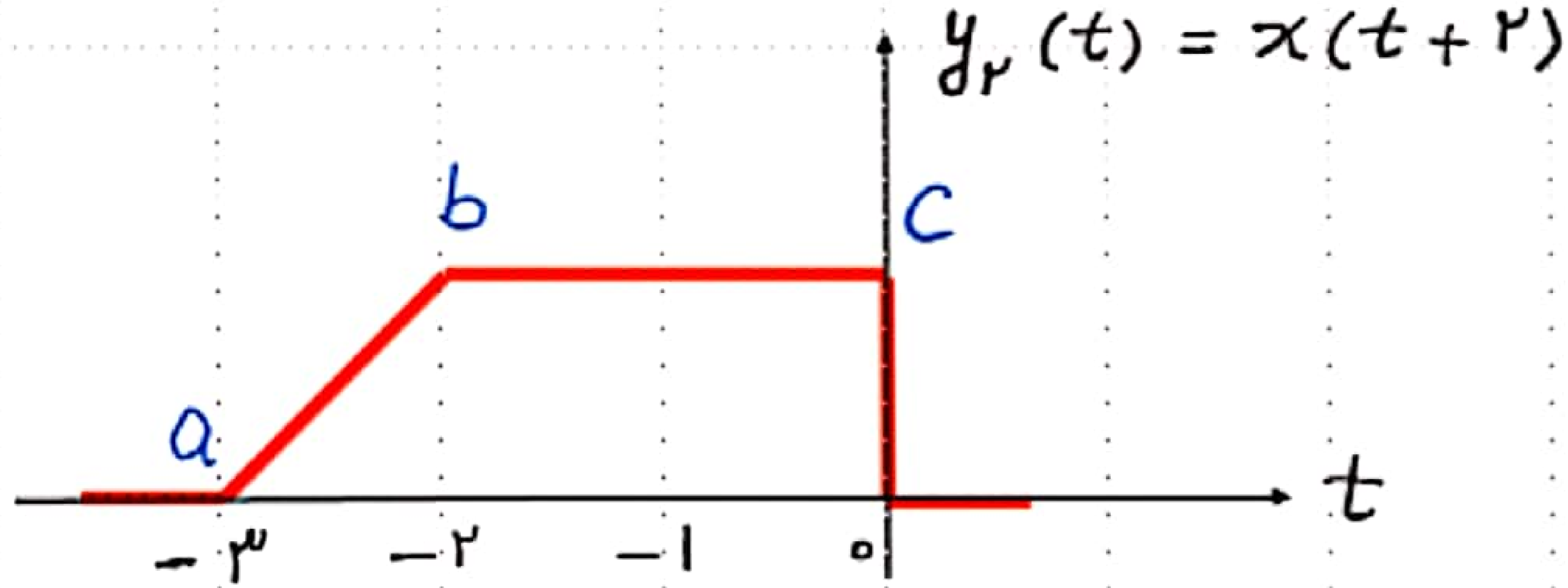
$$y(t) = x(t+\beta)$$

$$y_1(t) = x(t-1) \quad , \quad y_2(t) = x(t+2)$$





یک واحد انتقال به راست

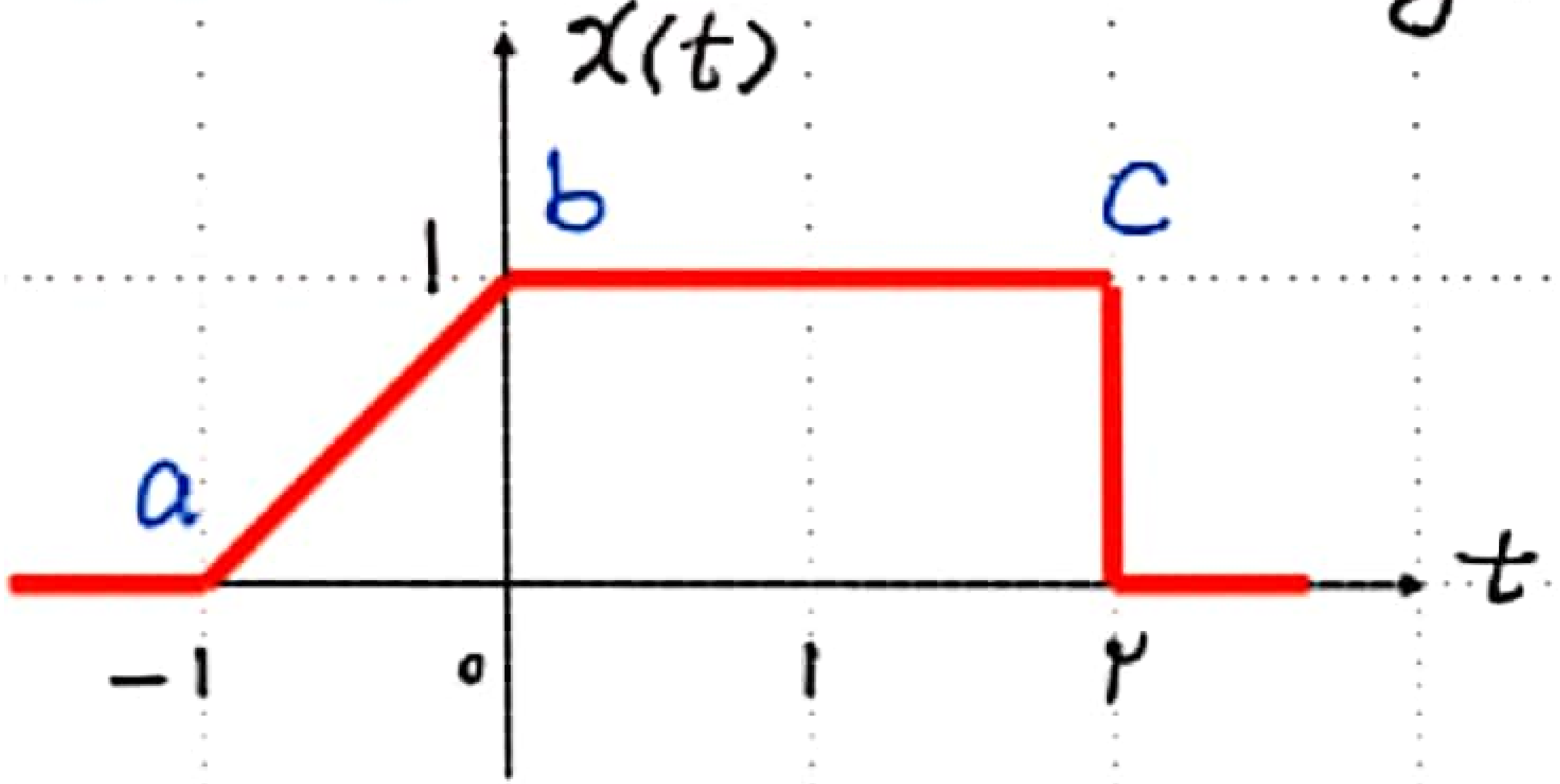


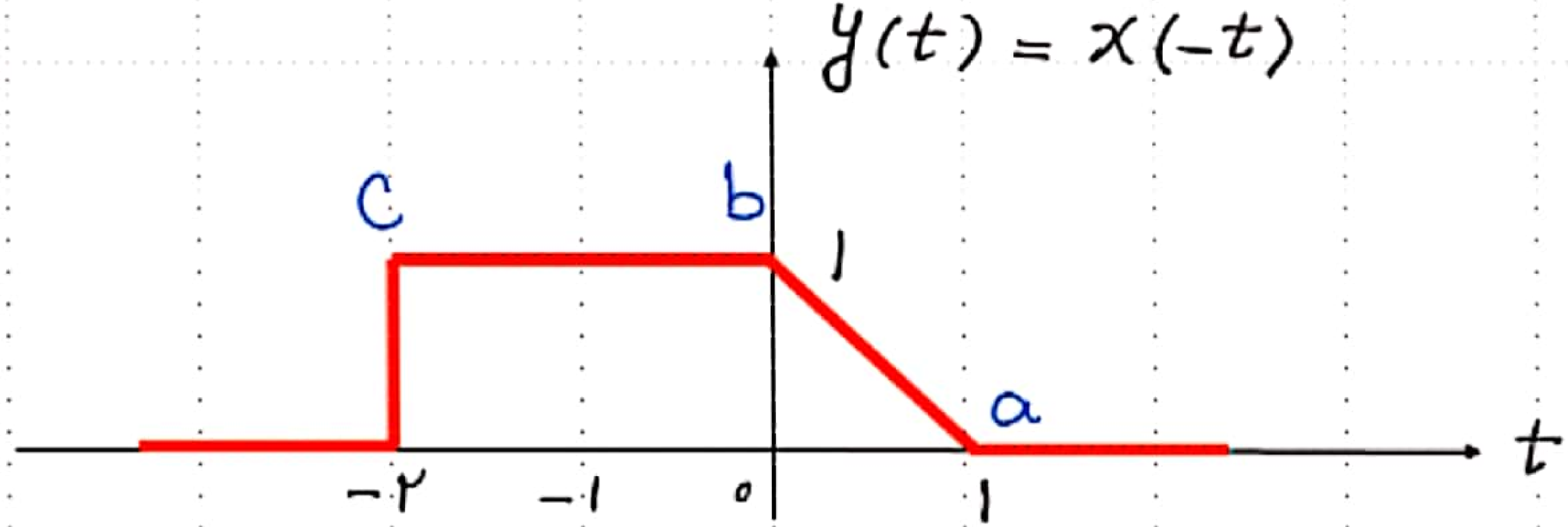
دو واحد انتقال به چپ

مثال ۲) وارونگی زمانی

$y(t) = x(-t)$

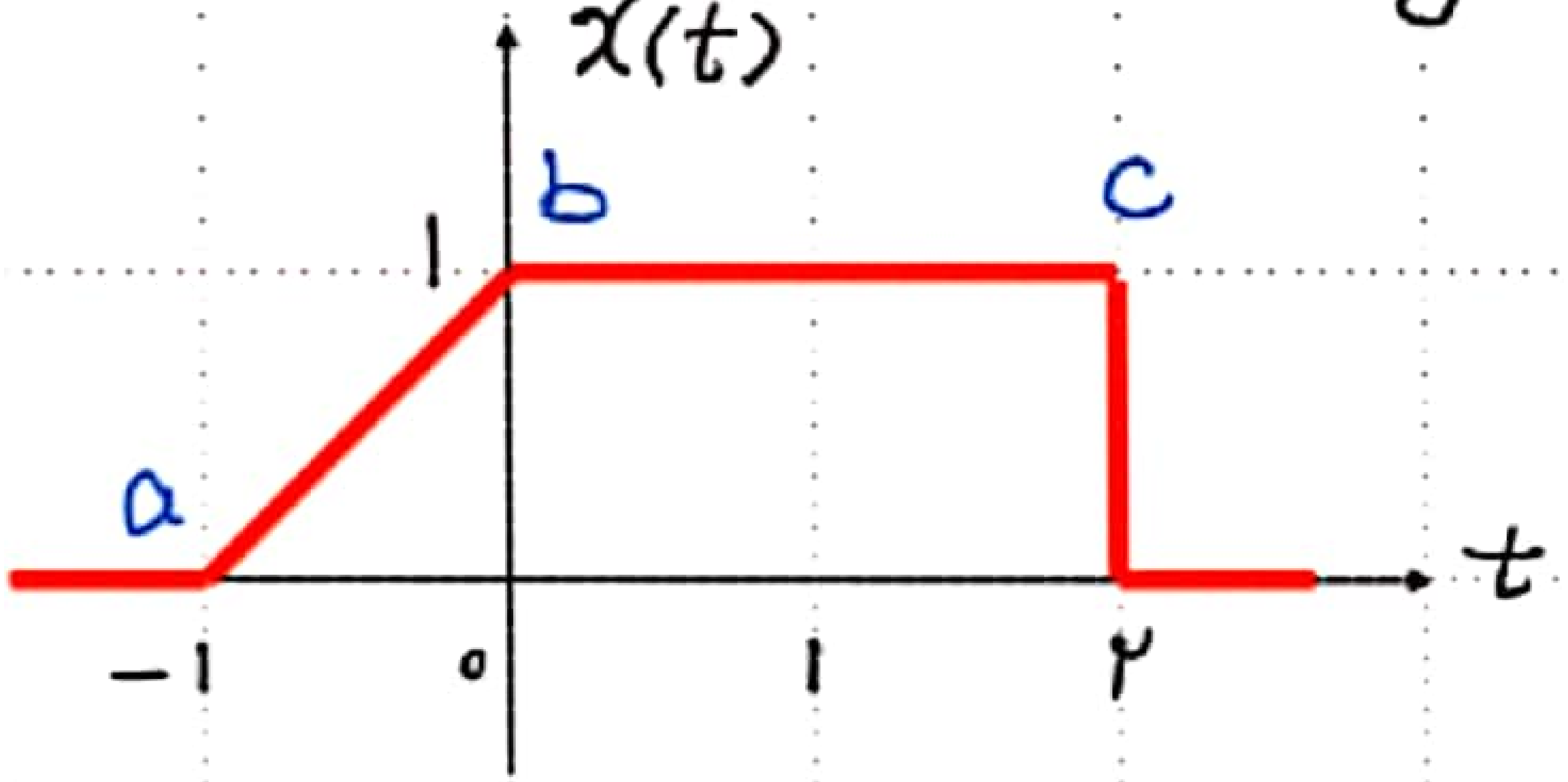
$y(t)$ قرینهٔ $x(t)$ نسبت به محور عمودی است.



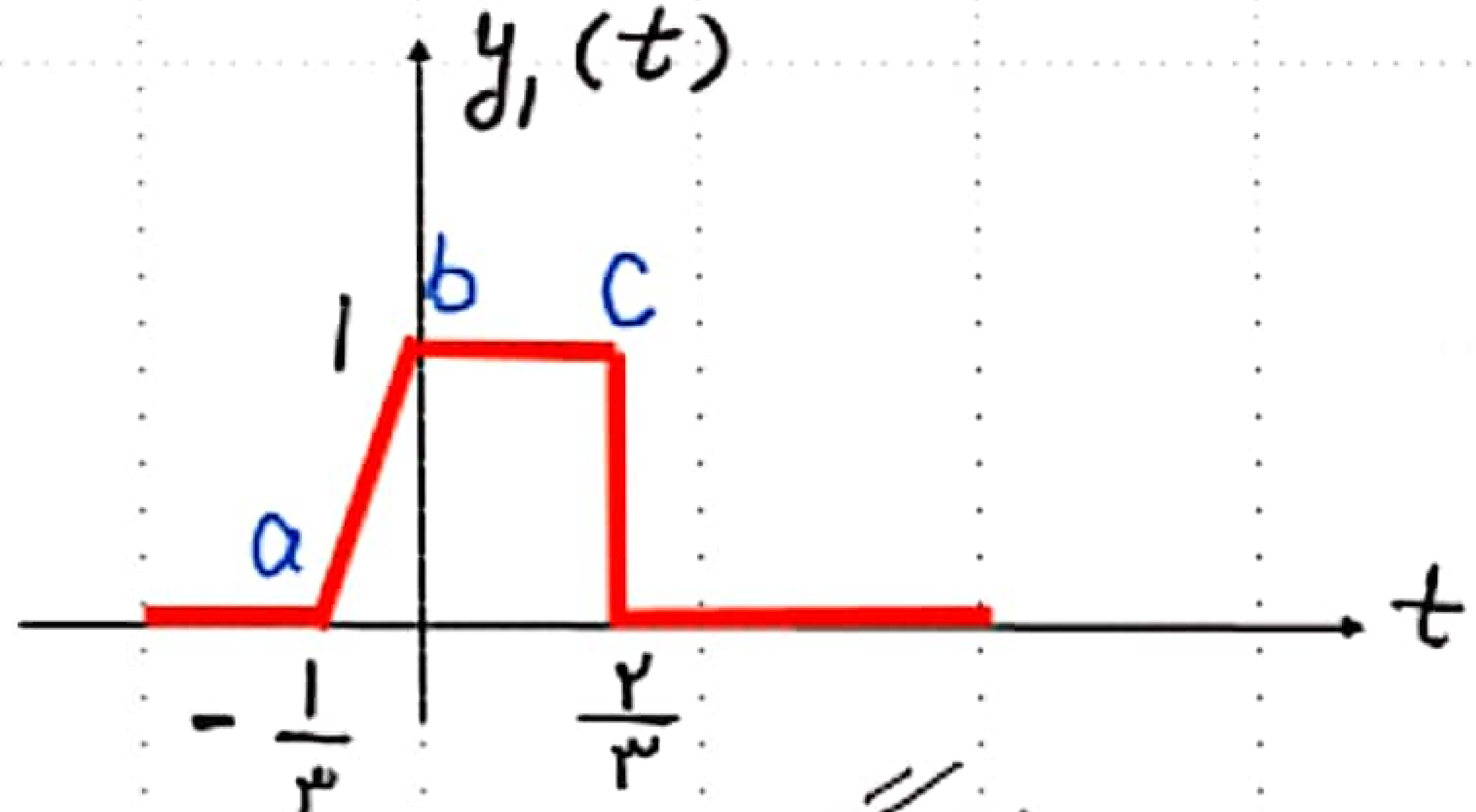


مثال ۳) تغییر مقیاس زمانی

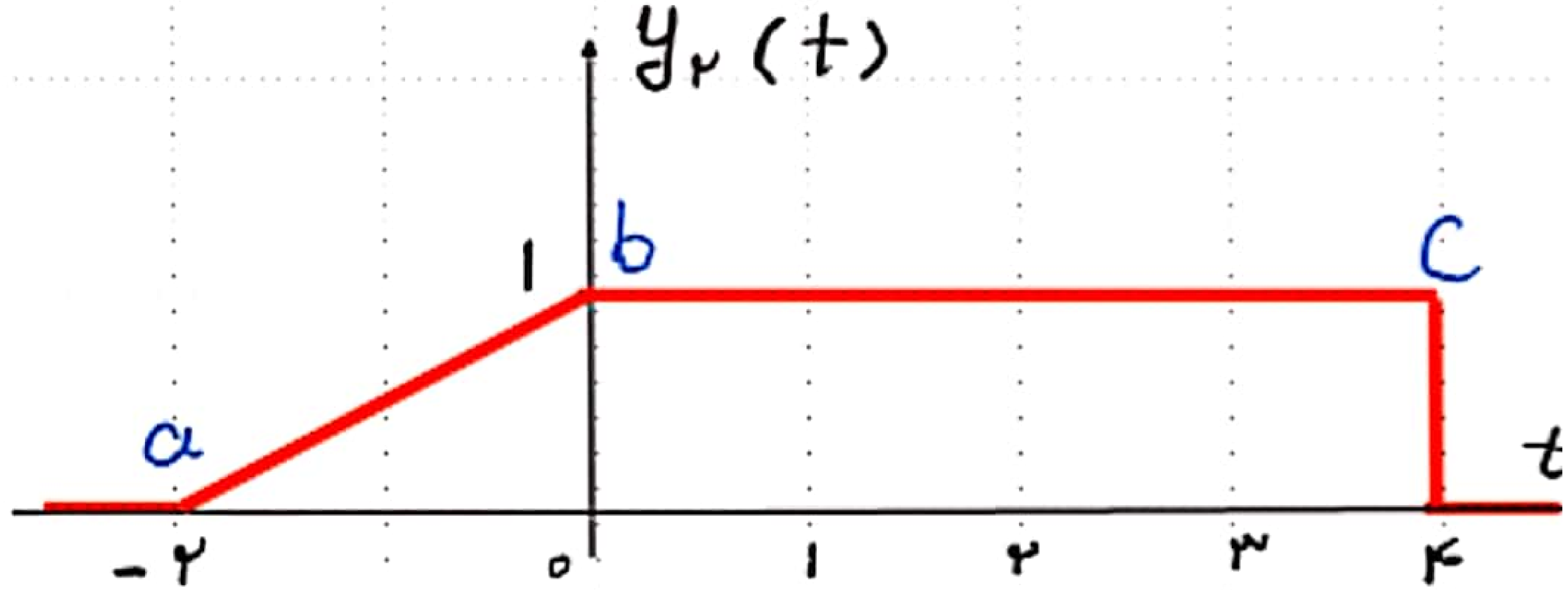
$$y(t) = x(\alpha t)$$



$$y_1(t) = x(3t) \quad (\alpha > 1) \qquad , \qquad y_2(t) = x\left(\frac{t}{2}\right) \quad (0 < \alpha < 1)$$



فشردگی با نسبت ۳



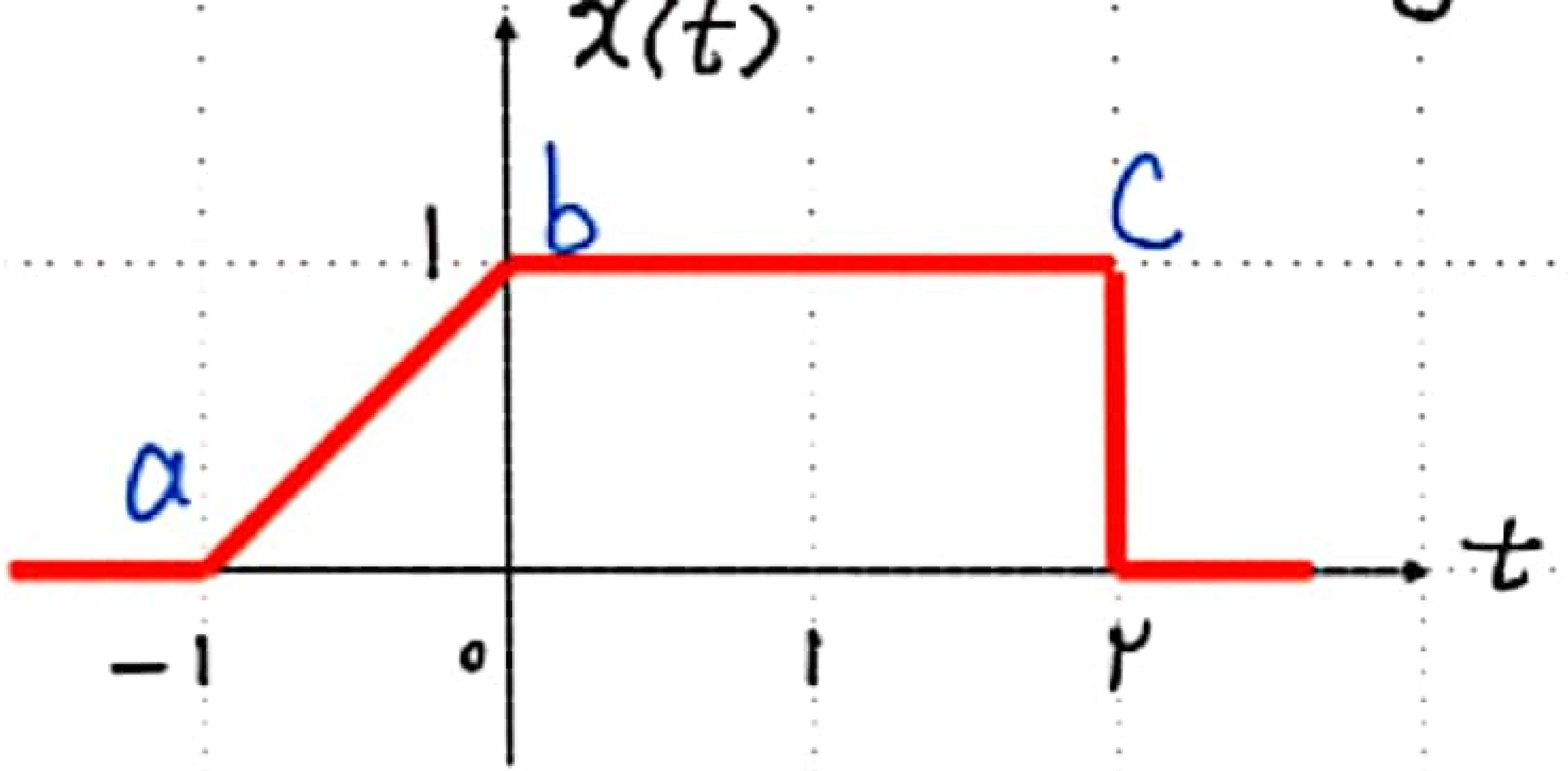
گستردگی (کشیدگی) با نسبت ۲

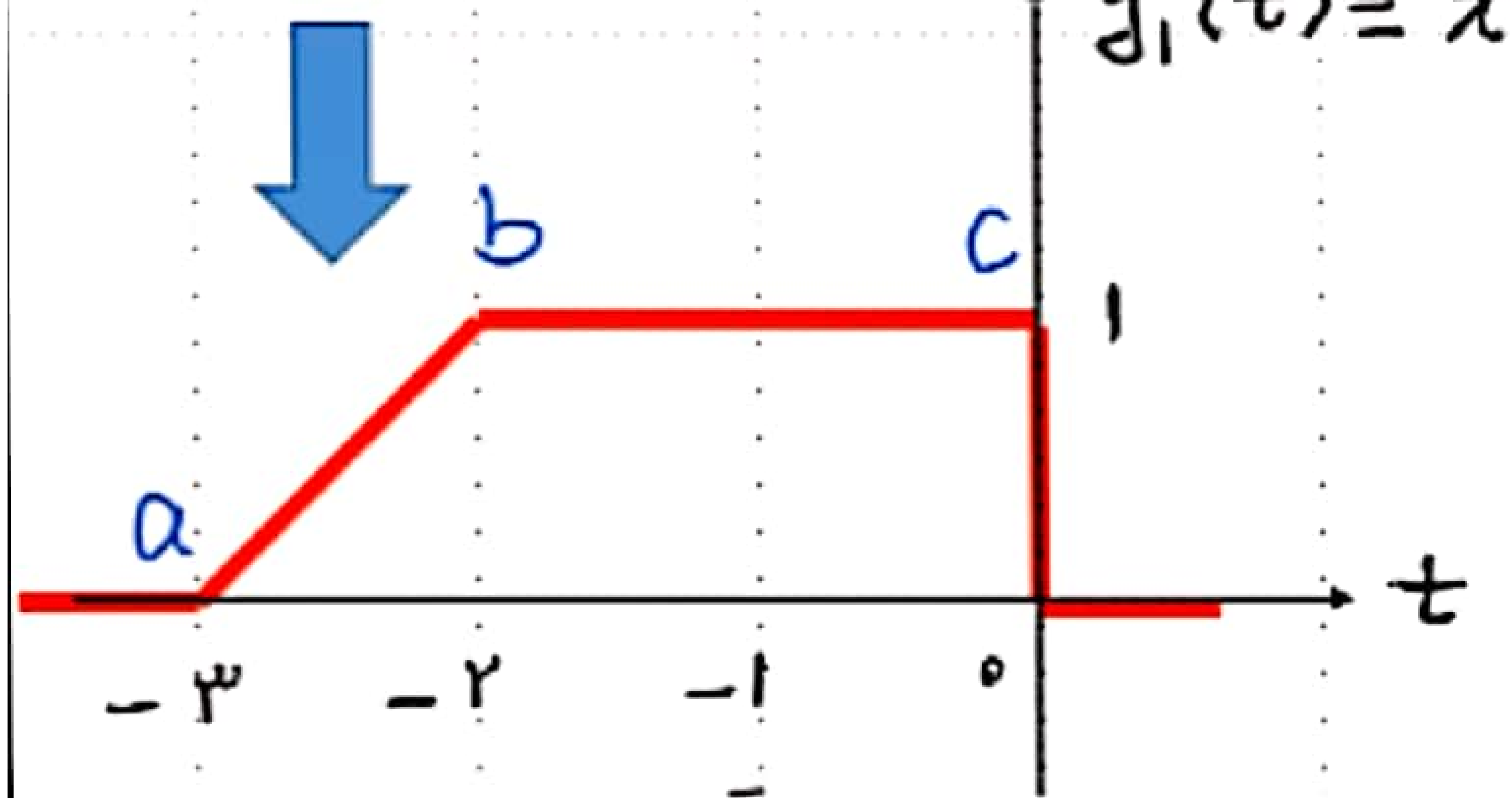
مثال ۴) انتقال + وارونگی

$$y(t) = x(-t+\beta)$$

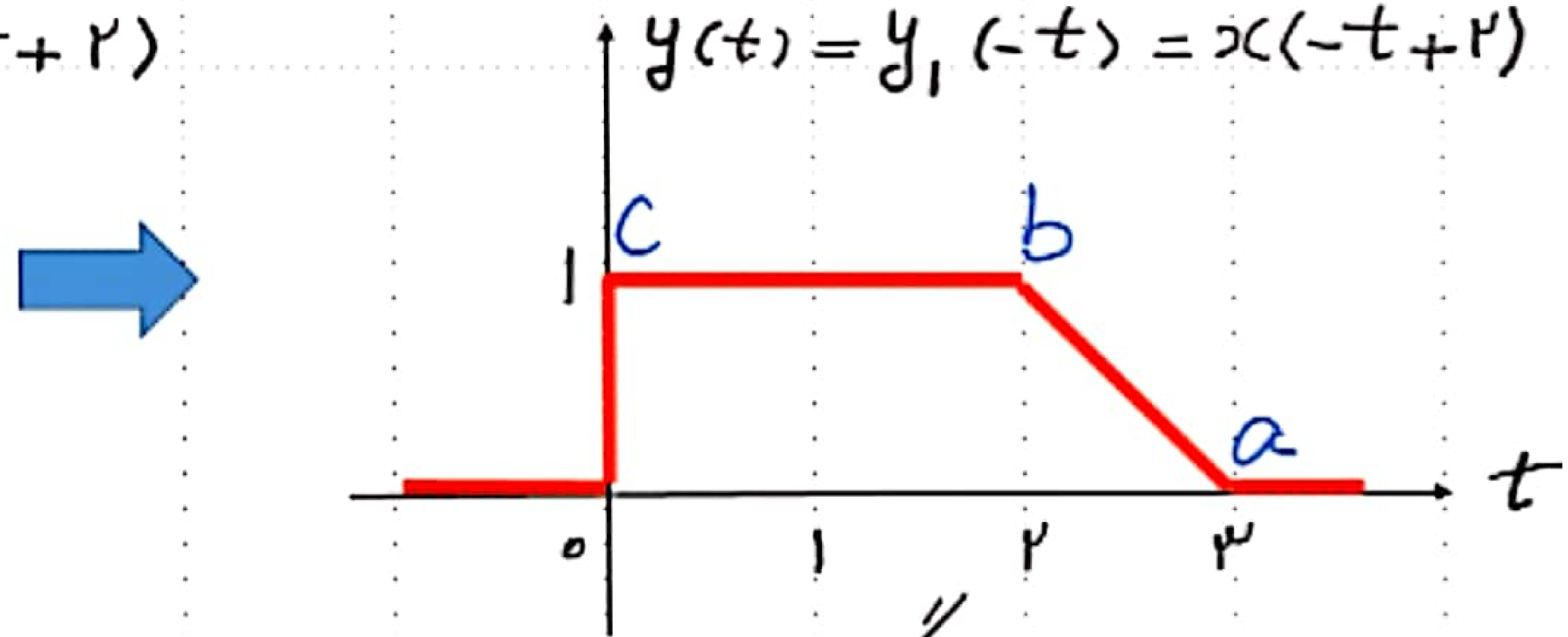
$$y(t) = x(-t+2) \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = x(t+2) \\ y(t) = y_1(-t) \end{cases}$$

ابتدا ۲ واحد انتقال به چپ سپس وارون کردن





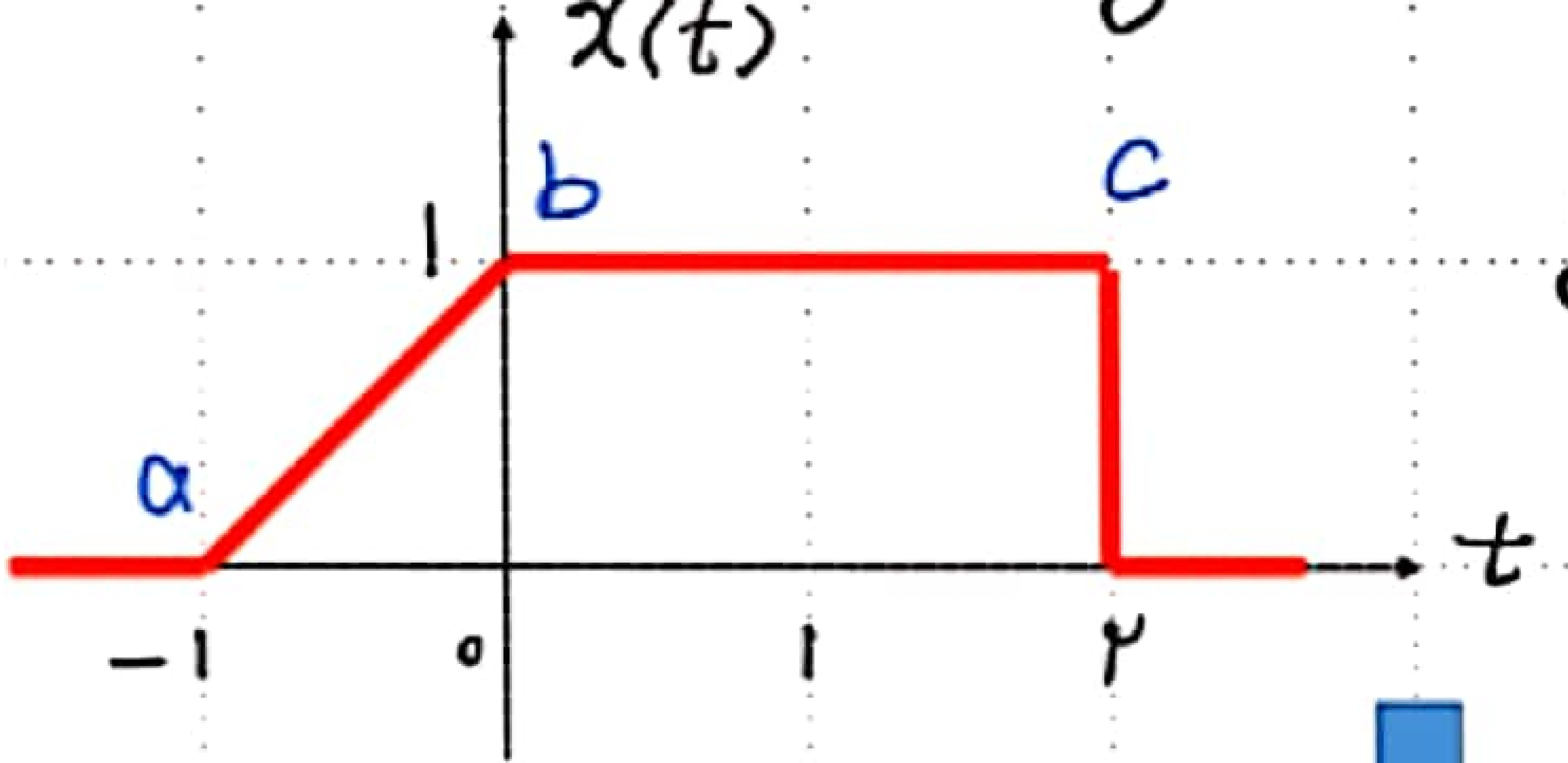
دو واحد انتقال به چپ



وارونگی

مثال ۵) انتقال + تغییر مقیاس

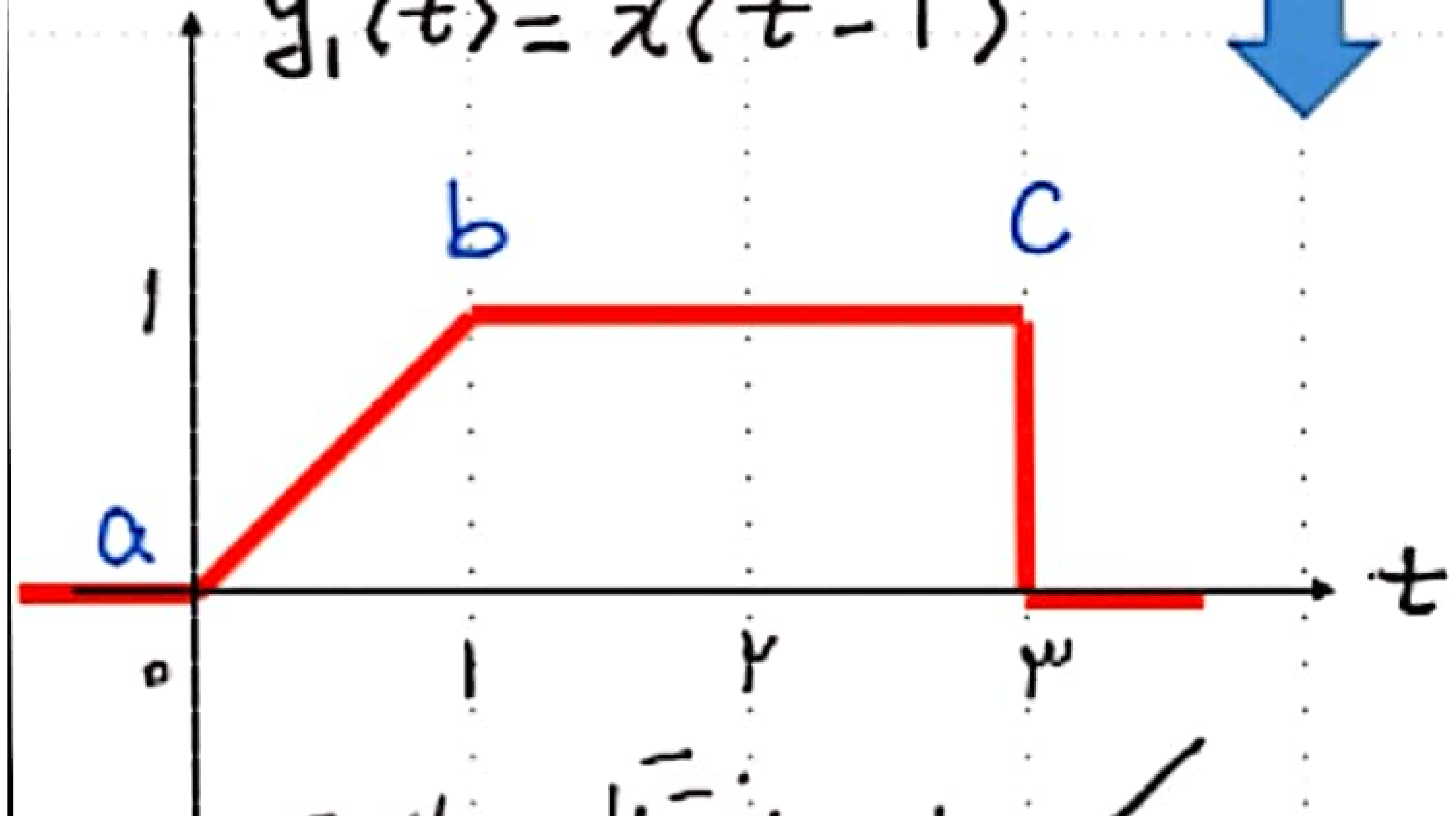
$$y(t)=x(\alpha t+\beta)\ ,\quad \alpha>0\ ,\ \alpha\neq 1$$



$$y(t)=x(2t-1)\ \Rightarrow\ \begin{cases} y_1(t)=x(t-1)\\ y(t)=y_1(2t)\end{cases}$$

