

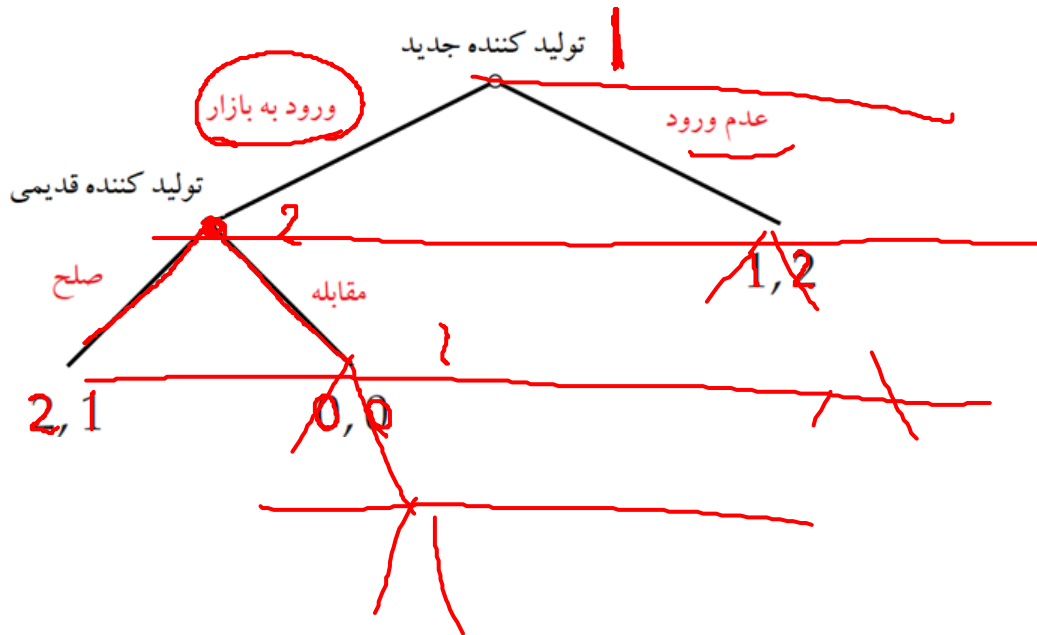
فصل ۵  
بازار

# بازیهای توسیعی Extensive Games

۱	۲
...	...
...	...

فرم نرمال  
بازار

❖ مثال: تولید کننده ای قدیمی به تنهایی در حال تولید یک محصول در بازار است و در انحصار بازار، سود ۲ را کسب می کند. یک تولید کننده جدید، می تواند محصول دیگری تولید کند و سود ۱ به دست آورد. اما تولید کننده جدید می تواند خط تولید را تغییر دهد و همان محصول تولید کننده قدیمی را عرضه کند؛ در این صورت تولید کننده قدیمی می تواند به او اجازه فعالیت دهد اما به دلیل فرسودگی تجهیزات، سودش به ۱ کاهش می یابد و تولید کننده جدید سود ۲ خواهد داشت. در طرف مقابل تولید کننده قدیمی می تواند وارد یک نزاع با تولید کننده جدید شود که در نتیجه آن، سود هر دو نفر ۰ می شود.



حرکات غیرهمزمان

بازی استراتژیک؟

روش تحلیل و مدل کردن؟

نمایش در فرم استراتژیک (جدول)

# Extensive Games بازیهای توسیعی

$AX > B > AY$  (بازیگر ۱)  
 $B > AX > AY$  (بازیگر ۲)

