دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده برق و کامپیوتر

بسم الله الرّحمن الرّحیم

تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مدرس: مسعود عمومی

جلسه چهاردهم _ بخش‌های 3.2 ، 3.3 و 3.4 کتاب

با سلام خدمت دانشجویان محترم

توابع ویژه (Eigenfunctions) و مقادیر ویژه (Eigenvalues) برای سیستم‌های LTI

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

نکته: اگر ورودی $x(t)$ را بتوان به صورت ترکیبی خطی از سیگنال‌های پایه (Basic) $x_i(t)$ به صورت $x(t) = \sum_i a_i x_i(t)$ نوشت و پاسخ سیستم LTI به $x_i(t)$ را $y_i(t)$ بنامیم، آنگاه $y(t) = \sum_i a_i y_i(t)$ است. در نتیجه $y_i(t)$ ها هم سیگنال‌های پایه برای خروجی $y(t)$ هستند.

سؤال مهم: چه سیگنال‌های پایه $x_i(t)$ ای می‌توان یافت که:

اولاً : $x_i(t)$ ها فرم ساده‌ای داشته باشند.

ثانیاً : دستهٔ وسیعی از سیگنال‌های $x(t)$ را بتوان به صورت ترکیبی خطی از $x_i(t)$ ها نوشت.

ثالثاً : $y_i(t)$ یعنی پاسخ هر سیستم LTI به $x_i(t)$ ، شکل ساده‌ای داشته باشد به طوری که

بتوان پاسخ سیستم‌های LTI به دستهٔ وسیعی از سیگنال‌ها را به سادگی به دست آورد.

تعریف : $x_i(t)$ را تابع ویژهٔ یک سیستم می‌نامیم هرگاه پاسخ سیستم به آن ضریب ثابتی از

ورودی $x_i(t)$ باشد. (λ_i ثابت مختلط) $$T\{x_i(t)\} = \lambda_i x_i(t)$$

به λ_i مقدار ویژهٔ متناظر با تابع ویژهٔ $x_i(t)$ گفته می‌شود.

قضیه: تابع نمایی مختلط $x(t)=e^{st}$ $(s=\sigma+j\omega)$ تابع ویژهٔ هر سیستم LTI است.

مقدار ویژهٔ متناظر آن ثابت $H(s)$ است که:

$$H(s)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau=\mathcal{L}\{h(t)\}$$

اثبات:

$$y(t)=h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau=e^{st}\cdot H(s)$$

$$=H(s)\cdot x(t)$$

$H(s)$ تبدیل لاپلاس پاسخ ضربهٔ سیستم یا همان تابع سیستم (System Function) است.

مثال:

For the analysis of LTI systems, the usefulness of decomposing more general signals in terms of eigenfunctions can be seen from an example. Let $x(t)$ correspond to a linear combination of three complex exponentials; that is,

$$x(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + a_3 e^{s_3 t}.$$

From the eigenfunction property, the response to each separately is

$$a_1 e^{s_1 t} \longrightarrow a_1 H(s_1) e^{s_1 t},$$
$$a_2 e^{s_2 t} \longrightarrow a_2 H(s_2) e^{s_2 t},$$
$$a_3 e^{s_3 t} \longrightarrow a_3 H(s_3) e^{s_3 t},$$

and from the superposition property the response to the sum is the sum of the responses, so that

$$y(t) = a_1 H(s_1) e^{s_1 t} + a_2 H(s_2) e^{s_2 t} + a_3 H(s_3) e^{s_3 t}.$$

More generally, if $x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t}$, بسط $x(t)$ برحسب سیگنالهای نمایی مختلط

then the output will be $y(t) = \sum_k \underbrace{a_k H(s_k)}_{b_k} e^{s_k t}$. بسط $y(t)$ برحسب سیگنالهای نمایی مختلط

نمایش سری فوریهٔ سیگنال‌های متناوب زمان‌پیوسته

a signal is periodic if, for some positive value of T, $x(t) = x(t+T)$ for all t.

The fundamental period of $x(t)$ is the minimum positive, nonzero value of T for which the above equation is satisfied, and the value $\omega_0 = 2\pi/T$ is referred to as the fundamental frequency

two basic periodic signals

$x(t) = \cos \omega_0 t$ — the sinusoidal signal

$x(t) = e^{j\omega_0 t}$. — the periodic complex exponential

Both of these signals are periodic with fundamental frequency ω_0 and fundamental period $T = 2\pi/\omega_0$.

$$\cos\left[\omega_0\left(t+\frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right] = \cos(\omega_0 t + 2\pi) = \cos(\omega_0 t)$$

$$\exp\left[j\omega_0\left(t+\frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right] = \exp(j\omega_0 t)\exp(j2\pi) = \exp(j\omega_0 t)$$

The set of *harmonically related* complex exponentials   مجموعهٔ نمایی های مختلط وابسته هارمونیکی

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} = e^{jk(2\pi/T)t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Each of these signals has a fundamental frequency that is a multiple of ω_0, and therefore, each is periodic with period T (although for $|k| \geq 2$, the fundamental period of $\phi_k(t)$ is a fraction of T). Thus, a linear combination of harmonically related complex exponentials of the form

فرکانس اصلی $= k\omega_0$, دوره تناوب اصلی $= \dfrac{2\pi}{k\omega_0} = \dfrac{T}{k}$, $k \in \mathbb{Z}$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \varphi_k(t)$$

is also periodic with period T. T دوره تناوب مشترک همهٔ $\varphi_k(t)$ هاست.

In the above equation, the term for $k = 0$ is a constant. The terms for

$k = +1$ and $k = -1$ the *fundamental components* or the *first harmonic components*.

مؤلفه های هارمونیکی اصلی یا اول

$k = +2$ and $k = -2$ the *second harmonic components*.

مؤلفه های هارمونیکی دوم

More generally, the components for $k = +N$ and $k = -N$ are referred to as the Nth harmonic components.

مؤلفه های هارمونیکی Nام

فرم کلی نمایش سری فوریه

A linear combination of harmonically related complex exponentials of the form

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

فرم شمارهٔ یک (فرم کلی)

is referred to as the *Fourier series* representation.

نمایش (بسط) سری فوریه عبارتست از یک ترکیب خطی از نمایی های مختلط و البته هارمونیکی $\varphi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$، که حاصل آن یک سیگنال متناوب $x(t)$ با دوره تناوب اصلی $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ است. ضرائب a_k $(k \in \mathbb{Z})$ شکل سیگنال $x(t)$ را تعیین می‌کند و بالعکس.

مثال)

Consider a periodic signal $x(t)$, with fundamental frequency 2π, that is expressed in the form of

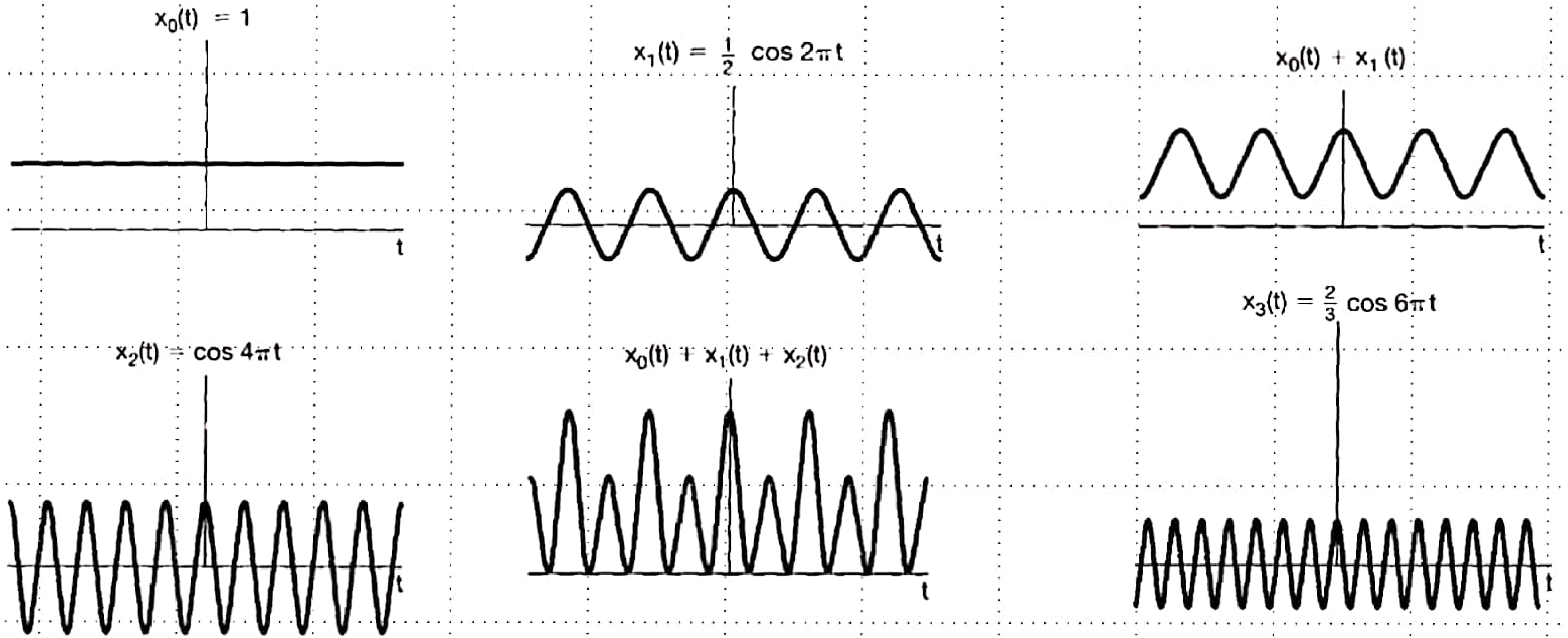
$$x(t) = \sum_{k=-3}^{+3} a_k e^{jk2\pi t}, \quad \text{where} \quad \begin{aligned} a_0 &= 1, & a_2 &= a_{-2} = \frac{1}{2}, \\ a_1 &= a_{-1} = \frac{1}{4}, & a_3 &= a_{-3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$x(t) = 1 + \frac{1}{4}(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) + \frac{1}{2}(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}) + \frac{1}{3}(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}).$$

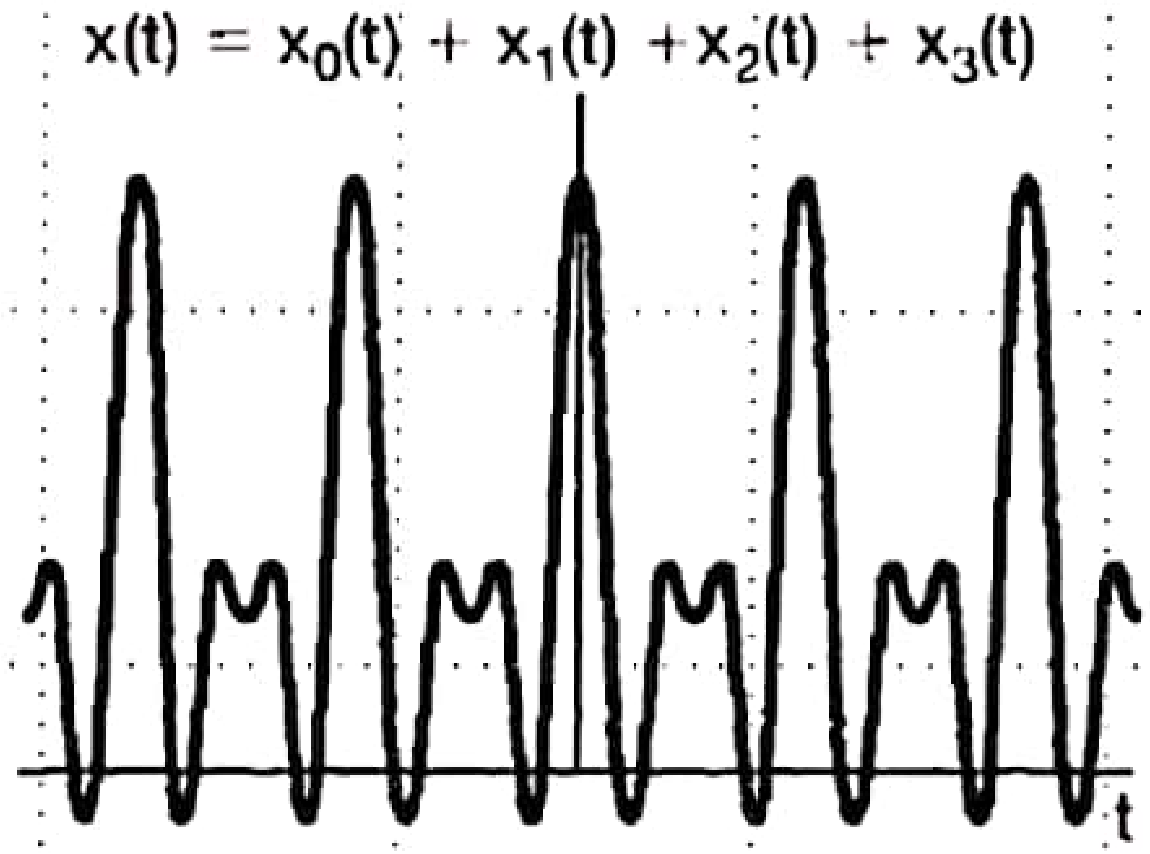
(DC) مؤلفه ثابت — هارمونیک اول — هارمونیک دوم — هارمونیک سوم