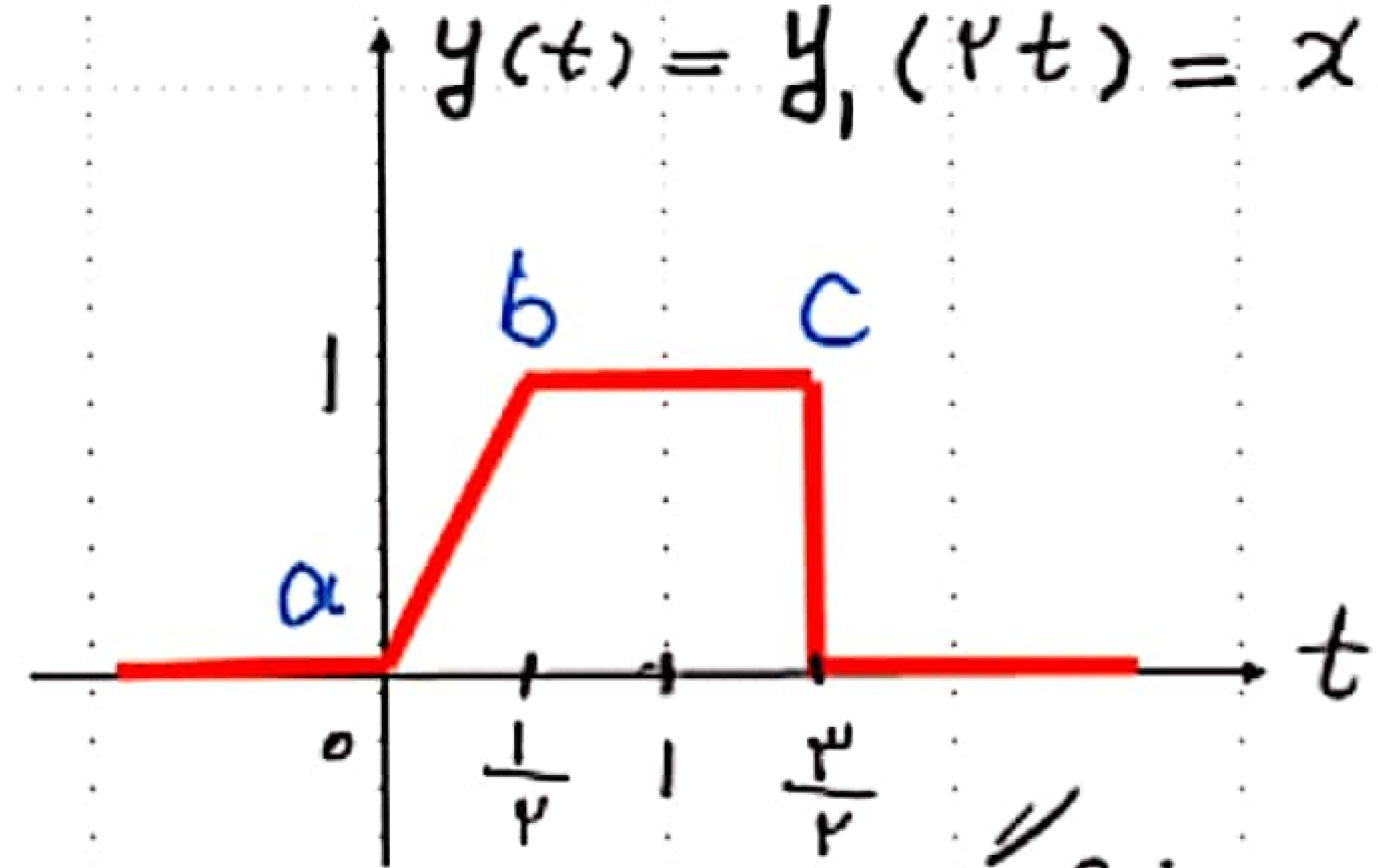
ابتدا ۱ واحد انتقال به راست سپس فشردگی با نسبت ۲

$y_1(t)=x(t-1)$



یک واحد انتقال به راست

$y(t)=y_1(2t)=x(2t-1)$



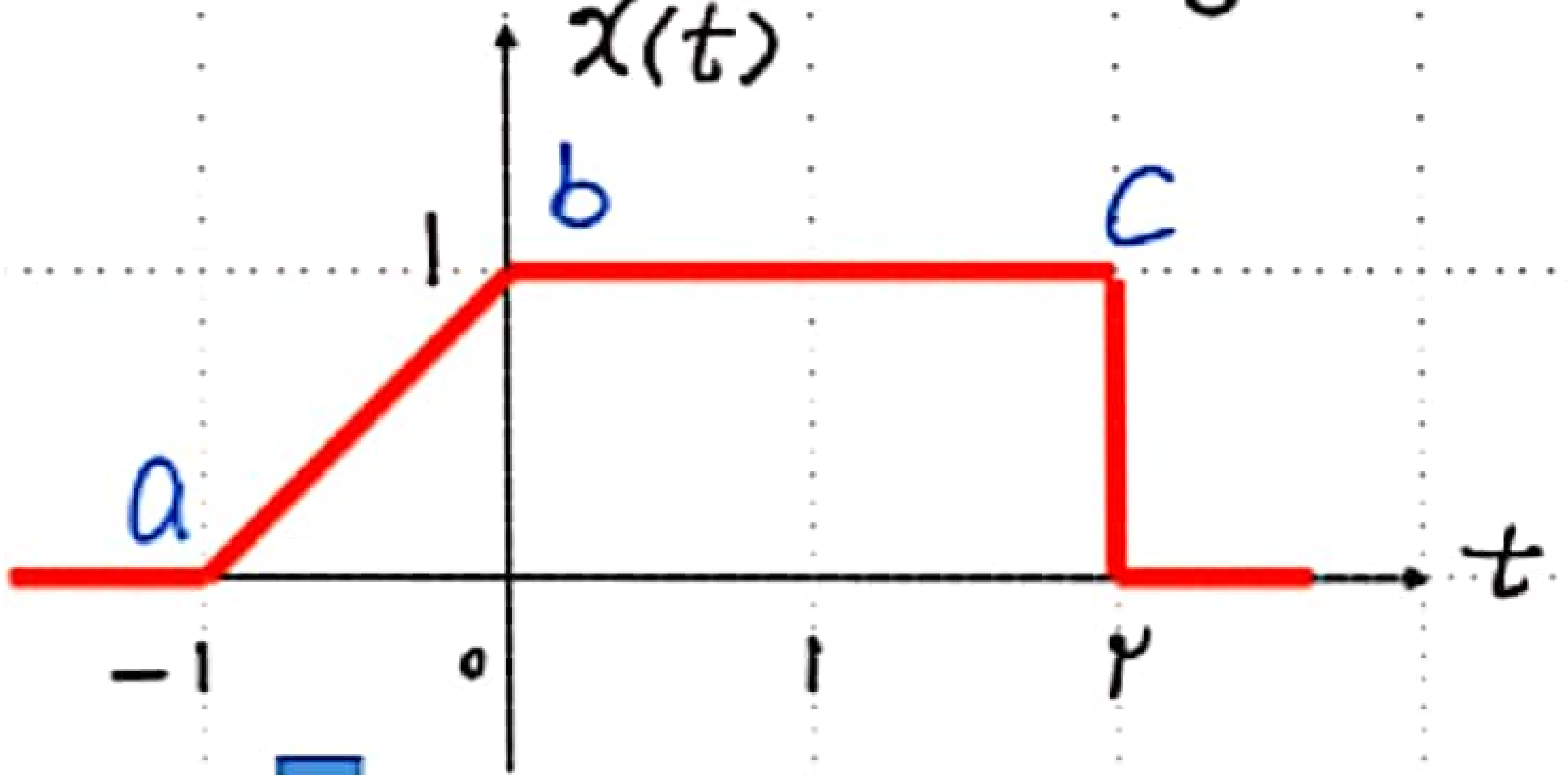
فشردگی با نسبت ۲

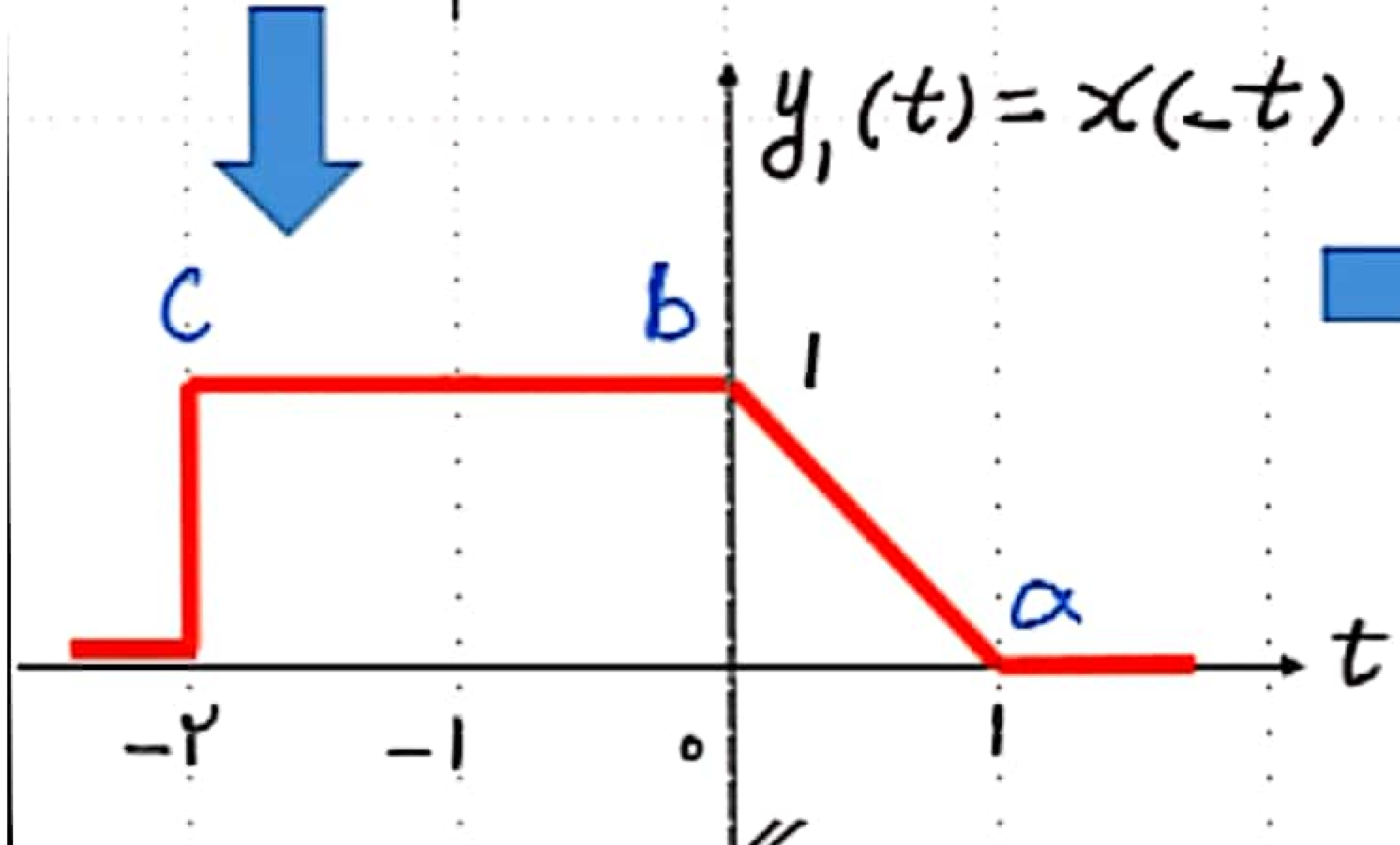
مثال ۶) وارونگی + تغییر مقیاس

$$y(t)=x(\alpha t) \quad \text{و} \quad \begin{cases}\alpha<0\\ \alpha\neq -1\end{cases}$$

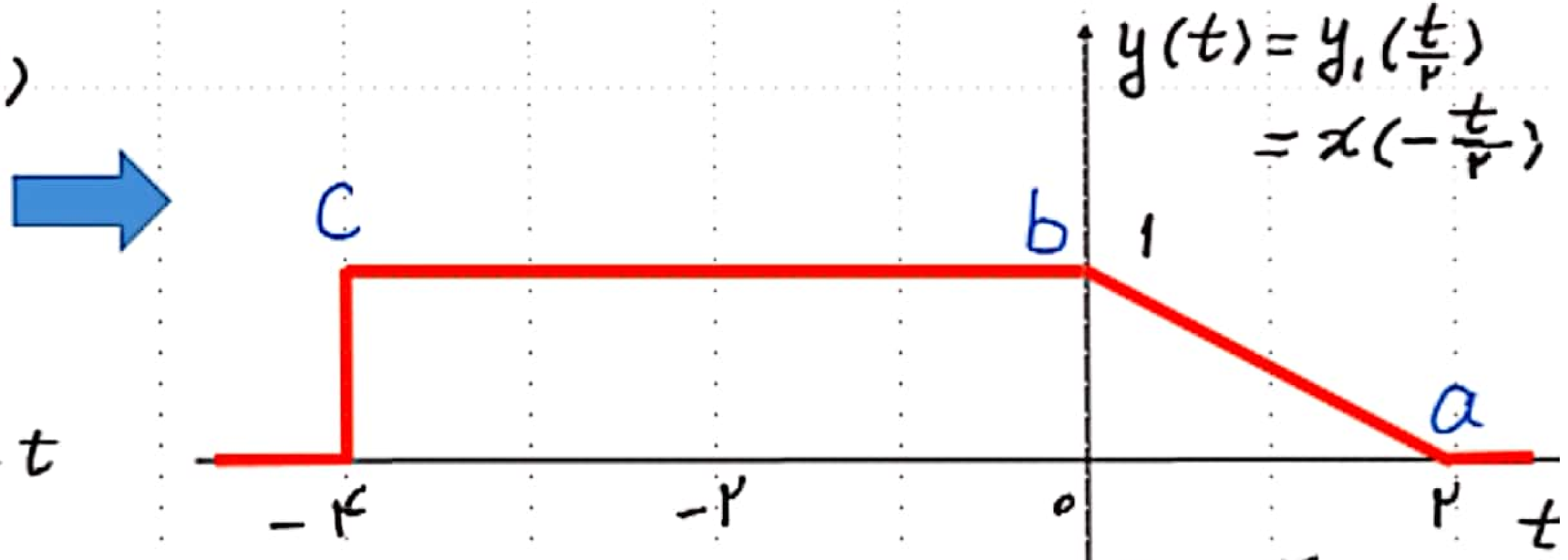
$$y(t)=x\left(-\frac{t}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} y_1(t)=x(-t)\\ y(t)=y_1\left(\frac{t}{2}\right)\end{cases}$$

ابتدا وارون کردن سپس گستردگی با نسبت ۲ (یا برعکس)





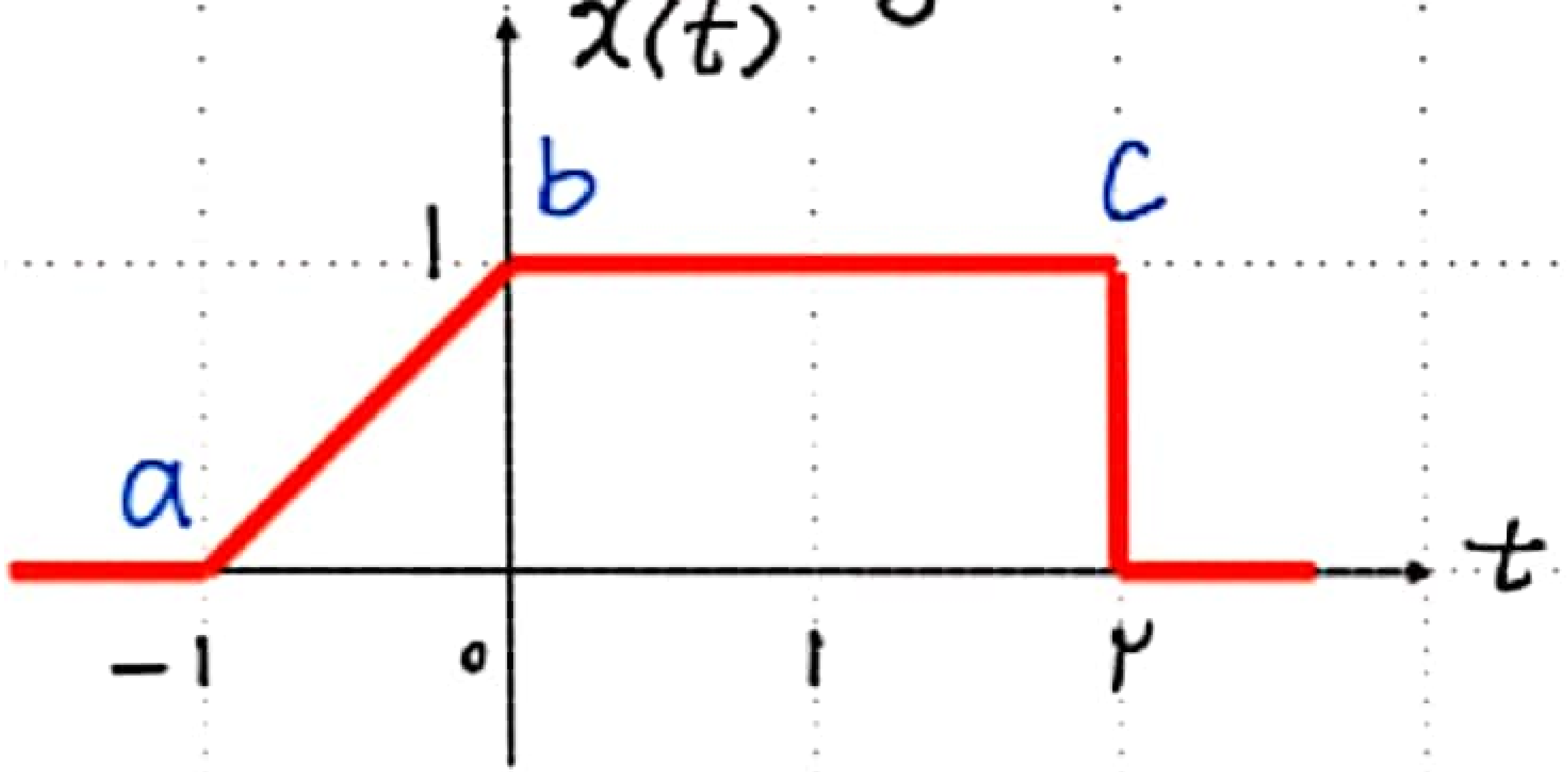
وارونگی



گستردگی با نسبت ۲

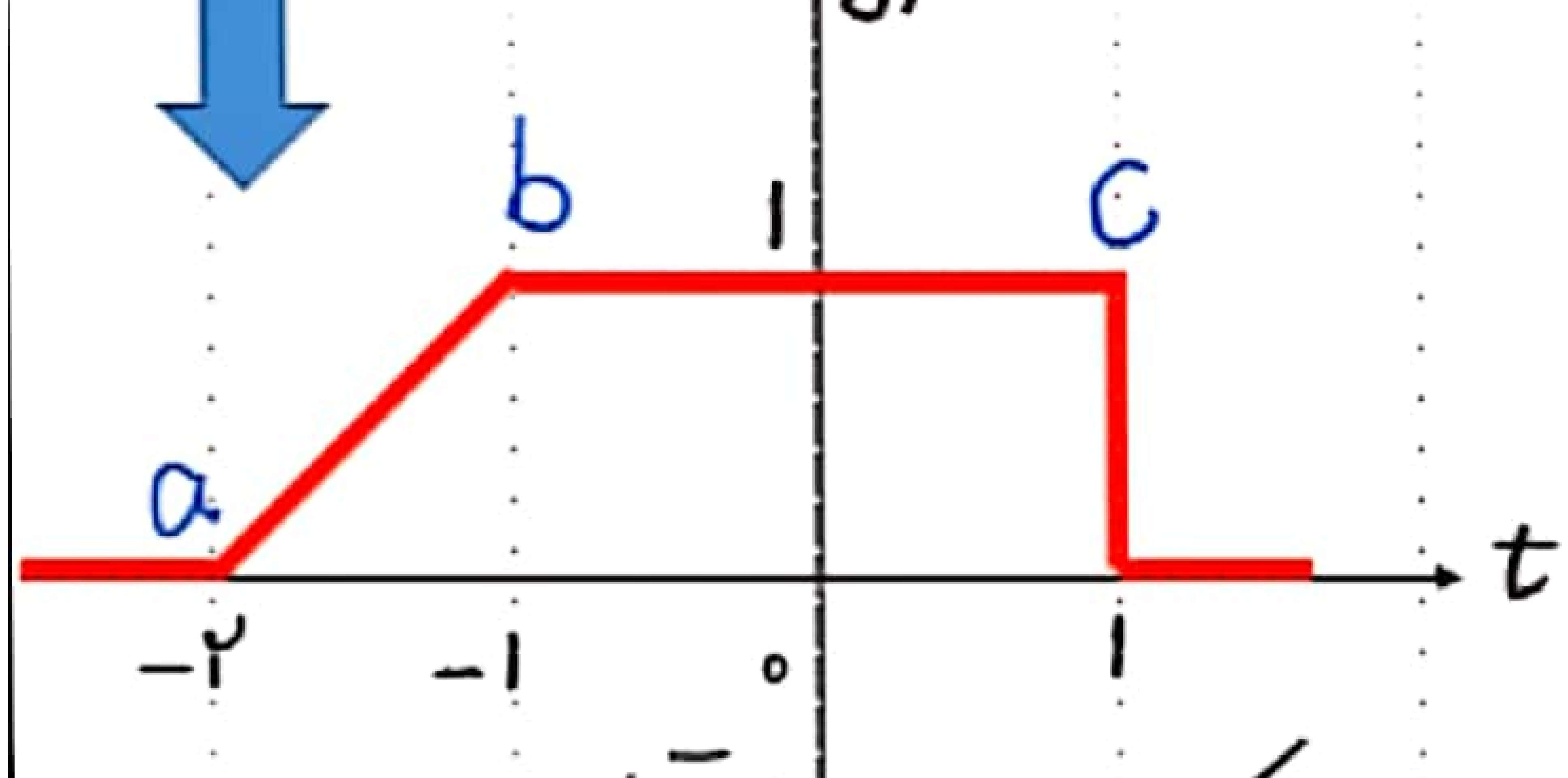
مثال ۷) انتقال + وارونگی + تغییر مقیاس

$$y(t) = x(\alpha t + \beta), \quad \begin{cases} \alpha < 0 \\ \alpha \neq -1 \\ \beta \neq 0 \end{cases}$$



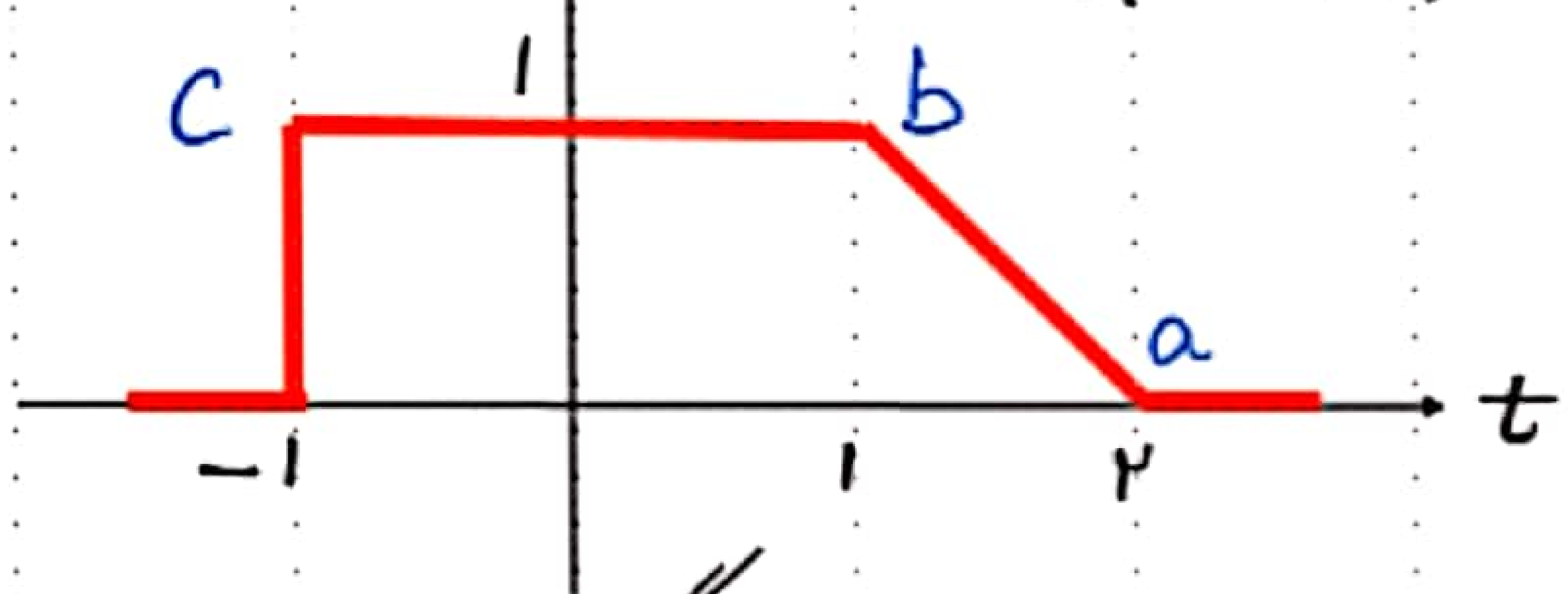
$$y(t) = x(-2t+1) \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = x(t+1) \\ y_2(t) = y_1(-t) \\ y(t) = y_2(2t) \end{cases}$$

$y_1(t) = x(t+1)$



یک واحد انتقال به چپ

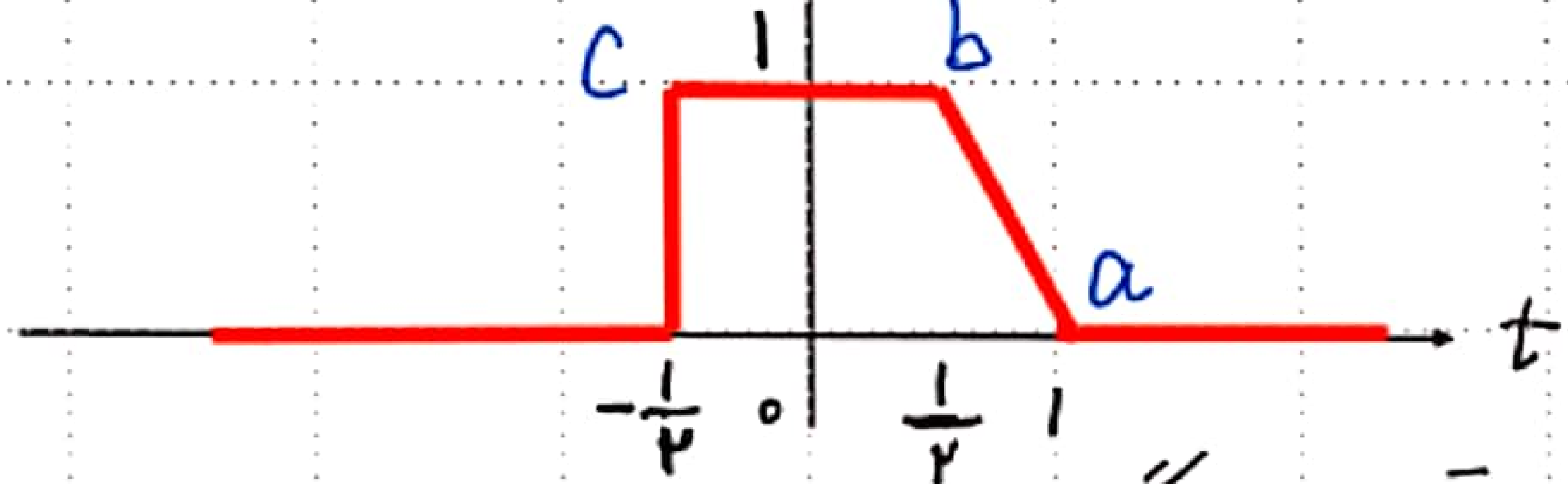
$y_2(t) = y_1(-t)$
$= x(-t+1)$



وارونگی

$$y(t) = y_2(2t) = y_1(-2t) = x(-2t+1)$$

فشردگی با نسبت ۲



نکته : در تبدیلات ترکیبی شامل انتقال، وارونگی و تغییر مقیاس بهتر است ابتدا تبدیل انتقال زمانی انجام شود و سپس وارونگی یا تغییر مقیاس صورت گیرد. البته می‌توان ترتیب تبدیل‌ها را عوض کرد.

حالت زمان گسسته (DT)

$n \rightarrow \alpha n+\beta$

$\alpha = 1$ و $\beta \neq 0$ (Time Shifting) انتقال زمانی

$\beta < 0$ (انتقال به راست) $\beta > 0$ (انتقال به چپ)

$$y[n] = x[n+\beta] \quad , \quad \beta \in \mathbb{Z}$$

$\alpha = -1$ و $\beta = 0$ (Time Reversing) وارونگی زمانی

$$y[n] = x[-n]$$

$\alpha \neq 1$ و $\beta = 0$ (Time Scaling) تغییر مقیاس زمانی

$0 < \alpha < 1$ (گستردگی زمانی) $\alpha > 1$ (فشردگی زمانی)

Expanding
Stretching

$$y[n] = x[\alpha n]$$

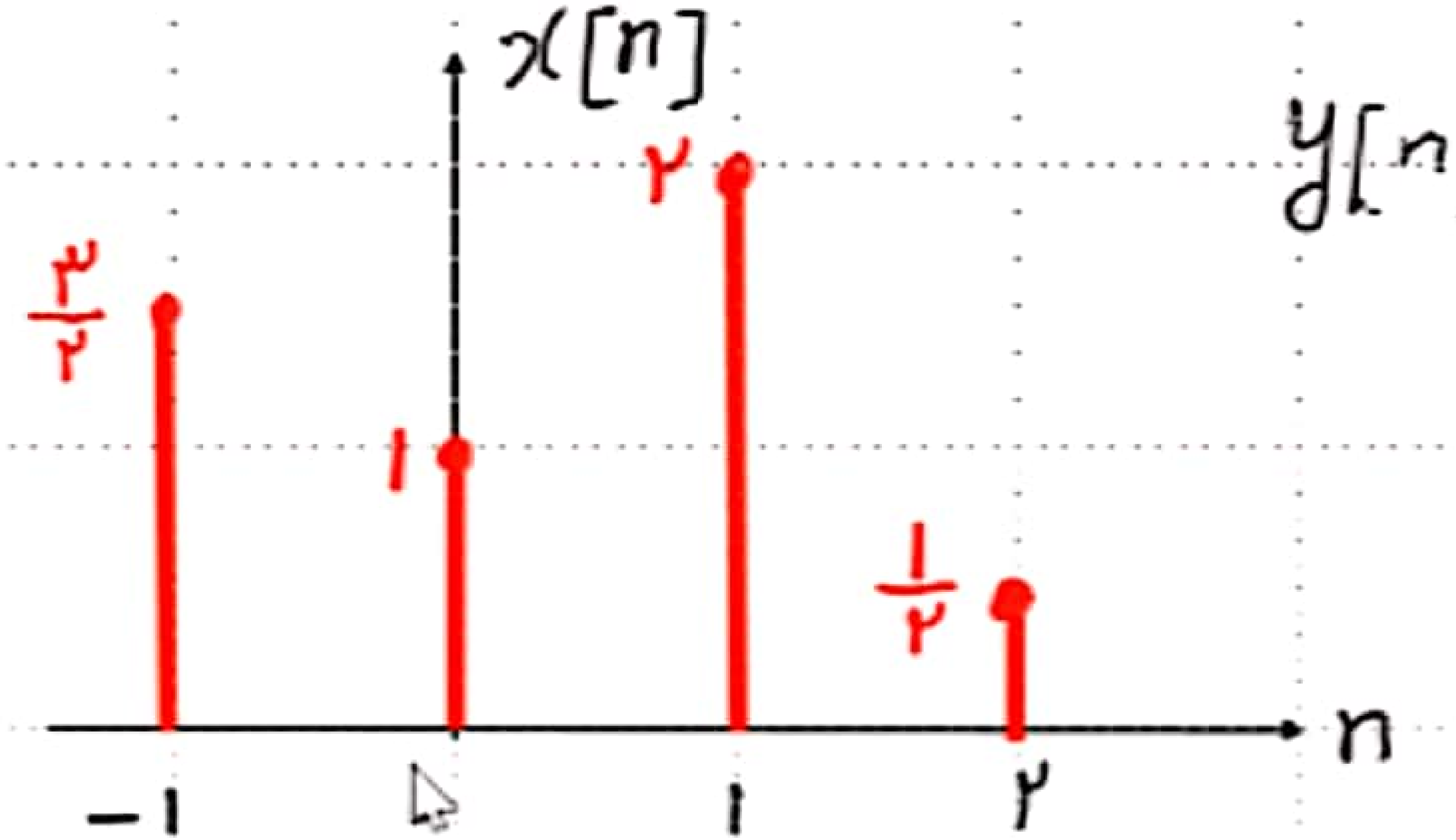
Compressing

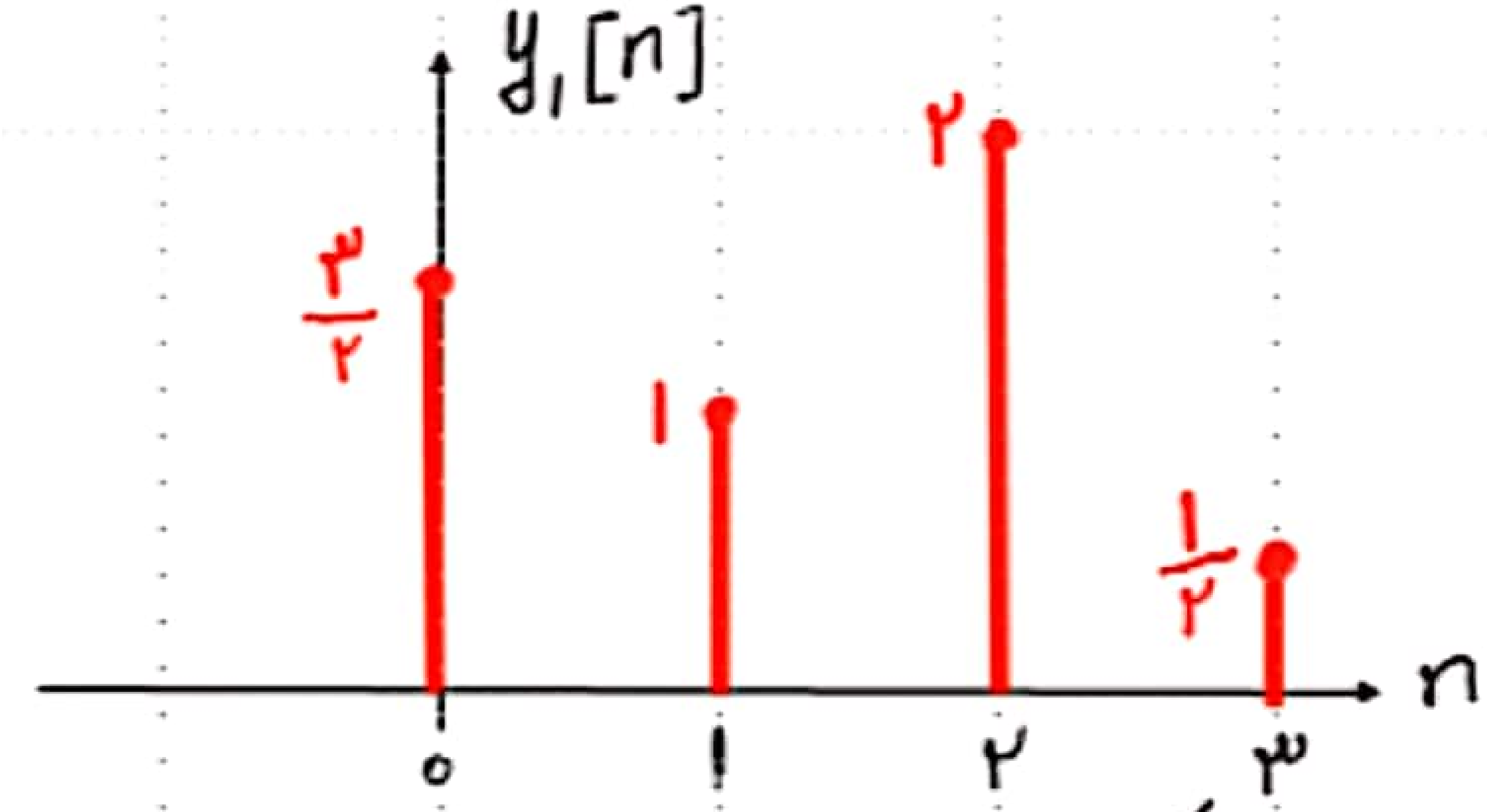
α عدد گویا باید باشد.

