سوال ۱)

1.1

$$DES_{K_{w}}(x)=DES_{K_{w}}^{-1}(x)$$
 با توجه به این که به ازای هر x داریم:

بنابراین عملیات رمزنگاری و رمزگشایی باید یکسان باشد. پس زیرکلیدهای تولید شده باید دارای رابطهی زیر با یکدیگر باشند:

$$k_{i+1} = k_{16-i}$$
 , $i = 0,1,...,7$

1.7

$$C_{i+1} = C_{16-i}$$
 , $i = 0,1,...,7$

$$D_{i+1} = D_{16-i}$$
 , $i = 0,1,...,7$

بنابراین چهار کلید ضعیف هنگامی بدست میآیند که:

$$C_0 = FFFFFFF_{16}$$
 يا 0000000_{16}

and

$$D_0 = FFFFFFF_{16}$$
 يا 0000000₁₆

بنابراین چهار کلید ضعیف پس از PC-1 به صورت زیر خواهند بود:

$$(C_0, D_0) = 000000000000000_{16}$$

$$(C_0, D_0) = 0000000FFFFFFFF_{16}$$

$$(C_0, D_0) = FFFFFFF0000000_{16}$$

1.7

احتمال انتخاب یکی از کلیدهای ضعیف برابر است با:

$$\frac{4}{2^{56}} = \frac{2^2}{2^{56}} = 2^{-54}$$

سوال ۲)

۲.۱

$$A \oplus B = (AB') \lor (A'B)$$

$$A' \oplus B' = ((A')(B')') \lor ((A')'(B')) = (A'B) \lor (AB') = A \oplus B$$

$$A' \oplus B = (A'B') \lor (AB) = (A'\lor A)(A'\lor B)(B'\lor A)(B'\lor B) = (A'\lor B)(B'\lor A) = ((A'\lor B)' \lor (B'\lor A)')' = ((AB') \lor (A'B))' = (A \oplus B)'$$

7.7

با توجه به این که تابع PC-1 یک جایگشت مشخصی را بر روی بیتها اعمال می کند، مکمل کردن (یا اصطلاحا flip کردن) بیتها قبل یا بعد از آن تفاوتی به وجود نمی آورد؛ بنابراین $PC-1(k')=\left(PC-1(k)\right)'$ است.

۲.۳

مشابه با قسمت قبل، توابع چرخش زیر کلیدها نیز دارای جایگشتهای مشخصی هستند و مکمل کردن (یا اصطلاحا flip کردن) بیتها قبل یا بعد از آن تفاوتی ایجاد نمی کند؛ پس بنابراین $LS_i(C'_{i-1}) = \left(LS_i(C_{i-1})\right)'$ است.

7.4

با توجه به این که PC-2 نیز مانند PC-1 یک جایگشت خطی است، همه ی عملیاتها برای تولید کلید خطی هستند. بنابراین اگر k' ورودی باشد، کلیدهای تولید شده k'_i هستند.

۲.۵

مشابه با قسمتهای قبلی، IP نیز خطی بوده و IP(x') = (IP(x))' است.

4.8

تابع E که هر بیت در یک بردار را به یک یا دو بیت در یک بردار بزرگتر نگاشت یا اصطلاحا map می کند. با توجه به این که هیچ عملیات ترکیبی انجام نمی شود، هر بیت در بردار گسترش یافته حاصل از یک بیت در بردار اصلی است، پس مکمل کردن یک بیت قبل یا بعد از نگاشت کردن تفاوتی ایجاد نمی کند؛ بنابراین $E(R'_i) = (E(R_i))$ است.

۲.٧

میدانیم که $f(R_i,k) = Pig(S(E(R_i) \oplus k)ig)$ است، بنابراین طبق نتایجی که تا کنون بدست آوردهایم، داریم:

$$f(R'_i, k') = P(S(E(R_i) \oplus k')) = P(S(E(R_i)' \oplus k')) = P(S(E(R_i) \oplus k')) = f(R_i, k)$$
 با توجه به این که $R_i = L_{i-1} \oplus f(R_{i-1}, k)$ است، داریم:

$$\Rightarrow L'_{i-1} \oplus f(R'_{i-1}, k') = L'_{i-1} \oplus f(R_{i-1}, k) = (L_{i-1} \oplus f(R_{i-1}, k))' = R'_{i-1}$$