Equivalently, using Euler's relation, we can write $x(t)$ in the form

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos 2\pi t + \cos 4\pi t + \frac{2}{3}\cos 6\pi t.$$



سیگنال نهایی



نمایش سری فوریه برای سیگنال‌های متناوب حقیقی

Specifically, suppose that $x(t)$ is real and can be represented in the form of

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

Then, since $x^*(t) = x(t)$, we obtain

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t}.$$

Replacing k by $-k$ in the summation, we have

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t},$$

خاصیت تقارن هرمیتی

$$\boxed{a_k = a_{-k}^* \quad \text{or} \quad a_k^* = a_{-k}.}$$

ویژگی مهم ضرائب سری فوریه در حالت $x(t)$ حقیقی

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-k}e^{-jk\omega_0 t}] = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k e^{jk\omega_0 t} + a_k^* e^{-jk\omega_0 t}].$$

$$\Longrightarrow \quad x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\Re e\{a_k e^{jk\omega_0 t}\}.$$

If a_k is expressed in polar form as $a_k = A_k e^{j\theta_k}$,

نمایش قطبی ضرائب فوریه

$$\Longrightarrow \quad x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\Re e\{A_k e^{j(k\omega_0 t + \theta_k)}\} = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k).$$

فرم شماره دو (فقط برای $x(t)$ حقیقی)

Another form is obtained by writing a_k in rectangular form as $a_k = B_k + jC_k$,

نمایش دکارتی ضرائب فوریه

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} Re\{(B_k + jC_k)(\cos k\omega_0 t + j\sin k\omega_0 t)\}$$

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} [B_k \cos k\omega_0 t - C_k \sin k\omega_0 t].$$

فرم شماره سه (فقط برای $x(t)$ حقیقی)

نکته: در مثال اخیر هر سه فرم نمایش سری فوریه یکسان هستند.

a_0, $a_1 = a_{-1}$, $a_2 = a_{-2}$, $a_3 = a_{-3}$

$$x(t) = 1 + \frac{1}{4}(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) + \frac{1}{2}(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}) + \frac{1}{3}(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}).$$

$$x(t) = \underbrace{1}_{a_0} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{2A_1}\cos 2\pi t + \underbrace{1}_{2A_2}\cos 4\pi t + \underbrace{\frac{2}{3}}_{2A_3}\cos 6\pi t. \Rightarrow a_k = A_k = B_k$$

تعیین ضرائب نمایش بسط سری فوریه برای سیگنال‌های متناوب زمان‌پیوسته

با فرض این که سیگنال متناوب $x(t)$ با دورهٔ تناوب اصلی $T=\frac{2\pi}{\omega_0}$ را بتوان به صورت نمایش سری فوریه آن بسط داد، سؤال اصلی چگونگی تعیین ضرائب a_k در سری فوریه است.

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T})t}$$

Multiplying both sides by $e^{-jn\omega_0 t}$, we obtain

$$x(t)e^{-jn\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t}.$$

Integrating both sides from 0 to $T=2\pi/\omega_0$, we have

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t}\,dt.$$

انتگرال گیری درطول یک دوره تناوب اصلی انجام می شود.

Interchanging the order of integration and summation yields

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \left[\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}\,dt\right].$$

The evaluation of the bracketed integral is straightforward. Rewriting this integral using Euler's formula, we obtain

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}\,dt = \int_0^T \cos(k-n)\omega_0 t\,dt + j\int_0^T \sin(k-n)\omega_0 t\,dt.$$

For $k \neq n$, $\cos(k-n)\omega_0 t$ and $\sin(k-n)\omega_0 t$ are periodic sinusoids with fundamental period $(T/|k-n|)$.

$\Rightarrow$ انتگرال گیری در فاصله مضرب صحیحی از دوره تناوب سیگنال سینوسی که نتیجه آن صفر است.

For $k = n$, the integrand on the left-hand side equals 1, and thus, the integral equals T.

In sum, we then have

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}\,dt = \begin{cases} T, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}, \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \left[\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}\,dt\right] = T a_n$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{a_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t}\,dt,}$$

فرمول محاسبهٔ ضرائب بسط سری فوریه

تذکر: اگر بازهٔ انتگرال‌گیری به جای (T و 0) هر بازهٔ دیگری به طول T باشد، نتایج مشابهی داریم.

$$\Longrightarrow \quad \boxed{a_n = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jn\omega_0 t}\,dt.}$$

فرمول کلی‌تری برای محاسبهٔ ضرائب بسط سری فوریه

نتیجه گیری :

This pair of equations, then, defines the Fourier series of a periodic continuous-time signal:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T})t}$$

معادلهٔ ترکیب

the *synthesis* equation

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk(\frac{2\pi}{T})t}dt$$

معادلهٔ تحلیل

the *analysis* equation

The coefficient a_0 is the dc or constant component of $x(t)$ and is given with $k = 0$.

$$\Rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt,$$

مؤلفهٔ ثابت (DC) یا میانگین سیگنال

which is simply the average value of $x(t)$ over one period.

مثال ۱) $x(t)$ متناوب با فرکانس اصلی $\omega_0 = 2\pi/T$ است.

$$x(t) = \sin \omega_0 t,$$

$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \Longrightarrow \begin{array}{ll} a_1 = \dfrac{1}{2j}, & a_{-1} = -\dfrac{1}{2j}, \\ a_k = 0, & k \neq +1 \text{ or } -1. \end{array}$$

مثال ۲)

$$x(t) = 1 + \sin \omega_0 t + 2\cos \omega_0 t + \cos\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2j}[e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}] + [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] + \frac{1}{2}[e^{j(2\omega_0 t + \pi/4)} + e^{-j(2\omega_0 t + \pi/4)}].$$

Collecting terms, we obtain

$$x(t) = \underbrace{1}_{a_0} + \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2j}\right)}_{a_1} e^{j\omega_0 t} + \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2j}\right)}_{a_{-1}} e^{-j\omega_0 t} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} e^{j(\pi/4)}\right)}_{a_2} e^{j2\omega_0 t} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} e^{-j(\pi/4)}\right)}_{a_{-2}} e^{-j2\omega_0 t}.$$

$$a_0 = 1,$$

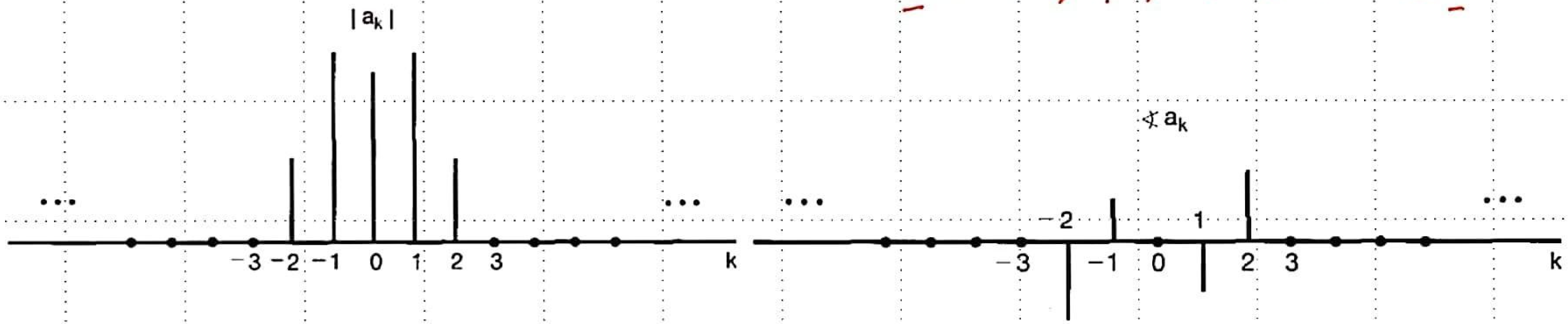
$$a_1 = \left(1 + \frac{1}{2j}\right) = 1 - \frac{1}{2}j, \qquad a_2 = \frac{1}{2}e^{j(\pi/4)} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+j),$$

$$a_{-1} = \left(1 - \frac{1}{2j}\right) = 1 + \frac{1}{2}j, \qquad a_{-2} = \frac{1}{2}e^{-j(\pi/4)} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-j),$$

$$a_k = 0, \; |k| > 2.$$

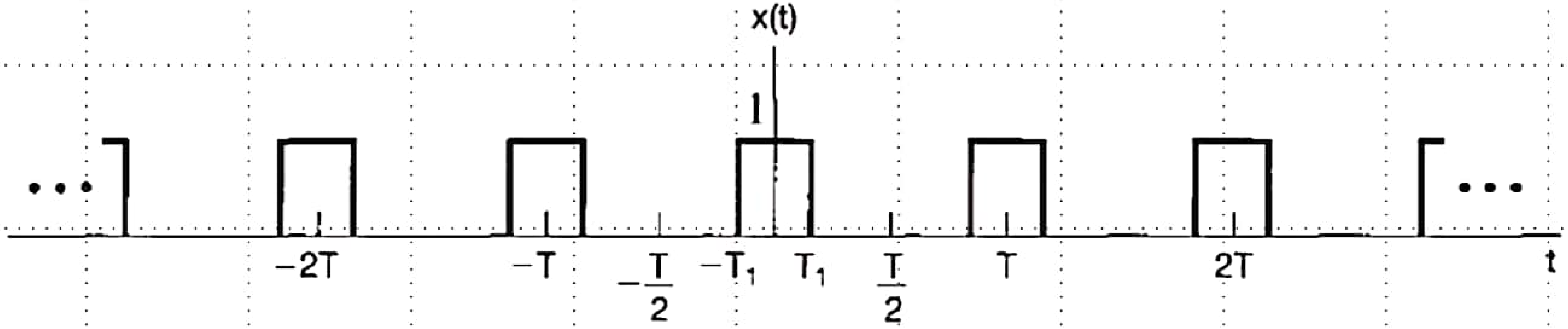
a bar graph of the magnitude and phase of a_k

نمایش اندازه و فاز ضرائب بسط فوریه



The periodic square wave, $x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$,

مثال)



This signal is periodic with fundamental period T and fundamental frequency $\omega_0 = 2\pi/T$.

for $k = 0$, $a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T}$. a_0 is interpreted to be the average value of $x(t)$

For $k \neq 0$, we obtain $a_k = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t}\, dt = -\frac{1}{jk\omega_0 T} e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-T_1}^{T_1}$,

$$\Rightarrow a_k = \frac{2}{k\omega_0 T}\left[\frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j}\right].$$