مثال ۱) انتقال زمانی

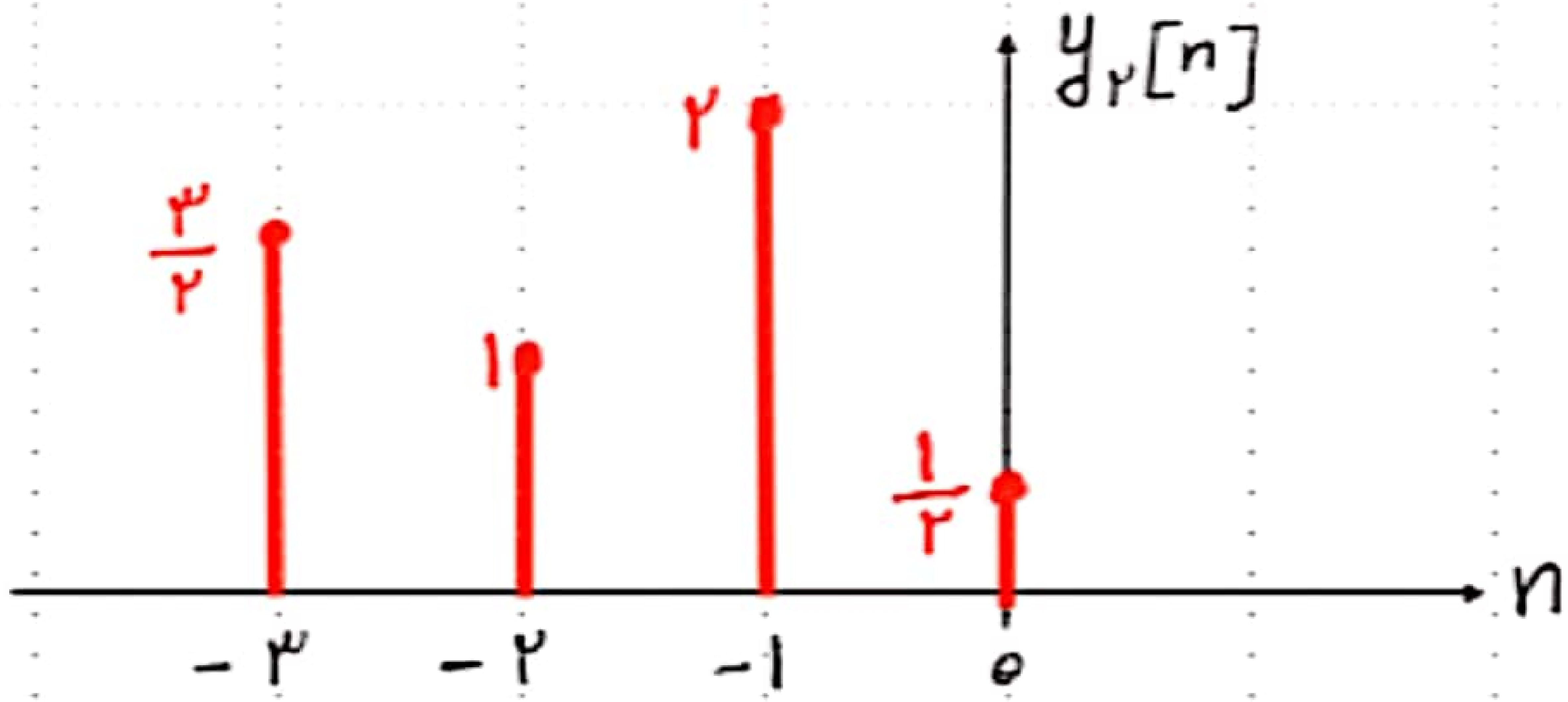
$$y[n] = x[n+\beta] \quad , \quad \beta \in \mathbb{Z}$$

$$y_۲[n] = x[n+۲] \quad و \quad y_۱[n] = x[n-۱]$$





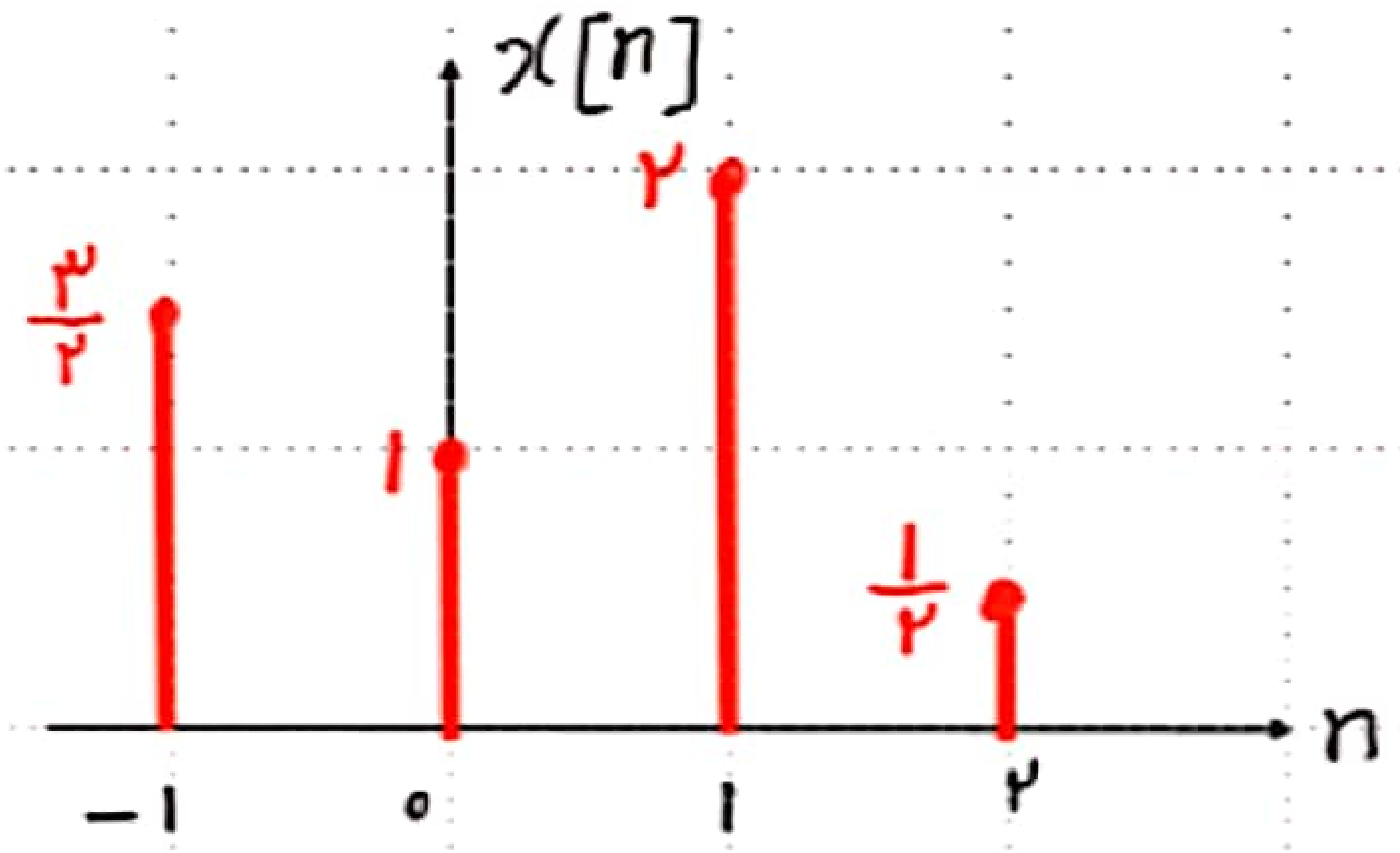
یک واحد انتقال به راست

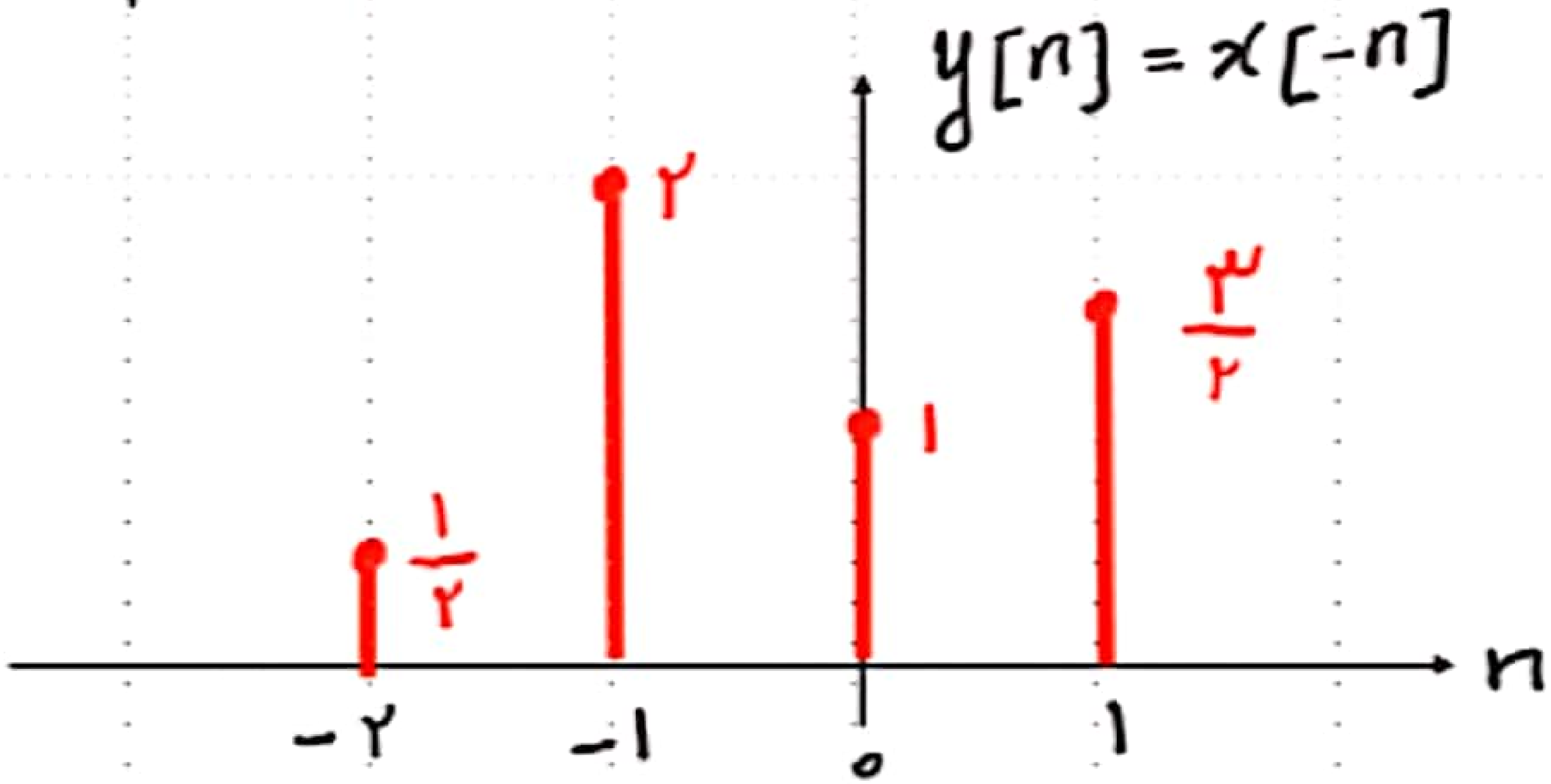


دو واحد انتقال به چپ

مثال ۲) وارونگی زمانی

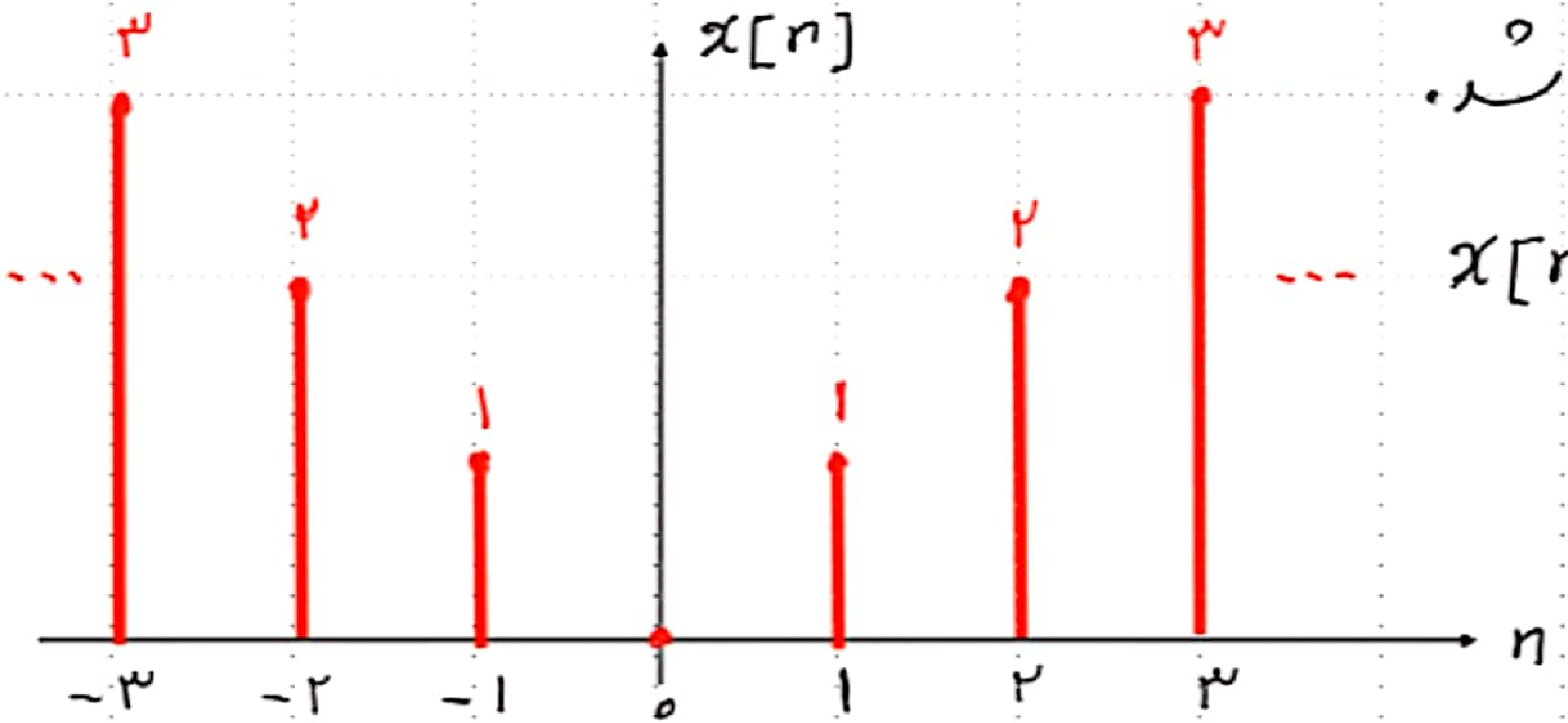
$$y[n] = x[-n]$$





مثال ۳) تغییر مقیاس $|\alpha| \neq 1$ و $y[n] = x[\alpha n]$

نکته: با توجه به این که $n \in \mathbb{Z}$ و $m = \alpha n \in \mathbb{Z}$ در نتیجه $\alpha = \frac{n}{m}$ حتماً یک عدد گویا باید باشد.



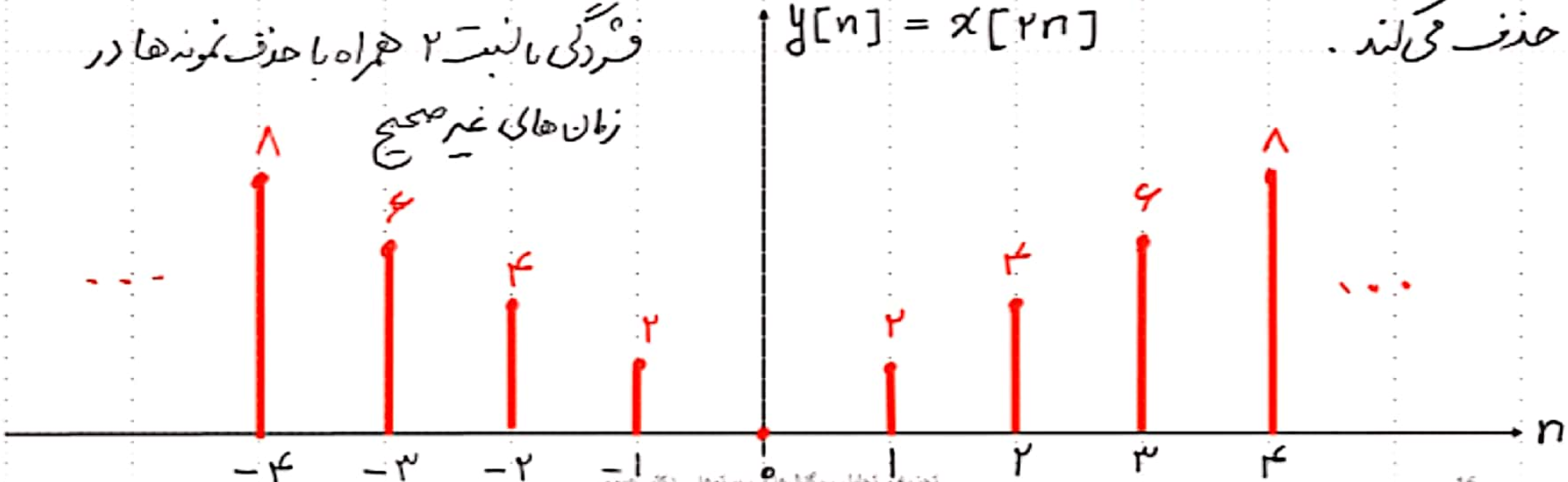
فرض کنیم: $x[n] = |n|$

سیگنال‌های $x[2n]$ ، $x[\frac{n}{3}]$ و $x[\frac{3}{2}n]$ را به دست آورید.

$$y[n] = x[2n] = |2n| = 2|n|$$

$$y[0] = 0 \;,\; y[\pm 1] = x[\pm 2] = 2 \;,\; y[\pm 2] = x[\pm 4] = 4 \;, \; \dots$$

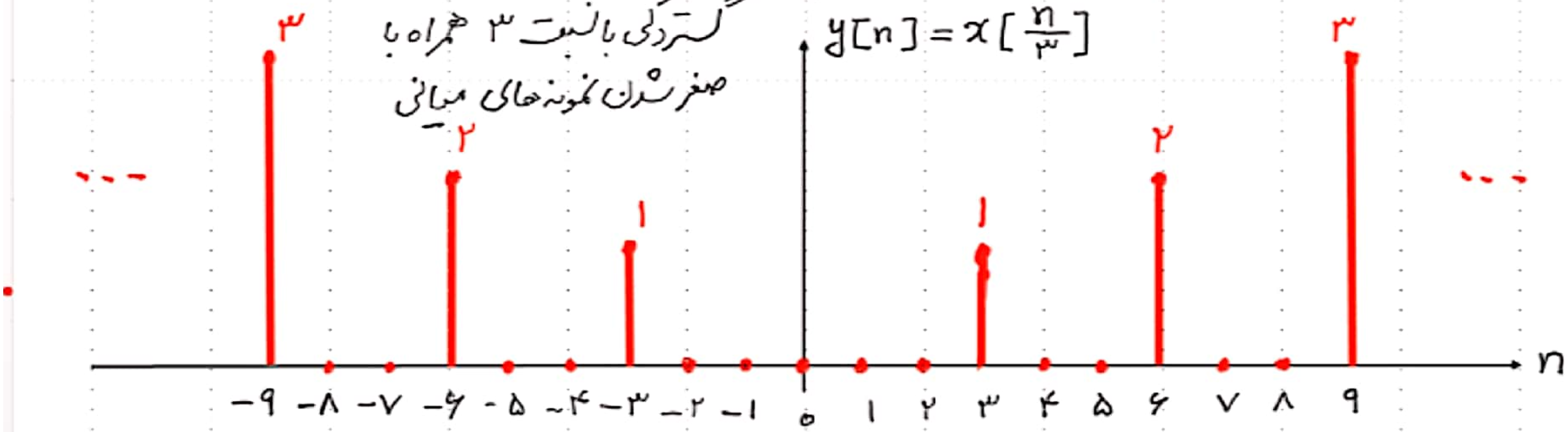
در واقع $y[n]$ به صورت یک درمیان نمونه های در زمان های زوج را حفظ کرده و در زمان های فرد را حذف می کنند.



$y[n] = x[\frac{n}{3}] \Rightarrow$ $y[n]$ فقط برای n های مضارب صحیح ۳ مقدار دارد.

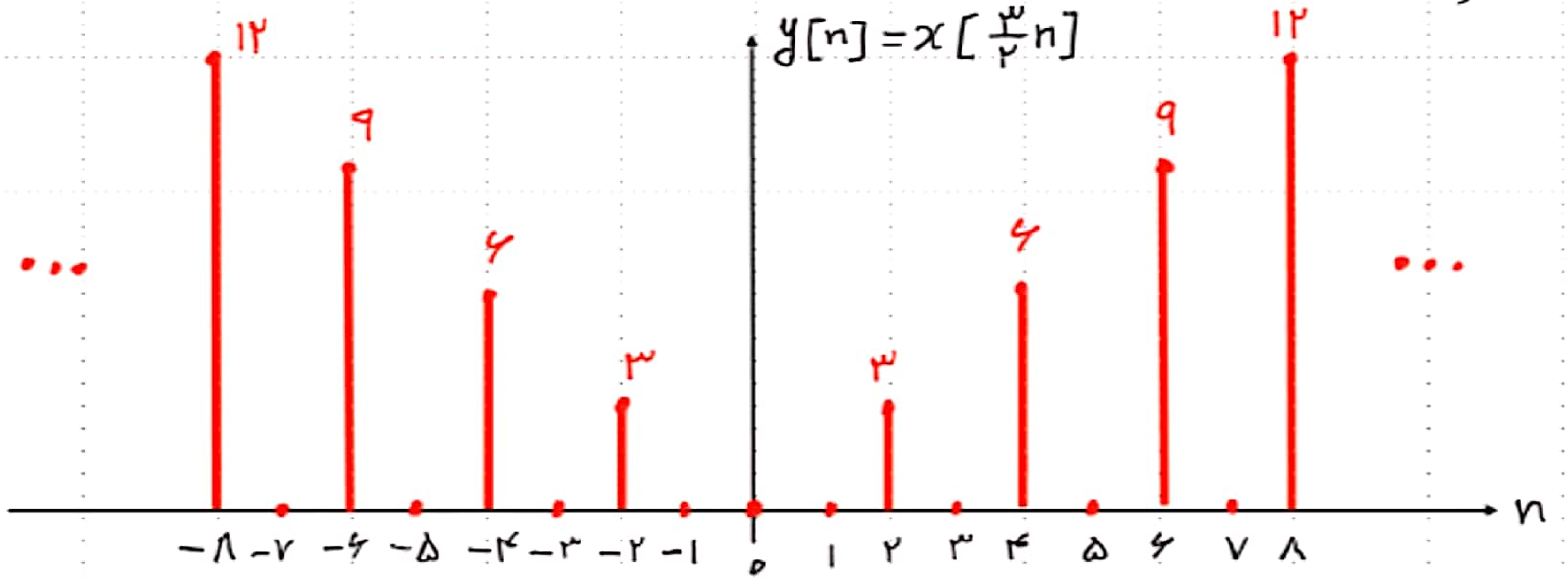
$y[0] = 0$ ، $y[\pm 3] = x[\pm 1] = 1$ ، $y[\pm 6] = x[\pm 2] = 2$ ، $\ldots$

$y[n]$ را برای مقادیر دیگر n صفر در نظر می گیریم.

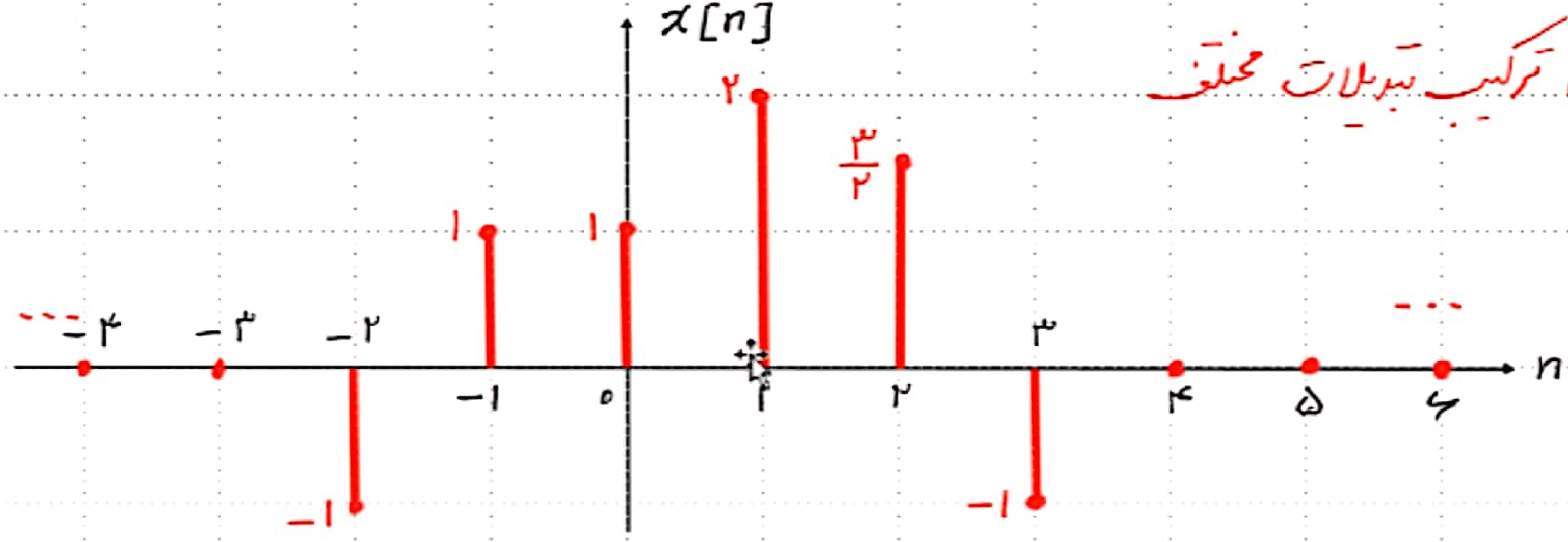


$y[n] = x[\frac{3}{2}n] \Rightarrow$ $y[n]$ فقط در محل هایی که $\frac{3}{2}n \in \mathbb{Z}$ ، مقدار تعریف شده دارد.

$y[0] = 0 \;,\; y[\pm 2] = x[\pm 3] = 3 \;,\; y[\pm 4] = x[\pm 6] = 6 \;,\; y[\pm 6] = x[\pm 9] = 9 \;,\; \dots$



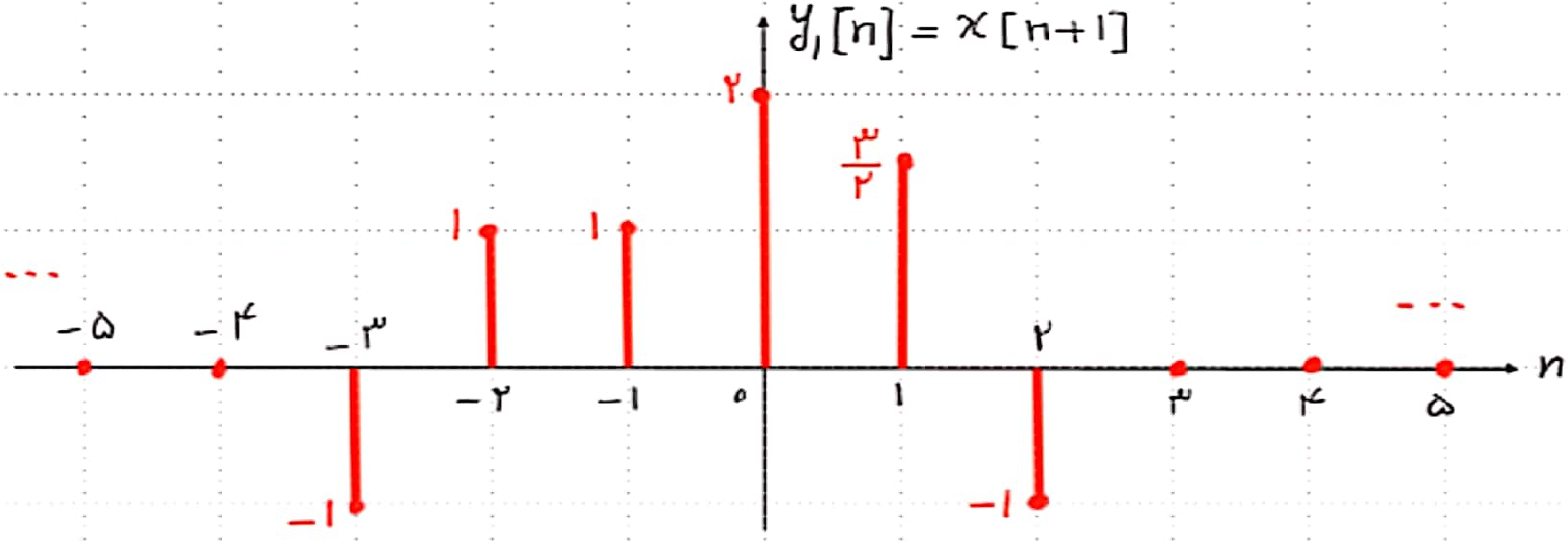
مثال ۴) ترکیب تبدیلات مختلف



$$y[n] = x[-2n+1] = ?$$

$y_1[n] = x[n+1]$ و $y_2[n] = y_1[2n] = x[2n+1]$

$$y[n] = y_2[-n] = x[-2n+1]$$

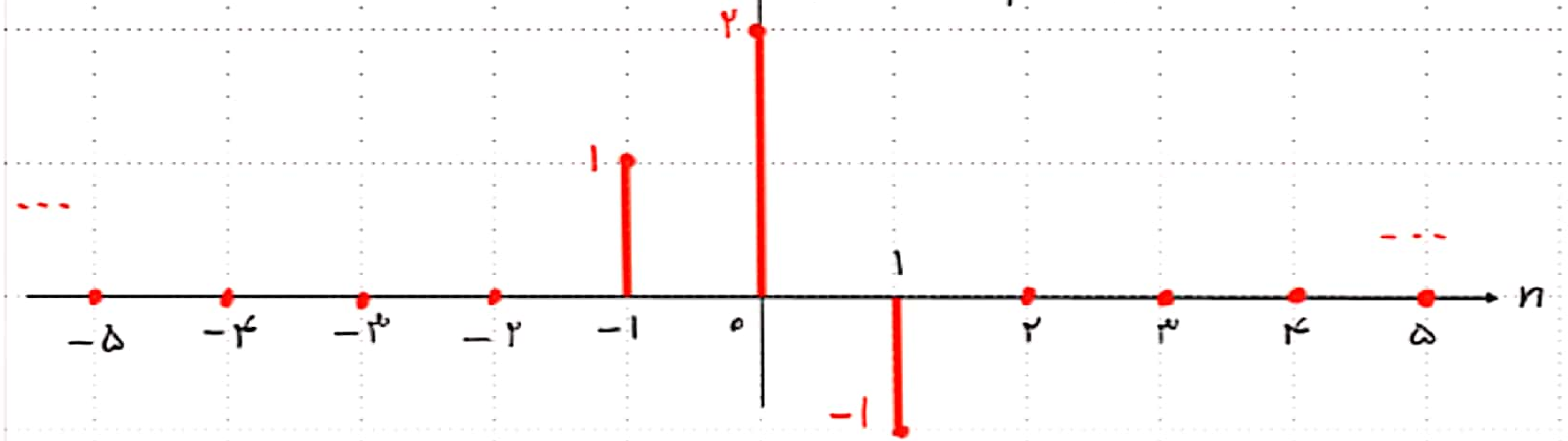


$$y_2[n] = y_1[2n] = x[2n+1]$$

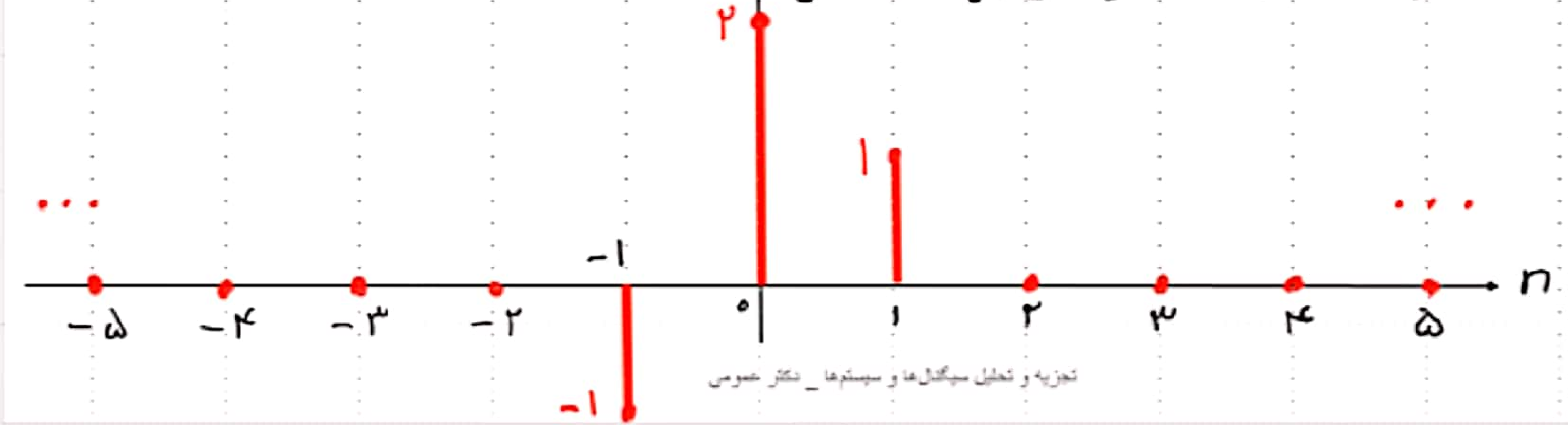
$$y_2[-1] = y_1[-2] = 1 \quad , \quad y_2[0] = y_1[0] = 2 \quad , \quad y_2[1] = y_1[2] = -1$$

$y_2[n]$ در سایر مقادیر n صفر است.

$$y_2[n] = y_1[2n] = x[2n+1]$$



$$y[n] = y_2[-n] = x[-2n+1]$$



بسم الله الرّحمن الرّحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده برق و کامپیوتر

تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مدرس: مسعود عمومی

جلسه سوم _ بخش 1.2.2 و 1.2.3 کتاب

با سلام خدمت دانشجویان محترم

سیگنال‌های متناوب (Periodic) (زیربخش 1.2.2)

تعریف سیگنال متناوب زمان پیوسته: $x(t)$ متناوب است، اگر:

$$\exists T > 0 \ (T \in \mathbb{R}) : x(t \pm T) = x(t) \quad , \quad \forall t \qquad T \text{ (دوره تناوب)}$$

$\forall m \in \mathbb{Z} : x(t) = x(t + mT) \Leftarrow$ اگر $x(t)$ متناوب با دوره تناوب T باشد

دوره تناوب اصلی (T_0) کوچکترین عدد مثبتی است که در رابطهٔ تناوب فوق صدق کند.

$f_0 = \frac{1}{T_0}$ را فرکانس (بسامد) سیگنال متناوب $x(t)$ می نامیم.

تذکر: سیگنالهای ثابت را می توان متناوب با دوره تناوب دلخواه و فرکانس صفر در نظر گرفت.
$(T \to \infty)$

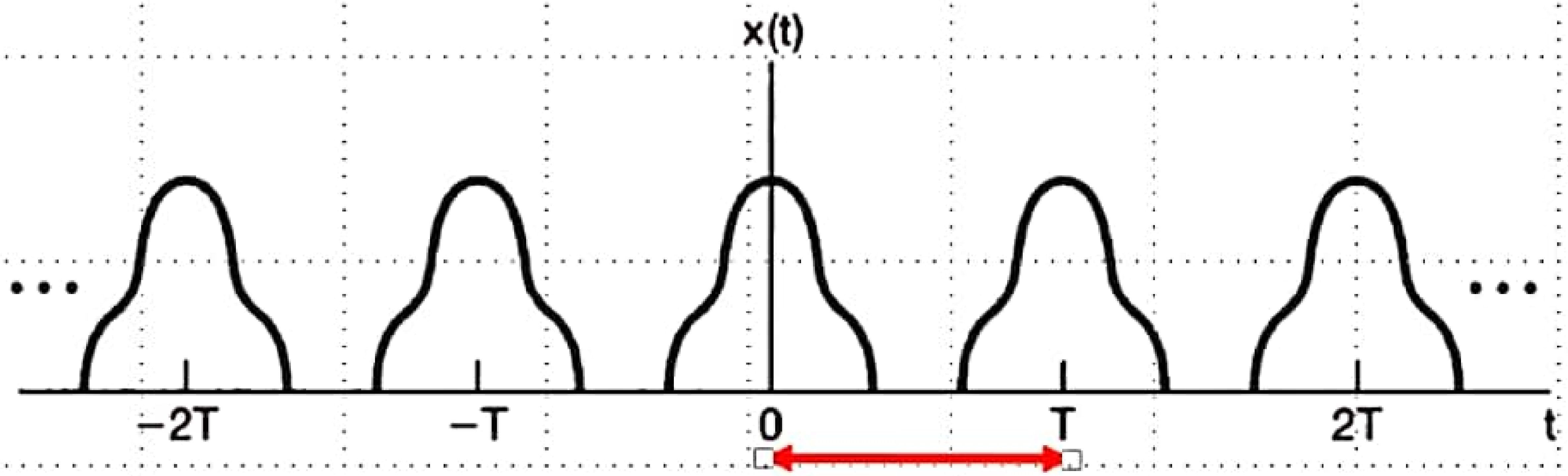


Figure 1.14 A continuous-time periodic signal.

تعریف سیگنال متناوب زمان گسسته : $x[n]$ متناوب است، اگر:

$$\exists N>0\ (N\in\mathbb{Z}) \ : \ x[n\pm N]=x[n] \quad , \forall n$$

N (دوره تناوب)

$x[n]$ متناوب با دوره تناوب N $\Rightarrow \forall m\in\mathbb{Z} \ : \ x[n]=x[n+mN]$

دوره تناوب اصلی (N_0) کوچکترین عدد صحیح مثبتی است که در رابطهٔ تناوب صدق کند.

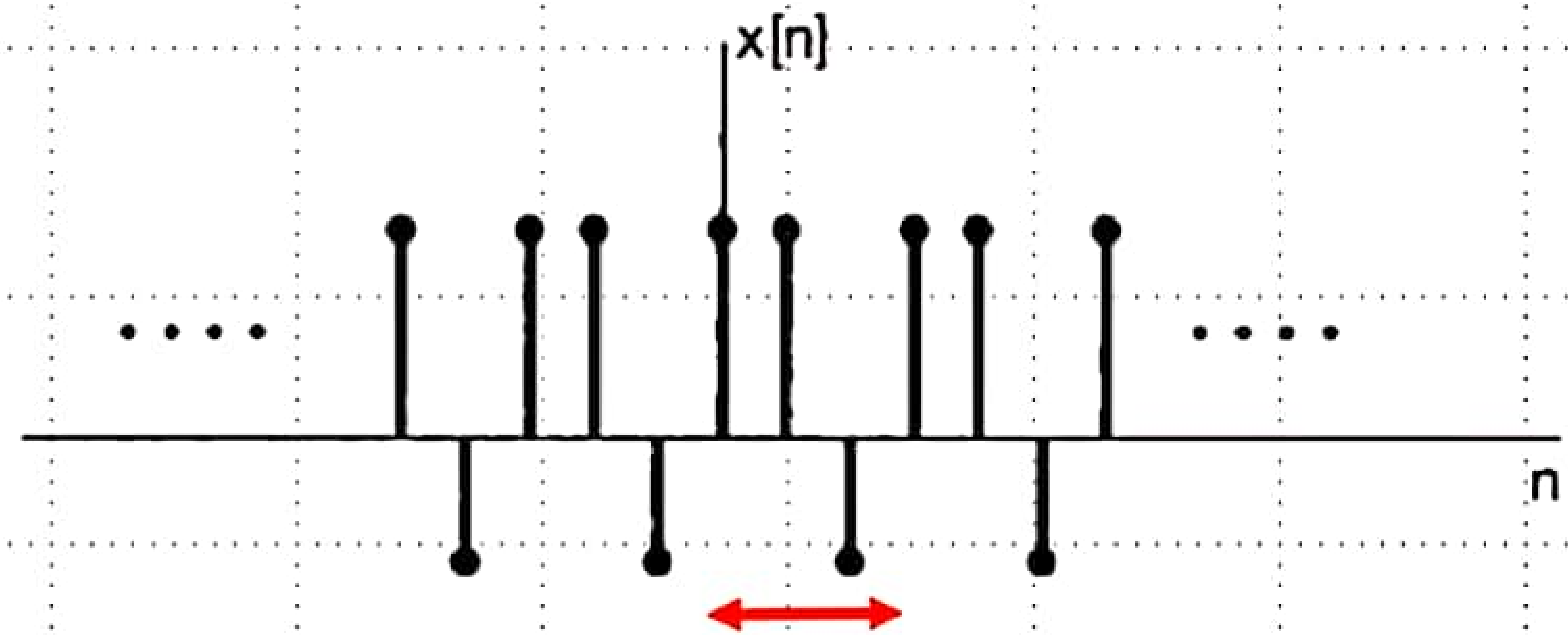


Figure 1.15 A discrete-time periodic signal with fundamental period $N_0 = 3$.

چند نکته درمورد تناوب :

۱) اگر $x_1(t)$ و $x_2(t)$ سیگنال های متناوب با دوره تناوب های اصلی به ترتیب T_1 و T_2 باشند، سیگنال های $x_1(t) \pm x_2(t)$ و $x_1(t) \cdot x_2(t)$ متناوب با دوره تناوب اصلی $T = lcm(T_1, T_2)$ است. (کوچکترین مضرب مشترک)

۲) اگر $z(t)$ یک سیگنال دلخواه باشد، سیگنال $x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} z(t \pm mT)$

یک سیگنال متناوب با دوره تناوب T است. بالعکس اگر $x(t)$ متناوب با دوره تناوب

T باشد، می‌توان یک سیگنال $z(t)$ یافت به طوری که $x(t)$ را بتوان به صورت مجموع فوق نوشت.