بازین

players

Terminal histories

Subhistories

Proper subhistories

Player Function

Action sets

Preferences

Pay-off functions



$$P(\phi) = \text{جمله}$$

$$P(A) = \text{فرد}$$

$$u_i(\text{ترتیب اول})$$

$$u_1(B) = 1$$

$$u_2(AX) = 2$$

$$u_2(A) = 0$$

$$P(\emptyset) = 1$$

$$\rightarrow A_1 = \{A, B, C, D\} \quad A_2 = \{X, Y\} \quad A_3 = \{F, G\}$$

## Extensive Games بازیهای توسیعی

$$P(A) = 2$$

$$P(B) = 2$$

$$P(AX) = 1$$

$$BX \rightarrow$$

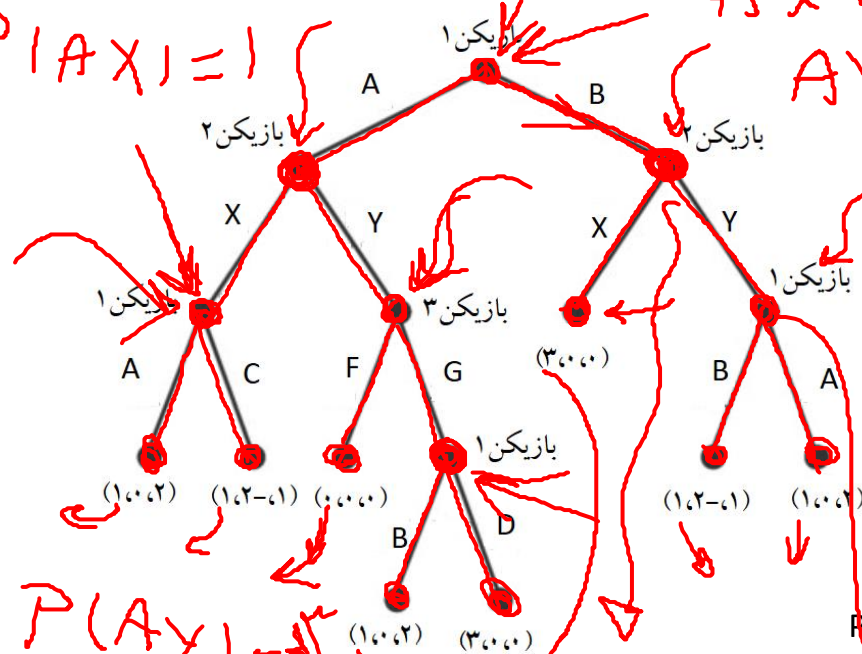
$$AXA$$

$$AXC$$

$$AYF$$

$$\{1, 2, 3\}$$

$$A_3 = \{F, G\}$$



$$P(AY) = 2$$

$$P(AYG) = 1$$

$$P(B) = 2$$

$$P(BY) = 1$$

$$A_1 = \{\emptyset : A, B, C, D\}$$

players •

Terminal histories •

Subhistories •

Proper subhistories •

Player Function •

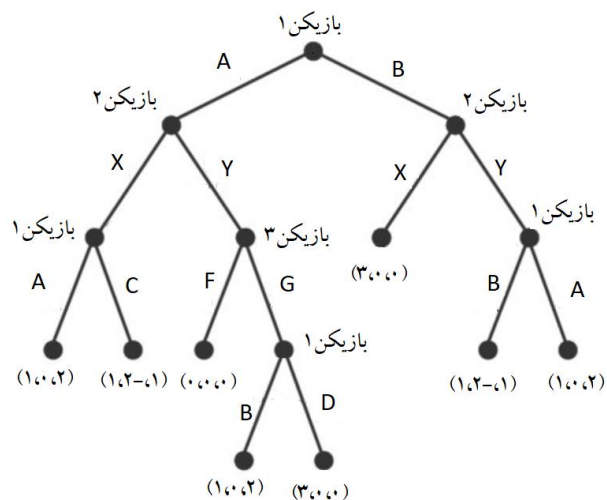
Action sets •

Preferences •

Pay-off functions as functions of terminal histories •

# بازیهای توسیعی Extensive Games

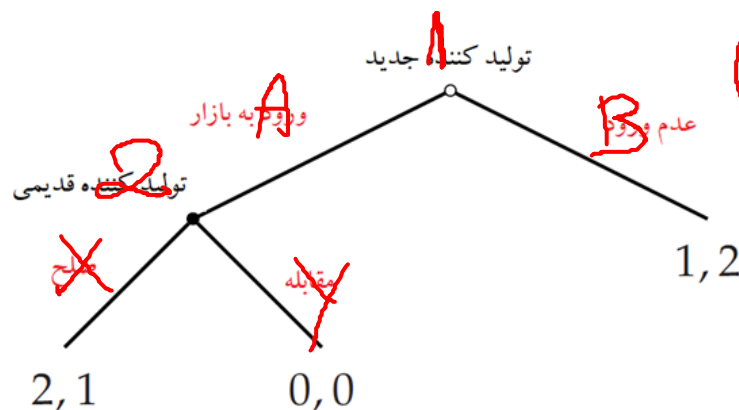
## بازیهای توسیعی با اطلاعات کامل Extensive Games with perfect information



یک مجموعہ از بازیکنان؛

~~(subhistory از terminal history دیگر نباشد،~~

یک تابع که به هر proper subhistory، یک بازیکن نسبت دهد (player function)؛  
برای هر بازیکن، اولویت های بین terminal history ها.