Noting that the term in brackets is $\sin k\omega_0 T_1$, we can express the coefficients a_k as

$$a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}, \quad k \neq 0,$$

ضرائب a_k در اینجا حقیقی اند

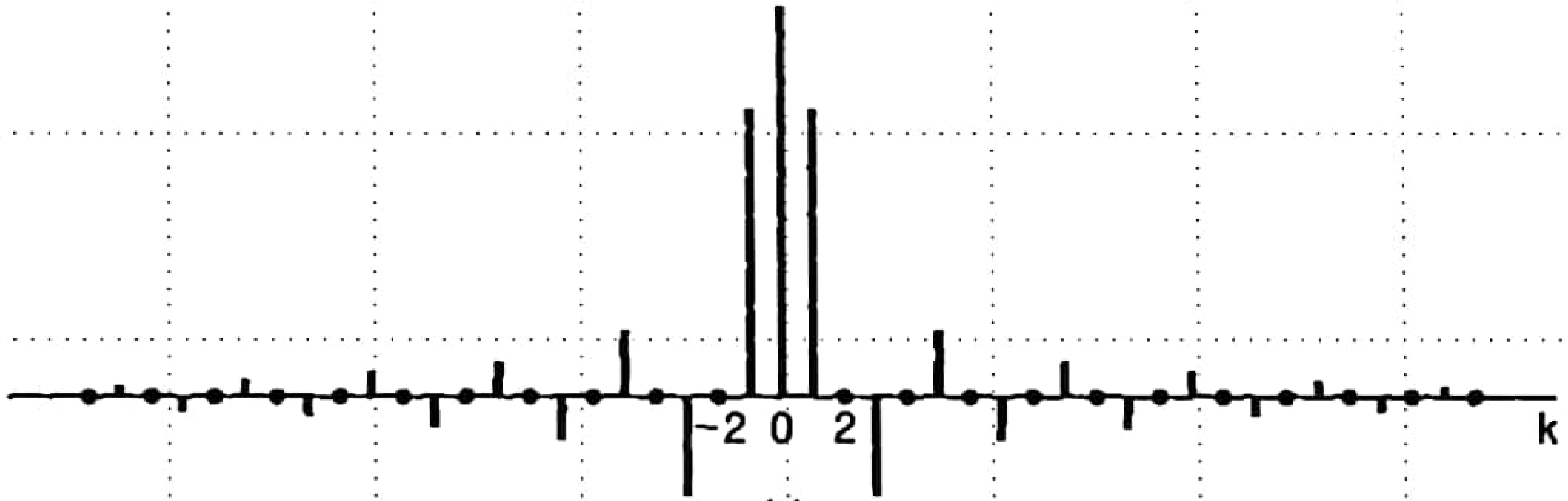
For this specific example, the Fourier coefficients are real, and consequently, they can be depicted graphically with only a single graph.

a) $T = ۴T_1 \Rightarrow \omega_0 T_1 = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow a_k = \frac{1}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{۲}\right), \; k \neq 0 \quad \& \quad a_0 = \frac{1}{۲}$

b) $T = ۸T_1 \Rightarrow \omega_0 T_1 = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow a_k = \frac{1}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{۴}\right), \; k \neq 0 \quad \& \quad a_0 = \frac{1}{۴}$

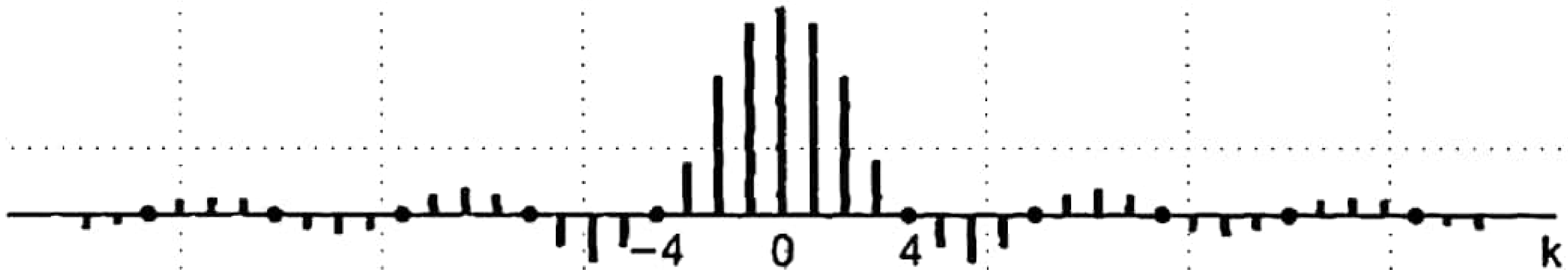
c) $T = ۱۶T_1 \Rightarrow \omega_0 T_1 = \frac{\pi}{۸} \Rightarrow a_k = \frac{1}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{۸}\right), \; k \neq 0 \quad \& \quad a_0 = \frac{1}{۸}$

T=4T1



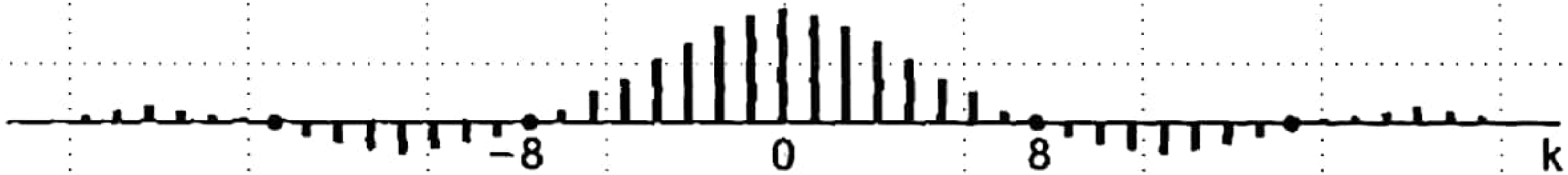
(a)

T=8T1



(b)

T=16T1



(c)

همگرایی سری فوریه

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \\ a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \end{cases} \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

سؤال اساسی: با توجه به عدم امکان محاسبهٔ سری فوریه برای تعداد نامحدودی جملات، در عمل چه تفاوتی بین سیگنال متناوب اصلی $x(t)$ با تقریب آن توسط ترکیب خطی تعداد محدودی از توابع نمای مختلط و البته هارمونیکی به صورت

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

وجود دارد؟

فرض کنیم خطای این تقریب را با $e_N(t) = x(t) - x_N(t)$ نمایش دهیم.

معیار تقریب خوب و به حداقل رساندن خطا را انرژی سیگنال خطای $e_N(t)$ در نظر می‌گیریم.

$$E_N = \int_T |e_N(t)|^2 dt$$

در مسأله 3.66 کتاب ثابت می‌شود که انتخاب بهینه برای به حداقل رساندن E_N یا انرژی خطا

عبارتست از: $a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$ ، که همان رابطهٔ محاسبهٔ

ضرائب بسط سری فوریه است. در نتیجه بهترین تقریب برای یک سیگنال متناوب با

استفاده از ترکیب خطی تعداد محدودی از نمایی های مختلط وابسته هارمونیکی، همان بسط

سری فوریه است که تعداد جملات آن به N مناسبی محدود شود.

در نتیجه اگر $x(t)$ نمایش بسط سری فوریه داشته باشد، آنگاه $\lim_{N\to\infty} E_N = 0$

پس سؤال این است که یک سیگنال متناوب $x(t)$ چه موقعی سری فوریه دارد؟ پاسخ

آن است که هرگاه انتگرال تعریف کننده ضرائب بسط a_k (معادله تحلیل) همگرا شود.

نکته مهم: حتی اگر همه ضرائب a_k حاصل از معادله تحلیل مقادیر محدودی داشته باشند

امّا ممکن است در مواردی، بسط سری فوریه یک سیگنال با تعداد جملات نامحدود هم در

همه زمان ها به سیگنال اصلی متناوب $x(t)$ همگرا نشود.

خوشبختانه مشکل همگرایی سری فوریه برای گروه وسیعی از سیگنالهای متناوب وجود ندارد.

چند نکته در مورد همگرایی سری فوریه:

۱ـ سیگنالهای متناوبی که در طول یک دوره تناوب انرژی محدودی دارند یعنی:

$$\int_T |x(t)|^2 dt < \infty$$

بسط سری فوریه دارند (a_k ها محدودند) و با بکارگیری ضرائب a_k برای $|k| \leqslant N$ ،

انرژی سیگنال خطا در شرایط حدی $N \to \infty$ ، به سمت صفر می‌رود.

با تعریف:

$$e(t) = x(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\int_T |e(t)|^2 dt = 0 \Rightarrow$$

انرژی سیگنال خطای بین $x(t)$ و سری فوریهٔ آن برابر صفر است.

اما صفر بودن انرژی سیگنال خطا، به معنای برابری کامل $x(t)$ و سری فوریهٔ آن در تمامی لحظات t نیست.

۲ـ شرایط همگرایی دیریکله (Dirichlet)

شرایط سه گانهٔ دیریکله، برابری $x(t)$ و سری فوریهٔ آن را در همهٔ زمان‌ها مگر در زمان‌های متمایزی که $x(t)$ ممکن است ناپیوستگی (جهش) داشته باشد تضمین می‌کند:

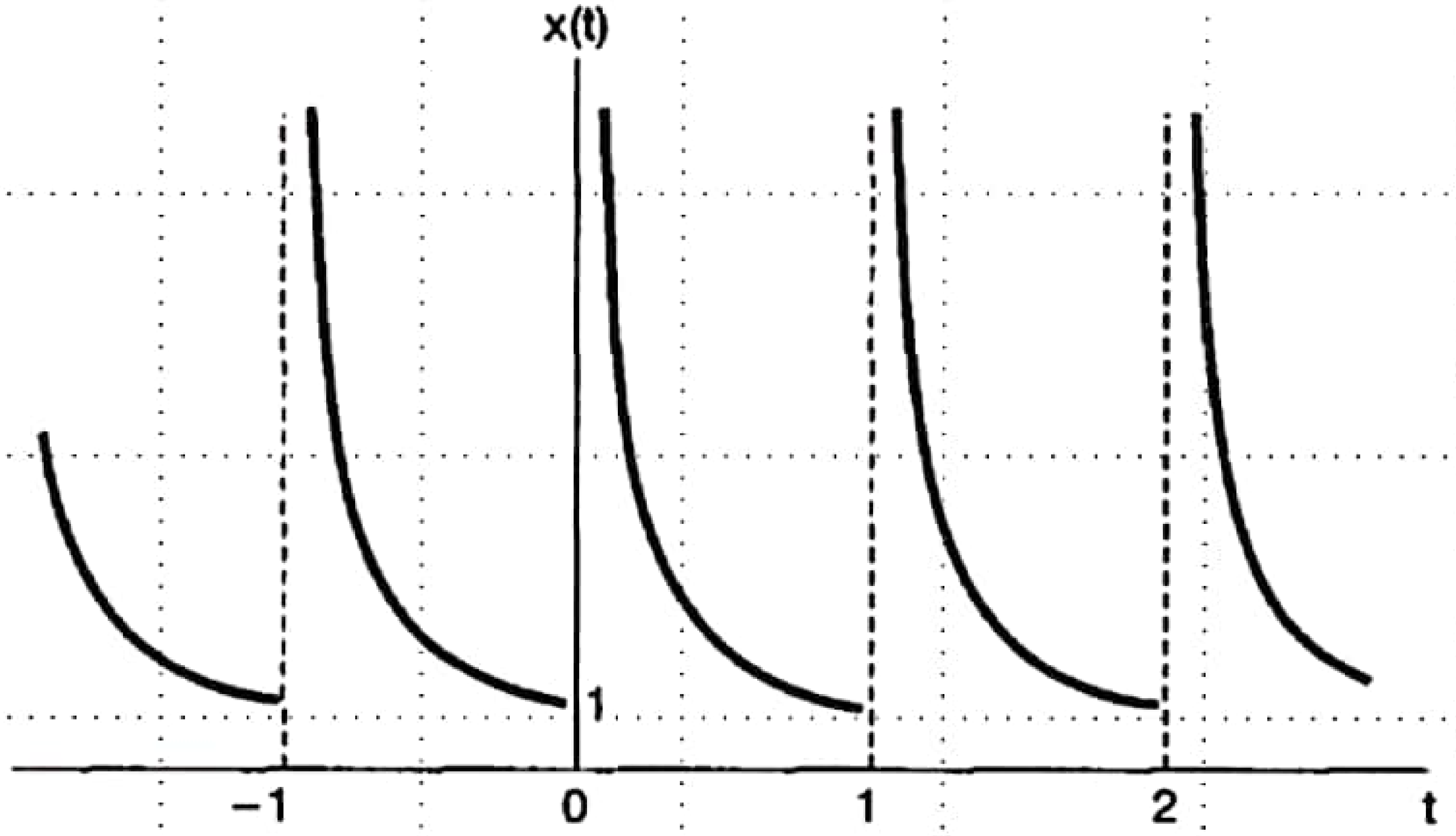
الف) $x(t)$ در طول یک دوره تناوب مطلقاً انتگرال پذیر باشد، یعنی:

$$\int_T |x(t)|\, dt < \infty$$

این شرط همگرا بودن مقادیر ضرائب سری فوریه را نتیجه می دهد.