۲.۸

با در نظر گرفتن نتایج قسمت ۷، در صورتی که بیتهای ورودی مکمل شوند، خروجی هر دور نیز مکمل می شود؛ بنابراین بیت- $IP^{-1}(x') = (IP^{-1}(x))'$ های ورودی به تابع IP^{-1} نیز مکمل شده اند و با توجه به این که تابع IP^{-1} خطی است، پس IP^{-1} نیز مکمل شده و با توجه به این که تابع است. بنابراین نتیجه مورد نظر حاصل می شود:

$$y = DES_k(x) \Rightarrow y' = DES_{k'}(x')$$

سوال ۳)

٣.١

در مرحله اول، IP(x) بیت ۵۷ ام را به بیت ۳۳ ام نگاشت میدهد، بنابراین همه ی بیتها برابر با صفر بوده و تنها بیت ۳۳ ام برابر با یک است، پس $L_0=2^{31}$ و $L_0=2^{31}$ است.

 $x \oplus k = x$ هنگام محاسبه $f(R_0)$ ، می توانیم کلید صفر را به دلیل این که $a \oplus 0 = a$ است، به حساب نیاوریم. بنابراین S_1 هنگام محاسبه ورودی مقدار S_2 را به بیت ۲ ام و ۴۸ ام نگاشت می کند؛ یعنی S_{2-7} همه در ورودی مقدار S_3 مقدار S_4 مقدار S_8 مقدار S_8 مقدار ورودی می گیرد.

٣.٢

حداقل تعداد بیتهای خروجی (در هر S-box) که به ازای یک بیت تغییر در ورودی، تغییر خواهند کرد؛ برابر با ۲ است.

٣.٣

با عبور ورودیها از S-box ها، خروجیهای زیر حاصل میشود:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8
ورودى	010000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000001
خروجي	0011	1111	1010	0111	0010	1100	0100	0001

پس از عملیات Permutation بر روی خروجی S-box داریم:

 $1101\ 0000\ 0101\ 1000\ 0101\ 1011\ 1001\ 1110_2$

سپس این مقدار با 0 است، می توان از این مرحله صرف R_1 را تولید کند ولی با توجه به این که L_0 برابر با 0 است، می توان از این مرحله صرف نظر کنیم. بنابراین مقادیر R_1 به صورت زیر بدست می آیند:

$$L_1 = R_0 = 8000\ 0000_{16}$$

 $R_1 = D058\ 5B9E_{16}$

٣.۴

در حالتی که plaintext کاملا صفر است، با توجه به این که همه ی بیتهای ورودی صفر تفاوتی در IP(x) ایجاد نمی کنند، بنابراین خروجی به صورت زیر خواهد بود:

$$L_0 = R_0 = 0$$

سپس خروجی S-box ها به صورت زیر حاصل میشود:

	S_1	\mathcal{S}_2	\mathcal{S}_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8
ورودى	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000
خروجي	1110	1111	1010	0111	0010	1100	0100	1101

بعد از عملیات Permutation داخلی تابع f و XOR کردن با L_0 داریم:

 $R_1 = 1101\ 1000\ 1101\ 1000\ 1101\ 1011\ 1011\ 1100_2$

 $L_1 = 0000 \ 0000_{16}$

اکنون پاسخهای بدست آمده از این قسمت و قسمت قبل (۳.۳) را با یکدیگر XOR میکنیم تا تعداد بیتهایی که دچار تغییر شدهاند را بدست آوریم:

 $1101\ 0000\ 0101\ 1000\ 0101\ 1011\ 1001\ 1110_2$

 \oplus

 $1101\ 1000\ 1101\ 1000\ 1101\ 1011\ 1011\ 1100_2$

=

 $0000\ 1000\ 1000\ 0000\ 1000\ 0000\ 0010\ 0010_2$

همانطور که مشاهده می شود، α بیت از α دچار تغییر شده است، همچنین در یک بیت از α نیز تغییر رخ داده است. بنابراین مشاهده می شود که به ازای تغییر یک بیت در ورودی، α بیت در خروجی دچار تغییر می شوند.