۳) اگر $x(t)$ متناوب با دوره تناوب اصلی T باشد، $x(-t)$ و $x(t+\beta)$ هم متناوب با همان

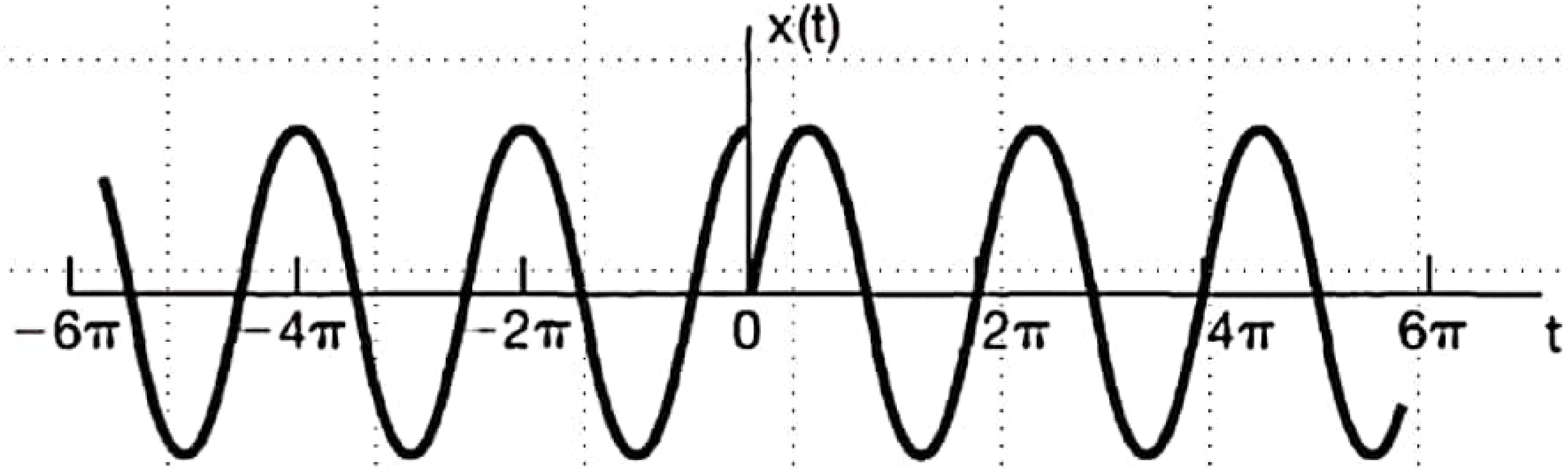
دوره تناوب هستند، اما $x(\alpha t)$ متناوب با دوره تناوب اصلی $\frac{T}{\alpha}$ است.

سؤال: نکات فوق در حالت گسسته زمان چگونه بیان می‌شوند؟

یک مثال و یک نکته :

$$x(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{if } t < 0 \\ \sin(t) & \text{if } t \geq 0 \end{cases}.$$

با توجه به متناوب بودن توابع $\cos(t)$ و $\sin(t)$ با دوره تناوب 2π ، آیا $x(t)$ متناوب است؟



رابطهٔ تناوب $x(t+T) = x(t)$ برای $\forall t$ برقرار نیست. پس $x(t)$ متناوب نیست.

سیگنال‌های زوج (Even) و فرد (Odd) (زیربخش 1.2.3)

$x(t)$ یک سیگنال زوج است، اگر و تنها اگر: $\quad x(t) = x(-t) \quad : \forall t$

$\forall n : \quad x[n] = x[-n]$

پس محور عمودی محور تقارن سیگنال‌های زوج است.

$x(t)$ یک سیگنال فرد است، اگر و تنها اگر: $\quad x(-t) = -x(t) \quad : \forall t$

$\forall n : \quad x[-n] = -x[n]$

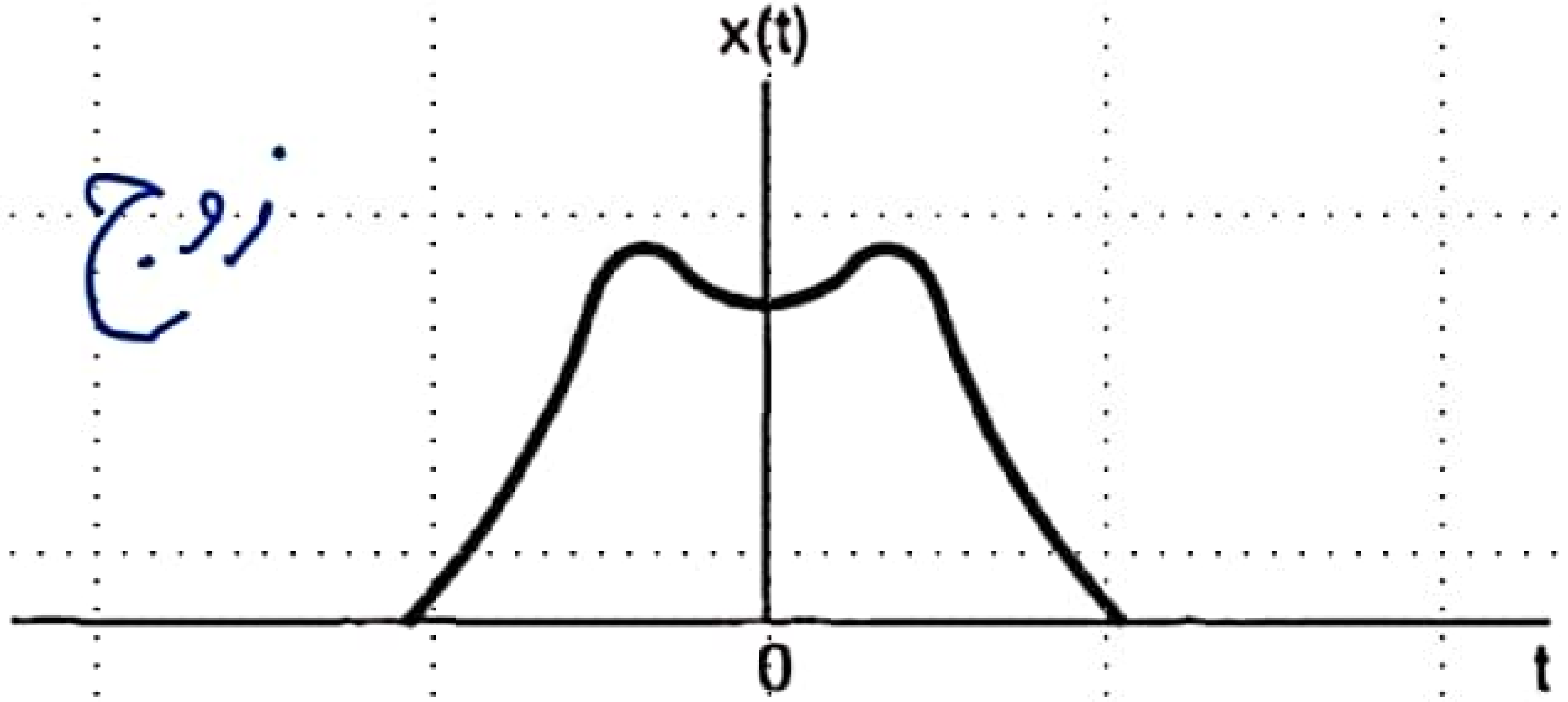
هر سیگنال فرد حتماً از مبدأ می‌گذرد. $\Rightarrow x(0) = 0 \Rightarrow x(t) + x(-t) = 0 \Rightarrow$

$x[0] = 0$

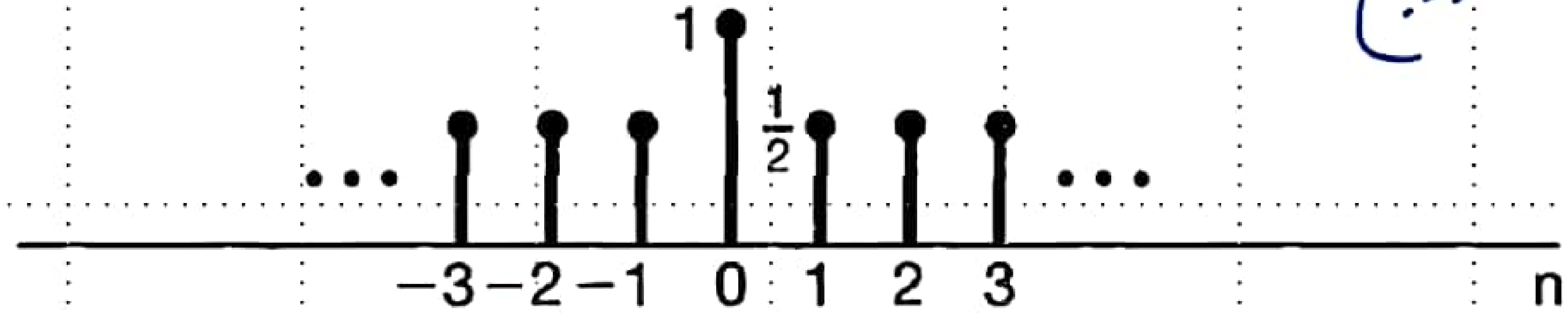
نکته ۱ : تعاریف مشابه در حالت زمان گسسته وجود دارند.

نکته ۲ : سیگنال دلخواه $x(t)$ ممکن است نه زوج باشد و نه فرد.

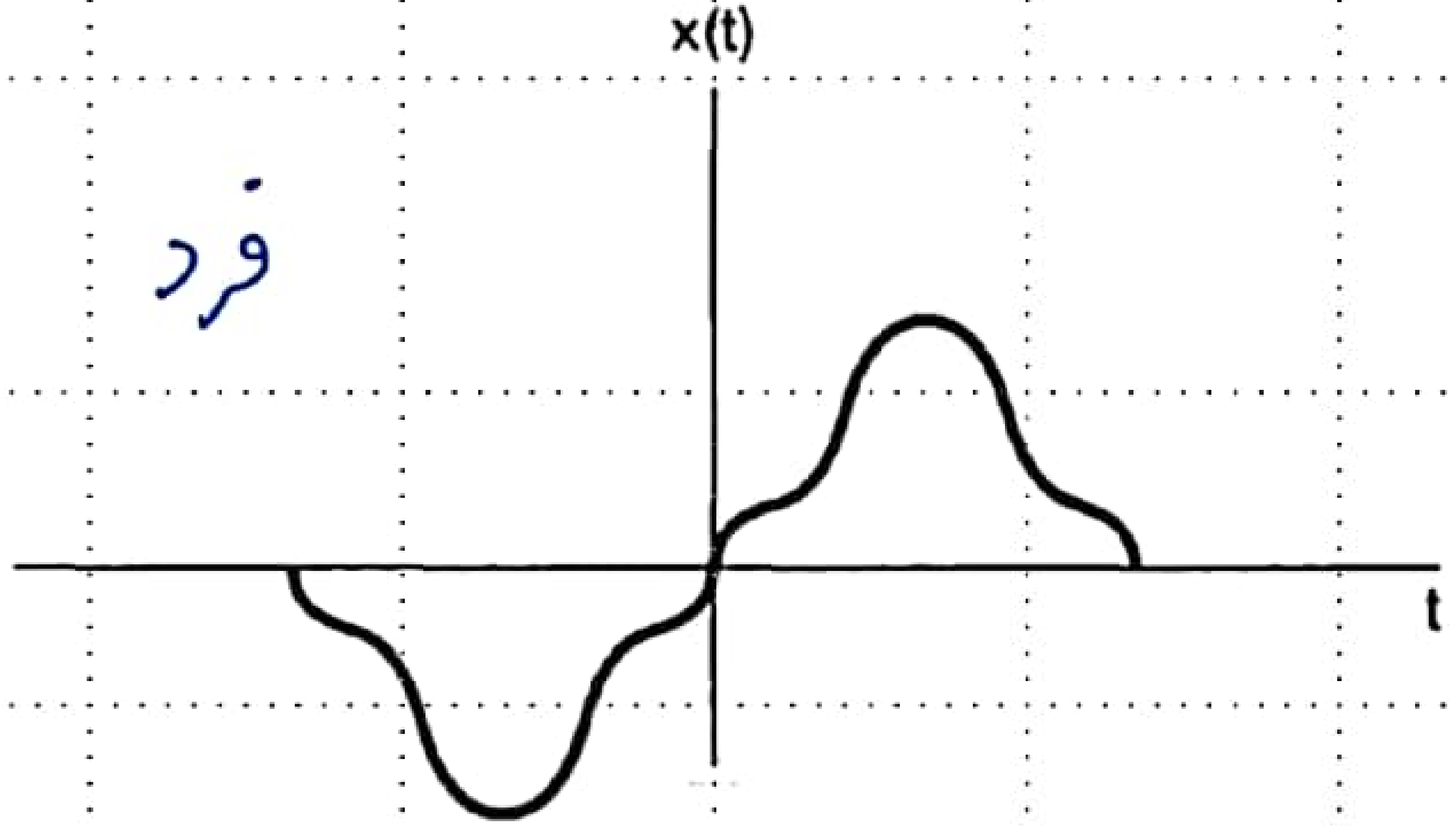
زوج



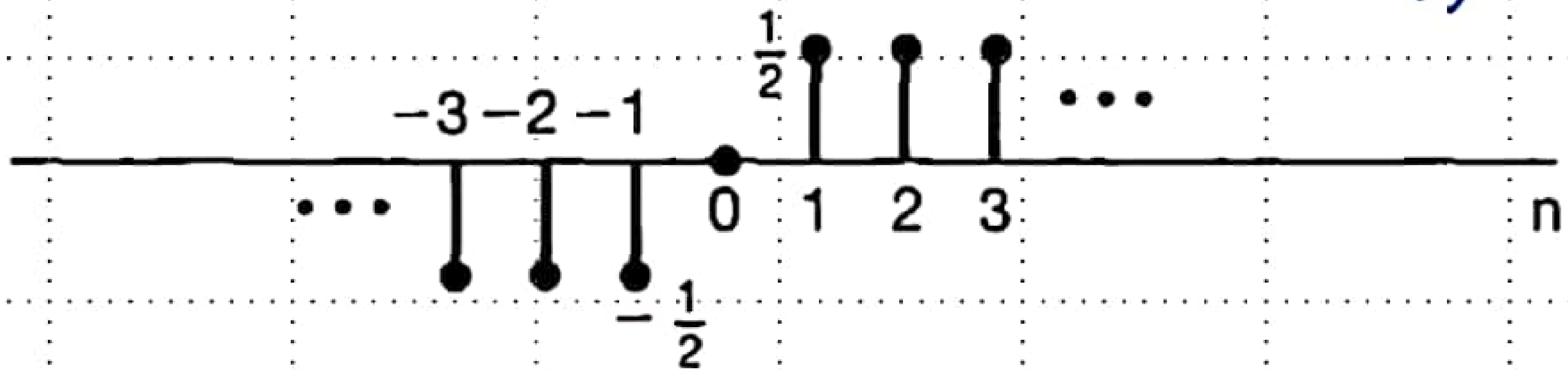
زوج



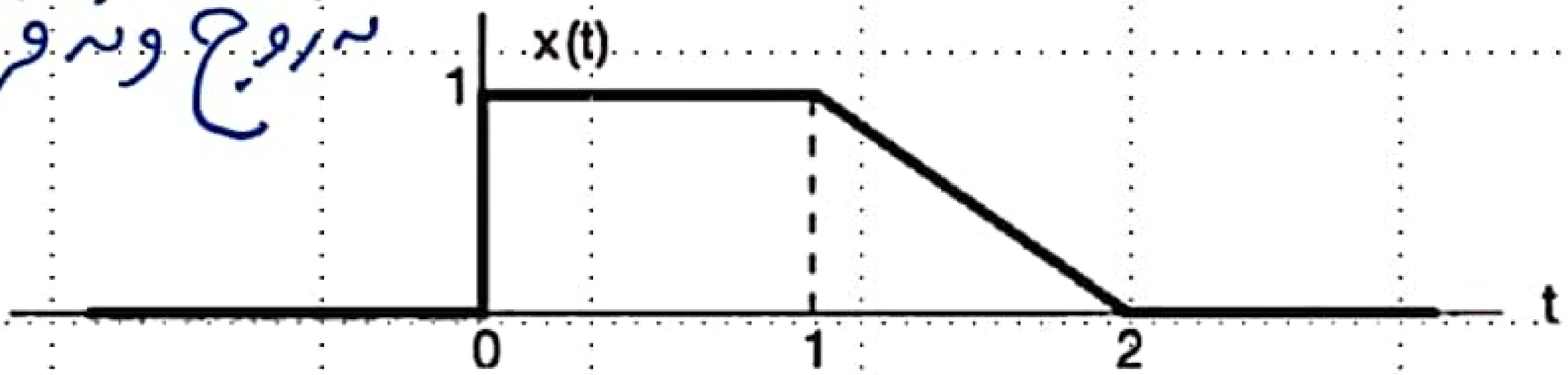
فرد



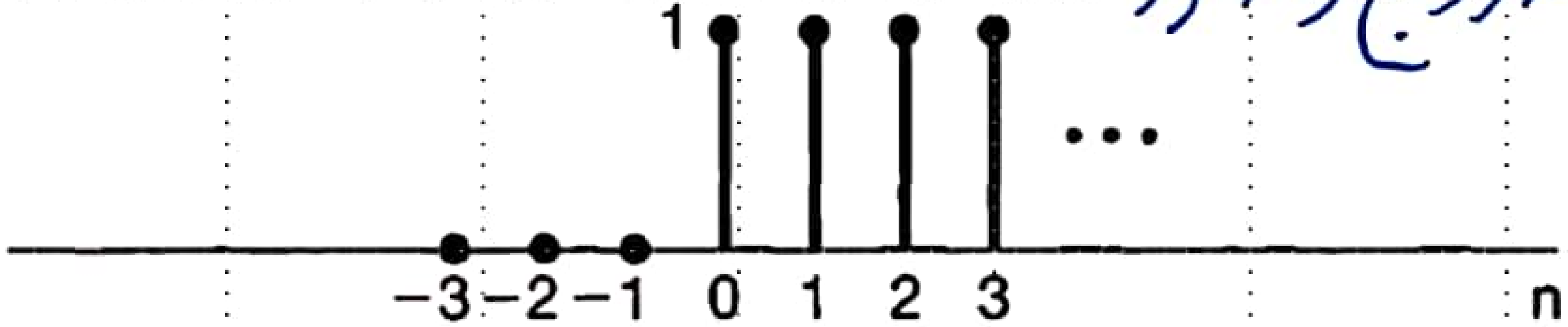
فرد



نه زوج و نه فرد



نه زوج و نه فرد



نکتهٔ مهم: هر سیگنال دلخواه $x(t)$ را می‌توان به صورت مجموع دو سیگنال، یکی زوج و یکی فرد نوشت.

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

بخش زوج $x_e(t) = Even\{x(t)\}$

بخش فرد $x_o(t) = Odd\{x(t)\}$

اثبات: کافی است بنویسیم:

$$\begin{cases} x_e(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right] \\ x_o(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right] \end{cases}$$

$$x_e(t) + x_o(t) = x(t) \checkmark$$

$$x_e(-t) = x_e(t) \checkmark \qquad x_o(-t) = -x_o(t) \checkmark$$

تذکر: به طور مشابه برای حالت زمان گسسته داریم:

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

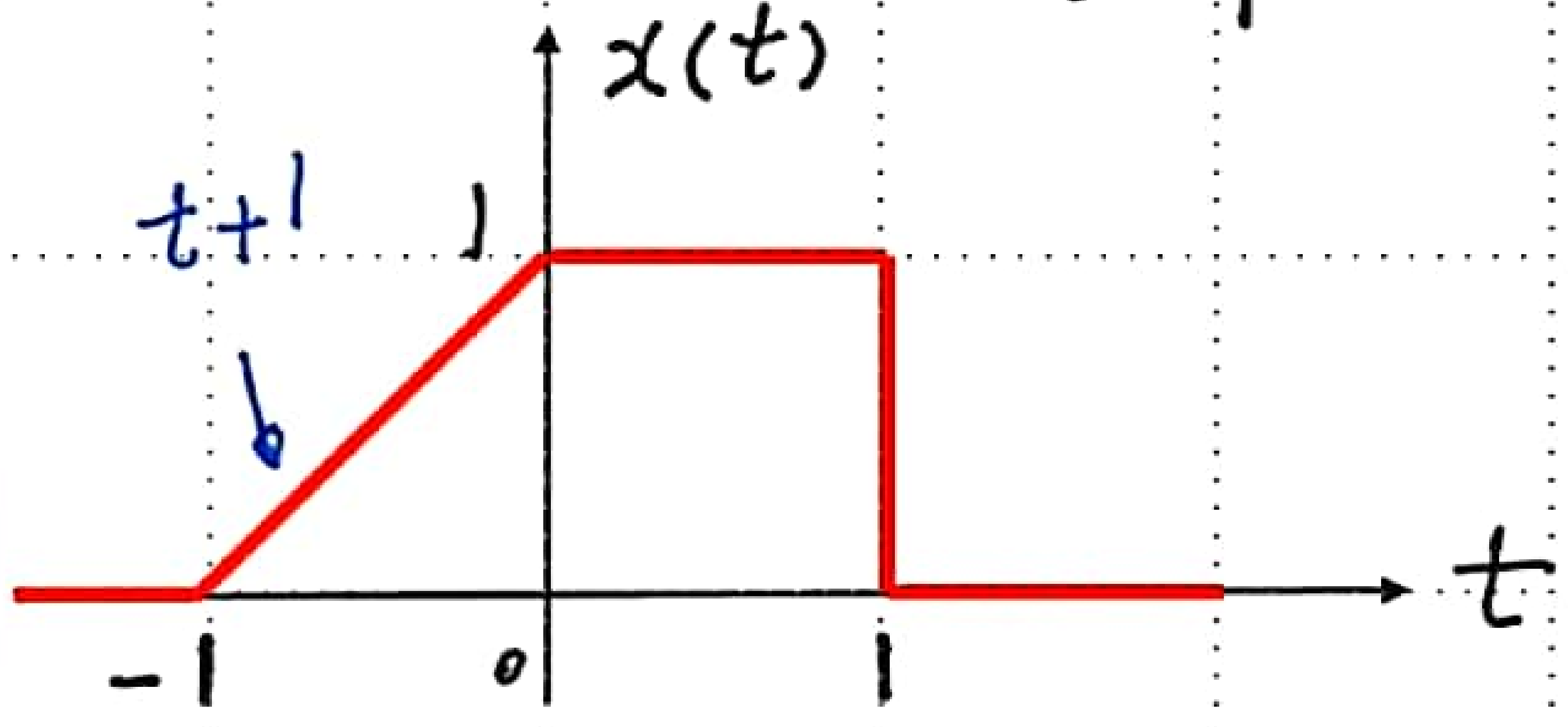
$$x_e[n] = Even\{x[n]\} = \frac{1}{2}\{x[n] + x[-n]\}$$

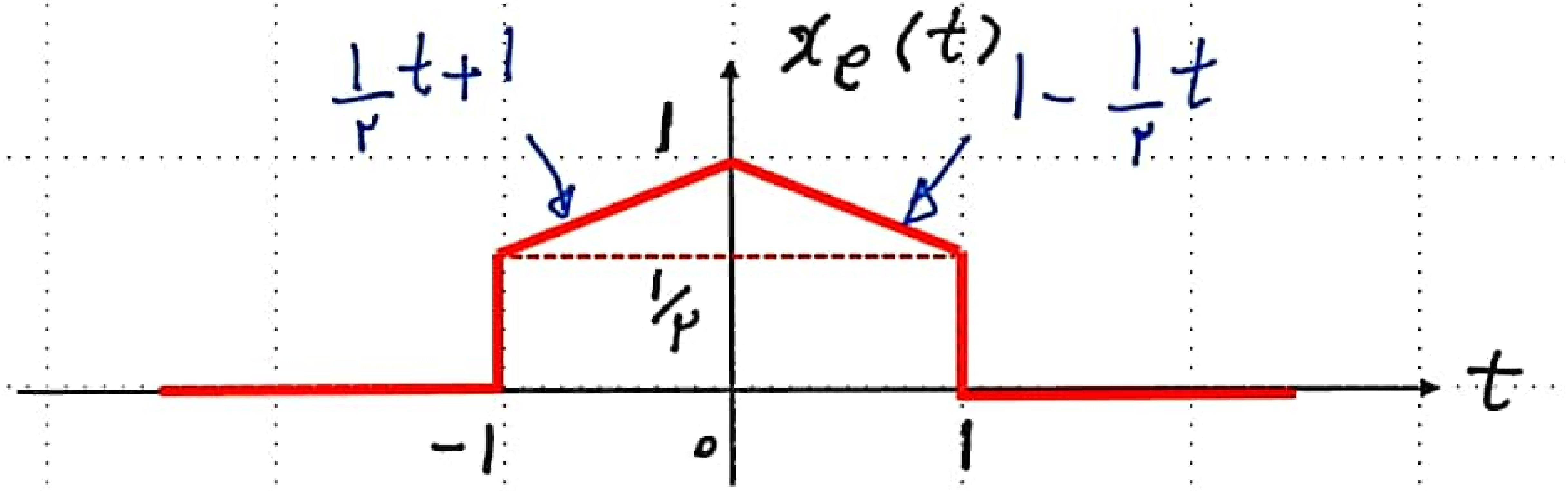
$$x_o[n] = Odd\{x[n]\} = \frac{1}{2}\{x[n] - x[-n]\}$$

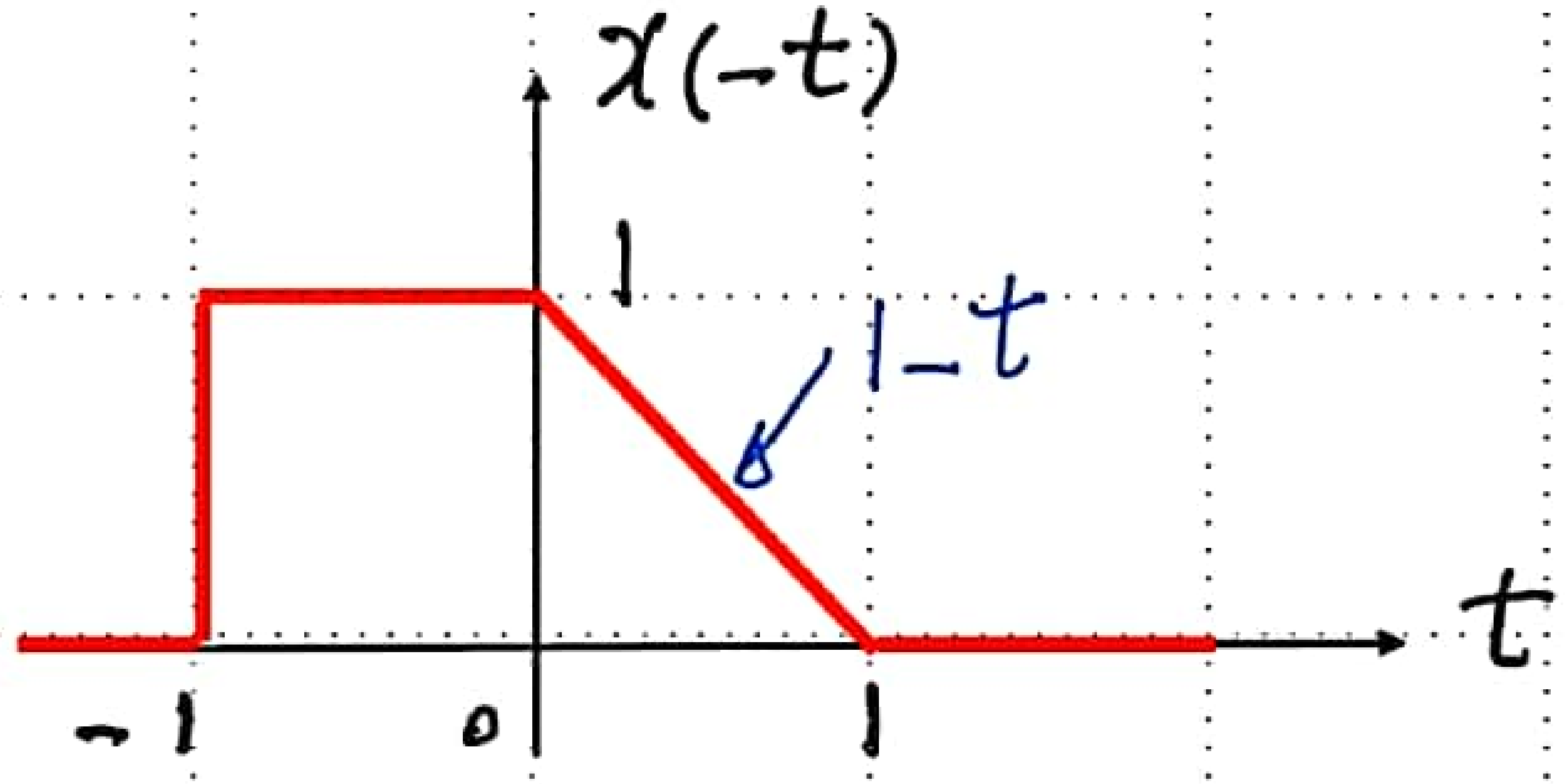
$$x_e[n] + x_o[n] = x[n] \quad \checkmark$$

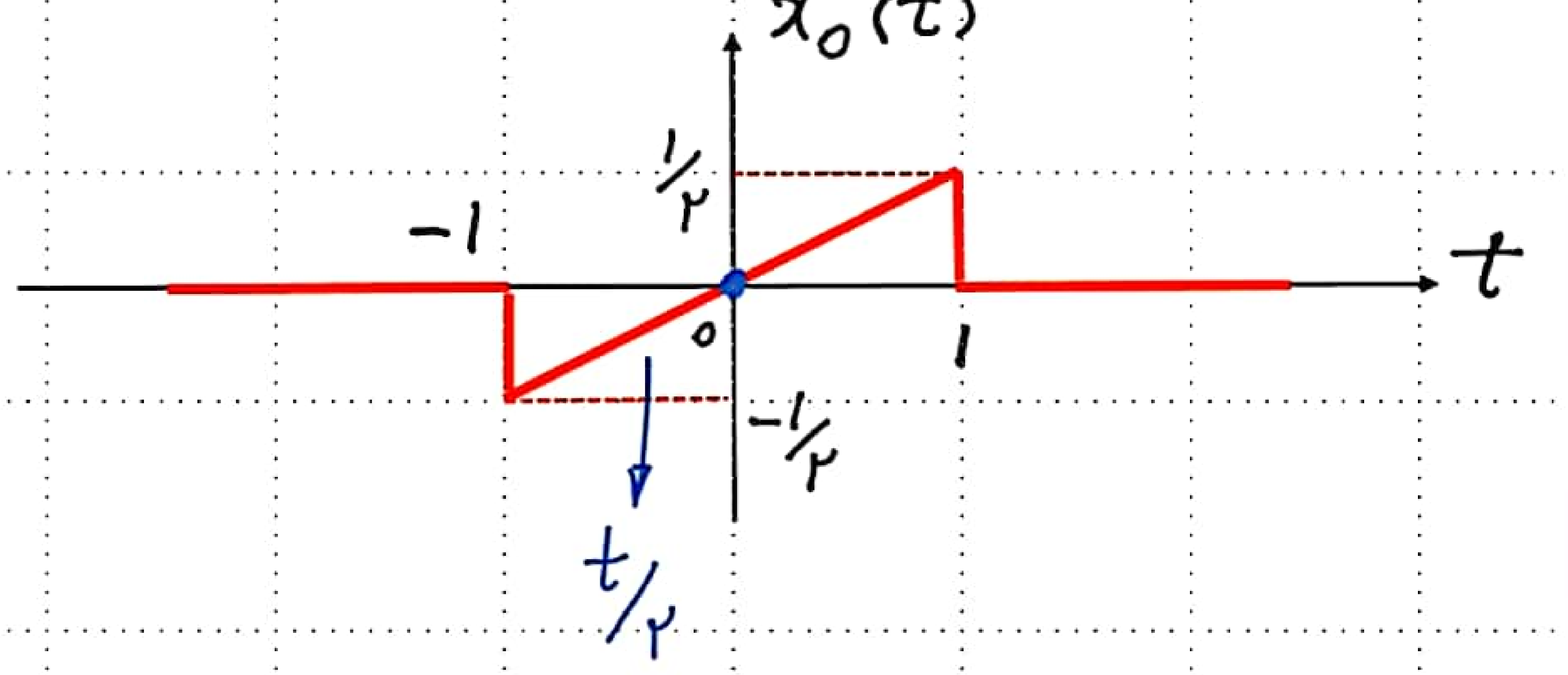
$$x_e[n] = x_e[-n] \quad \checkmark \qquad \text{و} \qquad x_o[-n] = -x_o[n] \quad \checkmark$$

مثال) بخش های زوج و فرد سیگنال $x(t)$ را به دست آورده و رسم کنید.

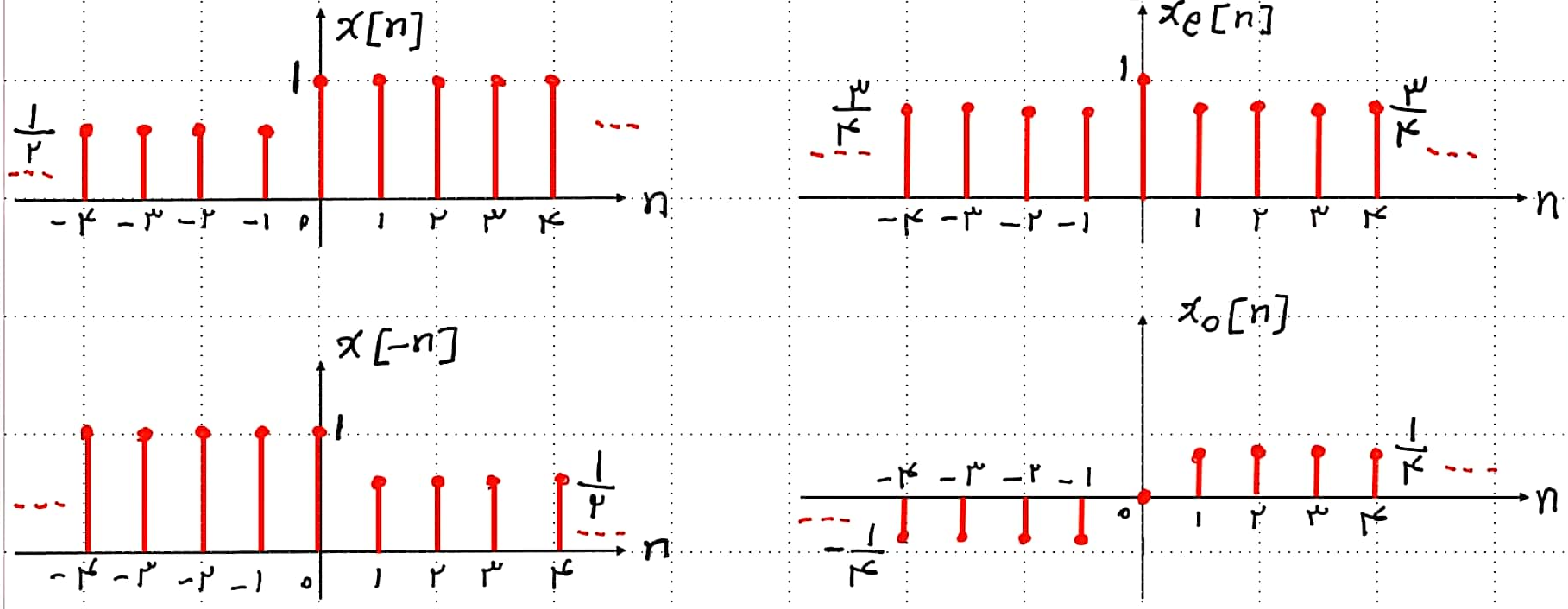








مثال) بخش های زوج و فرد سیگنال $x[n]$ را به دست آورده و رسم کنید.



بسم الله الرّحمن الرّحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده برق و کامپیوتر

تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مدرس: مسعود عمومی

جلسه چهارم _ بخش 1.3 کتاب

با سلام خدمت دانشجویان محترم

سیگنال‌های نمایی (Exponential) و سینوسی (Sinusoidal) زمان‌پیوسته

The continuous-time *complex exponential signal* is of the form

$$x(t) = Ce^{at}, \tag{1.20}$$

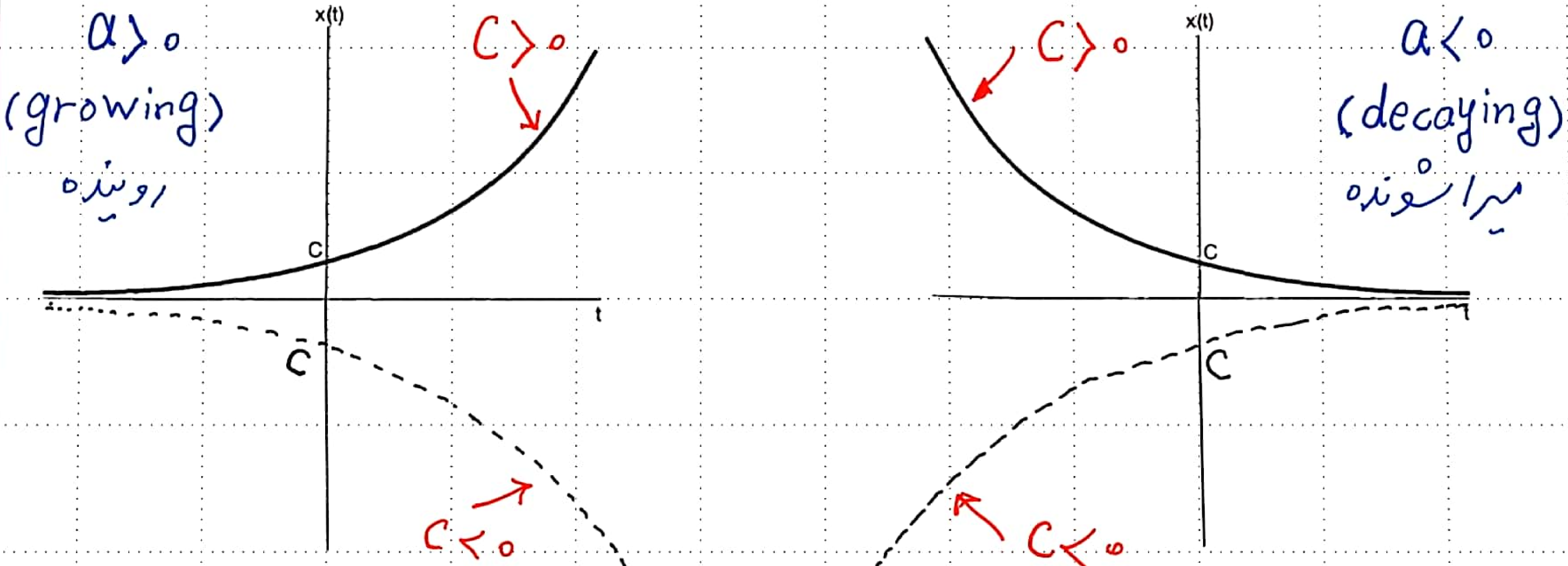
where C and a are, in general, complex numbers. Depending upon the values of these parameters, the complex exponential can exhibit several different characteristics.