$$|a_k| \leq \frac{1}{T}\int_T |x(t)e^{-jk\omega_0 t}|dt = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|dt < \infty$$

مورد نقض این شرط در شکل زیر دیده می شود:

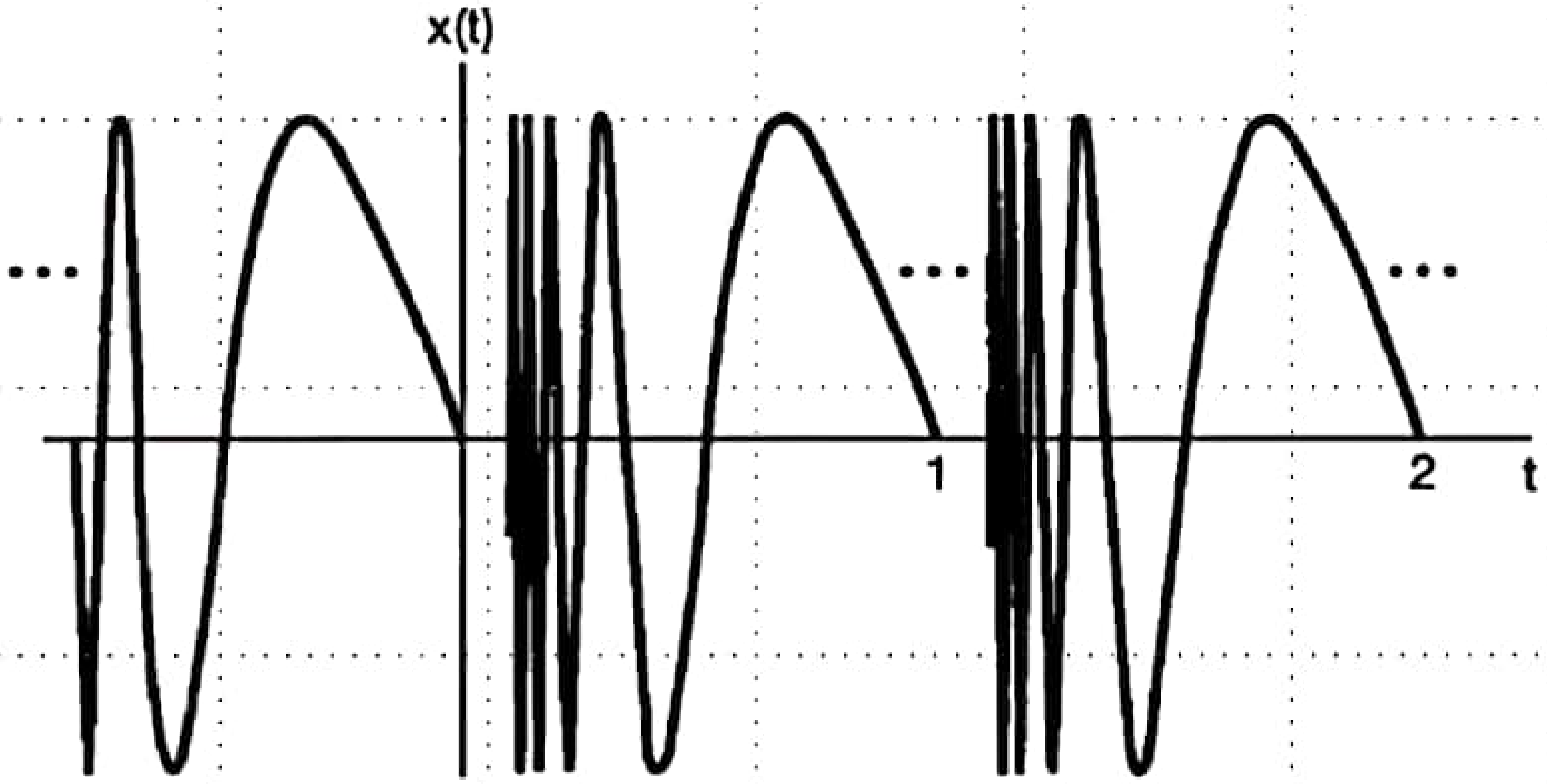


(a)

$$x(t) = \frac{1}{t}, \quad 0 < t \leq 1;$$

ب) تعداد نقاط اکسترمم (ماکزیمم و مینیمم) $x(t)$ در طول هر بازهٔ محدود زمانی از جمله یک دورهٔ تناوب سیگنال، محدود باشد.

مثال زیر شرط الف را برآورده اما شرط ب را نقض می‌کند:

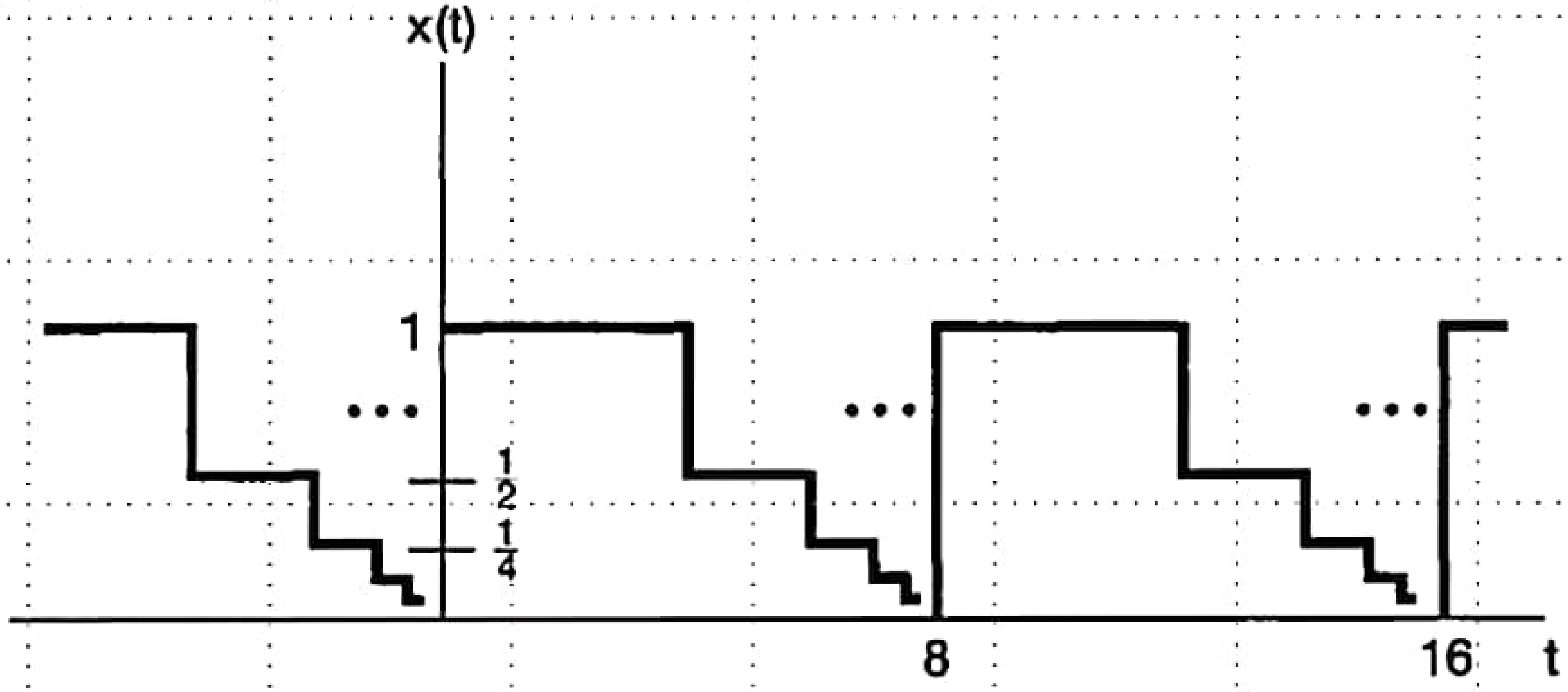


(b)

$$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right), \quad 0 < t \le 1,$$

$$T = 1, \qquad \int_0^1 |x(t)|\, dt < 1.$$

ج) تعداد نقاط ناپیوستگی $x(t)$ در هر بازهٔ محدود زمانی از جمله یک دوره تناوب سیگنال، محدود باشد و علاوه بر این هر ناپیوستگی اندازهٔ محدودی داشته باشد.



(c)

(c) a signal periodic with period 8 that violates the third Dirichlet condition [for $0 \le t < 8$, the value of $x(t)$ decreases by a factor of 2 whenever the distance from t to 8 decreases by a factor of 2; that is, $x(t) = 1$, $0 \le t < 4$, $x(t) = 1/2$, $4 \le t < 6$, $x(t) = 1/4$, $6 \le t < 7$, $x(t) = 1/8$, $7 \le t < 7.5$, etc.].

خوشبختانه موارد نقض شرایط همگرایی دیریکله، به سیگنال های خاصی برمی گردد که اهمیت چندانی در این درس ندارند.

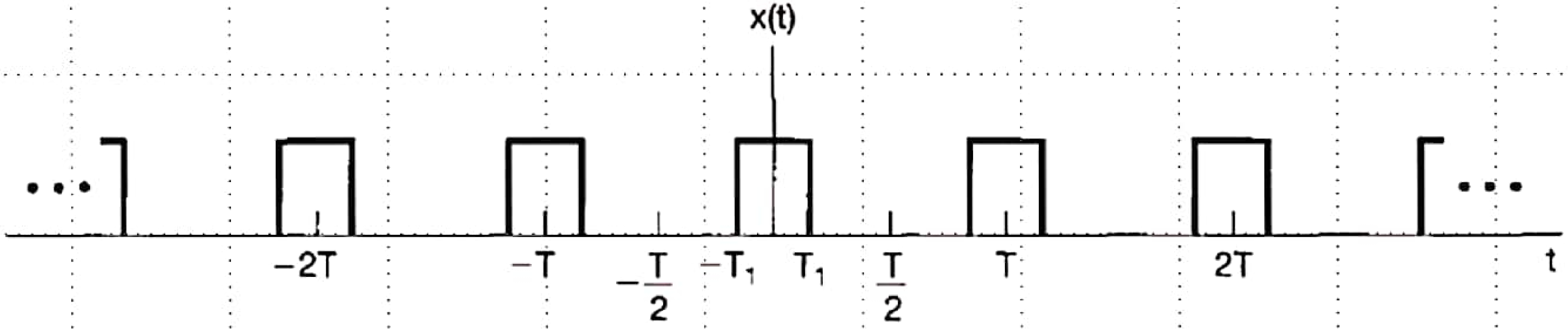
جمع بندی شرایط همگرایی دیریکله

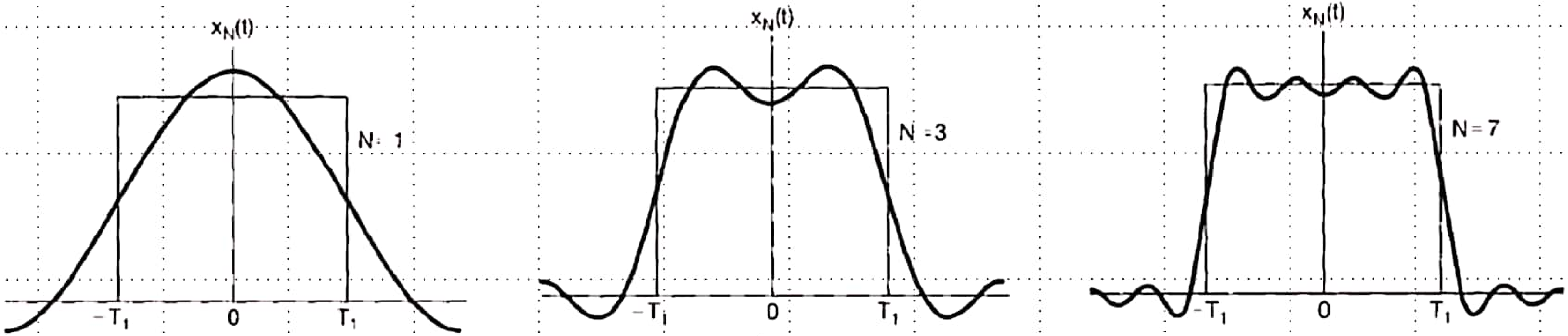
For a periodic signal that has no discontinuities, the Fourier series representation converges and equals the original signal at every value of t. For a periodic signal with a finite number of discontinuities in each period, the Fourier series representation equals the signal everywhere except at the isolated points of discontinuity, at which the series converges to the average value of the signal on either side of the discontinuity. In this case the difference between the original signal and its Fourier series representation contains no energy, and consequently, the two signals can be thought of as being the same for all practical purposes. Specifically, since the signals differ only at isolated points, the integrals of both signals over any interval *are* identical. For this reason, the two signals behave identically under convolution and consequently are identical from the standpoint of the analysis of LTI systems.