سوال ۴)

4.1

$$A(x) + B(x) = (x^{2} + 1) + (x^{3} + x^{2} + 1) \mod P(x) = x^{3}$$

$$A(x) * B(x) = (x^{2} + 1) * (x^{3} + x^{2} + 1)$$

$$= x^{5} + x^{4} + x^{2} + x^{3} + x^{2} + 1$$

$$= x^{5} + x^{4} + x^{3} + 1$$

حال باید حاصل P(x) * B(x) * B(x) * A(x) * B(x) = 0 حال باید حاصل <math>A(x) * B(x) * B(x) = 0 حال باید حاصل می توان نوشت:

$$x^{4} = x + 1 \mod P(x)$$

$$\Rightarrow A(x) * B(x) \mod P(x)$$

$$= x^{5} + x^{4} + x^{3} + 1 \mod P(x)$$

$$= x(x+1) + (x+1) + x^{3} + 1 \mod P(x)$$

$$= x^{2} + x + x + 1 + x^{3} + 1 \mod P(x)$$

$$= x^{3} + x^{2}$$

4.7

$$A(x) + B(x) = (x^{2} + 1) + (x + 1) \mod P(x) = x^{2} + x$$

$$A(x) * B(x) = (x^{2} + 1) * (x + 1) = x^{3} + x^{2} + x + 1$$

$$\Rightarrow A(x) * B(x) \mod P(x) = x^{3} + x^{2} + x + 1$$

سوال ۵)

۵.۱

$$\forall a_i \in GF(2) = \{0,1\} : p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

هدف پیدا کردن p(x) های درجه ۳ است، بنابراین $a_3=1$. همچنین باید در نظر داشته باشیم که چند جملهای مورد نظر باید p(x) باشد؛ یعنی در GF(2) ریشه نداشته باشد، یعنی $p(0) \neq 0$ و $p(0) \neq 0$ ریشه نداشته باشد، یعنی در g(a)

$$p(0) \neq 0 \Rightarrow a_0 \neq 0 \Rightarrow a_0 = 1$$

(اگر مقدار a_0 برابر با یک نباشد، چند جملهای irreducible نیست و میتواند از یک x فاکتور گرفته و آن را به دو عبارت با درجه کمتر تبدیل کنیم)

$$p(1) \neq 0 \implies 1 \times 1 + a_2 + a_1 + 1 \neq 0 \implies a_2 + a_1 \neq 0 \mod 2$$

بنابراین ۲ حالت داریم:

$$a_2 = 1 \implies p(x) = x^3 + x^2 + 1$$

 $a_1 = 1 \implies p(x) = x^3 + x + 1$

بنابراین چند جملهای های irreducible از درجه π بر روی میدان GF(2) به صورت زیر میباشند:

$$x^3 + x^2 + 1$$
$$x^3 + x + 1$$

۵.۲

$$\forall \ a_i \in GF(2) = \{0,1\} : p(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

هدف پیدا کردن p(x) های درجه ۴ است، بنابراین $a_4=1$. همچنین باید در نظر داشته باشیم که چند جملهای مورد نظر باید p(x) هدف پیدا کردن p(x) های درجه ۴ است، بنابراین $a_4=1$ است، بنابراین $a_4=1$

$$p(0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 1$$

(اگر مقدار a_0 برابر با یک نباشد، چند جملهای irreducible نیست و میتواند از یک x فاکتور گرفته و آن را به دو عبارت با درجه کمتر تبدیل کنیم)

$$p(1) \neq 0 \ \Rightarrow \ 1 \times 1 + a_3 + a_2 + a_1 + 1 \neq 0 \ \Rightarrow \ a_3 + a_2 + a_1 \neq 0 \mod 2$$
 بنابراین ۴ حالت داریم:

(اگر دو تا از ضرایب a_i برابر با یک یا همه آنها برابر با صفر باشند، نامساوی $a_1 + a_2 + a_1 \neq 0 \pmod{2}$ برقرار نمی شود)

$$a_3 = 1$$
, $a_2 = 1$, $a_1 = 1 \Rightarrow p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
 $a_3 = 1 \Rightarrow p(x) = x^4 + x^3 + 1$
 $a_1 = 1 \Rightarrow p(x) = x^4 + x + 1$
 $a_2 = 1 \Rightarrow p(x) = x^4 + x^2 + 1 \times$

چند جملهای آخر reducible است، یعنی داریم:

$$p(x) = x^4 + x^2 + 1 \mod 2 = (x^2 + x + 1)^2$$

سه چند جملهای دیگر به هیچ کدام از عوامل درجه پایین تر خود تجزیه نمی شوند و irreducible هستند. بنابراین چند جملهای های irreducible از درجه f بر روی میدان f به صورت زیر میباشند:

$$x^{4} + x^{3} + x^{2} + x + 1$$
$$x^{4} + x^{3} + 1$$
$$x^{4} + x + 1$$

سوال ۶)

با توجه به این که همه S-box ها عملکرد یکسانی دارند و ورودی همه آنها برابر با FF_{16} است، با استفاده از جدول S-box ها رودد. (جدول S-box ها را بدست آورد.