در حالت کلی

$$\begin{cases} C = C_r + jC_i = |C| e^{j\theta} \\ a = a_r + ja_i = r + j\omega_0 \end{cases}$$

الف) اگر c و a هردو حقیقی باشند (سیگنال نمایی حقیقی)

$$x(t) = C e^{at}$$



ب) اگر C حقیقی و a موهومی محض $(a=j\omega_0)$ باشد. (نمایی مختلط متناوب)

$$x(t)=Ce^{j\omega_0 t} = C\left[\cos(\omega_0 t)+j\sin(\omega_0 t)\right]$$

$$Re\{x(t)\}=C\cos(\omega_0 t) \quad , \quad Im\{x(t)\}=C\sin(\omega_0 t)$$

نکته: $x(t+T)=x(t) \Rightarrow e^{j\omega_0(t+T)}=e^{j\omega_0 t} \Rightarrow e^{j\omega_0 T}=1 \Rightarrow \omega_0 T=2k\pi$

$\Rightarrow T=k\frac{2\pi}{\omega_0}\ (k\in\mathbb{Z}) \Rightarrow T_0=\frac{2\pi}{|\omega_0|}$: دوره تناوب اصلی

$f_0=\frac{1}{T_0}=\frac{\omega_0}{2\pi}$ فرکانس نوسان سیگنال های سینوسی فوق است.

سیگنال سینوسی با دامنهٔ نوسان ثابت همان بخش حقیقی یا موهومی سیگنال $e^{\pm j\omega_0 t}$ است.

فرم کلی سیگنال سینوسی

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) = A\,\mathrm{Re}\left\{ e^{j(\omega_0 t + \varphi)} \right\}$$

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi) = A\,\mathrm{Im}\left\{ e^{j(\omega_0 t + \varphi)} \right\}$$

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) = \mathrm{Re}\left\{ \underbrace{(Ae^{j\varphi})}_{X} e^{j\omega_0 t} \right\}$$

$x(t)$ فازور $\leftarrow X$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

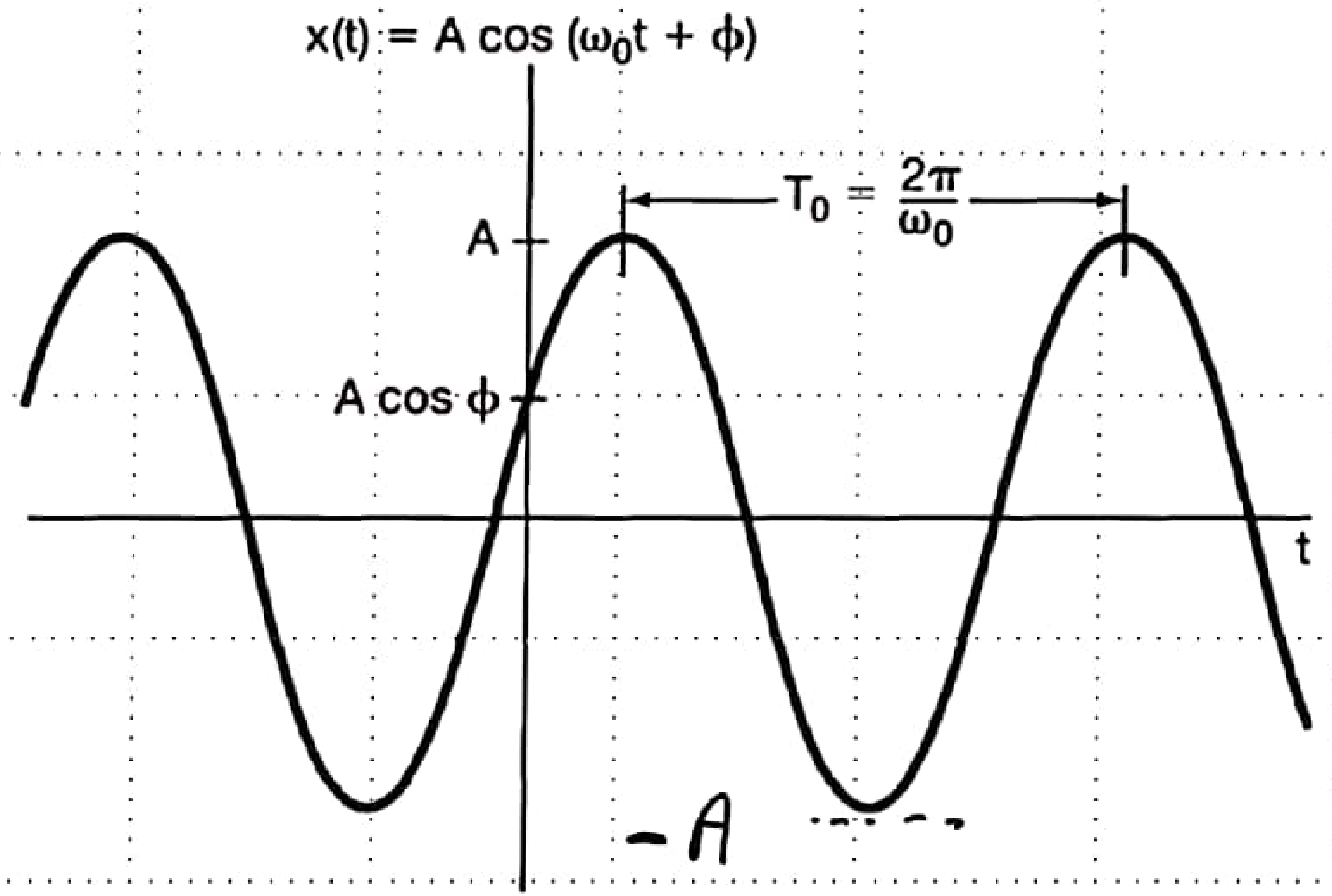


Figure 1.20 Continuous-time sinusoidal signal.

نکته: سیگنال ثابت (DC) یک سینوسی با فرکانس زاویه‌ای $\omega_0 = 0$ است.

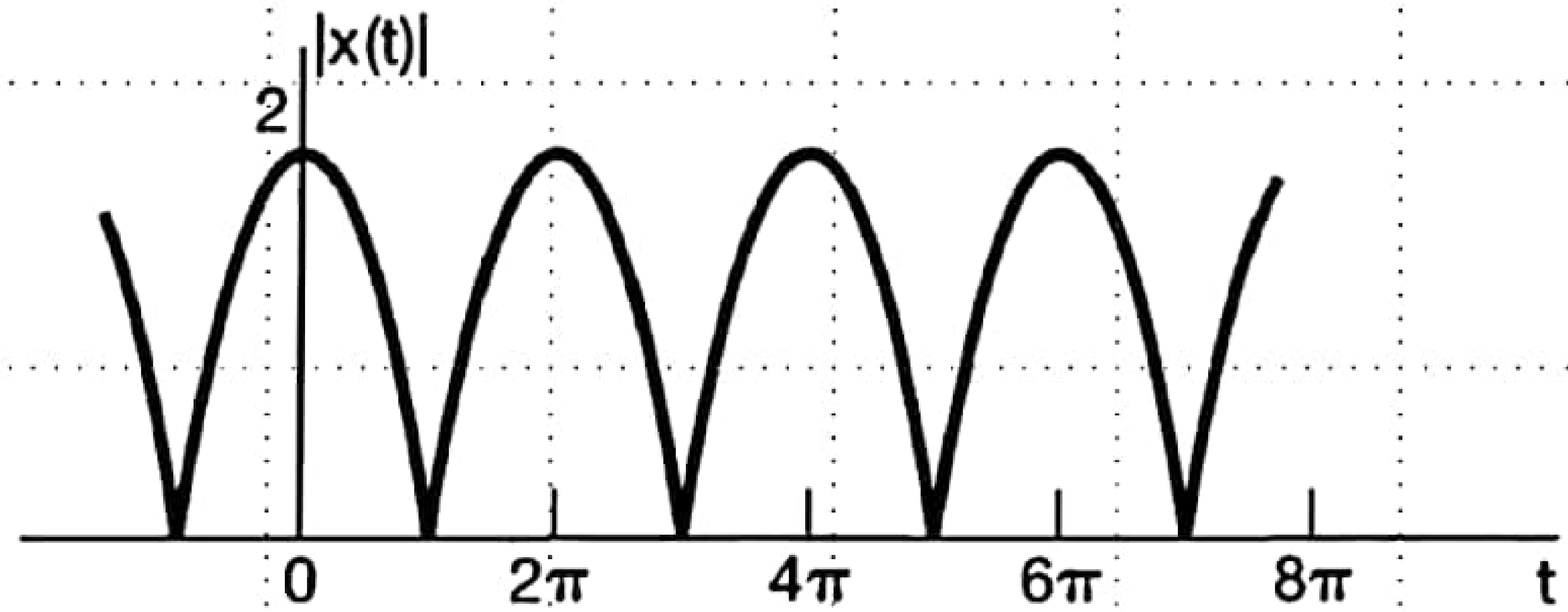
مثال) سیگنال مختلط $x(t) = e^{j3t} + e^{j2t}$ را در نظر بگیرید. نمودار $|x(t)|$ را رسم کنید.

$$x(t) = e^{j3t} + e^{j2t} = e^{j2.5t}\left[e^{j0.5t} + e^{-j0.5t}\right]$$

یادآوری (اتحاد اویلر): $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2}\left[e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right] \\ \sin\theta = \frac{1}{2j}\left[e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right] \end{cases}$

$$x(t) = 2e^{j2.5t}\cos(0.5t)$$

$$|x(t)| = 2|\cos(0.5t)|$$



انرژی و توان کل سیگنال نمایی مختلط $Ae^{j\omega_0 t}$ (A ثابت مختلط)

$$x(t) = Ae^{j\omega_0 t} \Rightarrow |x(t)| = |A|$$

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 dt = \infty$$

$$P_\infty = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |A|^2 dt = |A|^2$$

$\Rightarrow$ سیگنال $x(t) = Ae^{j\omega_0 t}$ از نوع توان است.

انرژی و توان کل سیگنال سینوسی $A\cos\omega_0 t$

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^2\cos^2\omega_0 t\, dt = \frac{A^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(1+\cos 2\omega_0 t)\, dt$$

$$= \frac{A^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dt + \frac{A^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\cos 2\omega_0 t\, dt = \infty + 0 = \infty$$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A^2\cos^2\omega_0 t\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{4T}\int_{-T}^{T} dt + \underbrace{\lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{4T}\int_{-T}^{T}\cos 2\omega_0 t\, dt}_{0}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{(A^2)(2T)}{4T} = \frac{A^2}{2}$$

سیگنال سینوسی از نوع توان است.

تعریف مجموعه سیگنال های نمایی وابسته هارمونیکی

$$\varphi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} \quad , \quad k = 0 , \pm1 , \pm2 , \dots$$

$\varphi_k(t)$ متناوب با دورهٔ تناوب اصلی $\frac{T_0}{|k|} = \frac{2\pi}{|k|\omega_0}$ است.

درنتیجه $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ دوره تناوب مشترک تمام سیگنالهای $\varphi_k(t)$ برای $k \in \mathbb{Z}$ است.

سیگنالهای نمایی مختلط متناوب در مباحث سیگنال ها و سیستم ها نقش اساسی دارند.

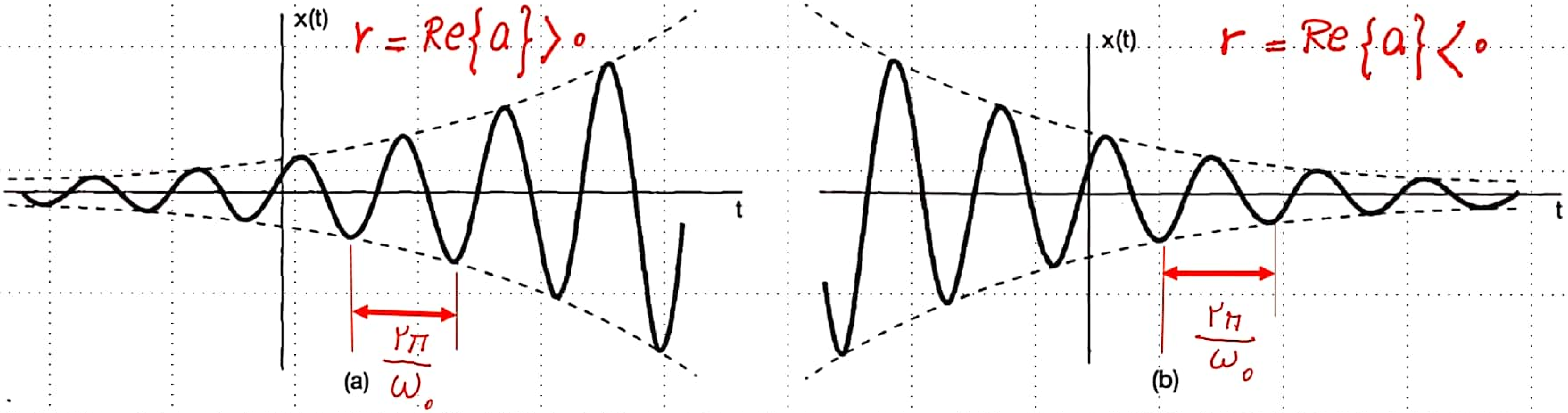
ج) اگر C و a هردو مختلط باشند. (نمایی مختلط غیرمتناوب)

$$C = |C| e^{j\theta} \quad , \quad a = r + j\omega_0$$

$$x(t) = C e^{at} = |C| e^{j\theta} \cdot e^{(r+j\omega_0)t} = |C| e^{rt} \cdot e^{j(\omega_0 t + \theta)}$$

$$= |C| e^{rt} \cos(\omega_0 t + \theta) + j |C| e^{rt} \sin(\omega_0 t + \theta)$$

$$\begin{cases} Re\{x(t)\} = |C| e^{rt} \cos(\omega_0 t + \theta) \\ \\ Im\{x(t)\} = |C| e^{rt} \sin(\omega_0 t + \theta) \end{cases}$$



$|C|$ درست است.

Figure 1.23 (a) Growing sinusoidal signal $x(t) = Ce^{rt}\cos(\omega_0 t + \theta)$, $r > 0$; (b) decaying sinusoid $x(t) = Ce^{rt}\cos(\omega_0 t + \theta)$, $r < 0$.

سیگنال‌های نمایی (Exponential) و سینوسی (Sinusoidal) زمان‌گسسته

As in continuous time, an important signal in discrete time is the *complex exponential signal* or *sequence*, defined by

$$x[n] = C\alpha^n, \tag{1.44}$$

where C and α are, in general, complex numbers. This could alternatively be expressed in the form

$$x[n] = Ce^{\beta n}, \tag{1.45}$$

where

$$\alpha = e^{\beta}.$$

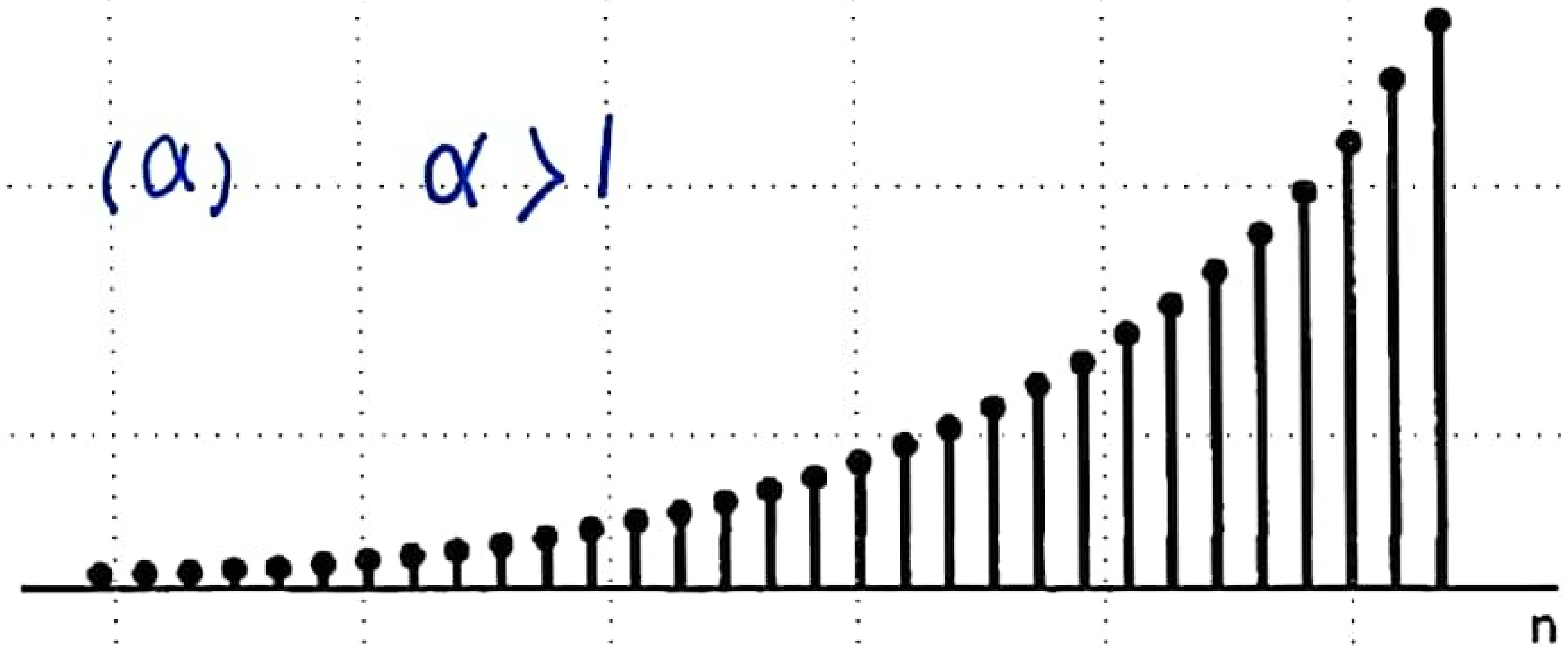
Although the form of the discrete-time complex exponential sequence given in eq. (1.45) is more analogous to the form of the continuous-time exponential, it is often more convenient to express the discrete-time complex exponential sequence in the form of eq. (1.44).

الف) اگر C و α هردو حقیقی باشند (دنبالهٔ نمایی حقیقی)

$$x[n] = C\alpha^{n}$$

فرض: $C > 0$

(a) $\alpha > 1$

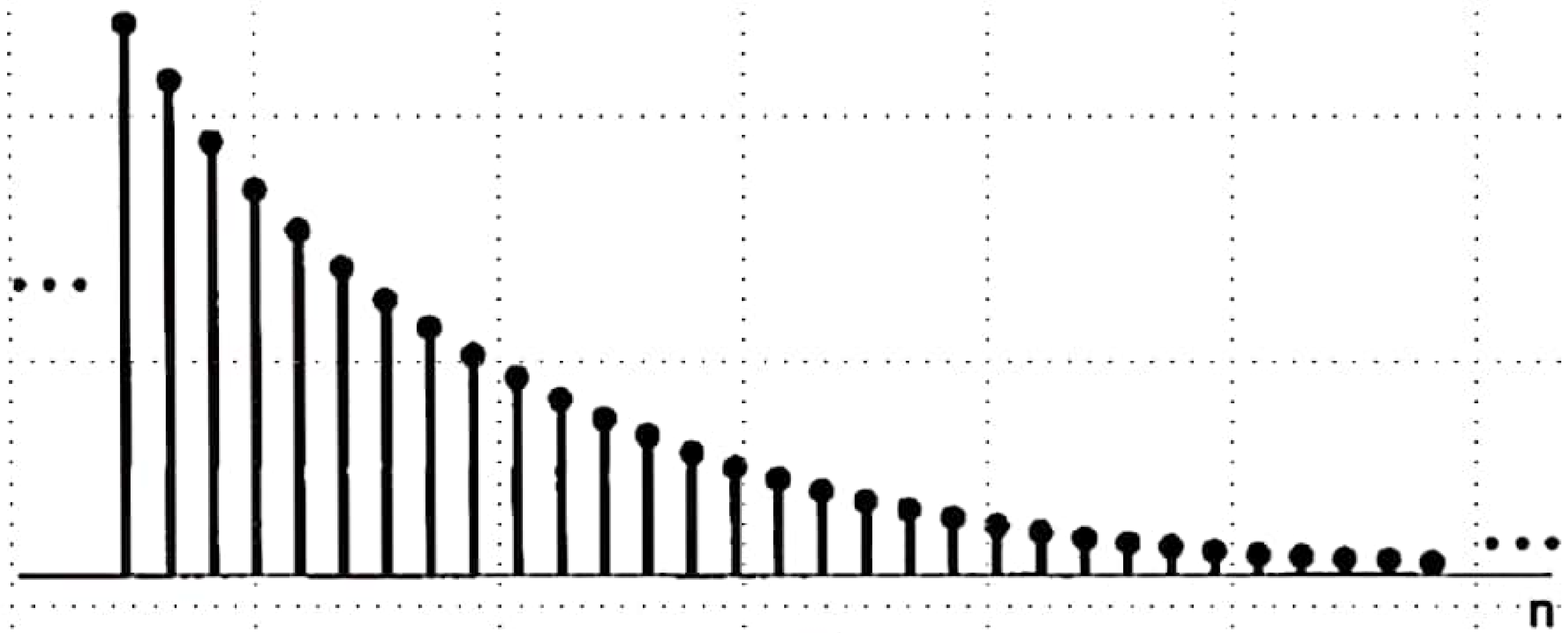


(a)

با افزایش n اندازهٔ نمونه‌ها بزرگتر می‌شود.

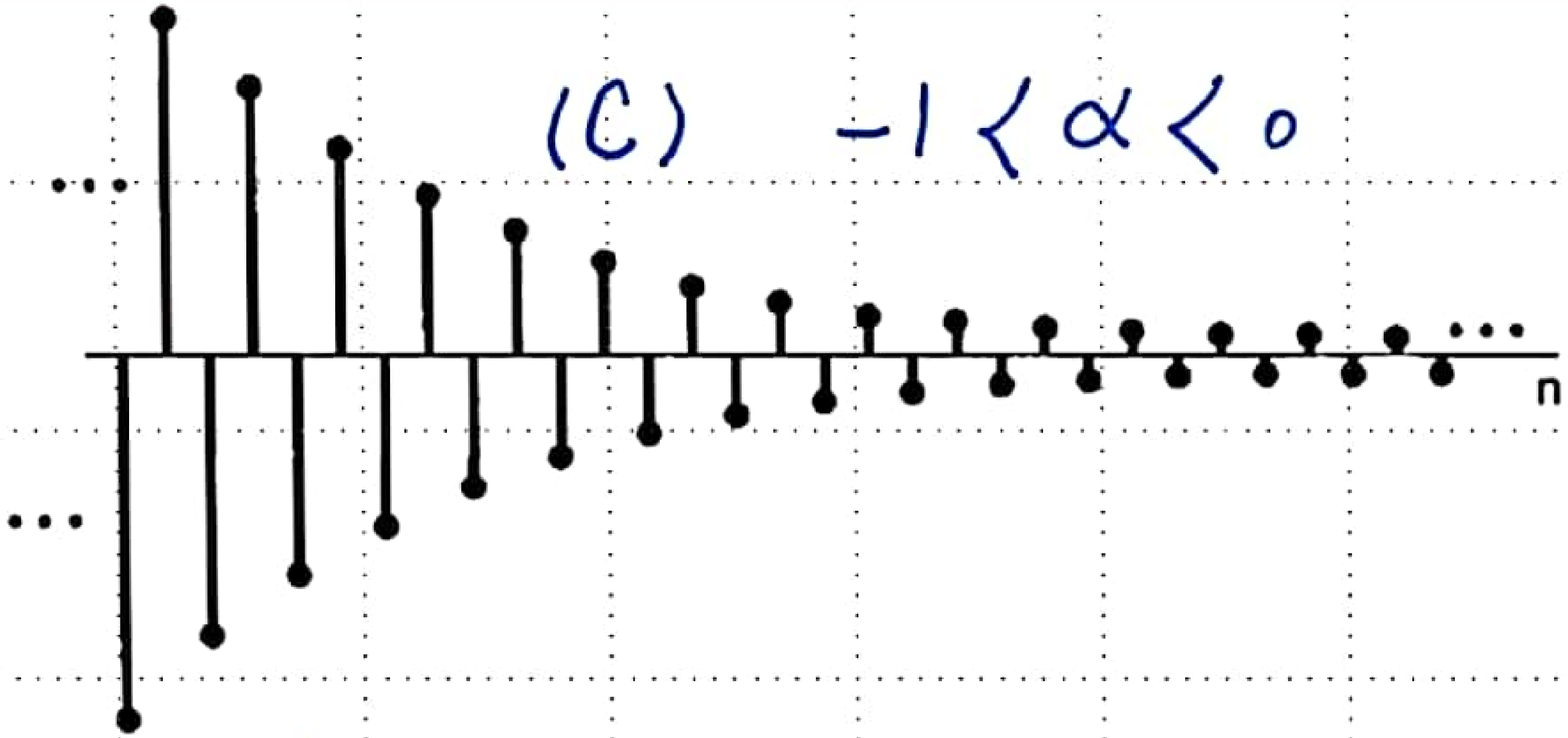
(b) $0 < \alpha < 1$

با افزایش n اندازهٔ نمونه‌ها کوچکتر می‌شود.



(b)

(C) $-1 < \alpha < 0$

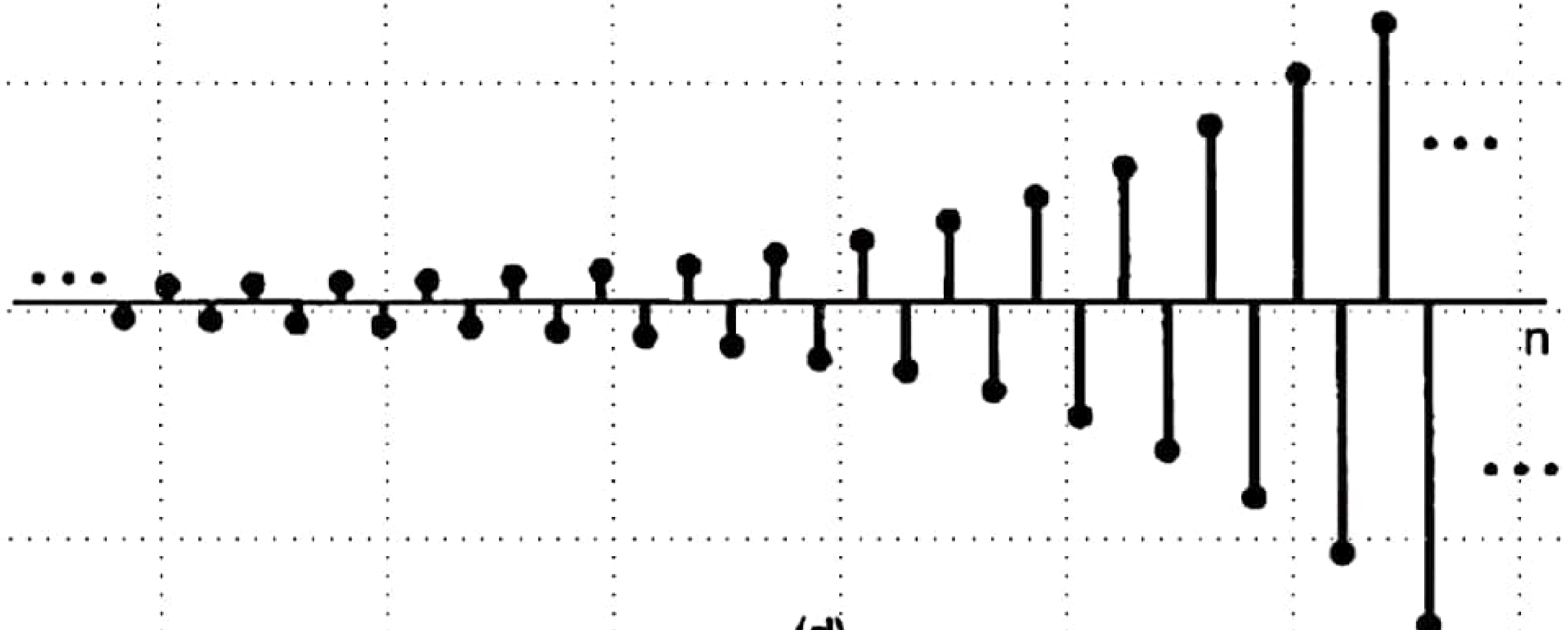


(c)

با افزایش n اندازهٔ نمونه‌ها کوچکتر شده و علامت آنها مرتباً مثبت و منفی می‌شود.

با افزایش n اندازهٔ نمونه‌ها بزرگتر شده و علامت آنها مرتباً مثبت و منفی می‌شود.

(d) $\alpha < -1$



(d)

اگر $\alpha = 1 \Rightarrow x[n] = C$

اگر $\alpha = -1 \Rightarrow x[n] = C(-1)^n = \begin{cases} C & n \text{ زوج} \\ -C & n \text{ فرد} \end{cases}$

ب) اگر C حقیقی و $\alpha = e^{\beta} = e^{j\omega_0}$ مختلط باشد.   (دنباله نمایی مختلط)

$|\alpha| = 1$

فرض: $\underline{C = 1}$

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} = \cos(\omega_0 n) + j\sin(\omega_0 n)$$

$$Re\{x[n]\} = \cos(\omega_0 n) \quad \text{و} \quad Im\{x[n]\} = \sin(\omega_0 n)$$

دنباله نمایی مختلط ارتباط نزدیکی با دنباله سینوسی دارد.

فرم کلی دنباله سینوسی:

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \varphi) = A\,Re\{e^{j(\omega_0 n + \varphi)}\}$$

$$= Re\{\underbrace{(Ae^{j\varphi})}_{X}\, e^{j\omega_0 n}\}$$

$X \leftarrow$ فازور

بررسی خواص تناوبی در دنباله‌های نمایی و سینوسی

یادآوری: در حالت زمان پیوسته سیگنال نمایی مختلط $e^{j\omega_0 t}$ همواره متناوب با دوره تناوب اصلی $\frac{2\pi}{\omega_0}$ است و با افزایش ω_0 سرعت نوسان سیگنال بیشتر می‌شود.

سؤال: آیا دنباله $e^{j\omega_0 n}$ یا $\cos(\omega_0 n)$ و $\sin(\omega_0 n)$ نیز همواره متناوبند؟

شرط تناوب: $\exists N \in \mathbb{Z}^+ : e^{j\omega_0 (n+N)} = e^{j\omega_0 n}$

$$\Rightarrow e^{j\omega_0 N} = 1 \Rightarrow \omega_0 N = m(2\pi)\ ,\ m \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$$

$$N = m\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right)$$

N دوره تناوب اصلی است اگر m و N نسبت به هم اول باشند.

پس شرط لازم و کافی تناوب این دنباله‌ها گویا بودن $\frac{\omega_0}{2\pi}$ است.

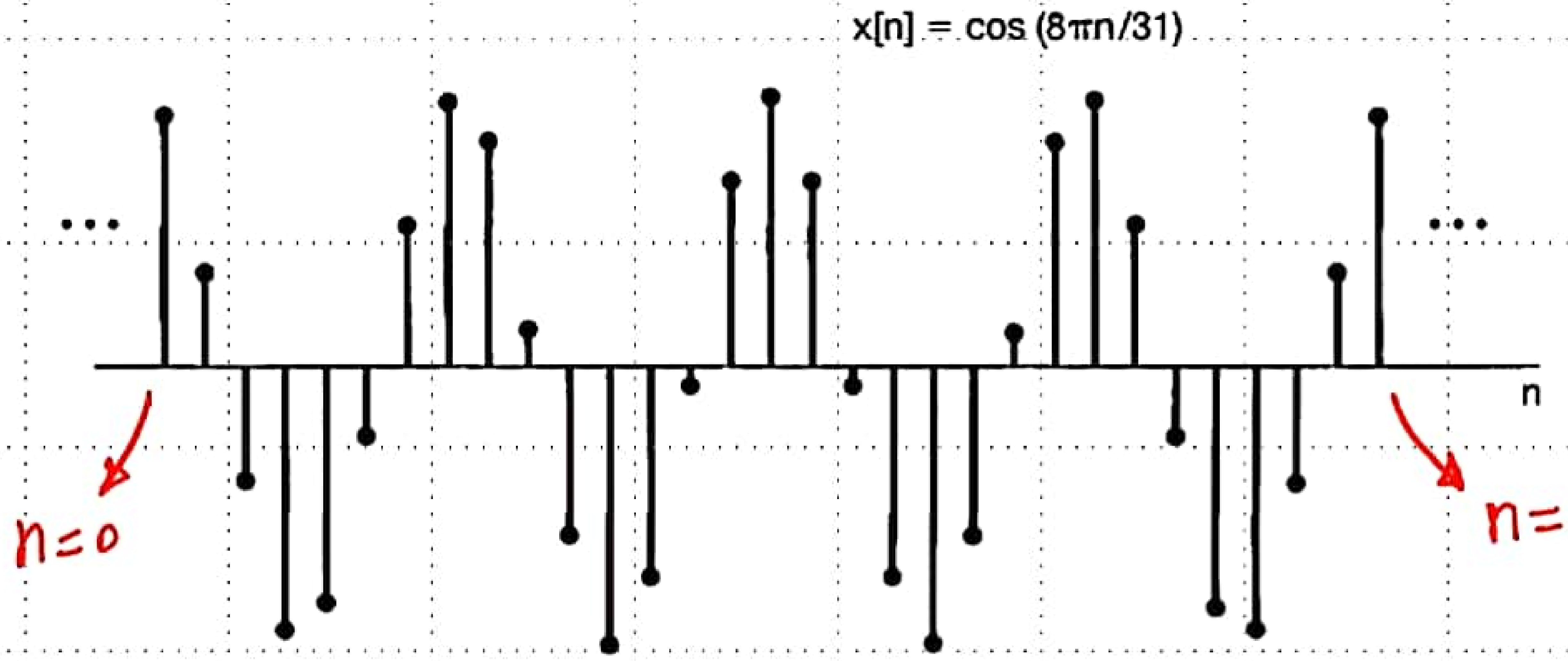
مثال) $x[n] = \cos\left(\frac{8\pi n}{31}\right)$ و $y[n] = \cos\left(\frac{n}{6}\right)$

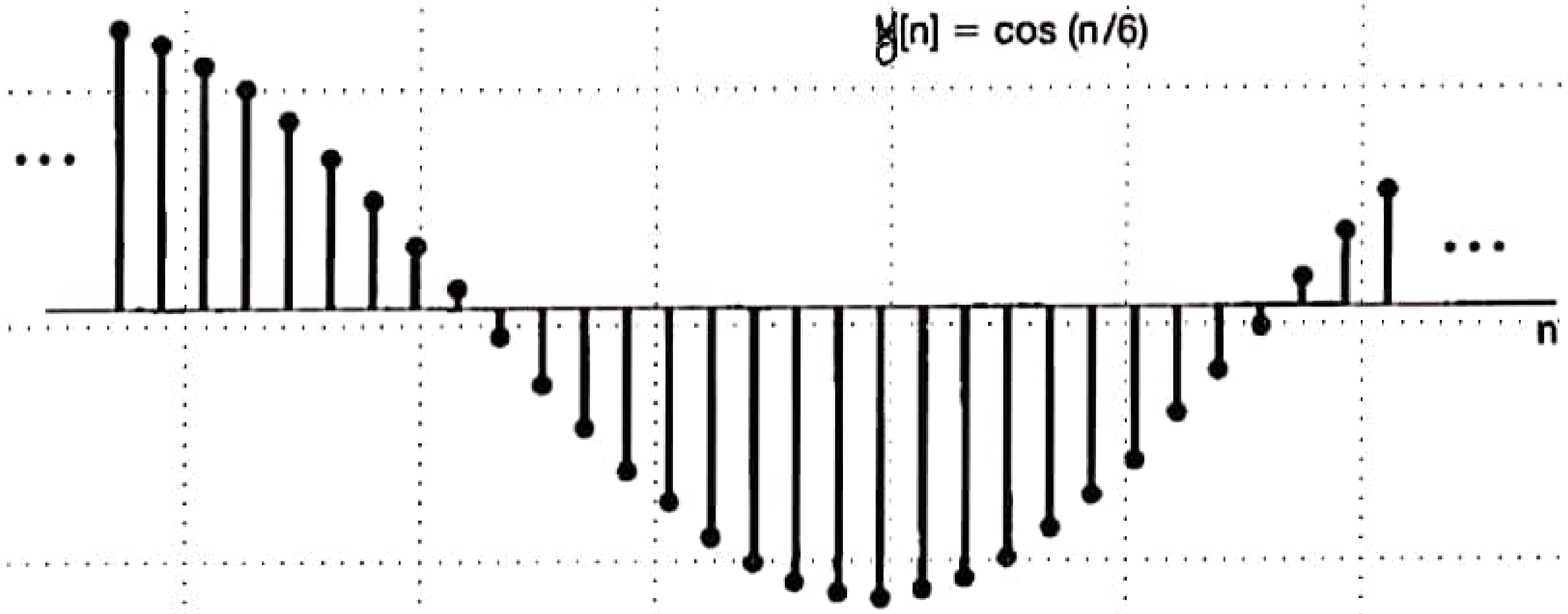
$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{8\pi}{31} \times \frac{1}{2\pi} = \frac{4}{31} \Rightarrow$$

$N = 31$ دوره تناوب اصلی $x[n]$ است.

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{12\pi}$$

(گویا نیست) $\Rightarrow$ $y[n]$ متناوب نیست.





نکته مهم دیگر: از آنجا که

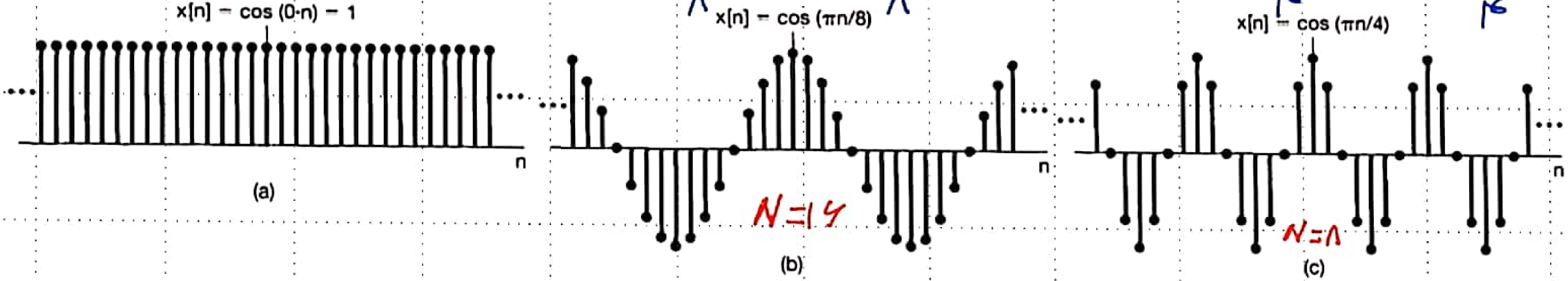
$K=mn$

$$e^{j(\omega_0+2\pi m)n} = e^{j\omega_0 n} \cdot e^{j2\pi k} = e^{j\omega_0 n}$$

نمی‌توان گفت که با افزایش ω_0 سرعت نوسان هم لزوماً بیشتر می‌شود.

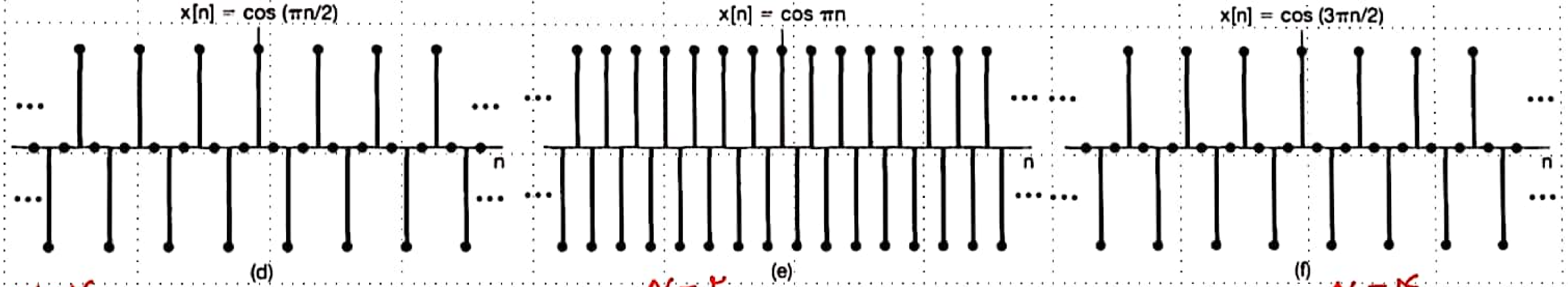
با افزایش ω_0 از 0 تا π تعداد نوسانات بیشتر شده و با افزایش از π تا 2π تعداد نوسانات کم می‌شود.