۳ - پدیدهٔ گیبس (*Gibbs phenomenon*) در سری فوریهٔ سیگنالهای ناپیوسته مانند پالس مربعی

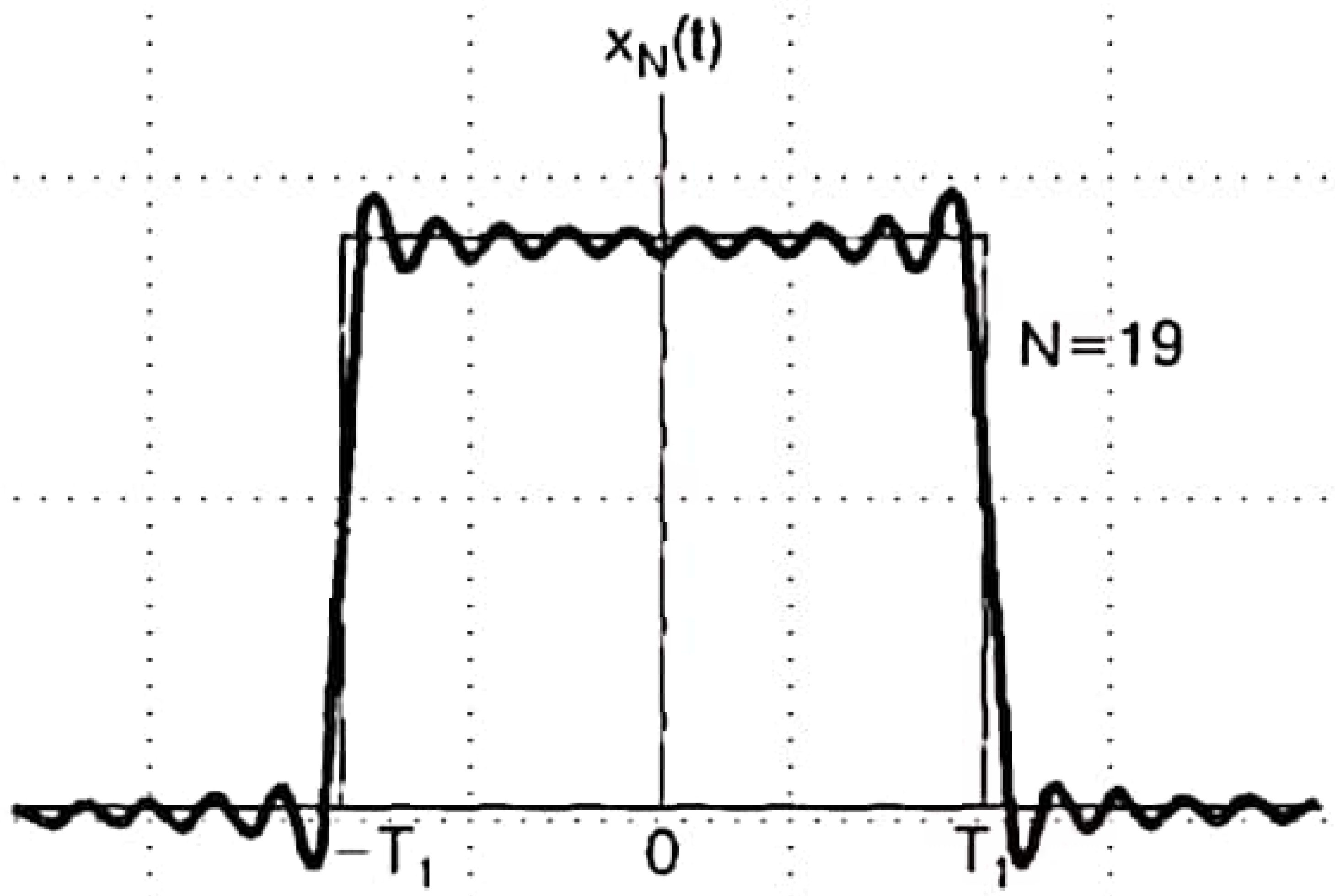
همهٔ شرایط همگرایی

دیریکله را دارد.

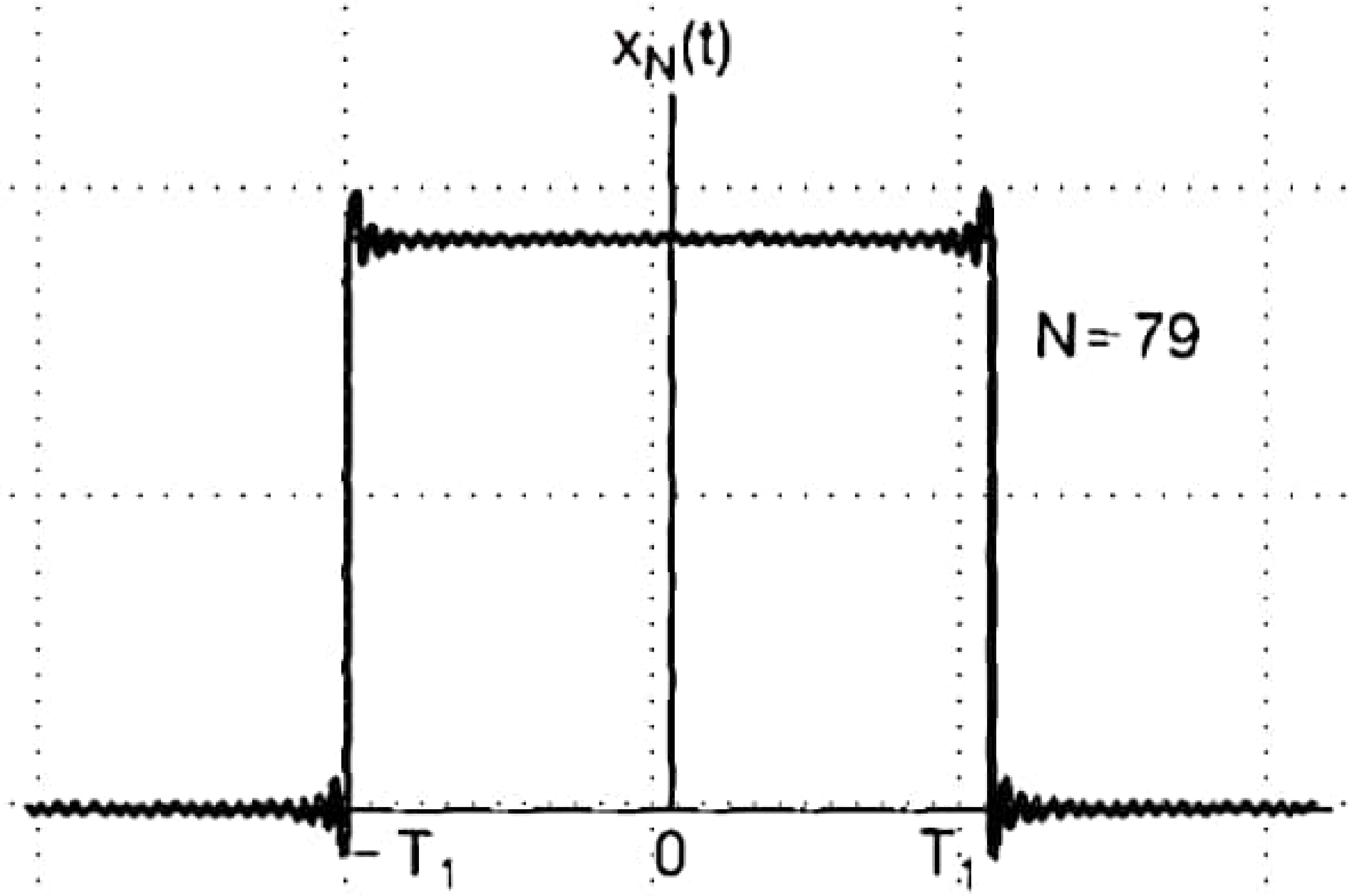




(a) (b) (c)



(d)



(e)

Thus, as N increases, the ripples in the partial sums become compressed toward the discontinuity, but for *any* finite value of N, the peak amplitude of the ripples remains constant. This behavior has come to be known as the *Gibbs phenomenon*. The implication is that the truncated Fourier series approximation $x_N(t)$ of a discontinuous signal $x(t)$ will in general exhibit high-frequency ripples and overshoot $x(t)$ near the discontinuities. If such an approximation is used in practice, a large enough value of N should be chosen so as to guarantee that the total energy in these ripples is insignificant. In the limit, of course, we know that the energy in the approximation error vanishes and that the Fourier series representation of a discontinuous signal such as the square wave converges.

بسم الله الرّحمن الرّحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده برق و کامپیوتر

تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مدرس: مسعود عمومی

جلسه پانزدهم _ بخش‌های 3.5 و 3.8 کتاب

با سلام خدمت دانشجویان محترم

خواص سری فوریهٔ سیگنال‌های متناوب زمان‌پیوسته

Suppose that $x(t)$ is a periodic signal with period T and fundamental frequency $\omega_0 = 2\pi/T$.

$$x(t) = x(t+T), \qquad T = 2\pi/\omega_0$$

Then if the Fourier series coefficients of $x(t)$ are denoted by a_k, we will use the notation

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k$$

to signify the pairing of a periodic signal with its Fourier series coefficients.

۱. خطی بودن **Linearity**

Let $x(t)$ and $y(t)$ denote two periodic signals with period T and which have Fourier series coefficients denoted by a_k and b_k, respectively. That is,

$$x(t) \stackrel{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k,$$

$$y(t) \stackrel{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} b_k.$$

Since $x(t)$ and $y(t)$ have the same period T, it easily follows that any linear combination of the two signals will also be periodic with period T. Furthermore, the Fourier series coefficients c_k of the linear combination of $x(t)$ and $y(t)$, $z(t) = Ax(t) + By(t)$, are given by the same linear combination of the Fourier series coefficients for $x(t)$ and $y(t)$. That is,

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \stackrel{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} c_k = Aa_k + Bb_k.$$

تذکر ۱ : نتیجه فوق قابل تعمیم به ترکیب خطی هر تعداد سیگنال متناوب با دوره تناوب یکسان است.

تذکر ۲ : اگر $x(t)$ و $y(t)$ دوره تناوب یکسان نداشته باشند ، با وجود متناوب بودن $Z(t)$ رابطهٔ فوق برای ضرائب سری فوریه آنها برقرار نیست.

Time Shifting ۲. انتقال زمانی

When a time shift is applied to a periodic signal $x(t)$, the period T of the signal is preserved. The Fourier series coefficients b_k of the resulting signal $y(t) = x(t - t_0)$ may be expressed as

$$b_k = \frac{1}{T}\int_T x(\underbrace{t - t_0}_{\tau})e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_T x(\tau)e^{-jk\omega_0(\tau+t_0)}d\tau = e^{-jk\omega_0 t_0}\frac{1}{T}\int_T x(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}d\tau$$

$$= e^{-jk\omega_0 t_0}a_k = e^{-jk(2\pi/T)t_0}a_k,$$

where a_k is the kth Fourier series coefficient of $x(t)$. That is, if

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathfrak{FS}} a_k, \quad \text{then} \quad x(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathfrak{FS}} e^{-jk\omega_0 t_0}a_k = e^{-jk(2\pi/T)t_0}a_k.$$

One consequence of this property is that, when a periodic signal is shifted in time, the *magnitudes* of its Fourier series coefficients remain unaltered. That is, $|b_k| = |a_k|$.