Table 4.3 AES S-Box: Substitution values in hexadecimal notation for input byte (xy)

		1								y							
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
	0	63	7C	77	7B	F2	6B	6F	C5	30	01	67	2B	FE	D7	AB	76
	1	CA	82	C9	7D	FA	59	47	F ₀	AD	D4	A2	AF	9C	A4	72	C ₀
	2	B7	FD	93	26	36	3F	F7	CC	34	A5	E5	F1	71	D8	31	15
	3	04	C7	23	C3	18	96	05	9A	07	12	80	E2	EB	27	B2	75
	4	09	83	2C	1A	1B	6E	5A	A ₀	52	3B	D ₆	B3	29	E3	2F	84
	5	53	D1	00	ED	20	FC	B 1	5B	6A	CB	BE	39	4A	4C	58	CF
	6	D0	EF	AA	FB	43	4D	33	85	45	F9	02	7F	50	3C	9F	A8
	7	51	A3	40	8F	92	9D	38	F5	BC	B6	DA	21	10	FF	F3	D2
\boldsymbol{x}	8	CD	0C	13	EC	5F	97	44	17	C4	A7	7E	3D	64	5D	19	73
	9	60	81	4F	DC	22	2A	90	88	46	EE	B8	14	DE	5E	0B	DB
	A	E0	32	3A	0A	49	06	24	5C	C2	D3	AC	62	91	95	E4	79
	B	E7	C8	37	6D	8D	D5	4E	A9	6C	56	F4	EA	65	7A	AE	08
	C	BA	78	25	2E	1C	A6	B4	C6	E8	DD	74	1F	4B	BD	8B	8A
	D	70	3E	B5	66	48	03	F6	0E	61	35	57	B9	86	C1	1D	9E
	E	E1	F8	98	11		D9		94	9B	1E	87	0.00		55		DF
	F	8C	A1	89	0D	BF	E6	42	68	41	99	2D	0F	B0	54	BB	16

___ بنابراین خروجی S-box ها برابر است با:

با توجه به این که همه درایهها یکسان هستند و جابهجایی آنها تفاوتی را ایجاد نمی کند، بنابراین می توان از عملیات ShiftRow صرف نظر کرد. برای عملیات MixColumn باید ضرب زیر را در میدان $GF(2^8)$ انجام دهیم:

در میدان توسعه یافته $GF(2^8)$ عملیات به صورت زیر انجام می شود:

$$01 \equiv 0000\ 0001 \equiv 1$$
, $02 \equiv 0000\ 0010 \equiv x$, $03 \equiv 0000\ 0011 \equiv x + 1$
 $\Rightarrow 01 + 01 + 02 + 03 \equiv 1 + 1 + x + x + 1 \equiv 1 \mod 2$
 $\Rightarrow 01 \times 16 = 16$

بنابراین خروجی عملیات MixColumn تغییری نمی کند و برابر است با:

در نهایت عملیات AddRoundKey به صورت زیر انجام می شود:

(کلید دور اول برابر با کلید تغییر نیافته AES میباشد، همان کلید تمام یک اولیه)

سوال ۷)

٧.١

با توجه به این که طول کلید از طول بلوک (بر حسب بیت) کمتر است، ممکن است که بر اساس اصل لانه کبوتری، هر کلید به یک متن رمز شده یکتا نگاشت شود؛ ولی این امکان هم وجود دارد که چند کلید به یک متن رمز شده نگاشت شوند.

اگر t را تعداد جفتهای plaintext و ciphertext مورد استفاده برای شکستن رمز در نظر بگیریم، احتمال پیدا کردن یک کلید مثبت کاذب برابر است با 2^{k-tn} :

بنابراین بسته به مقادیر n و k ، اگر از دو جفت plaintext و plaintext استفاده کنیم، احتمال بدست آوردن کلید کاذب بسیار کم شده و اطمینان بیشتری بدست می آید. در صورتی که آخرین کلید مورد بررسی درست باشد، بدترین حالت، باید 2^k کلید را چک کنیم.