$\omega_0 = 0$ $\qquad$ $\omega_0 = \frac{\pi}{8} = \pi - \frac{7\pi}{8}$ $\qquad$ $\omega_0 = \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{3\pi}{4}$



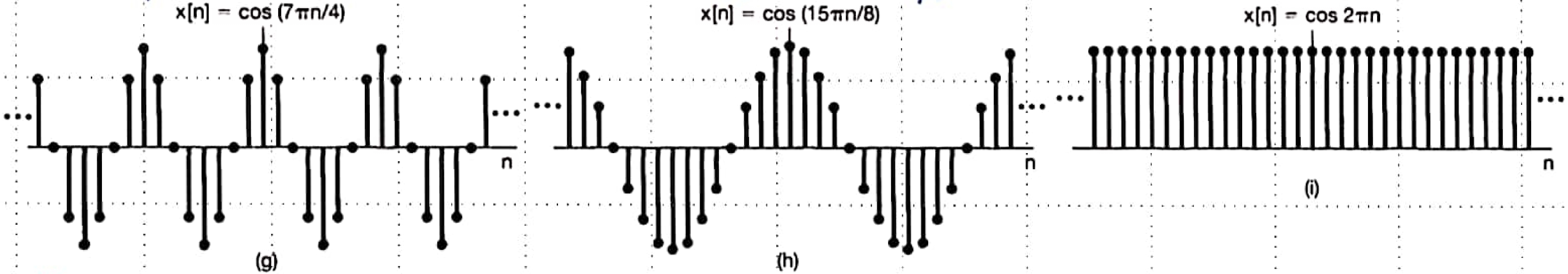
$N=16$ $\qquad$ $N=8$

$\omega_0 = \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\omega_0 = \pi$ $\qquad$ $\omega_0 = \frac{3\pi}{2} = \pi + \frac{\pi}{2}$



$N=4$ $\qquad$ $N=2$ $\qquad$ $N=4$

$\omega_0 = \frac{۷\pi}{۴} = \pi + \frac{۳\pi}{۴}$ $\qquad$ $\omega_0 = \frac{۱۵\pi}{۸} = \pi + \frac{۷\pi}{۸}$ $\qquad$ $\omega_0 = ۲\pi$



$N = ۸$ $\qquad$ $N = ۱۶$

Figure 1.27 Discrete-time sinusoidal sequences for several different frequencies.

نکته: در بین دنباله های $e^{j\omega_0 n}$ (مقادیر مختلف ω_0 در فاصله ای به طول ۲π) روشن است که $(-1)^n = \cos(\pi n) = e^{j\pi n}$ بیشترین فرکانس نوسان و کمترین دوره تناوب $(N = ۲)$ را دارد. به طور کلی بیشترین فرکانس در مضارب فرد π رخ می دهد.

مقایسه مهم:

TABLE 1.1 Comparison of the signals $e^{j\omega_0 t}$ and $e^{j\omega_0 n}$.

$e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\omega_0 n}$
Distinct signals for distinct values of ω_0	Identical signals for values of ω_0 separated by multiples of 2π
Periodic for any choice of ω_0	Periodic only if $\omega_0 = 2\pi m/N$ for some integers $N > 0$ and m.
Fundamental frequency ω_0	Fundamental frequency* ω_0/m
Fundamental period $\omega_0 = 0$: undefined $\omega_0 \neq 0$: $\frac{2\pi}{\omega_0}$	Fundamental period* $\omega_0 = 0$: undefined $\omega_0 \neq 0$: $m\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right)$

*Assumes that m and N do not have any factors in common.

مثال) دوره تناوب اصلی دنبالهٔ $x[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right)$ چیست؟

$\cos\left(\frac{2\pi}{3} n\right) \rightarrow N_1 = m\left(\frac{2\pi}{\omega_{01}}\right) = m\left(\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}}\right) = 3m \Rightarrow$ کوچکترین دوره تناوب $N_1 = 3$

$\sin\left(\frac{3\pi}{4} n\right) \rightarrow N_2 = m\left(\frac{2\pi}{\omega_{02}}\right) = m\left(\frac{2\pi}{\frac{3\pi}{4}}\right) = \frac{8}{3} m \Rightarrow$ 〃 〃 〃 $N_2 = 8$

$N = lcm(N_1, N_2) = 24$ کوچکترین دوره تناوب مشترک دو سیگنال و در نتیجه دوره تناوب اصلی دنبالهٔ $x[n]$ است.

$y[n] = \cos\left(\frac{2}{3} n\right) + \sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right)$

$\times$ نامتناوب $\quad \times$ نامتناوب $\quad \checkmark$ $N_2 = 8$

تعریف مجموعه دنباله های نمایی وابسته هارمونیکی

$$\varphi_K[n] = e^{jK\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \quad , \quad K = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

را به طور هارمونیکی وابسته به یکدیگر می نامیم. برخلاف حالت زمان پیوسته، همهٔ دنباله ها برای K های مختلف متمایز نیستند، بلکه:

$$\varphi_{K+N}[n] = e^{j(K+N)\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$= e^{jK\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \cdot e^{j2\pi n} = e^{jK\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} = \varphi_K[n]$$

بنابراین فقط N دنبالهٔ متمایز برای $\varphi_K[n]$ $K = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ داریم.

دنباله های نمایی مختلط متناوب در مباحث سیگنال ها و سیستم ها نقش اساسی دارند.

ج) اگر C و α هردو مختلط باشند.

$$C = |C| e^{j\theta} \quad , \quad \alpha = |\alpha| e^{j\omega_0}$$

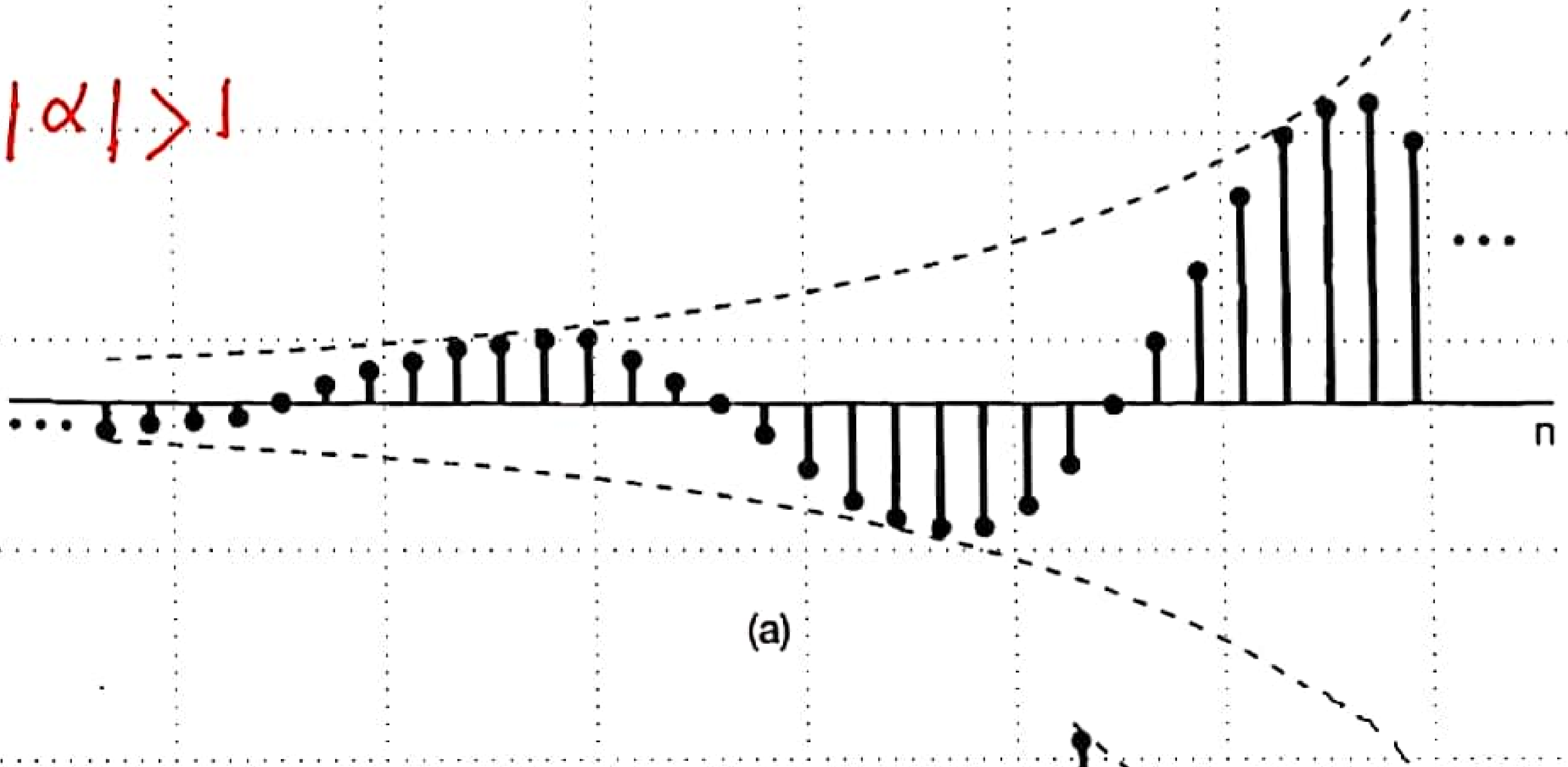
$$x[n] = C\alpha^n = |C||\alpha|^n e^{j(\omega_0 n + \theta)}$$

$$= |C||\alpha|^n \cos(\omega_0 n + \theta) + j|C||\alpha|^n \sin(\omega_0 n + \theta)$$

$$\begin{cases} Re\{x[n]\} = |C||\alpha|^n \cos(\omega_0 n + \theta) \\ Im\{x[n]\} = |C||\alpha|^n \sin(\omega_0 n + \theta) \end{cases}$$

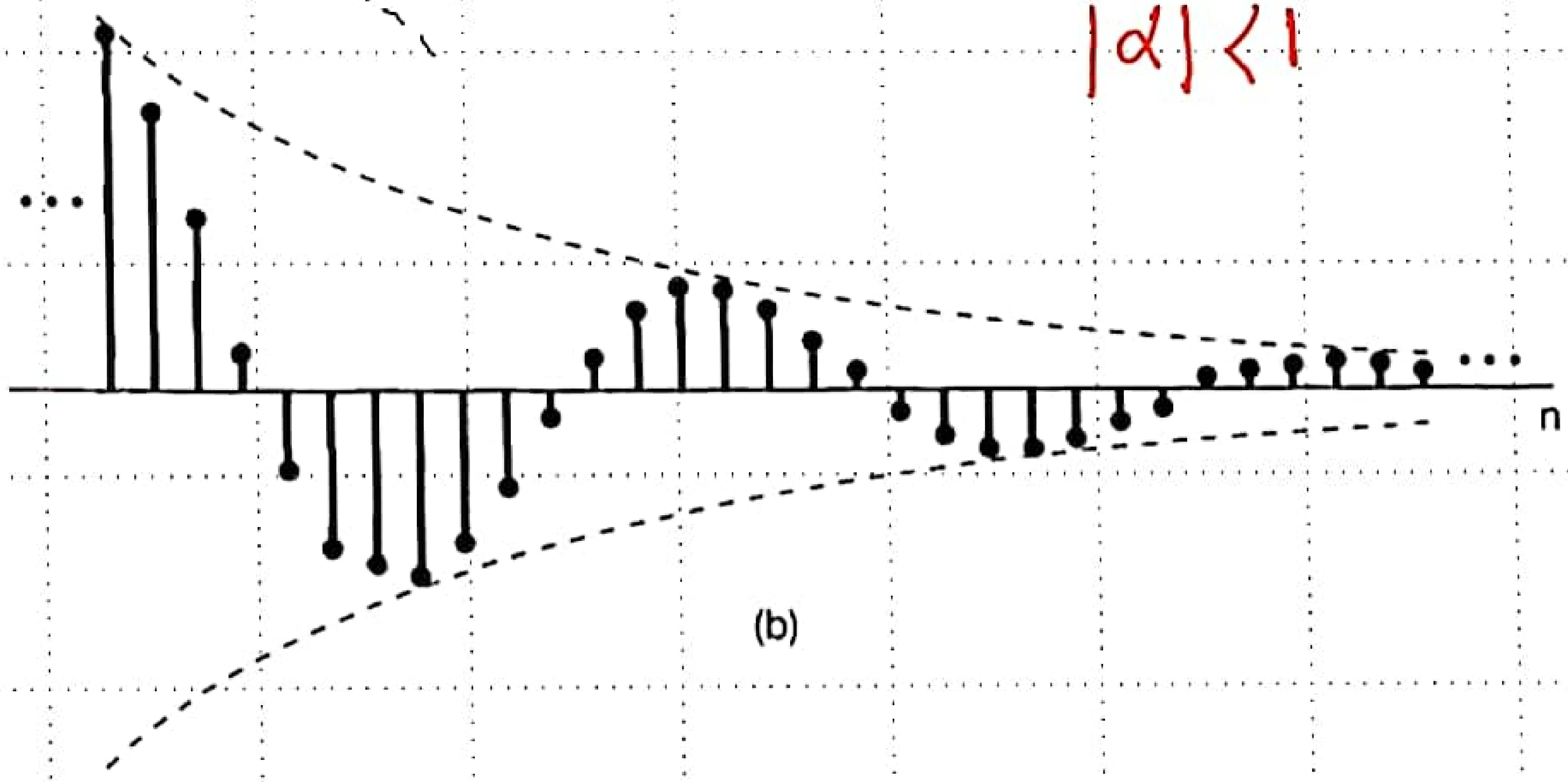
$|\alpha| > 1$

(a) Growing discrete-time sinusoidal signals;



(a)

$|\alpha| < 1$



(b)

(b) decaying discrete-time sinusoid.

بسم الله الرّحمن الرّحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده برق و کامپیوتر

تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مدرس: مسعود عمومی

جلسه پنجم _ بخش 1.4 کتاب

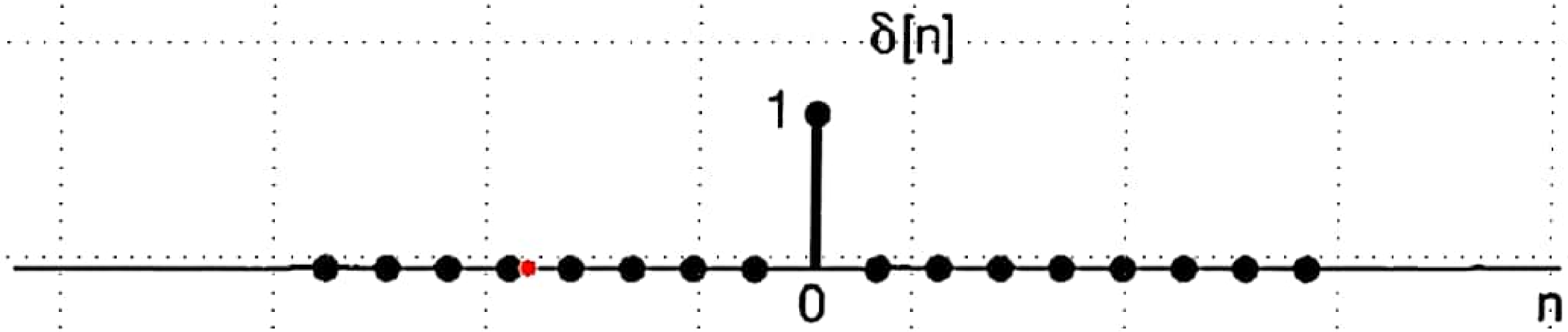
با سلام خدمت دانشجویان محترم

سیگنال‌های ضربهٔ واحد و پلهٔ واحد

الف) حالت زمان‌گسسته

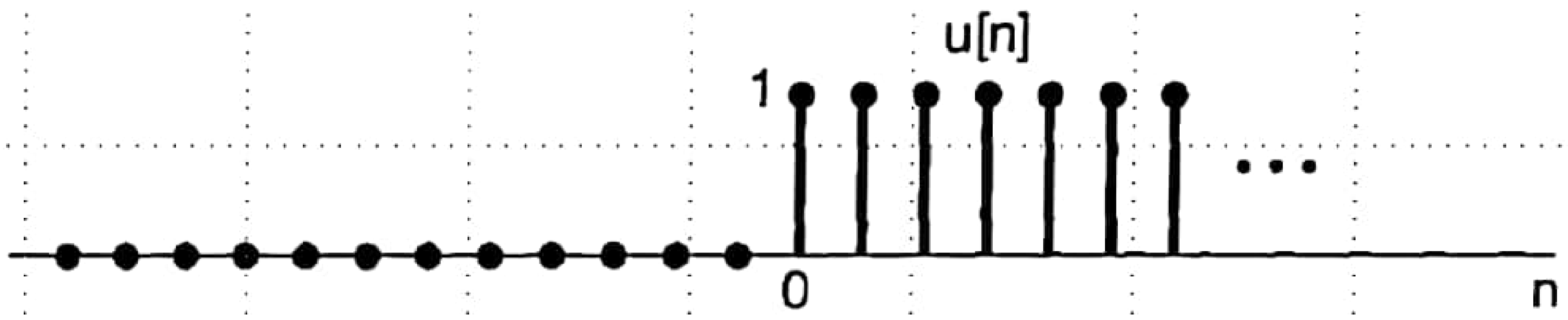
۱ـ سیگنال ضربهٔ واحد (نمونهٔ واحد) (Unit Impulse) (Unit Sample)

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & , \; n \neq 0 \\ 1 & , \; n = 0 \end{cases}$$



۲ـ سیگنال پلهٔ واحد (Unit Step)

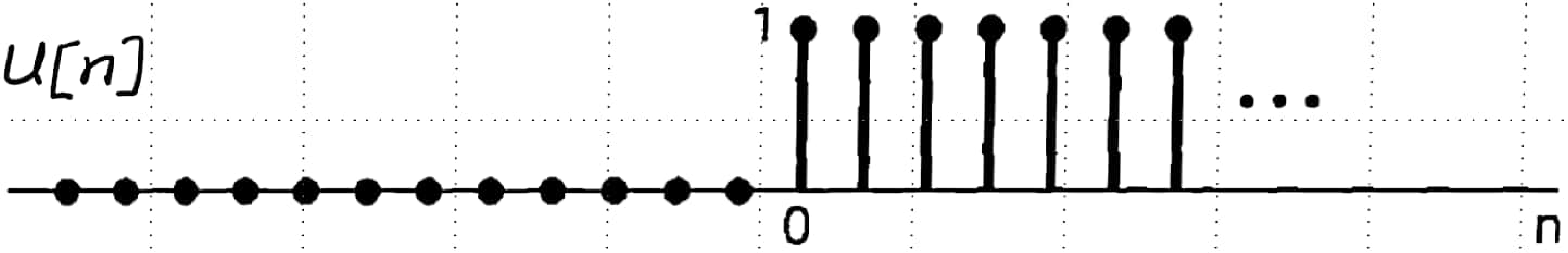
$$u[n] = \begin{cases} 0 & , \; n < 0 \\ 1 & , \; n \geqslant 0 \end{cases}$$



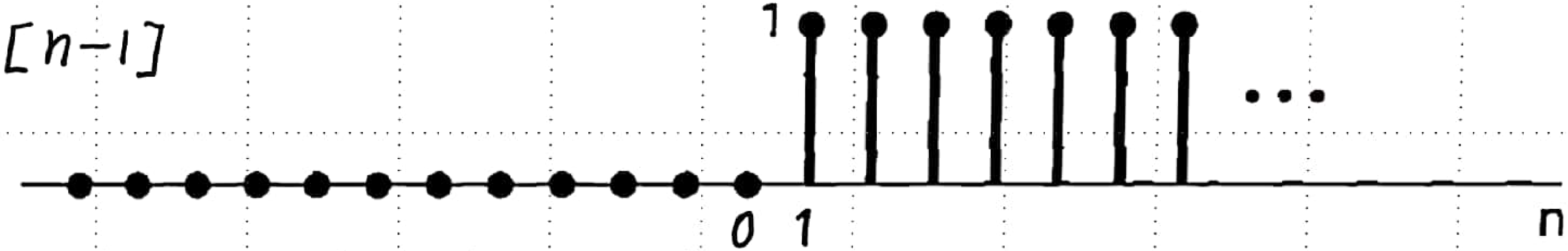
رابطهٔ سیگنال‌های ضربهٔ واحد و پلهٔ واحد

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] = \begin{cases} 0 - 0 = 0 & , \quad n < 0 \\ 1 - 0 = 1 & , \quad n = 0 \\ 1 - 1 = 0 & , \quad n > 0 \end{cases}$$

$u[n]$

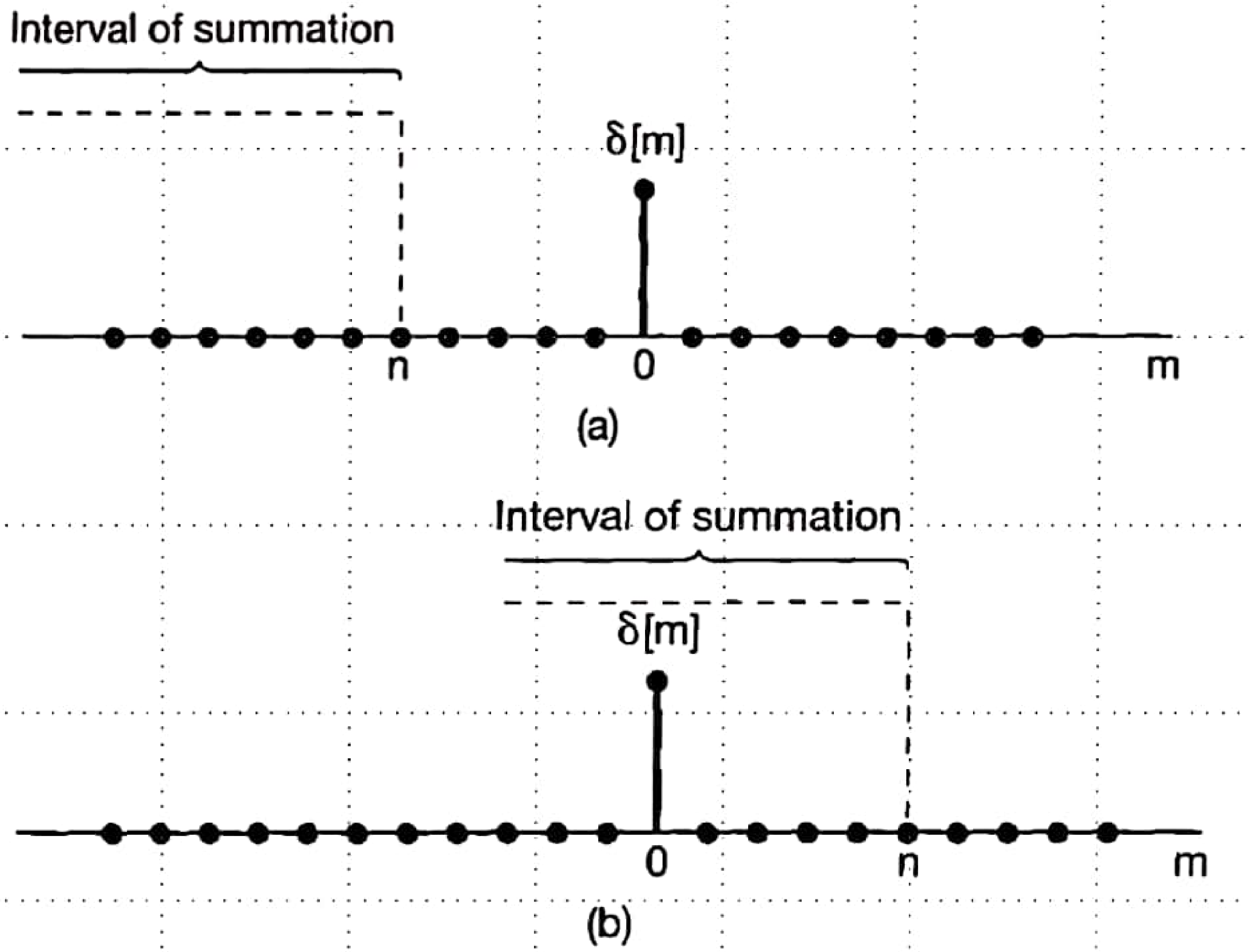


$u[n-1]$



first difference of the discrete-time step

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m] = \begin{cases} 0 + \cdots + 0 + \cdots = 0 & , \quad n < 0 \\ 0 + \cdots + 1 + 0 + \cdots = 1 & , \quad n \geq 0 \end{cases}$$



Running sum of (a) $n < 0$; (b) $n > 0$.

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m] \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} k = n - m \Rightarrow m = n - k$$

$$\begin{cases} m = n \Rightarrow k = 0 \\ m = -\infty \Rightarrow k = \infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \cdots$$

پله واحد همان مجموع ضربهٔ واحد و همهٔ شیفت یافته های ضربهٔ واحد به سمت راست به اندازه همه مقادیر صحیح مثبت است.

خاصیت نمونه برداری (sampling) یا غربالی (sifting) دنبالهٔ ضربهٔ واحد

حاصل ضرب یک دنبالهٔ دلخواه $x[n]$ در ضربهٔ واحد $\delta[n]$ = ؟

$$x[n]\delta[n] = x[n] \cdot \begin{cases} 0 & , n \neq 0 \\ 1 & , n = 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , n \neq 0 \\ x[0] & , n = 0 \end{cases}$$

$$= x[0]\delta[n]$$

تعمیم خاصیت نمونه برداری ضربه

$$x[n]\delta[n-n_0] = x[n] \cdot \begin{cases} 0 & , n \neq n_0 \\ 1 & , n = n_0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , n \neq n_0 \\ x[n_0] & , n = n_0 \end{cases}$$

$$= x[n_0]\delta[n-n_0]$$

سیگنال‌های ضربهٔ واحد و پلهٔ واحد

پلّه واحد به دلیل ناپیوستگی در $t=0$ ایده‌آل است.

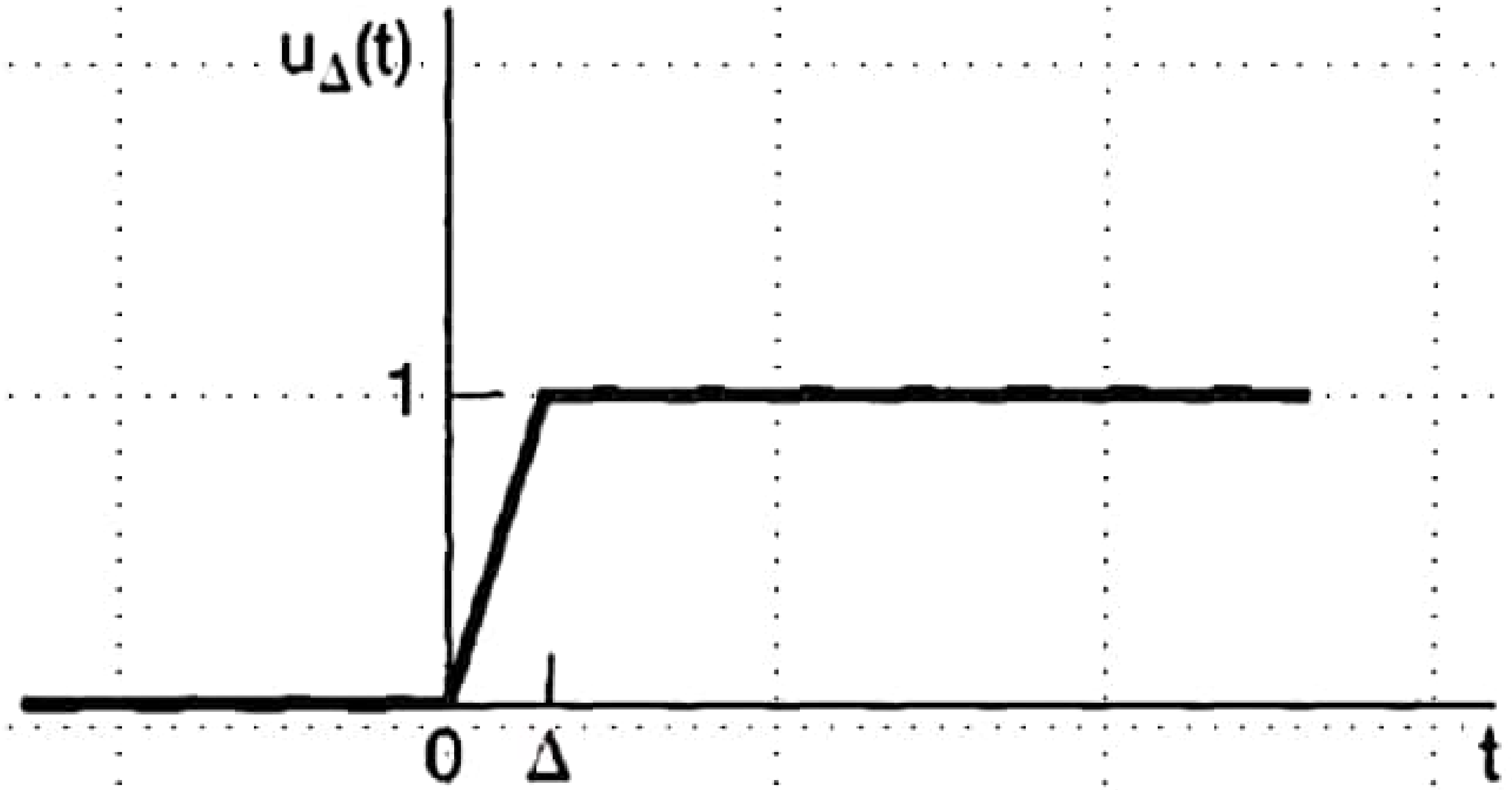
ب) حالت زمان‌پیوسته

1- سیگنال پلّه واحد ایده‌آل (Unit Step)

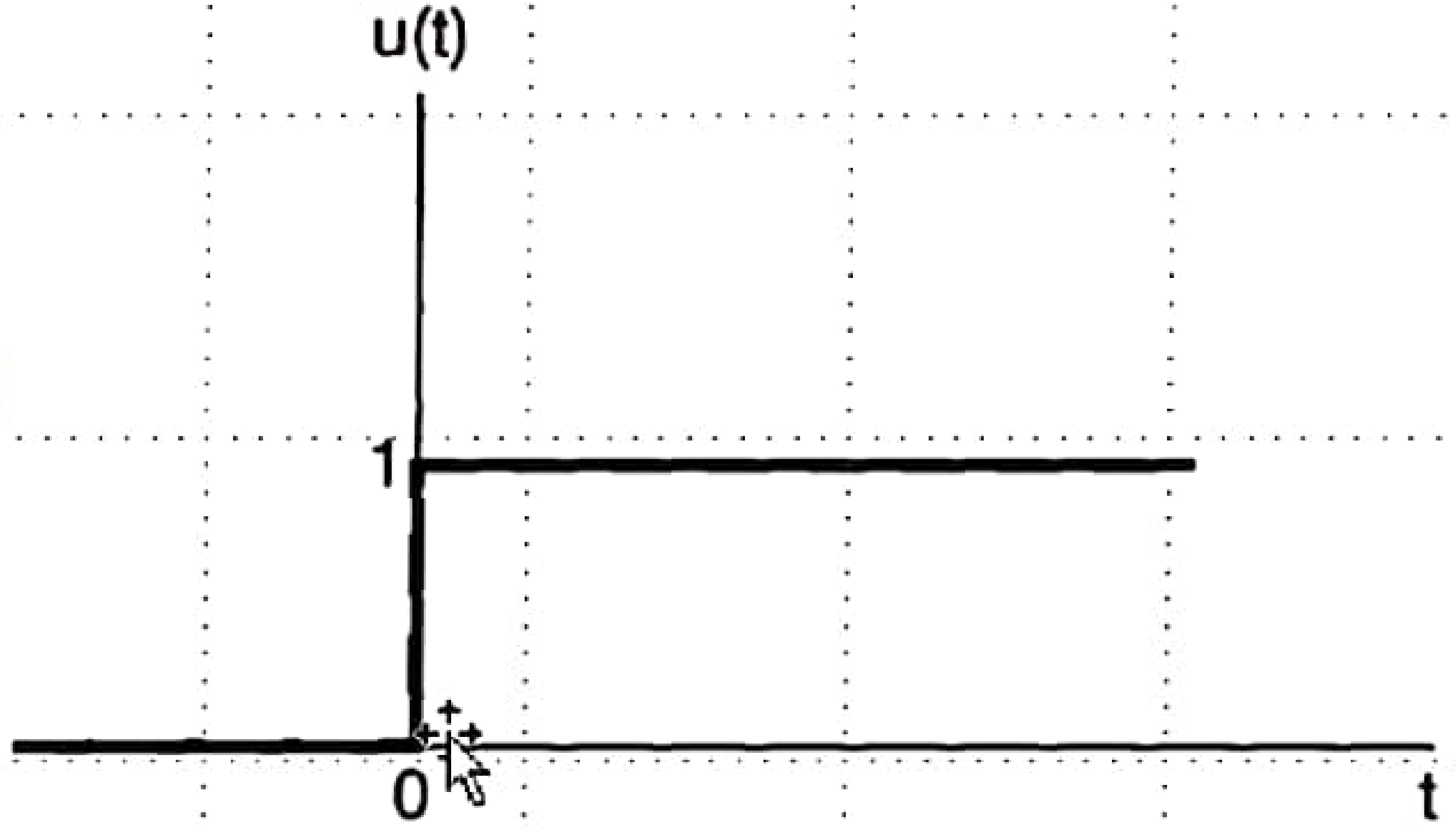
$$u(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t<0 \\ 1 & , \quad t>0 \end{cases}$$

پلّه شیب‌دار

$$u_\Delta(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \leqslant 0 \\ \frac{t}{\Delta} & , \quad 0 \leqslant t \leqslant \Delta \\ 1 & , \quad t \geqslant \Delta \end{cases}$$



$$\text{حدّ}_{\Delta \to 0}\ u_\Delta(t) = u(t)$$



۲ـ سیگنال ضربهٔ واحد ایده‌آل (Unit Impulse)

این سیگنال که آن را با $\delta(t)$ نشان می‌دهیم، در حقیقت یک تابع نیست بلکه یک توزیع است.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \neq 0 \\ 1 & , \quad t = 0 \end{cases}$$

منظور از $\delta(0) = 1$ آن است که سطح زیر تابع ضربهٔ واحد همواره $\underline{1}$ است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\, dt = 1$$

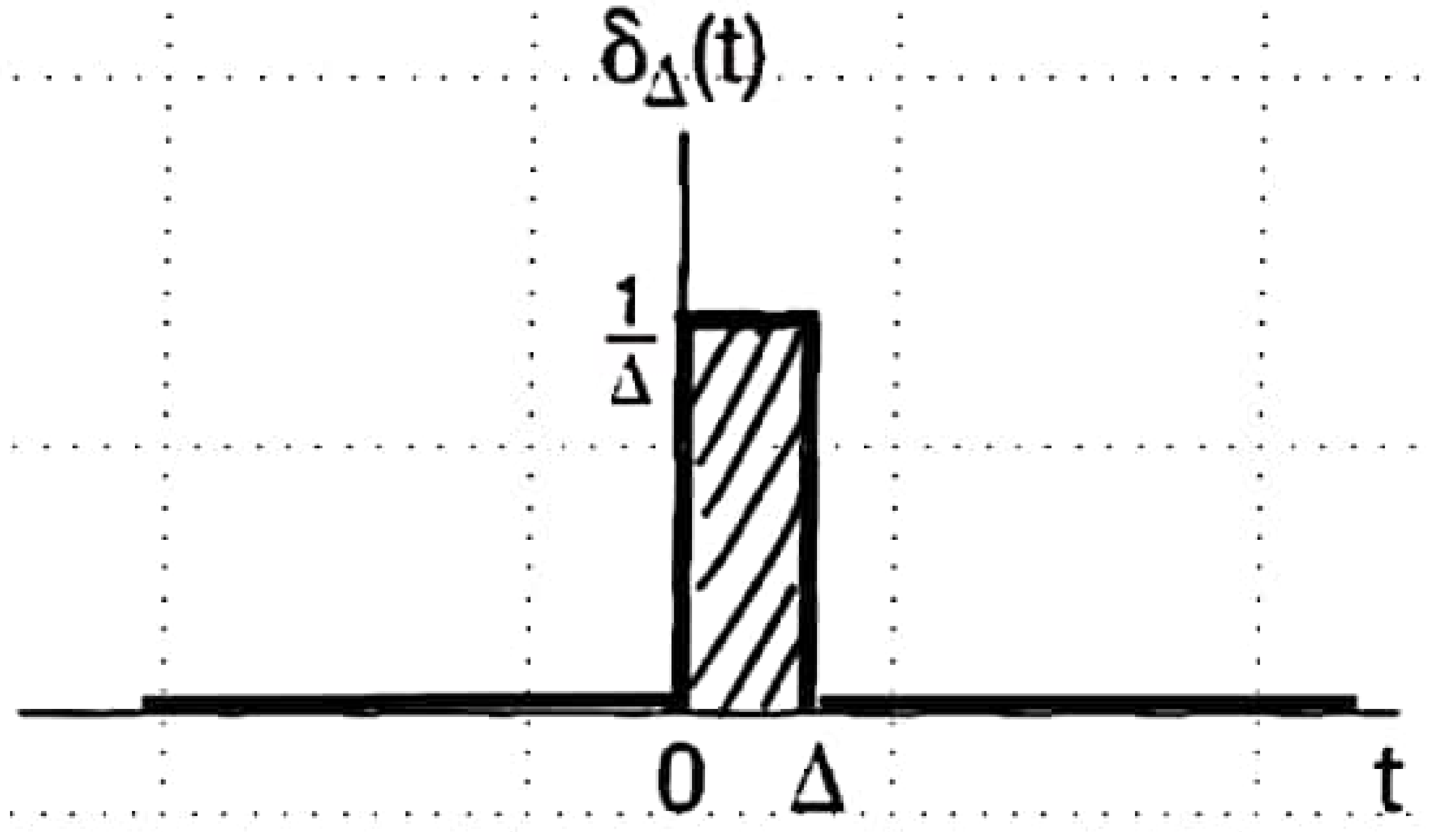
(همانند تابع توزیع احتمال یک متغیر تصادفی که فقط مقدار $\underline{0}$ را با احتمال $\underline{1}$ به خود می‌گیرد)

نکته: ضربهٔ واحد ایده‌آل به دلیل پهنای زمانی صفر در عمل قابل تحقق نیست.