نکته : $|b_k| = |a_k|$ & $\measuredangle b_k = \measuredangle a_k - k\omega_0 t_0$

۳. وارونگی زمانی Time Reversal

The period T of a periodic signal $x(t)$ also remains unchanged when the signal undergoes time reversal. To determine the Fourier series coefficients of $y(t) = x(-t)$, let us consider the effect of time reversal on the synthesis equation

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk2\pi t/T} \Longrightarrow x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jk2\pi t/T}.$$

Making the substitution $k = -m$, we obtain $y(t) = x(-t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \underbrace{a_{-m}}_{b_m} e^{jm2\pi t/T}$.

That is, if $x(t) \overset{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} a_k$, then $x(-t) \overset{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} a_{-k}$.

In other words time reversal applied to a continuous-time signal results in a time reversal of the corresponding sequence of Fourier series coefficients. An interesting consequence of the time-reversal property is that if $x(t)$ is even—that is, if $x(-t) = x(t)$—then its Fourier series coefficients are also even—i.e., $a_{-k} = a_k$. Similarly, if $x(t)$ is odd, so that $x(-t) = -x(t)$, then so are its Fourier series coefficients—i.e., $a_{-k} = -a_k$.

نکته: ضرایب سری فوریه سیگنال‌های متناوب زوج، یک دنبالهٔ زوج است.

ضرایب سری فوریه سیگنال‌های متناوب فرد، یک دنبالهٔ فرد است.

Time Scaling ۴. تغییر مقیاس زمانی

Time scaling is an operation that in general changes the period of the underlying signal. Specifically, if $x(t)$ is periodic with period T and fundamental frequency $\omega_0 = 2\pi/T$, then $x(\alpha t)$, where α is a positive real number, is periodic with period T/α and fundamental frequency $\alpha\omega_0$.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \Longrightarrow \quad x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(\alpha\omega_0)t}$$

We emphasize that, while the Fourier coefficients have not changed, the Fourier series representation *has* changed because of the change in the fundamental frequency.

تذکر : در شرایط تغییر مقیاس زمانی ، ضرائب سری فوریه تغییری نمی کنند اما با توجه به
تغییر فرکانس اصلی سیگنال ، نمایش سری فوریه تغییر می کند.

Multiplication ۵. ضرب دو سیگنال

Suppose that $x(t)$ and $y(t)$ are both periodic with period T and that

$$x(t) \stackrel{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} a_k, \quad \& \quad y(t) \stackrel{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} b_k.$$

Since the product $x(t)y(t)$ is also periodic with period T, we can expand it in a Fourier series with Fourier series coefficients h_k expressed in terms of those for $x(t)$ and $y(t)$.

$$x(t)y(t) \stackrel{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} h_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}.$$

ضرائب بسط سری فوریه برای حاصلضرب دو سیگنال متناوب با دوره تناوب یکسان، از حاصل جمع کانولوشن بین ضرائب سری فوریه آن دو سیگنال به دست می آید.

اثبات:

$$x(t)y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jn\omega_0 t} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_n b_k e^{j(n+k)\omega_0 t}$$

$n+k=l \Rightarrow k=l-n$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_n b_{l-n} e^{jl\omega_0 t}$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_{l-n} \right] e^{jl\omega_0 t} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l e^{jl\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow h_l = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_{l-n} = a_l * b_l$$

۶. مزدوج گیری و تقارن مزدوج Conjugation and Conjugate Symmetry

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k \qquad x^*(t) \xleftrightarrow{FS} b_k = ?$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow \underline{b_k = a_{-k}^*}$$

نتیجه مهم: اگر $x(t)$ حقیقی باشد یعنی $x^*(t)=x(t)$ آنگاه: $a_k = b_k = a_{-k}^*$

(تقارن هرمیتی)

conjugate symmetric.

حقیقی $x(t) \Rightarrow a_k = a_{-k}^*$

ضرائب فوریه متقارن هرمیتی هستند.

$$\Rightarrow \begin{cases} |a_k| = |a_{-k}| & \text{دنبالهٔ زوج} \\ \measuredangle a_k = -\measuredangle a_{-k} & \text{〃 فرد} \\ Re\{a_k\} = Re\{a_{-k}\} & \text{〃 زوج} \\ Im\{a_k\} = -Im\{a_{-k}\} & \text{〃 فرد} \end{cases}$$

نکته ۱: اگر $x(t)$ سیگنال متناوب حقیقی و زوج باشد آنگاه:

$a_k = a_{-k} = a_{-k}^* = a_k^* \Rightarrow$ ضرائب سری فوریه حقیقی و زوج هستند.

نکته ۲: اگر $x(t)$ سیگنال متناوب حقیقی و فرد باشد آنگاه:

$a_k = -a_{-k} = a_{-k}^* = -a_k^* \Rightarrow$ ضرائب سری فوریه موهومی و فرد هستند.

۷. رابطهٔ پارسوال برای سیگنال‌های متناوب زمان‌پیوسته

Parseval's Relation for Continuous-Time Periodic Signals

$$\frac{1}{T}\int_{T}|x(t)|^{2}dt=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|a_k|^{2},$$

اثبات:

$$|x(t)|^{2}=x(t)\cdot x^{*}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n^{*}e^{-jn\omega_0 t}$$

$$=\sum_{k}\sum_{n}a_k a_n^{*}e^{j(k-n)\omega_0 t}$$

$$\frac{1}{T}\int_{T}|x(t)|^{2}dt=\sum_{k}\sum_{n}a_k a_n^{*}\Big[\underbrace{\frac{1}{T}\int_{T}e^{j(k-n)\omega_0 t}dt}_{\delta[k-n]}\Big]=\sum_{k}|a_k|^{2}$$

Note that the left-hand side of the Parseval's relation is the average power (i.e., energy per unit time) in one period of the periodic signal $x(t)$. Also,

$$\frac{1}{T}\int_T \left|a_k e^{jk\omega_0 t}\right|^2 dt = \frac{1}{T}\int_T |a_k|^2 dt = |a_k|^2,$$

توان متوسط هارمونیک kام در سری فوریه

so that $|a_k|^2$ is the average power in the kth harmonic component of $x(t)$. Thus, what Parseval's relation states is that the total average power in a periodic signal equals the sum of the average powers in all of its harmonic components.

طبق رابطهٔ پارسوال، کل توان متوسط یک سیگنال متناوب برابر است با مجموع توان های متوسط در هارمونیک های موجود در نمایش سری فوریهٔ آن سیگنال.

جدول خلاصهٔ خواص سری فوریه برای سیگنال های متناوب زمان پیوسته

TABLE 3.1 PROPERTIES OF CONTINUOUS-TIME FOURIER SERIES

Property	Section	Periodic Signal	Fourier Series Coefficients
		$x(t)$, $y(t)$ Periodic with period T and fundamental frequency $\omega_0 = 2\pi/T$	a_k, b_k
Linearity	3.5.1	$Ax(t) + By(t)$	$Aa_k + Bb_k$
Time Shifting	3.5.2	$x(t - t_0)$	$a_k e^{-jk\omega_0 t_0} = a_k e^{-jk(2\pi/T)t_0}$
Frequency Shifting		$e^{jM\omega_0 t} = e^{jM(2\pi/T)t} x(t)$	a_{k-M}
Conjugation	3.5.6	$x^*(t)$	a^*_{-k}
Time Reversal	3.5.3	$x(-t)$	a_{-k}
Time Scaling	3.5.4	$x(\alpha t)$, $\alpha > 0$ (periodic with period T/α)	a_k
Periodic Convolution		$\int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$Ta_k b_k$
Multiplication	3.5.5	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$

Differentiation		$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0 a_k = jk\frac{2\pi}{T}a_k$
Integration		$\int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt$ (finite valued and periodic only if $a_0 = 0$)	$\left(\frac{1}{jk\omega_0}\right)a_k = \left(\frac{1}{jk(2\pi/T)}\right)a_k$
Conjugate Symmetry for Real Signals	3.5.6	$x(t)$ real	$\begin{cases} a_k = a_{-k}^* \\ \Re e\{a_k\} = \Re e\{a_{-k}\} \\ \Im m\{a_k\} = -\Im m\{a_{-k}\} \\ \lvert a_k\rvert = \lvert a_{-k}\rvert \\ \measuredangle a_k = -\measuredangle a_{-k} \end{cases}$
Real and Even Signals	3.5.6	$x(t)$ real and even	a_k real and even
Real and Odd Signals	3.5.6	$x(t)$ real and odd	a_k purely imaginary and odd
Even-Odd Decomposition of Real Signals		$\begin{cases} x_e(t) = \mathcal{E}v\{x(t)\} & [x(t) \text{ real}] \\ x_o(t) = \mathcal{O}d\{x(t)\} & [x(t) \text{ real}] \end{cases}$	$\Re e\{a_k\}$ $j\Im m\{a_k\}$

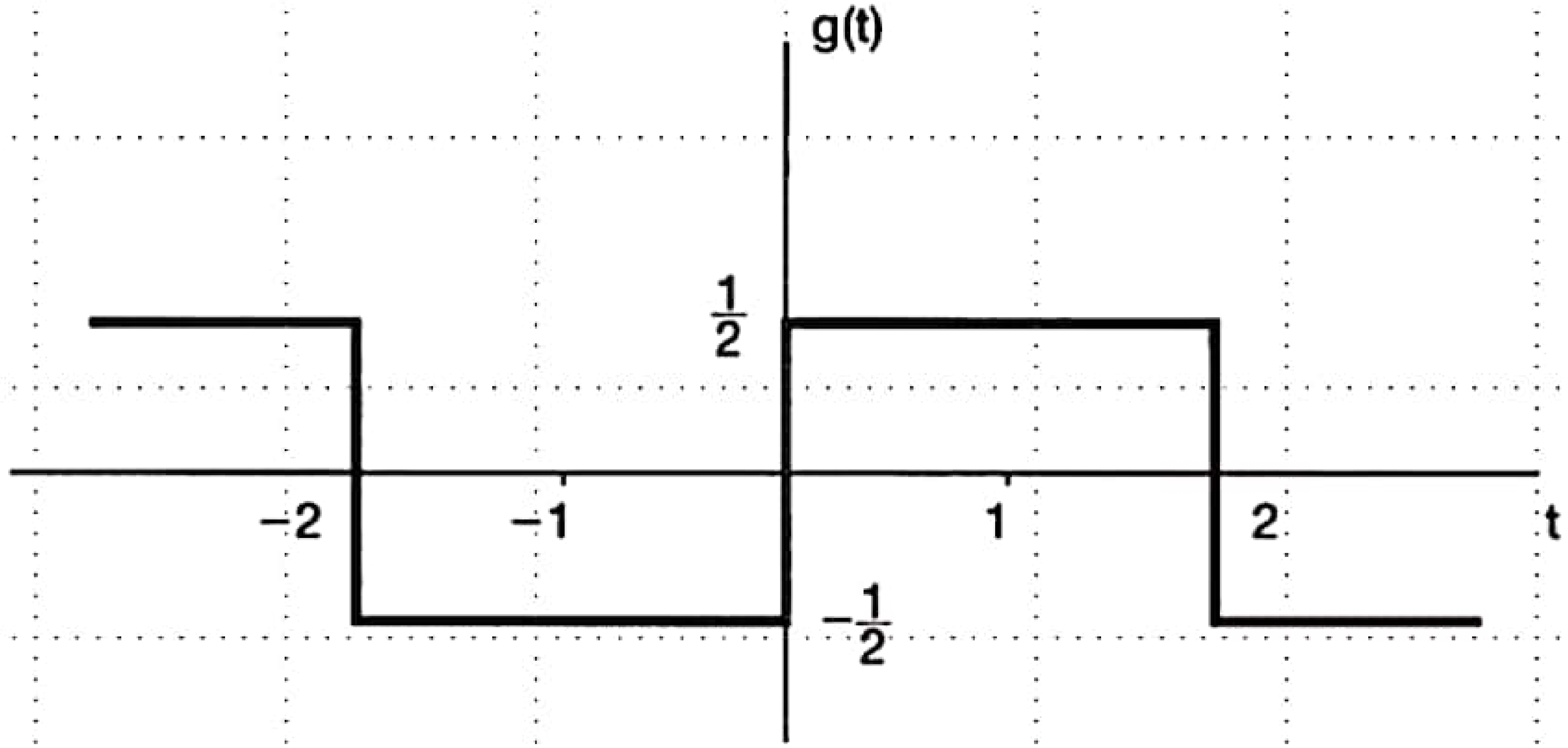
Parseval's Relation for Periodic Signals