٧.٢

با دانستن بردار اولیه (IV) در مد CBC، شکستن رمز همانند مد ECB شده و تفاوت چندانی ندارد. تنها تفاوت بین این دو مد، وجود XOR در مد CBC است که باید قبل از هر بررسی با i-1 امین متن رمزشده یا IV انجام شود؛ که این یک افزایش ناچیز در هزینه میباشد.

بنابراین بسته به مقادیر n و k ، اگر از دو جفت plaintext و plaintext استفاده کنیم، احتمال بدست آوردن کلید کاذب کمتر شده و اطمینان بیشتری بدست می آید. همچنین در بدترین حالت نیاز است که 2^k کلید را چک کنیم.

٧.٣

ندانستن بردار اولیه (IV) به این معنی است که نمی دانیم چه برداری قبل از رمزگذاری با متن اصلی XOR شده است.

اگر دو جفت plaintext و ciphertext داشته باشیم؛ می توانیم از ciphertext بلوک اول به عنوان IV برای بلوک دوم استفاده کنیم و سپس مشابه با قسمت های قبلی، با جستجو کلید را بدست آورده و در نهایت اولین بلوک را توسط کلید رمزگشایی کرده و مقدار IV را بدست آوریم.

با داشتن جفت سوم plaintext و ciphertext، میتوان نتایج را بررسی و سطح اطمینان بالاتری بدست آورده و همچنین احتمال بدست آوردن کلید کاذب را بسیار کمتر کنیم.

٧.۴

در حالتی که مقدار IV شناخته شده است، تنها تفاوت در هزینه محاسبه XOR برای هر بلوک در مد CBC است.

در حالتی که مقدار IV ناشناخته است، برای رسیدن به یک سطح اطمینان برابر، در مد CBC نیاز به یک جفت plaintext و ciphertext بیشتر نسبت به مد ECB داریم.

(به عبارتی دیگر با داشتن تعداد t جفت plaintext و plaintext در هر دو مد، سطح اطمینان مد t برابر با t و سطح اطمینان مد t برابر با t میباشد)

سوال ۸)

٨.١

در حالت ECB، تنها بلوکی (Block) که تحت تاثیر قرار می گیرد؛ بلوک حاوی خطا میباشد، زیرا بلوکها هیچ تعامل یا وابستگی به یکدیگر ندارند.

۸.۲

در حالت CBC، خطا در بلوک بعدی (y_{i+1}) نیز منتشر می شود، زیرا هنگام رمزگشایی بلوک (y_{i+1}) ، تحت تاثیر خطای بلوک قبلی قرار می گیرد. ولی با توجه به این که بلوک (y_{i+1}) هنگام انتقال دچار خطا نشده است، بنابراین در هنگام رمزگشایی بلوک (y_{i+1}) خطا رخ نمی دهد.

۸.۳

در حالت CBC، یک خطا در متن اصلی (clear text) که قبل از عملیات رمزگذاری ایجاد شدهاست، تنها بر روی بلوک حاوی خطا تاثیر می گذارد؛ زیرا در این مورد، عملیات رمزگذاری و انتقال در واقع بدون خطا انجام شده و فقط دادههای اشتباه رمزگذاری شده اند. بنابراین همان متن توسط باب دریافت می شود که توسط آلیس رمزگذاری شده ولی با معنایی نادرست. البته بلوک خطا و تمام بلوکهای بعدی به دلیل انتشار این تغییر، متن رمز متفاوتی خواهند داشت، ولی این یک خطا نیست و این بلوکها در سمت گیرنده به درستی رمزگشایی می شوند.

۸.۴

در حالت CFB، خطاها بر روی بلوکی که در آن رخ داده و بلوک بعدی، با خراب کردن کلید در هنگام رمزگشایی، تاثیر می گذارند. زیرا از متن رمزشده به عنوان ورودی در تولید کلید در عملیات رمزگذاری استفاده می شود و با توجه به این که CFB تا حدودی همانند یک رمز جریانی (stream cipher) عمل می کند؛ در بلوکی که خطا رخ می دهد، فقط آن بیت تغییر می کند. ولی با این وجود به دلیل فیدبک متن رمزشده حاوی خطا، بیتهای کلید نیز دچار خطا شده و رمزگشایی بلوک بعدی (y_{i+1}) نیز حاوی خطا می باشد. ولی چون متن بلوک بعدی (x_{i+1}) خطا ندارد، بنابراین در هنگام رمزگشایی بلوک (x_{i+1}) خطا رخ نمی دهد (همانند حالت (x_{i+1})).