تحقق تابع ضربه ایده‌آل در حالت حدی

با مشتق‌گیری از تابع $u_\Delta(t)$ داریم:

$$\delta_\Delta(t)=\frac{d}{dt}u_\Delta(t)=\begin{cases}\frac{1}{\Delta} & , 0<t<\Delta\\ 0 & , oth.\end{cases}$$

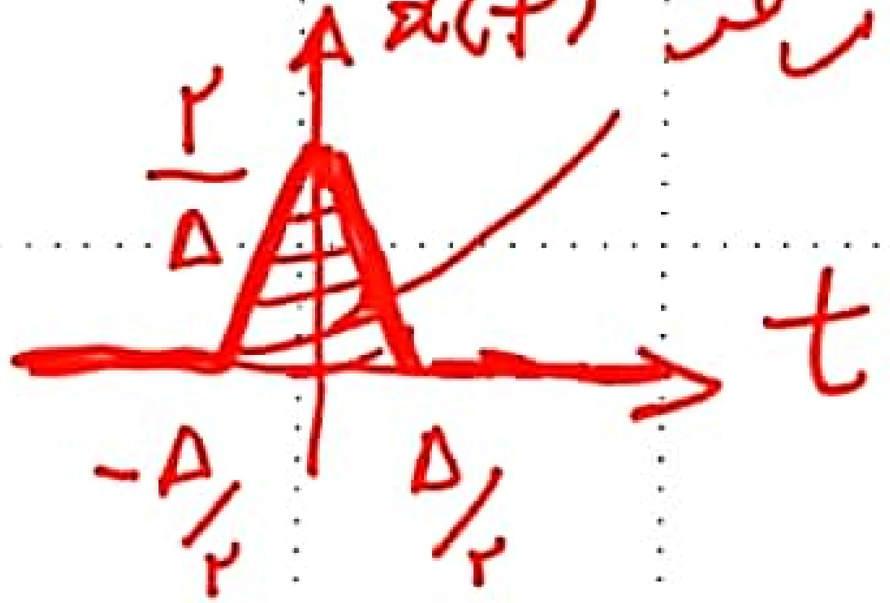


پالس واحد ایده‌آل

نکته: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\Delta(t)\,dt=1 \quad , \forall\Delta$

$$\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t)=\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ 1 & t=1\end{cases}$$

مساحت زیر شکل تابع



$$\lim_{\Delta\to 0}x(t)=\delta(t)$$

رابطهٔ بین ضربهٔ واحد ایده‌آل و پلهٔ واحد ایده‌آل

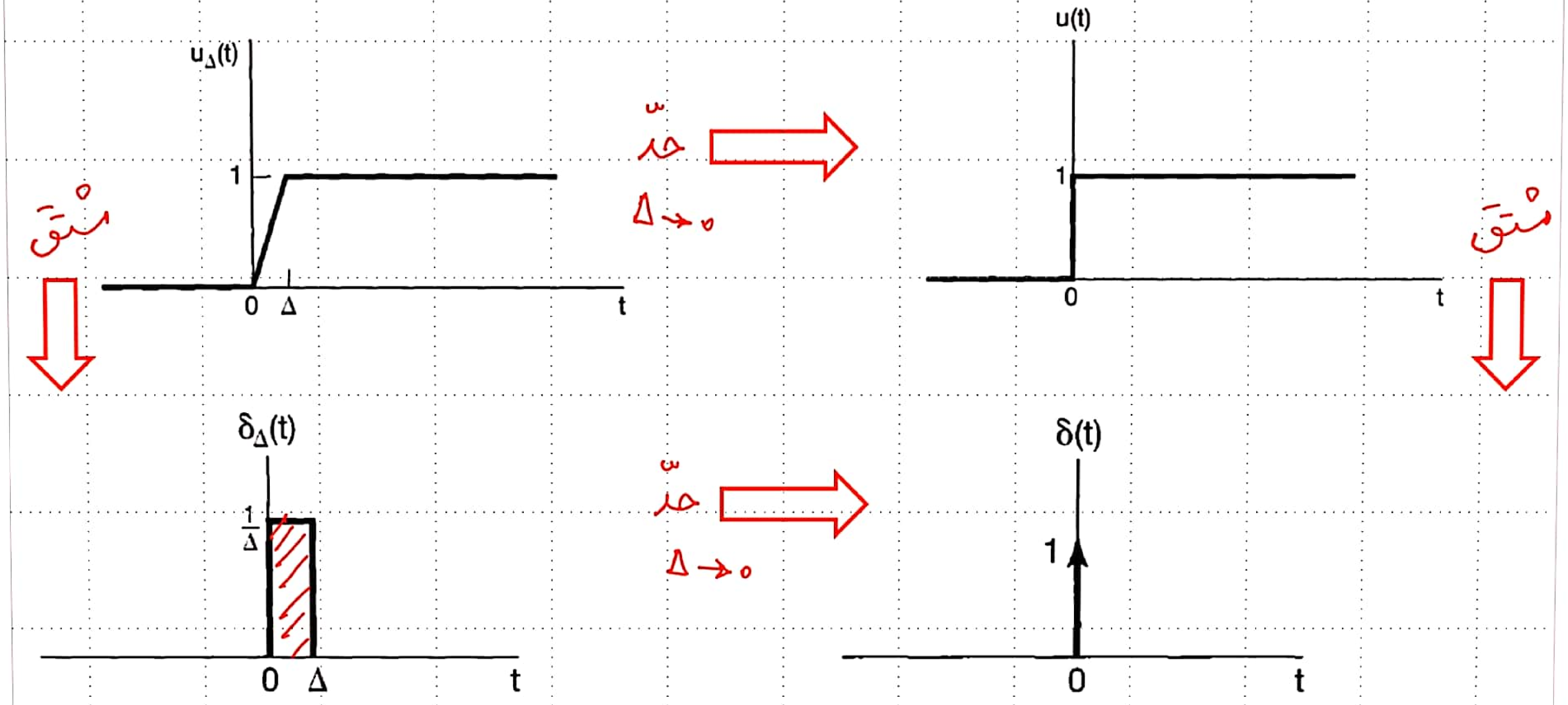
(پیوسته)

(تعریف شده)

$$\begin{array}{ccc} u_\Delta(t) & \xrightarrow[\Delta \to 0]{\text{حدّ}} & u(t) \\ \Big\downarrow \frac{d}{dt} & & \Big\downarrow \frac{d}{dt} \\ \delta_\Delta(t) & \xrightarrow[\Delta \to 0]{\text{حدّ}} & \delta(t) \end{array}$$

برای $u(t)$ و $\delta(t)$ که هردو توابع ایده‌آل و در حالت حدّی $\Delta \to 0$ هستند داریم:

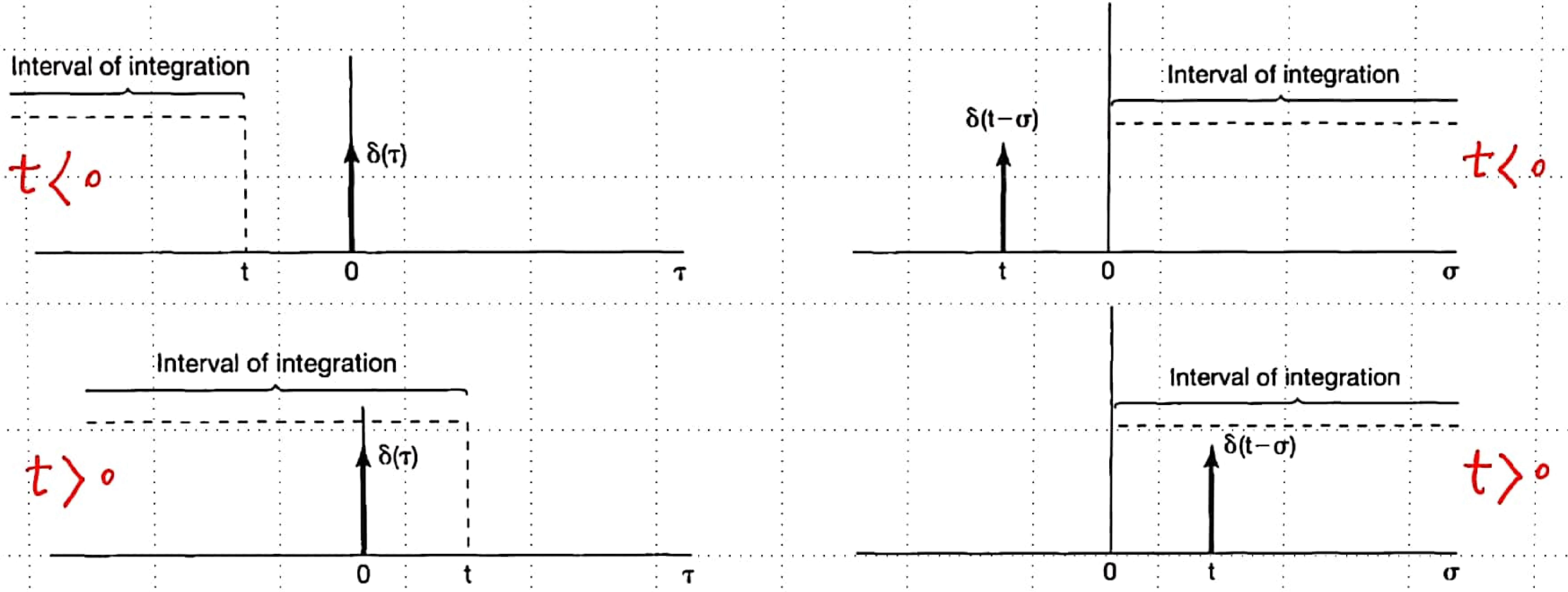
$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t) \quad \Longleftrightarrow \quad u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$$



$u_\Delta(t)$
1
0
Δ
t
حدّ
$\Delta \to 0$
$u(t)$
1
0
t
مشتق
مشتق
$\delta_\Delta(t)$
$\frac{1}{\Delta}$
0
Δ
t
حدّ
$\Delta \to 0$
$\delta(t)$
1
0
t

توجیه ترسیمی رابطهٔ انتگرالی بین پلهٔ واحد ایده‌آل و ضربهٔ واحد ایده‌آل

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,d\tau \xrightarrow[\sigma=t-\tau]{\text{تغییر متغیر}} u(t)=\int_{0}^{\infty}\delta(t-\sigma)\,d\sigma$$



خاصیت نمونه‌برداری (sampling) یا غربالی (sifting) سیگنال ضربهٔ واحد ایده‌آل

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t) \xrightarrow{\text{تعمیم}} x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

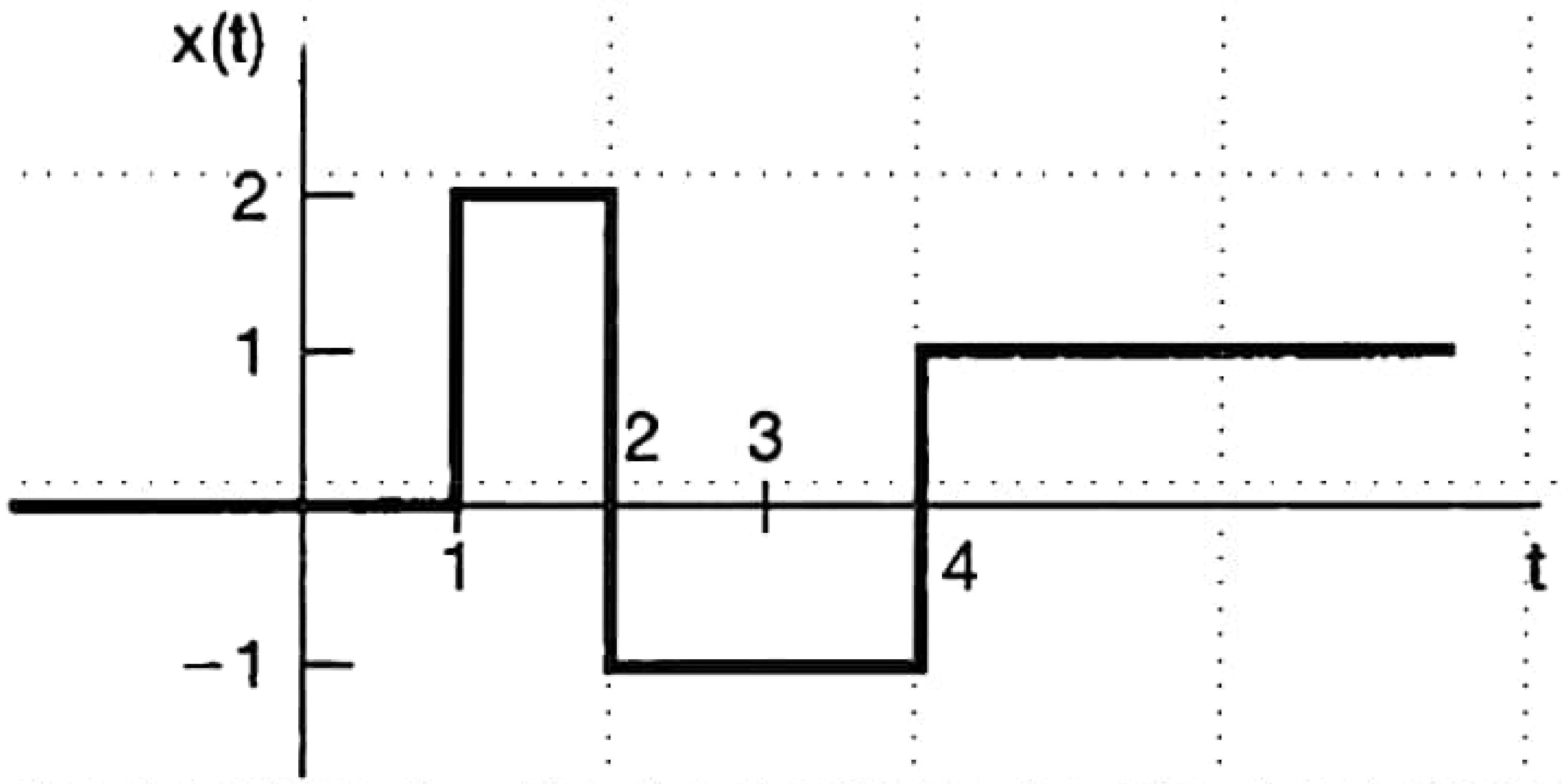
اثبات: با توجه به تعریف حدی $\delta(t)$ از روی $\delta_\Delta(t)$ تعریف می‌کنیم:

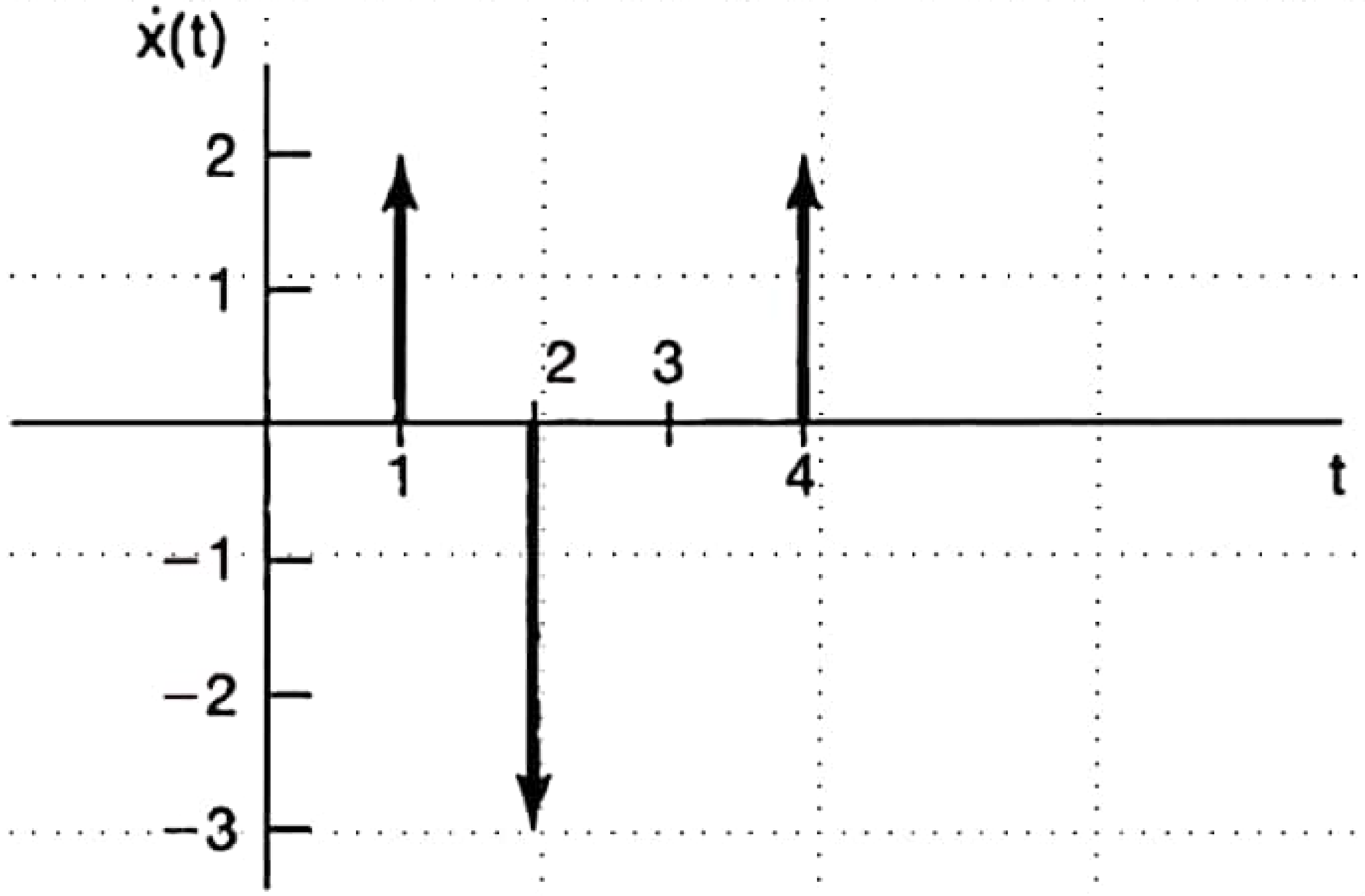
$$x_1(t) = x(t)\delta_\Delta(t) \Rightarrow x(t)\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} x_1(t)$$

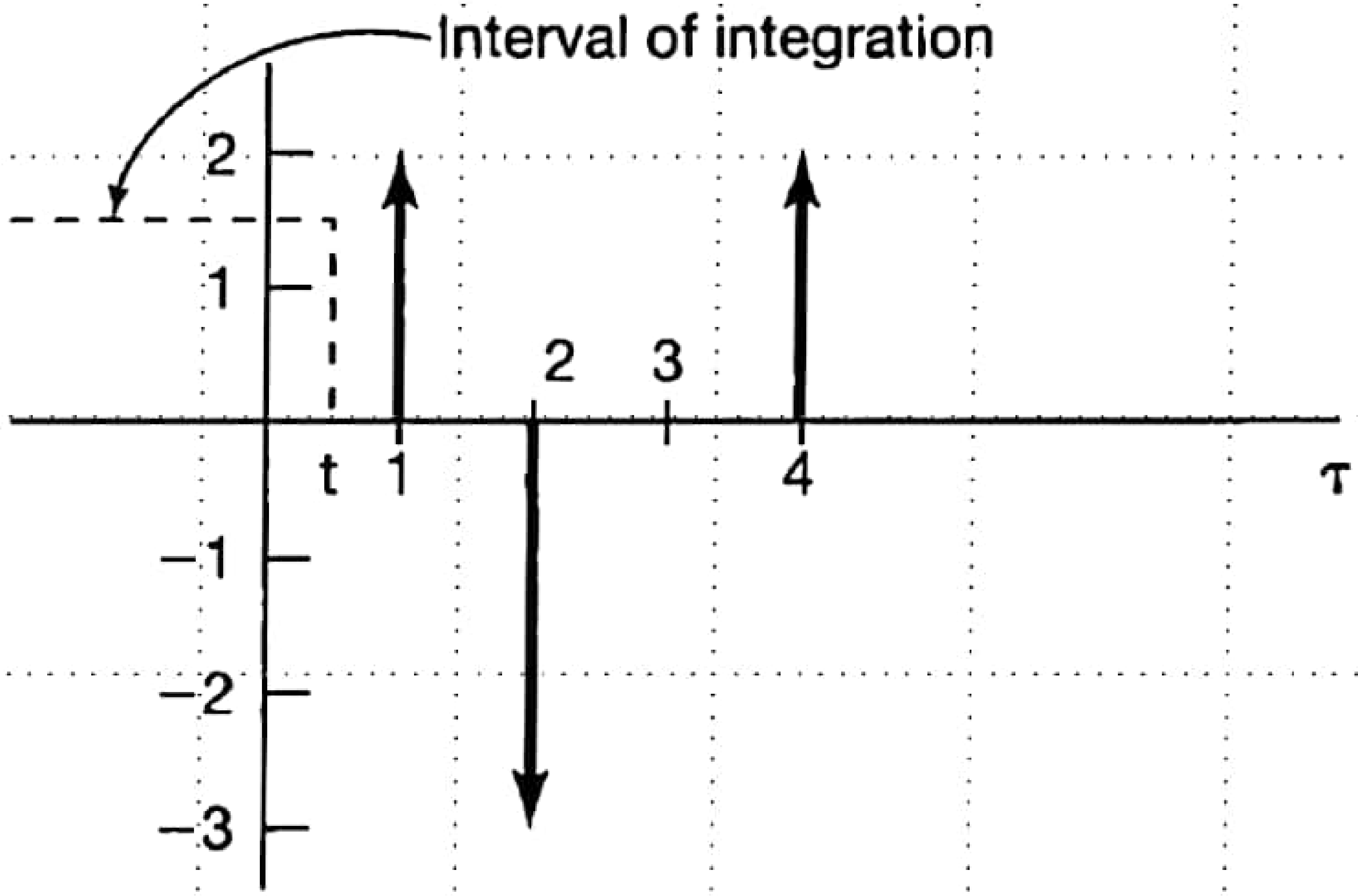
وقتی $\Delta \to 0$ ، در فاصلهٔ $0 < t < \Delta$ ، $x(t) \simeq x(0)$ در نتیجه:

$$\lim_{\Delta \to 0} x_1(t) \simeq \lim_{\Delta \to 0} x(0)\delta_\Delta(t) = x(0) \cdot \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t) = x(0)\delta(t)$$

مثال) سیگنال $x(t) = 2u(t-1) - 3u(t-2) + 2u(t-4)$ و مشتق آن را رسم کنید.





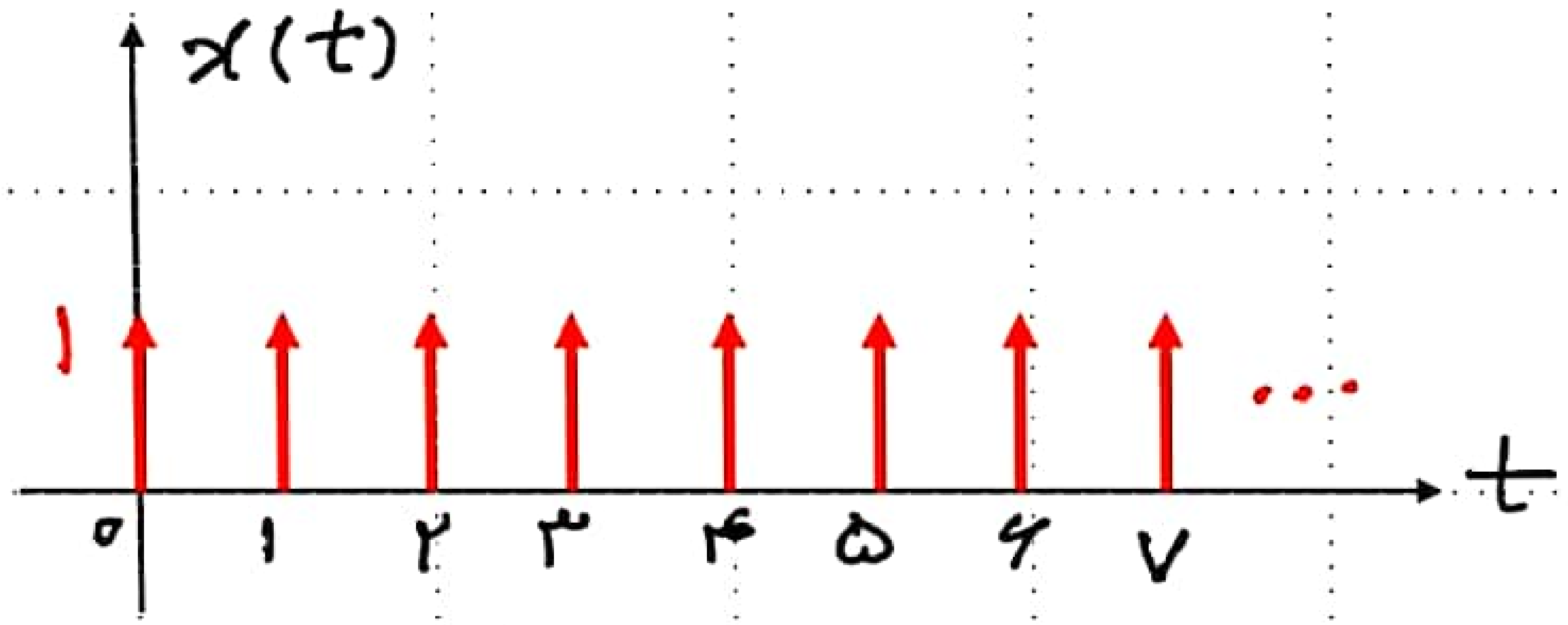


$$\dot{x}(t) = 2\delta(t-1) - 3\delta(t-2) + 2\delta(t-4)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} \dot{x}(\tau)\, d\tau$$

مثال) سیگنال $x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-k)$ و انتگرال آن را رسم کنید.

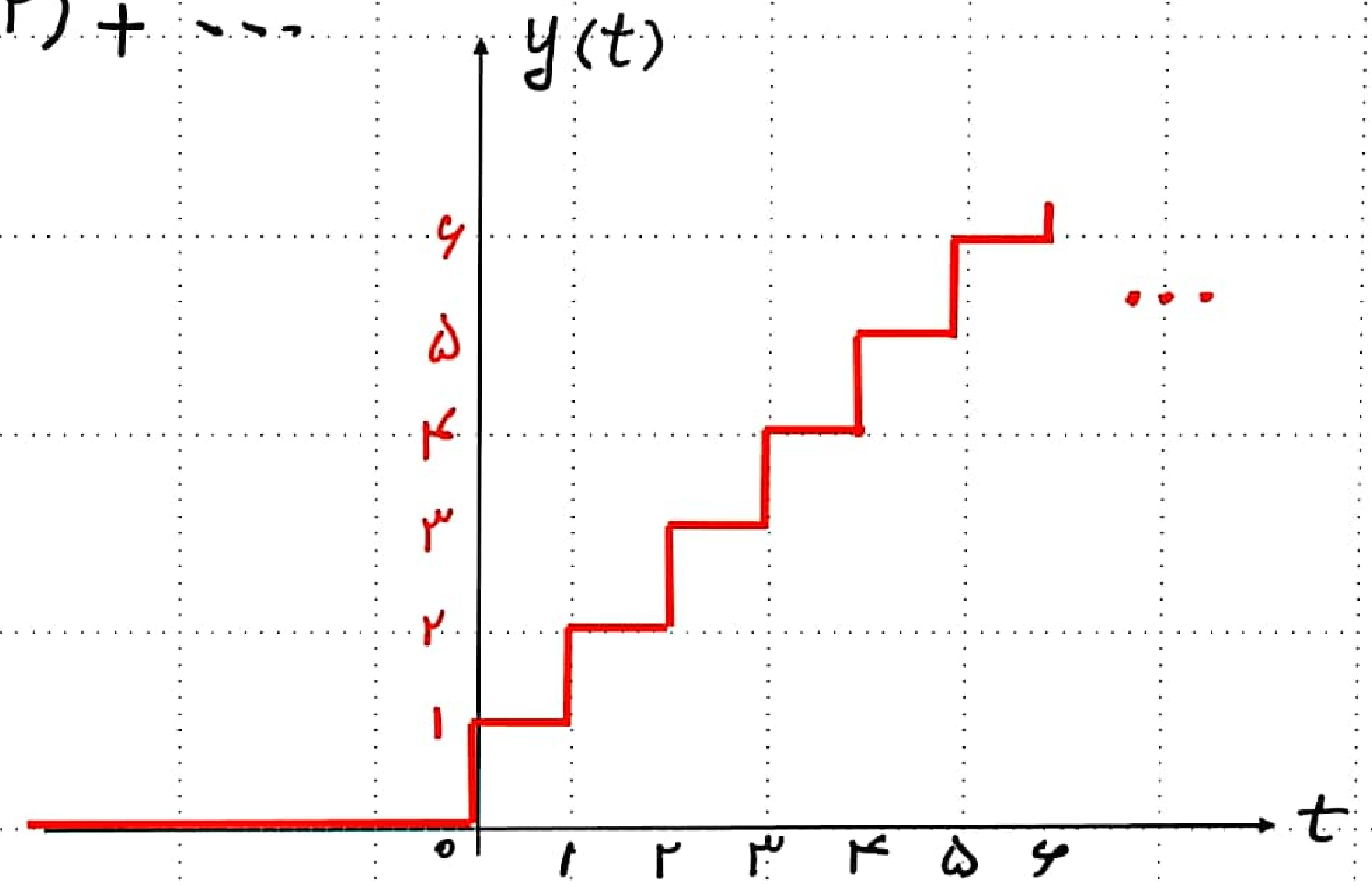
$$x(t)=\delta(t)+\delta(t-1)+\delta(t-2)+\cdots$$



$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\,d\tau$$

$$=u(t)+u(t-1)+u(t-2)+\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}u(t-k)$$



بسم الله الرّحمن الرّحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده برق و کامپیوتر

تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مدرس: مسعود عمومی

جلسه ششم _ بخش‌های 1.5 و 1.6 کتاب

با سلام خدمت دانشجویان محترم

سیستم‌های زمان‌پیوسته و زمان‌گسسته

سیستم: مجموعه‌ای هماهنگ، تشکیل‌شده از اجزاء مختلف که در پاسخ به یک یا چند سیگنال ورودی، یک یا چند سیگنال خروجی تولید می‌کند.

سیستم‌ها را می‌توان با توجه به تعداد سیگنال‌های ورودی و خروجی آنها به چهار دسته تقسیم‌بندی نمود:

۱- سیستم‌های تک‌ورودی – تک‌خروجی

۲- سیستم‌های تک‌ورودی – چندخروجی

۳- سیستم‌های چندورودی – تک‌خروجی

۴- سیستم‌های چندورودی – چندخروجی

$$x(t)\ or\ x[n] \longrightarrow \boxed{\text{سیستم تک‌ورودی – تک‌خروجی}} \longrightarrow y(t)\ or\ y[n]$$

CT: $y(t) = T\{x(t)\}$

DT: $y[n] = T\{x[n]\}$

مثال‌های ساده‌ای از سیستم‌های زمان‌پیوسته

$x(t) \longrightarrow$ سیستم تأخیردهنده $\longrightarrow \; y(t) = T\{x(t)\} = x(t - t_0)$

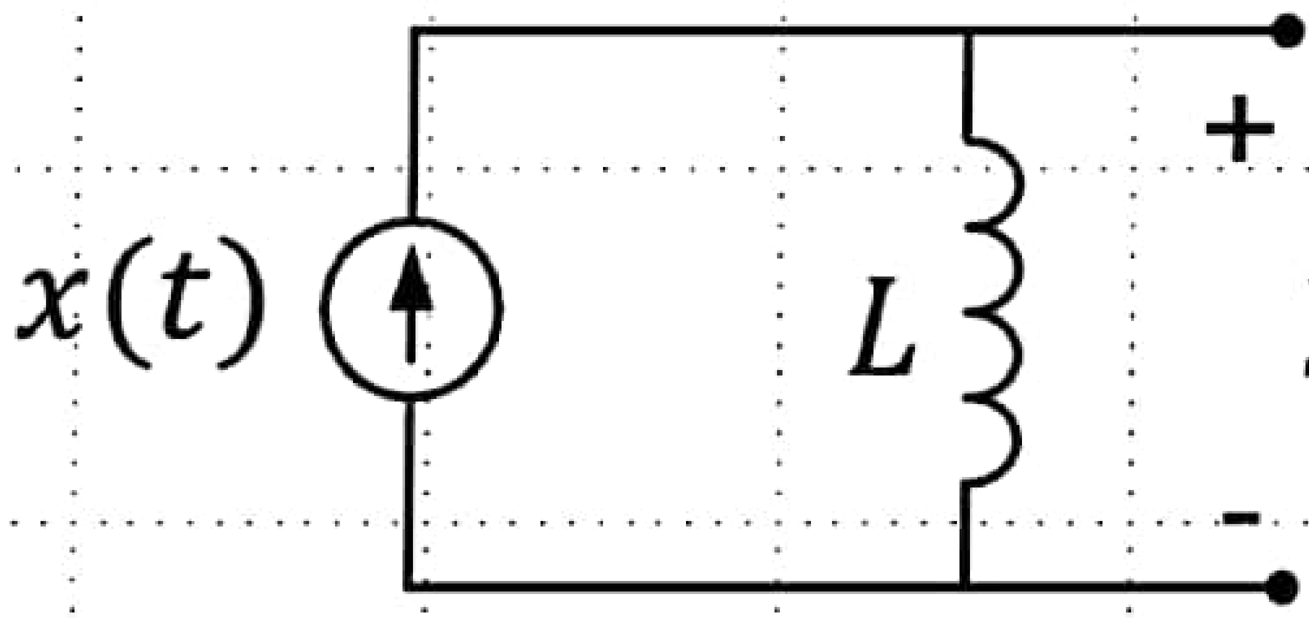
$x(t) \longrightarrow$ سیستم وارون‌کنندهٔ زمان $\longrightarrow \; y(t) = T\{x(t)\} = x(-t)$

$x(t) \longrightarrow$ سیستم تغییر مقیاس دهنده $\longrightarrow \; y(t) = T\{x(t)\} = x(at)$

$x(t) \longrightarrow$ سیستم تقویت‌کننده یا تضعیف‌کننده $\longrightarrow \; y(t) = T\{x(t)\} = Kx(t)$

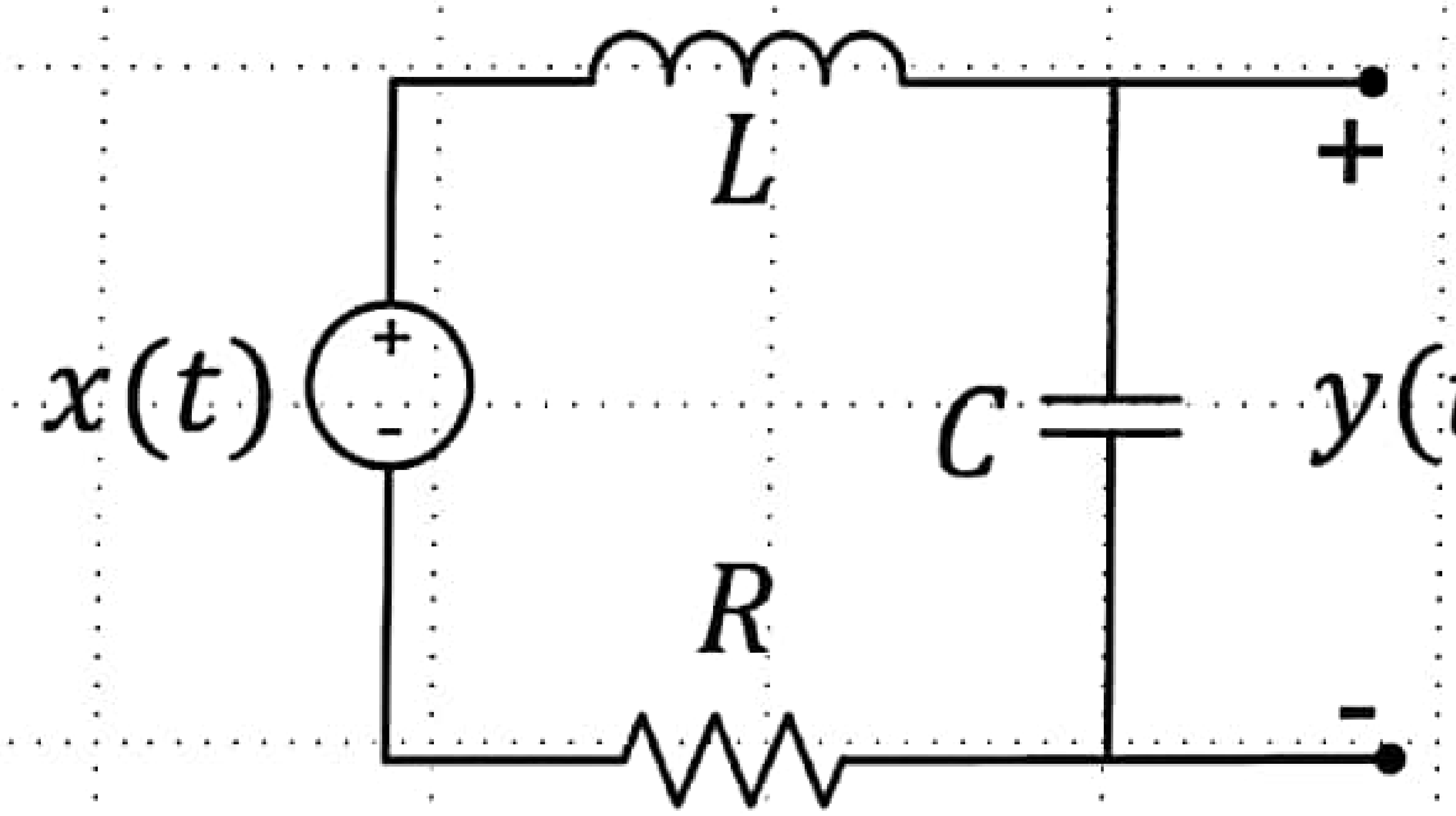
$x(t) \longrightarrow$ سیستم جذرگیر $\longrightarrow \; y(t) = T\{x(t)\} = \sqrt{x(t)}$

مثال‌های مداری از سیستم‌های زمان‌پیوسته



$$y(t) = L\frac{d}{dt}x(t)$$

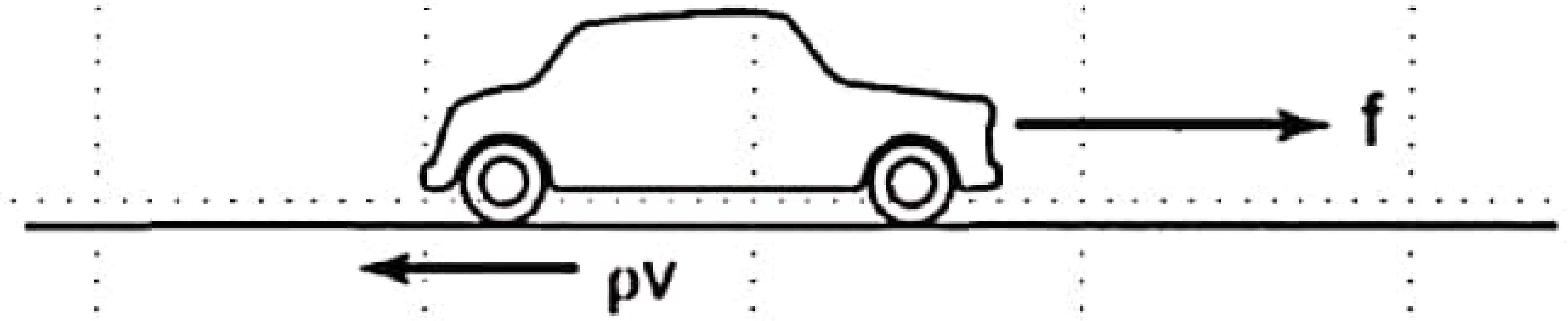
$$y(t) = T\{x(t)\}$$



توصیف رابطهٔ ورودی / خروجی:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{R}{L}\frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{LC}y(t) = \frac{1}{LC}x(t)$$

$$y(t) = T\{x(t)\}$$



مثال مکانیکی از سیستم‌های زمان‌پیوسته

Figure 1.2 An automobile responding to an applied force f from the engine and to a retarding frictional force ρv proportional to the automobile's velocity v.

$$v(t) = T\{f(t)\}$$

Consider Figure 1.2, in which we regard the force $f(t)$ as the input and the velocity $v(t)$ as the output. If we let m denote the mass of the automobile and $m\rho v$ the resistance due to friction, then equating acceleration—i.e., the time derivative of velocity—with net force divided by mass, we obtain

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{m}\left[f(t) - \rho v(t)\right], \tag{1.83}$$

i.e.,

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{\rho}{m}v(t) = \frac{1}{m}f(t). \tag{1.84}$$

مثال‌های ساده‌ای از سیستم‌های زمان‌گسسته

$x[n] \longrightarrow$ سیستم توان $\longrightarrow$

$$y[n] = T\{x[n]\} = (x[n])^k$$

$x[n] \longrightarrow$ سیستم نمایی $\longrightarrow$

$$y[n] = T\{x[n]\} = exp\{x[n]\}$$

$x[n] \longrightarrow$ سیستم لگاریتم‌گیر $\longrightarrow$

$$y[n] = T\{x[n]\} = log\{x[n]\}$$

$x[n] \longrightarrow$ سیستم تفاضل مرتبهٔ اول $\longrightarrow$

$$y[n] = T\{x[n]\} = x[n] - x[n-1]$$

$x[n] \longrightarrow$ سیستم جمع‌کننده یا انباره $\longrightarrow$

$$y[n] = T\{x[n]\} = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$$

مثال ساده اقتصادی از یک سیستم زمان‌گسسته

As a simple example of a discrete-time system, consider a simple model for the balance in a bank account from month to month. Specifically, let $y[n]$ denote the balance at the end of the nth month, and suppose that $y[n]$ evolves from month to month according to the equation

$$y[n] = 1.01y[n-1] + x[n], \tag{1.86}$$

or equivalently,

$$y[n] - 1.01y[n-1] = x[n], \tag{1.87}$$

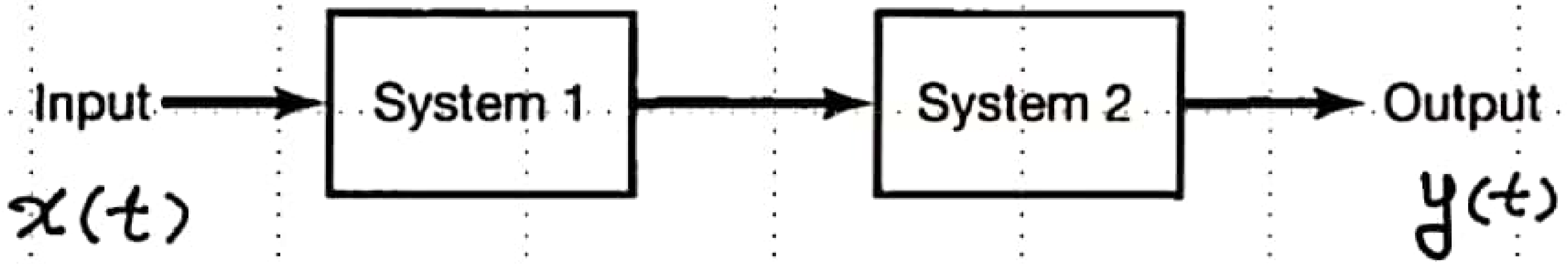
where $x[n]$ represents the net deposit (i.e., deposits minus withdrawals) during the nth month and the term $1.01y[n-1]$ models the fact that we accrue 1% interest each month.