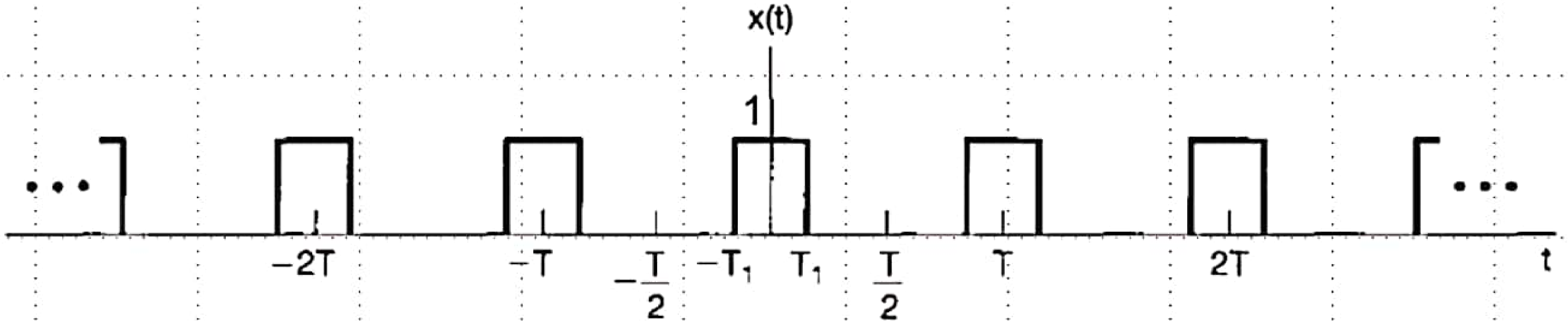
$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

مثال‌هایی برای استفاده از خواص سری فوریه

مثال ۱. $T = 4$

به جای محاسبهٔ مستقیم ضرائب سری فوریه برای سیگنال $g(t)$، سعی می‌کنیم $g(t)$ را برحسب $x(t)$ که ضرائب آن قبلاً محاسبه شده است، بنویسیم.





Referring to that example, we see that, with $T = 4$ and $T_1 = 1$,

$$g(t) = x(t-1) - 1/2.$$

$$x(t-t_0) \overset{\mathfrak{F}S}{\longleftrightarrow} e^{-jk\omega_0 t_0} a_k = e^{-jk(2\pi/T)t_0} a_k.$$

The time-shift property in Table 3.1 indicates that, if the Fourier Series coefficients of $x(t)$ are denoted by a_k, the Fourier coefficients of $x(t-1)$ may be expressed as

$$b_k = a_k e^{-jk\pi/2}.$$

The Fourier coefficients of the *dc offset* in $g(t)$—i.e., the term $-1/2$ on the right-hand is

$$c_k = \begin{cases} 0, & \text{for } k \neq 0 \\ -\frac{1}{2}, & \text{for } k = 0 \end{cases}.$$

$$C_k = -\frac{1}{۲}\delta[k]$$

Applying the linearity property in Table 3.1, we conclude that the coefficients for $g(t)$ may be expressed as

$$d_k = \begin{cases} a_k e^{-jk\pi/2}, & \text{for } k \neq 0 \\ a_0 - \frac{1}{2}, & \text{for } k = 0 \end{cases},$$

قبلاً اثبات شده است:

$$a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}, \quad k \neq 0,$$

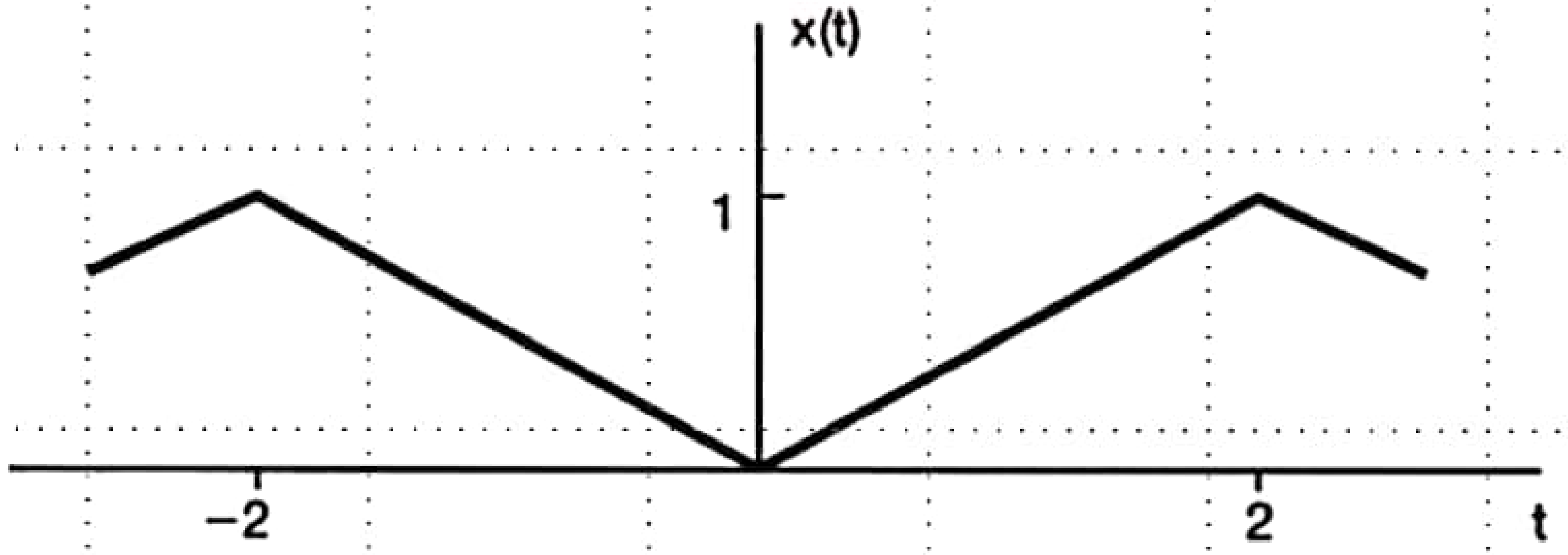
$$\omega_0 T_1 = \frac{2\pi}{T} T_1 = \frac{2\pi}{4} \times 1 = \frac{\pi}{2}$$

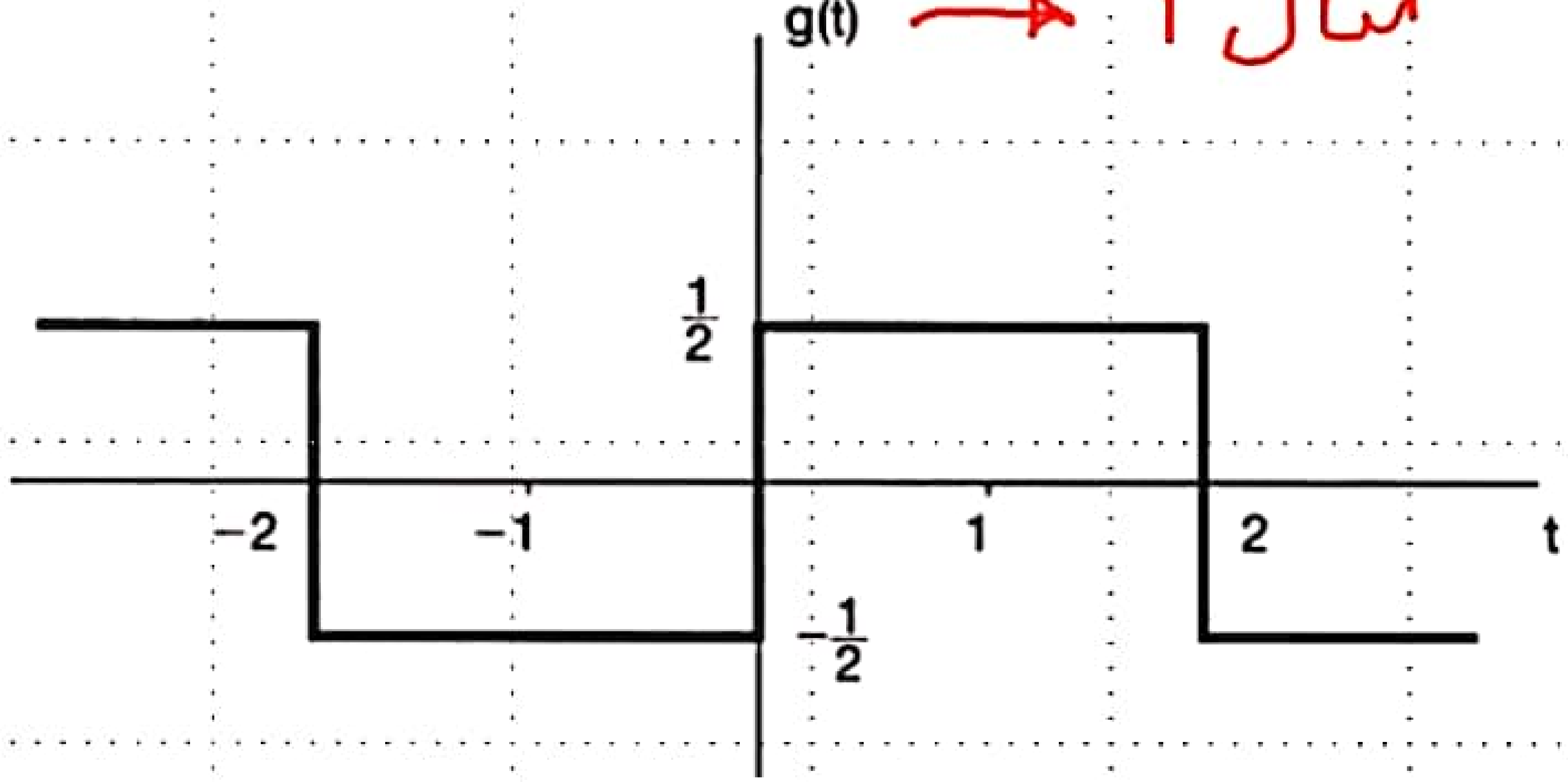
$$a_0 = \frac{2T_1}{T} = \frac{(2)(1)}{4} = \frac{1}{2} \quad \& \quad \omega_0 T_1 = \frac{2\pi}{T} T_1 = \frac{2\pi}{4} \times 1 = \frac{\pi}{2}$$

ضرائب سری فوریه برای $g(t)$

$$d_k = \begin{cases} \frac{\sin(\pi k/2)}{k\pi} e^{-jk\pi/2}, & \text{for } k \neq 0 \\ 0, & \text{for } k = 0 \end{cases}.$$

مثال ۲.





→ مثال ۱

The derivative of this signal is the signal $g(t)$ in the previous example

$g(t) = x'(t)$

Denoting the Fourier coefficients of $g(t)$ by d_k and those of $x(t)$ by e_k, we see that the differentiation property in Table 3.1 indicates that

$g(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} d_k$

$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} e_k$

$$d_k = jk(\pi/2)e_k.$$

This equation can be used to express e_k in terms of d_k, except when $k = 0$.

$$e_k = \frac{2d_k}{jk\pi} = \frac{2\sin(\pi k/2)}{j(k\pi)^2}e^{-jk\pi/2}, \quad k \neq 0.$$

For $k = 0$, e_0 can be determined by finding the area under one period of $x(t)$ and dividing by the length of the period:

$$e_0 = \frac{1}{2}.$$

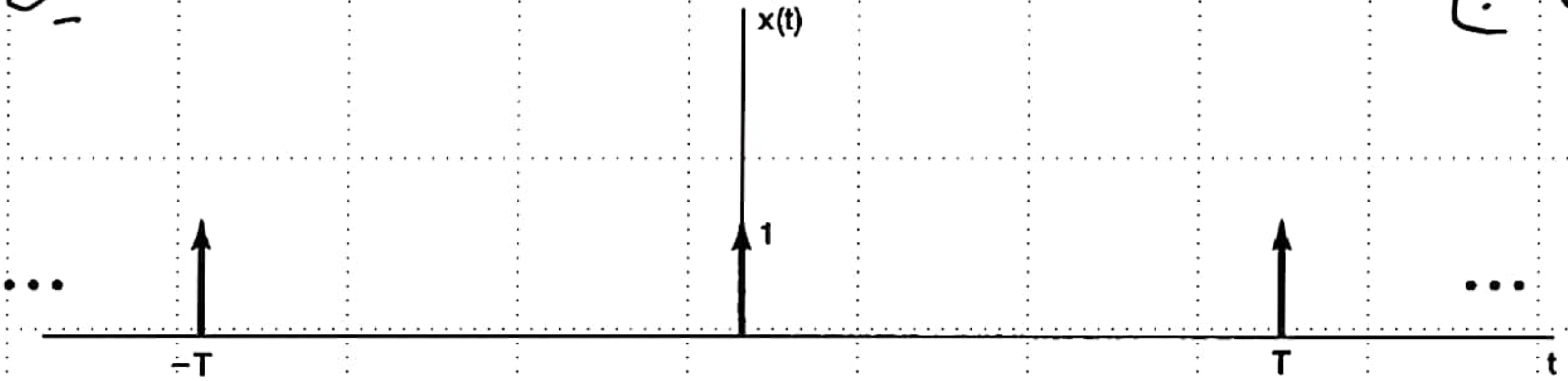
مثال ۳. قطار ضربه

a periodic train of impulses, or *impulse train*

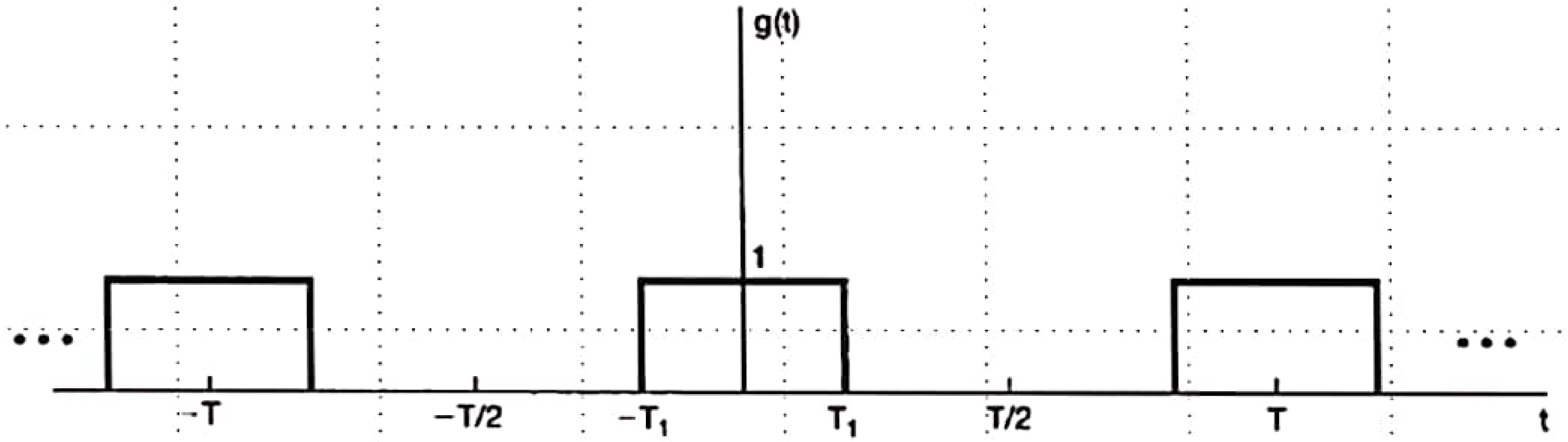
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT); \quad \overset{\mathcal{FS}}{\Longleftrightarrow} \quad a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk2\pi t/T} dt = \frac{1}{T}. \quad , \quad \forall k$$

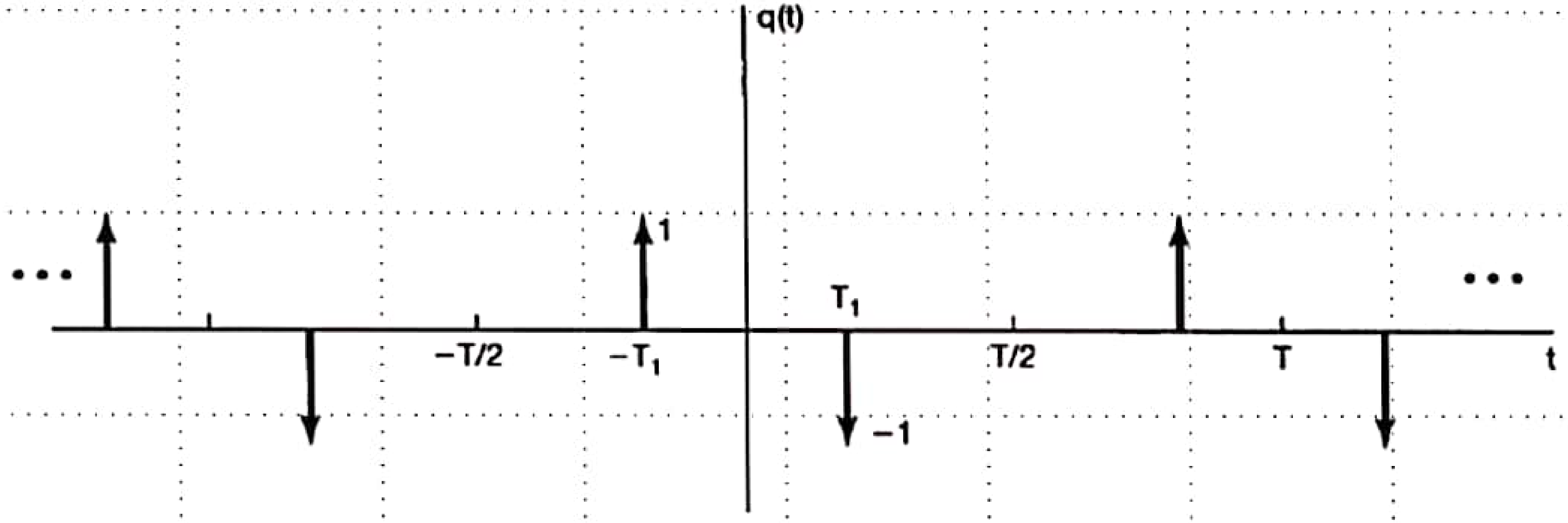
$x(t)$ حقیقی و زوج

ضرائب a_k حقیقی و زوج



روش دیگری برای محاسبهٔ ضرائب
سری فوریه پالس مربعی متناوب





$$q(t) = g'(t)$$

We may interpret $q(t)$ as the difference of two shifted versions of the impulse train $x(t)$.

$$q(t) = x(t + T_1) - x(t - T_1).$$

مجموع دو قطار ضربهٔ شیفت یافته

First, from the time-shifting and linearity properties, the Fourier series coefficients b_k of $q(t)$ may be expressed in terms of the Fourier series coefficients a_k of $x(t)$; that is,

$$q(t) \overset{\mathcal{FS}}{\Longleftrightarrow} b_k = e^{jk\omega_0 T_1} a_k - e^{-jk\omega_0 T_1} a_k, \qquad \text{where } \omega_0 = 2\pi/T.$$

$$\Longrightarrow \qquad b_k = \frac{1}{T}[e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}] = \frac{2j\sin(k\omega_0 T_1)}{T}.$$

Finally, since $q(t)$ is the derivative of $g(t)$, we can use the differentiation property in Table 3.1 to write

$$b_k = jk\omega_0 c_k,$$

where the c_k are the Fourier series coefficients of $g(t)$. Thus,

$$g(t) \overset{\mathcal{FS}}{\Longleftrightarrow} c_k = \frac{b_k}{jk\omega_0} = \frac{2j\sin(k\omega_0 T_1)}{jk\omega_0 T} = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}, \qquad k \neq 0,$$

$K \neq 0$

نتیجه‌ای که قبلاً با محاسبه مستقیم حاصل شده بود.

However, since c_0 is just the average value of $g(t)$ over one period, we can determine it by

$$c_0 = \frac{2T_1}{T}.$$ (همان نتیجه قبلی در مثال پالس مربعی متناوب)

مثال ۴. تعیین یک سیگنال متناوب مجهول $x(t)$ براساس اطلاعاتی درباره سری فوریه آن

Suppose we are given the following facts about a signal $x(t)$:

1. $x(t)$ is a real signal.
2. $x(t)$ is periodic with period $T = 4$, and it has Fourier series coefficients a_k.
3. $a_k = 0$ for $|k| > 1$.
4. The signal with Fourier coefficients $b_k = e^{-j\pi k/2} a_{-k}$ is odd.
5. $\frac{1}{4}\int_4 |x(t)|^2 dt = 1/2$.

② $\Rightarrow \omega_0 = 2\pi/T = \frac{2\pi}{4} = \pi/2$

③ $\Rightarrow x(t) = a_{-1} e^{-j\frac{\pi}{2}t} + a_0 + a_1 e^{+j\frac{\pi}{2}t}$

① $\Rightarrow x(t) = x^*(t) \Longrightarrow a_1 = a_{-1}^*$

$\Rightarrow x(t) = a_0 + 2\mathrm{Re}\{a_1 e^{j\frac{\pi}{2}t}\}$

④ $\Rightarrow b_k = e^{-jk\pi/2} a_{-k}$ (خواص وارونگی و انتقال زمانی)

$y(t) = x(-t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_{-k}$ $\qquad e^{-jk\frac{\pi}{2}} = e^{-jk\omega_0 t_0}$

$\omega_0 \to \pi/2 \qquad t_0 \to 1$

$f(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} b_k$

(فرد است)

$\Rightarrow f(t) = y(t-1) = x(-t+1)$

$x(t)$ حقیقی $\Rightarrow$ $f(t) = x(-t+1)$ حقیقی و فرد $\Rightarrow$ b_k ها موهومی و فرد هستند

$$\Rightarrow b_0 = 0 \quad , \quad b_{-1} = b_1^* = -b_1$$

از آنجا که وارونگی و انتقال زمانی تأثیری بر روی توان متوسط سیگنال در یک دوره تناوب ندارند

بنابراین شرط ۵ را می‌توان در مورد $f(t) = x(-t+1)$ هم نوشت:

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\int_4 |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \xRightarrow{\text{پارسوال}} |b_{-1}|^2 + |b_1|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow |b_1|^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow |b_1| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = j\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad b_{-1} = -j\frac{1}{2} \\ b_1 = -j\frac{1}{2} \quad , \quad b_{-1} = j\frac{1}{2} \end{cases}$$

۴ $\Rightarrow \quad b_1 = e^{-j\frac{\pi}{2}} a_{-1} = -j a_{-1} \qquad b_{-1} = e^{j\frac{\pi}{2}} a_1 = j a_1$

$\Rightarrow \quad a_{-1} = j b_1 \quad , \quad a_1 = -j b_{-1} \quad , \quad a_0 = b_0 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{-1} = -\frac{1}{2} \quad , \quad a_1 = -\frac{1}{2} \quad , \quad a_0 = 0 \\ a_{-1} = \frac{1}{2} \quad , \quad a_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad a_0 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad x(t) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} t\right)$ یا $\cos\left(\frac{\pi}{2} t\right)$

سری فوریه و سیستم‌های LTI زمان‌پیوسته

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$x(t)=x(t+T) \Rightarrow y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t+\tau)\,d\tau = y(t+T)$$

$$\Longrightarrow \quad y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$H(s)=\mathcal{L}\{h(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st}\,dt$$

مثال) ورودی یک سیستم LTI :

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos 2\pi t + \cos 4\pi t + \frac{2}{3}\cos 6\pi t.$$

و پاسخ ضربهٔ آن :

$$h(t) = e^{-t}u(t).$$

مطلوبست نمایش سری فوریهٔ خروجی سیستم.

$$x(t) = \sum_{k=-3}^{+3} a_k e^{jk2\pi t},$$

$\omega_0 = 2\pi$ و $T = 1$

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4}, \qquad a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2}, \qquad a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}.$$

$$y(t) = \sum_{k=-3}^{+3} b_k e^{jk2\pi t},$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s+1} \qquad Re\{s\} > -1 \qquad b_k = a_k H(jk2\pi),$$

$$b_0 = 1,$$

$$b_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+j2\pi}\right), \qquad b_{-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-j2\pi}\right),$$

$$b_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+j4\pi}\right), \qquad b_{-2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-j4\pi}\right),$$

$$b_3 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+j6\pi}\right), \qquad b_{-3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-j6\pi}\right).$$

Note that $y(t)$ must be a real-valued signal, since it is the convolution of $x(t)$ and $h(t)$, which are both real. This can be verified by examining and observing that $b_k^* = b_{-k}$.