$x[n]$ → سیستم تراز ماهیانه بانک → $y[n] = T\{x[n]\}$

اتصال یا ترکیب سیستم‌ها

سیستم‌های واقعی در عمل از ترکیب یا اتصال زیرسیستم‌های متعددی ساخته می‌شوند.

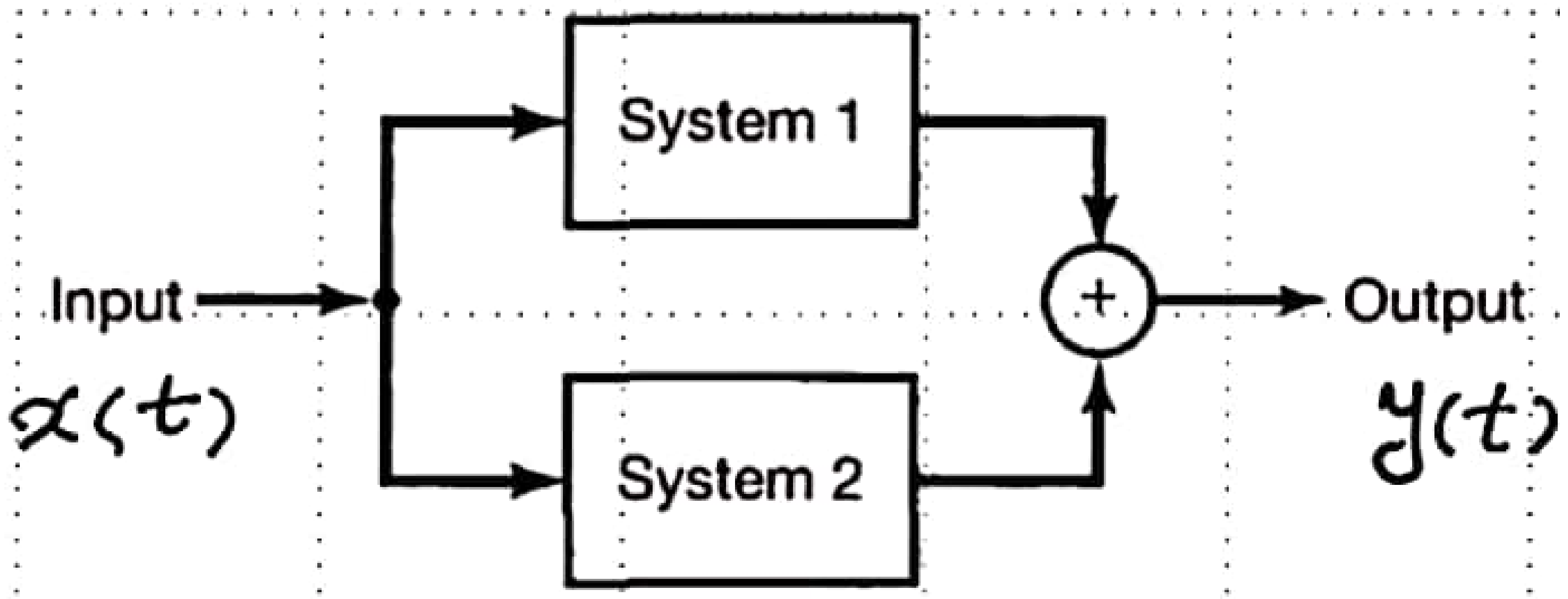
۱) اتصال سری Series (Cascade)



(a)

$$y(t) = T_2\{T_1\{x(t)\}\}$$

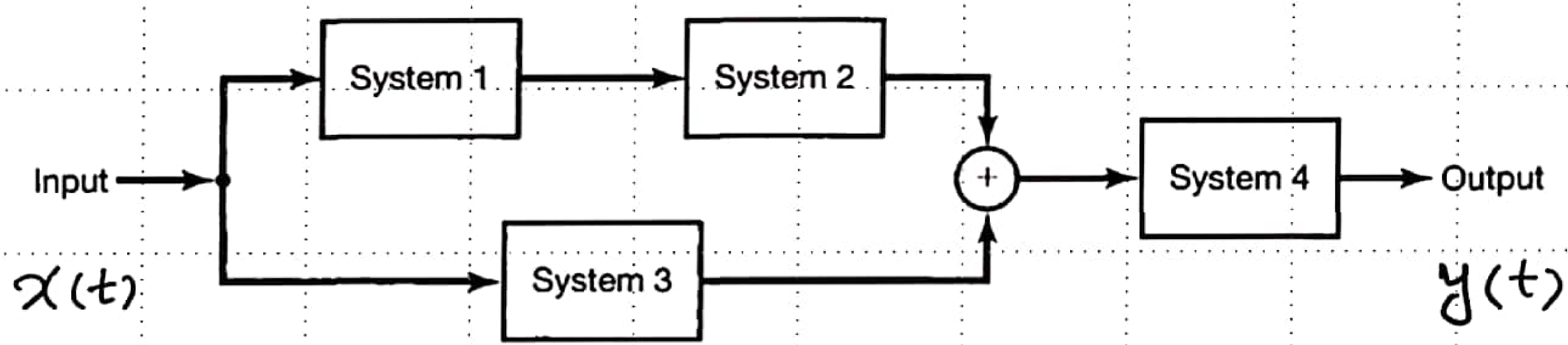
۲) اتصال موازی Parallel



(b)

$$y(t) = T_1\{x(t)\} + T_2\{x(t)\}$$

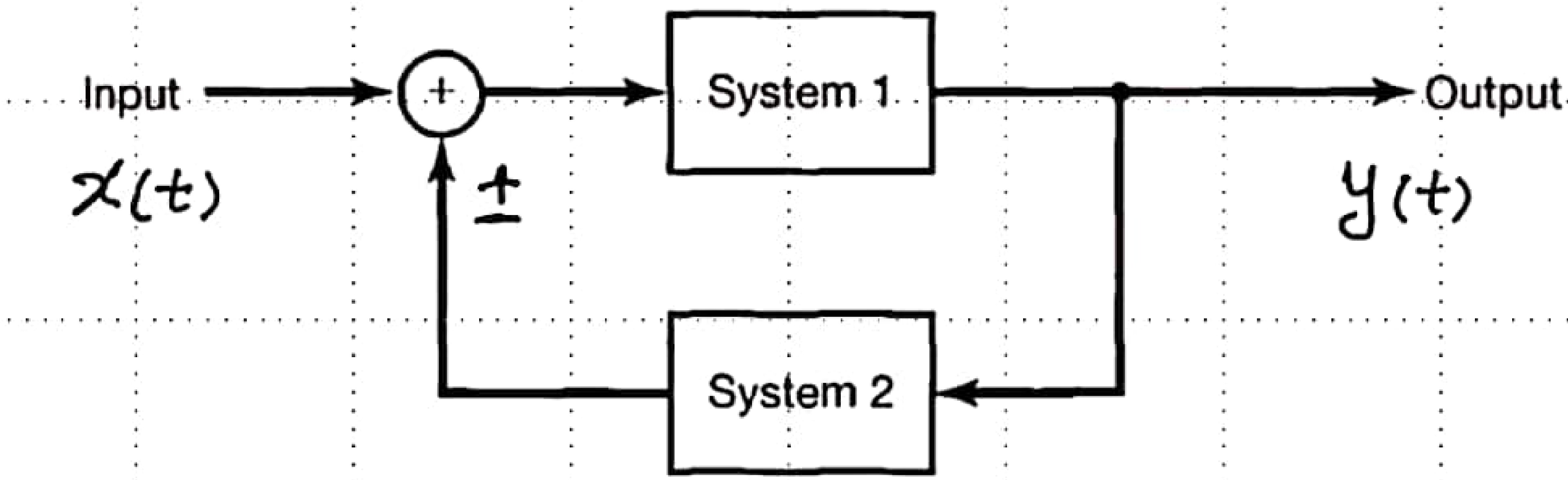
۳) ترکیب اتصال سری و موازی Series - Parallel



(c)

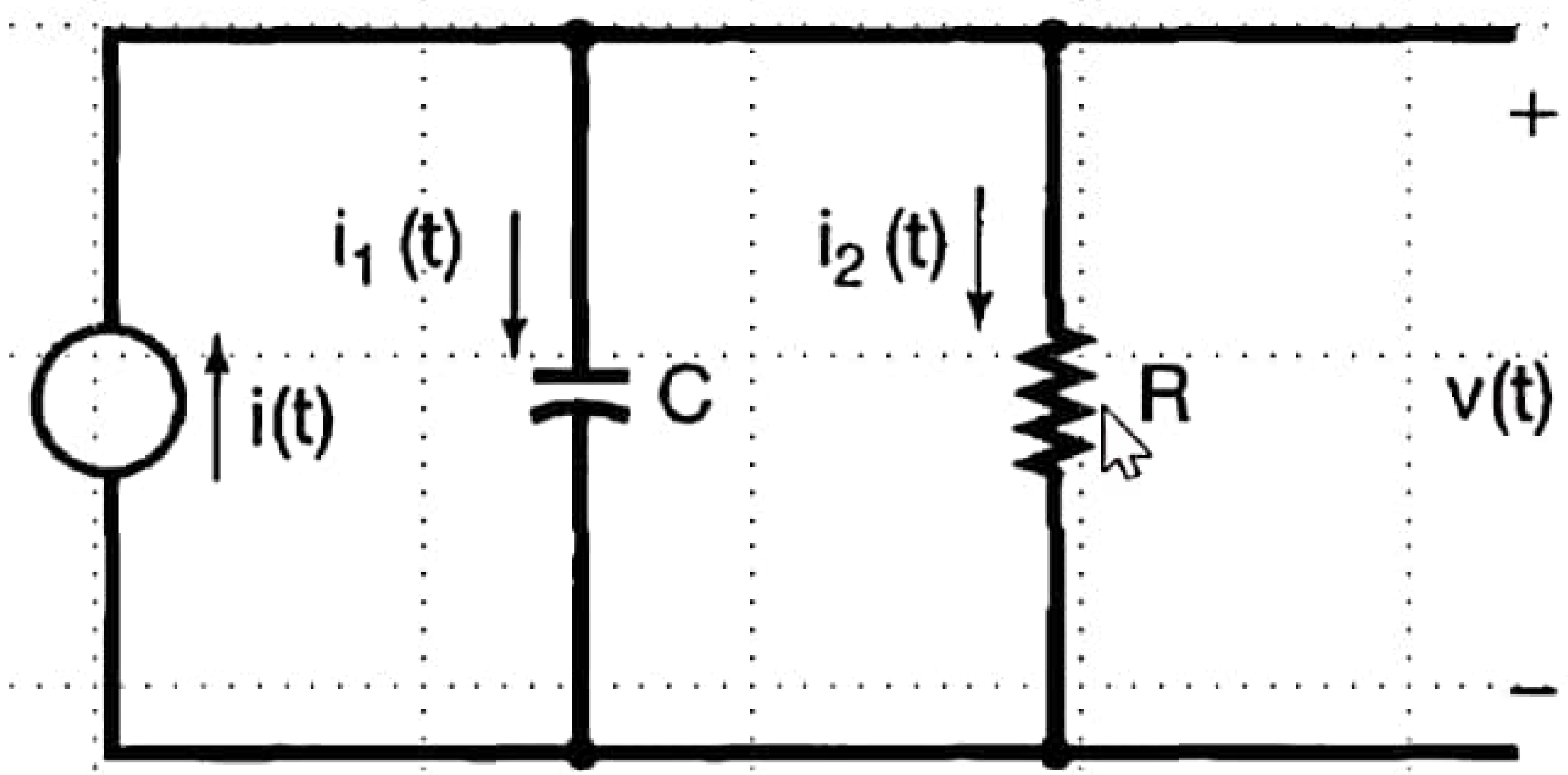
$$y(t) = T_4\left\{ T_2\left\{T_1\left\{x(t)\right\}\right\} + T_3\left\{x(t)\right\} \right\}$$

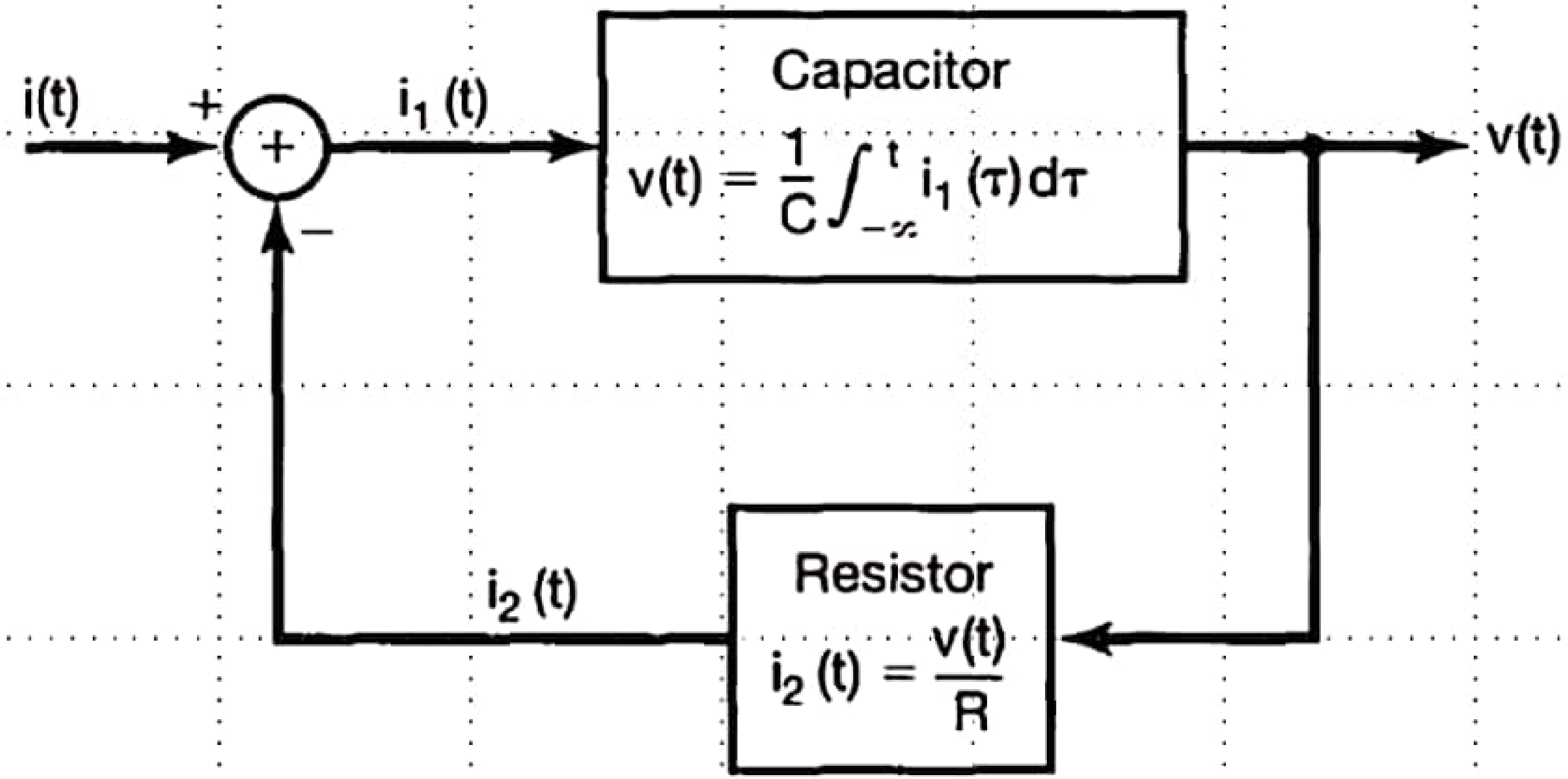
۴) اتصال فیدبک Feedback



$$y(t) = T_1\{x(t) \pm T_2\{y(t)\}\}$$
$$= T\{x(t)\}$$

مثال)





ویژگی‌های پایه در سیستم‌ها

۱) حافظه‌دار یا بی‌حافظه بودن (With or Without Memory)

۲) وارون‌پذیری (Invertibility)

۳) علّیّت یا علّی بودن (Causality)

۴) پایداری (Stability)

۵) تغییرناپذیری با زمان یا استقلال زمانی (Time_Invariance or Independence)

۶) خطّی بودن (Linearity)

۱) سیستم‌های حافظه‌دار یا بی‌حافظه

اگر خروجی سیستم در هر لحظه از زمان فقط و فقط وابسته به مقدار ورودی سیستم در همان لحظه باشد، سیستم را بدون حافظه (Memoryless) و در غیر این صورت حافظه دار (With Memory) می‌نامیم.

چند مثال از سیستم‌های بدون حافظه

(مثلاً مقاومت و مدارهای تقسیم ولتاژ و تقسیم جریان مقاومتی) $y(t) = K x(t)$

$y(t) = a x^2(t) + b x(t) + C$

$y[n] = \sqrt{x[n]}$

$y(t) = exp\{x(t)\}$

$y[n] = a x[n] + b^{x[n]}$

چند مثال از سیستمهای حافظه دار

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$ (انتگرال گیر)

$$y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$ (مشتق گیر)

(مثلاً سلف و خازن و همهٔ مدارهای RLC / RL / RC)

- هر سیستمی که رابطهٔ بین ورودی و خروجی آن توسط معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل بیان شود.

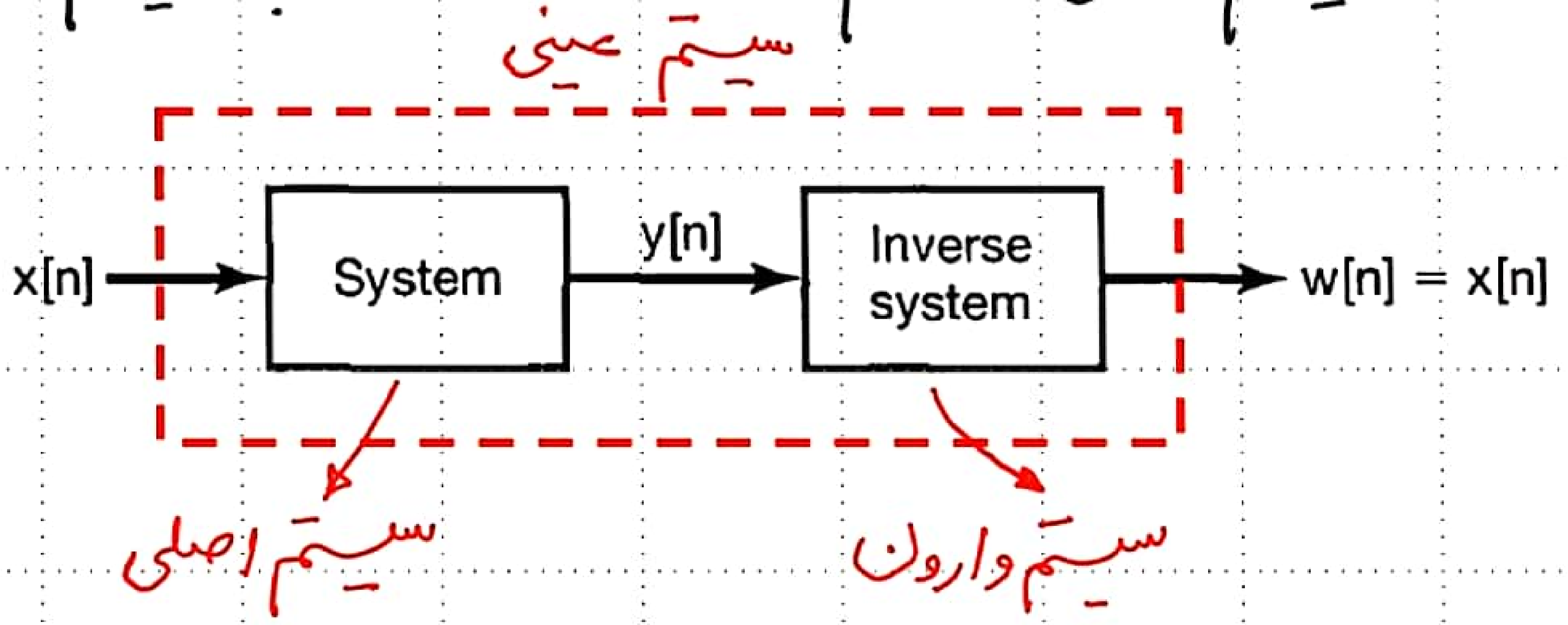
$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$ و $$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$$

$$y[n] = K\, x[n+1]$$

۲) سیستم‌های وارون‌پذیر و وارون آنها / سیستم‌های وارون‌ناپذیر

تعریف سیستم همانی یا عینی (Identity) : $y(t) = T\{x(t)\} = x(t)$

یک سیستم را وارون پذیر می‌نامیم هرگاه بتوان متناظر با آن سیستمی به نام سیستم وارون یافت به طوری که ترکیب سری سیستم اصلی و سیستم وارون آن معادل با سیستم همانی باشد.



شرط لازم و کافی برای وارون پذیری یک سیستم، یک به یک بودن آن است یعنی:

ورودی های متفاوت به سیستم، خروجی های متفاوت تولید می کنند و به عبارت دیگر با مشاهدهٔ خروجی سیستم می توان ورودی آن را بدون ابهام و به صورت یکتا تعیین نمود.

$$y(t) = T\{x(t)\}$$

$$\begin{cases} x_2(t) \neq x_1(t) \Longrightarrow y_2(t) \neq y_1(t) \\ y_2(t) = y_1(t) \Longrightarrow x_2(t) = x_1(t) \end{cases}$$

یا

مثال)

$y(t) = x^2(t)$ ✗ وارون ناپذیر

$y(t) = x^3(t)$ ✓ وارون‌پذیر $\longrightarrow$ $w(t) = \sqrt[3]{y(t)} = x(t)$ سیستم وارون

$y[n] = x[n-n_0]$ ✓ 〃 $\longrightarrow$ $w[n] = y[n+n_0] = x[n]$ 〃

$y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$ ✓ 〃 $\longrightarrow$ $w(t) = \int_{-\infty}^{t} y(\lambda)\, d\lambda = x(t)$ 〃

$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ ✓ 〃 $\longrightarrow$ $w[n] = y[n] - y[n-1]$ 〃

$$= \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] - \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]$$

$$= x[n]$$

$$\begin{cases} y(t) = A\,x(t/\alpha) \quad ✓ \quad 〃 \\ \downarrow \\ w(t) = \frac{1}{A} y(\alpha t) = x(t) \end{cases}$$

سیستم وارون

۳) سیستم‌های علّی یا غیرعلّی

یک سیستم را علّی (Causal) می دانیم هرگاه خروجی آن فقط تابعی از مقدار ورودی در زمان حال و گذشته باشد. به عبارت دیگر سیستم علّی توانایی پیش بینی آینده‌ی ورودی خود را ندارد (Nonanticipative) و خروجی آن مستقل از زمان آینده‌ی ورودی است.

نتیجه مهم: اگر دو ورودی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ به یک سیستم علّی، برای لحظات $t<t_0$ یکسان و پس از آن متفاوت باشند، خروجی های متناظر $y_1(t)$ و $y_2(t)$ نیز حتماً برای زمان های $t<t_0$ یکسان هستند.

نکته: همه سیستمهای بدون حافظه، علّی هستند، امّا برعکس نه.

مثال) $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ ✓ علّی ، $y[n]=x[n]-x[n-1]$ ✓ علّی

$y(t)=\dfrac{d}{dt}x(t)=\lim_{\Delta\to 0}\dfrac{x(t)-x(t-\Delta)}{\Delta}$ ، $y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\lambda)\,d\lambda$ ✓ "

$y[n]=x[-n]$ ✗ غیرعلّی

$y(t)=x(t+1)$ ✗ غیرعلّی

$y[n]=\dfrac{1}{2M+1}\sum_{k=-M}^{M}x[n-k]$ ✗ غیرعلّی

$y(t)=x(t)\cos(1+t)$ ✓ علّی

۴) سیستم‌های پایدار یا ناپایدار

یک سیستم را پایدار (Stable) می‌نامیم، هرگاه ورودی‌های محدود (کراندار) بر آن، خروجی‌های محدود تولید کنند.

Bounded Input — Bounded output

$$|x(t)| \leq M < \infty \Rightarrow |y(t)| \leq N < \infty$$

(BIBO)

در یک سیستم ناپایدار ورودی محدود ممکن است خروجی نامحدود ایجاد کند.

مثال) $y(t) = t\, x(t)$ ناپایدار

فرض: $x(t) = u(t) \Rightarrow |x(t)| \leq 1$ و $y(t) = t\,u(t)$

اگر $t \to \infty$، آنگاه $y(t) \to \infty$، پس سیستم ناپایدار است.

- خازن : $v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\lambda)\,d\lambda$ ناپایدار

اگر $\underbrace{i(t) = I_0}_{\text{(محدود)}} \Rightarrow v(t) = v(0) + \frac{I_0}{C}t$ (نامحدود) $t \to \infty$

- $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[n]$ ناپایدار

فرض : $x[n] = u[n] \Rightarrow |x[n]| \leq 1$ (محدود)

$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k] = \sum_{k=0}^{n} u[k] = \cdots = (n+1)u[n]$ (نامحدود) $n \to \infty$

- $y[n] = \frac{1}{2M+1}\sum_{k=-M}^{M} x[n-k]$ پایدار

اگر $|x[n]| \le C < \infty \Rightarrow |y[n]| = \frac{1}{2M+1}\left|\sum_{k=-M}^{M} x[n-k]\right|$

یادآوری: $|a+b| \le |a|+|b|$

$$\Rightarrow |y[n]| \le \frac{1}{2M+1}\sum_{k=-M}^{M} |x[n-k]| \le \frac{1}{2M+1}\sum_{k=-M}^{M} C = C$$

۵) سیستم‌های تغییرناپذیر با زمان یا تغییرپذیر با زمان

سیستم تغییرناپذیر با زمان (TI) سیستمی است که هر نوع انتقال (شیفت) زمانی در سیگنال ورودی آن، دقیقاً در سیگنال خروجی ظاهر شود. به عبارت دیگر سیستمی که رفتار آن مستقل از مبدأ زمان باشد، TI است. به بیان دیگر:

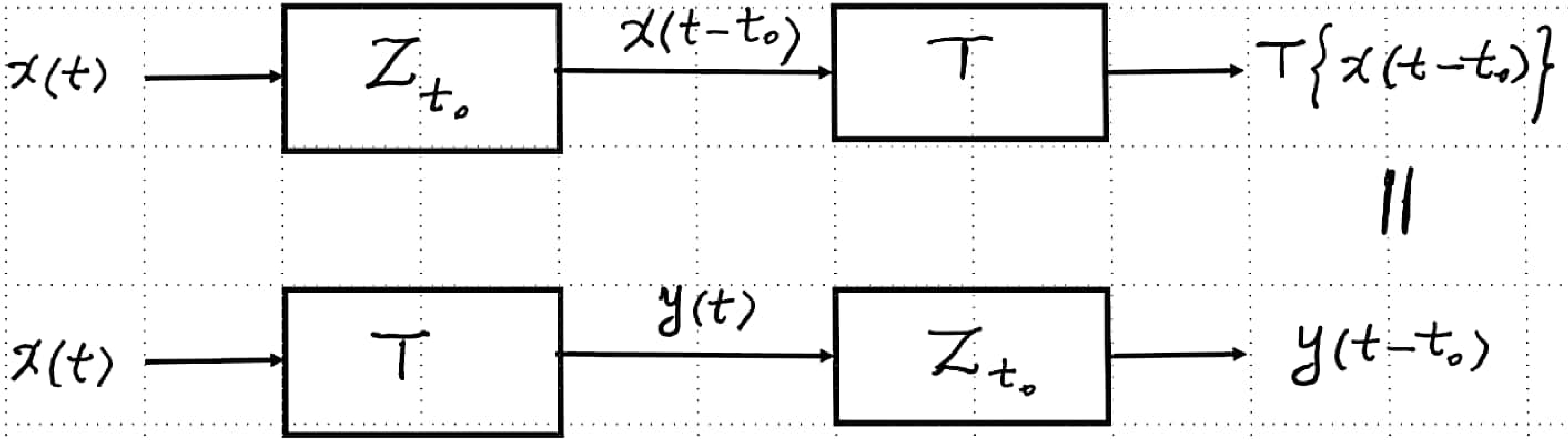
اگر $y(t) = T\{x(t)\} \Rightarrow T\{x(t-t_0)\} = y(t-t_0) \quad , \quad \forall t_0$

تعریف: سیستم انتقال زمانی را با عملگر Z_{t_0} به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Z_{t_0}\{x(t)\} = x(t-t_0)$$

با این تعریف سیستم $y(t) = T\{x(t)\}$ ، TI است اگر و تنها اگر :

$$T\{Z_{t_0}\{x(t)\}\} = Z_{t_0}\{T\{x(t)\}\}$$



مثال ۵)

$$- \quad y(t) = T\{x(t)\} = |x(t)|^n$$

$$T\{Z_{t_0}\{x(t)\}\} = T\{x(t-t_0)\} = |x(t-t_0)|^n$$

$$Z_{t_0}\{T\{x(t)\}\} = Z_{t_0}\{|x(t)|^n\} = |x(t-t_0)|^n$$

$= \quad \checkmark \; TI$

$$- \quad y[n] = T\{x[n]\} = x[n-N]$$

$$T\{Z_{n_0}\{x[n]\}\} = T\{x[n-n_0]\} = x[n-N-n_0]$$

$$Z_{n_0}\{T\{x[n]\}\} = Z_{n_0}\{x[n-N]\} = x[n-n_0-N]$$

$= \checkmark \; TI$

- $y(t) = T\{x(t)\} = x(-t)$

$$T\{Z_{t_0}\{x(t)\}\} = T\{x(t-t_0)\} = x(-t-t_0)$$

$$Z_{t_0}\{T\{x(t)\}\} = Z_{t_0}\{x(-t)\} = x(-t+t_0)$$

$\neq$ ✗ TI

- $y(t) = T\{x(t)\} = x(\alpha t)$

$$T\{Z_{t_0}\{x(t)\}\} = T\{x(t-t_0)\} = x(\alpha t-t_0)$$

$$Z_{t_0}\{T\{x(t)\}\} = Z_{t_0}\{x(\alpha t)\} = x(\alpha t-\alpha t_0)$$

$\neq$ ✗ TI

- $y[n] = T\{x[n]\} = n\,x[n]$

$$T\{Z_{n_0}\{x[n]\}\} = T\{x[n-n_0]\} = n\,x[n-n_0]$$

$$Z_{n_0}\{T\{x[n]\}\} = Z_{n_0}\{n\,x[n]\} = (n-n_0)\,x[n-n_0]$$

$\neq$ TI ✗

- $y(t) = T\{x(t)\} = \log|x(t)|$

$$T\{Z_{t_0}\{x(t)\}\} = T\{x(t-t_0)\} = \log|x(t-t_0)|$$

$$Z_{t_0}\{T\{x(t)\}\} = Z_{t_0}\{\log|x(t)|\} = \log|x(t-t_0)|$$

$=$ ✓ TI

۶) سیستم‌های خطّی یا غیرخطّی

سیستم خطی سیستمی است که پاسخ آن به هر ترکیب خطی از چند ورودی برابر باشد با همان ترکیب خطی از پاسخ های سیستم به آن ورودی ها.

به بیان دیگر سیستم خطی سیستمی است که در آن خاصیت برهم نهی یا جمع آثار (Superposition) برقرار باشد.

$$T\left\{\sum_{k=1}^{N}\alpha_k x_k(t)\right\}=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k T\{x_k(t)\}=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k y_k(t)$$

هر سیستم خطّی در واقع دارای دو خاصیت
- جمع پذیری (Additivity)
- همگنی (Homogenity)

است.

جمع‌پذیری : $T\{x_1(t)+x_2(t)\} = T\{x_1(t)\}+T\{x_2(t)\}$

همگنی : $T\{a\,x(t)\} = a\,T\{x(t)\} \quad \forall a$ (ثابت)

نتیجه : با توجه به خاصیت همگنی شرط لازم برای خطی بودن یک سیستم آن است که پاسخ آن به ورودی صفر، برابر با صفر باشد.

$$T\{0\} = T\{0\cdot x(t)\} = 0\cdot T\{x(t)\} = 0$$

مثال)

- $y(t) = [x(t)]^n \quad , \quad n \neq 1$ خطی نیست

- $y[n] = exp(x[n])$ " "

- $y(t) = T\{x(t)\} = t\,x(t)$ خطی است

$T\{x_1(t) + x_2(t)\} = t\,[x_1(t) + x_2(t)] = t\,x_1(t) + t\,x_2(t)$

$= T\{x_1(t)\} + T\{x_2(t)\}$ ✓ جمع پذیر.

$T\{a\,x(t)\} = t \cdot a\,x(t) = a \cdot t\,x(t) = a\,T\{x(t)\}$ ✓ همگن

- $y[n] = Re\{x[n]\} = Re\{x_r[n] + j\,x_i[n]\} = x_r[n]$ × خطی نیست

$Re\{j\,x[n]\} = Re\{j\,x_r[n] - x_i[n]\} = -x_i[n] \neq j\,Re\{x[n]\}$ همگن نیست

سیستمهای با نموّ خطی (Incrementally Linear Systems)

سیستم $y[n] = a x[n] + b$ خطّی نیست چراکه نه جمع پذیر است و نه همگن.

$$T\{x_1[n] + x_2[n]\} = a(x_1[n] + x_2[n]) + b \neq T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\}$$

$$T\{k x[n]\} = a k x[n] + b \neq k T\{x[n]\}$$

امّا اگر $y_1[n]$ و $y_2[n]$ به ترتیب پاسخ سیستم به ورودی‌های $x_1[n]$ و $x_2[n]$ باشند،

آنگاه:

$$y_2[n] - y_1[n] = a(x_2[n] - x_1[n])$$

در نتیجه تفاضل خروجی‌ها نسبت به تفاضل ورودی‌ها خطی است. این سیستم را با نموّ خطی می‌نامیم.

$$y[n] = T\{x[n]\} = ax[n] + b$$

$$\Rightarrow T\{0\} = b \quad (\text{پاسخ ورودی صفر}) \quad = y_0[n]$$

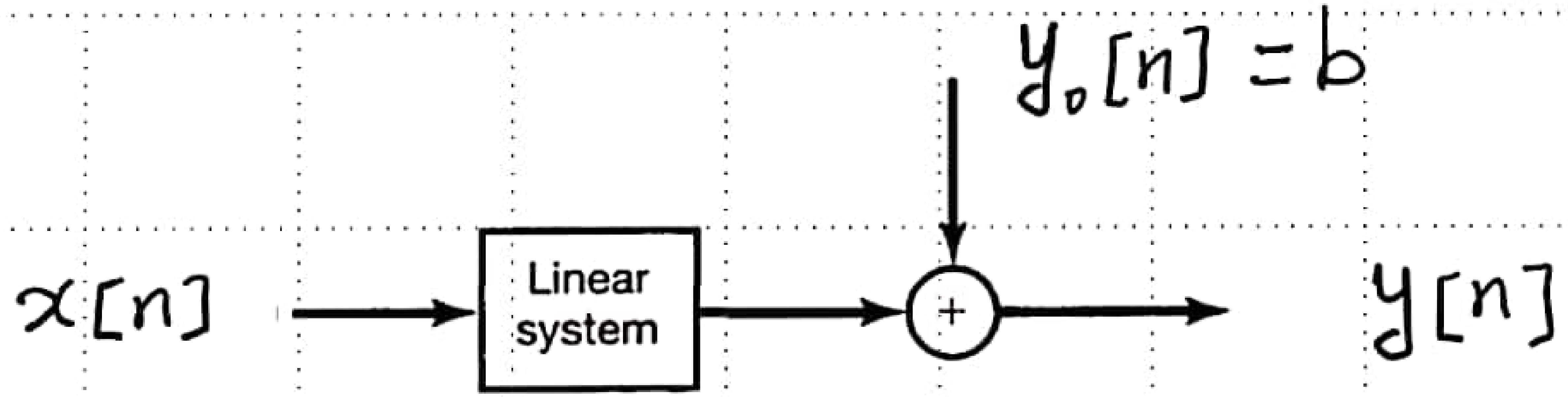


Figure 1.48 Structure of an incrementally linear system. Here, $y_0[n]$ is the zero-input response of the system.

هر سیستم با نموّ خطی را می‌توان به صورت فوق با یک سیستم خطی که خروجی آن با ثابت b (پاسخ ورودی صفر) جمع می‌شود، مدل‌سازی کرد.