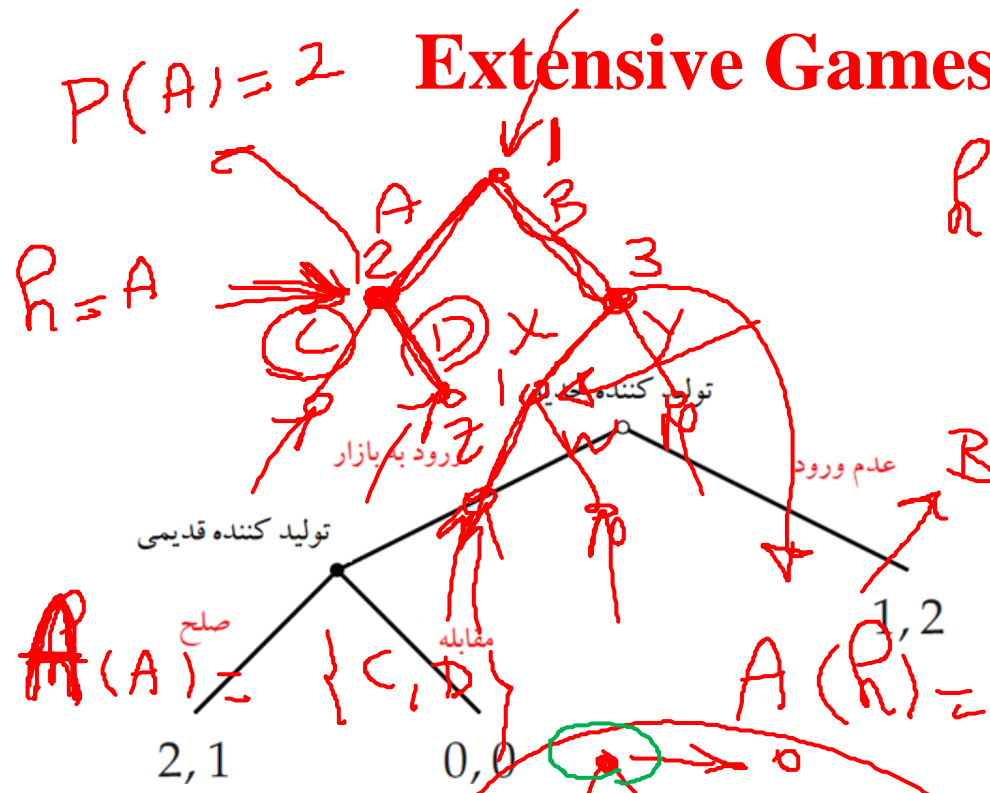

$$(\{1, 2\}, \{AX, AY, B\})$$
$$(P(\emptyset)=1, P(A)=2)$$
$$9. \quad A \times \geq B \geq A \vee$$
$$B \succsim_A X \succsim_A Y$$
$$u_1(AX) = 2, u_1(AY) = 0, \dots \sim$$

# بازیهای توسیعی Extensive Games

$P(A) = 2$

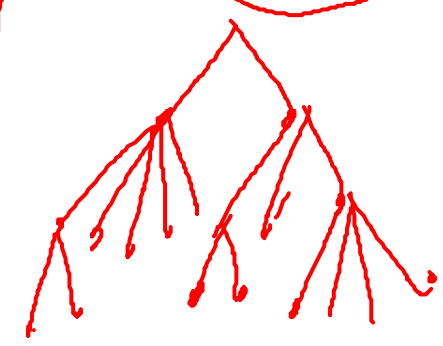
$P \neq \emptyset \quad B \times B \times \dots$

$P = A$



- چند نماد و تعریف:
- $h$
  - $Th$
  - $A(h)$
  - $P(h)$
- horizon and finite/infinite horizon game
- Finite game

$A(A) = \{C, D\}$        $A(B) = \{X, Y\}$



§(.)

# بازیهای توسیعی Extensive Games

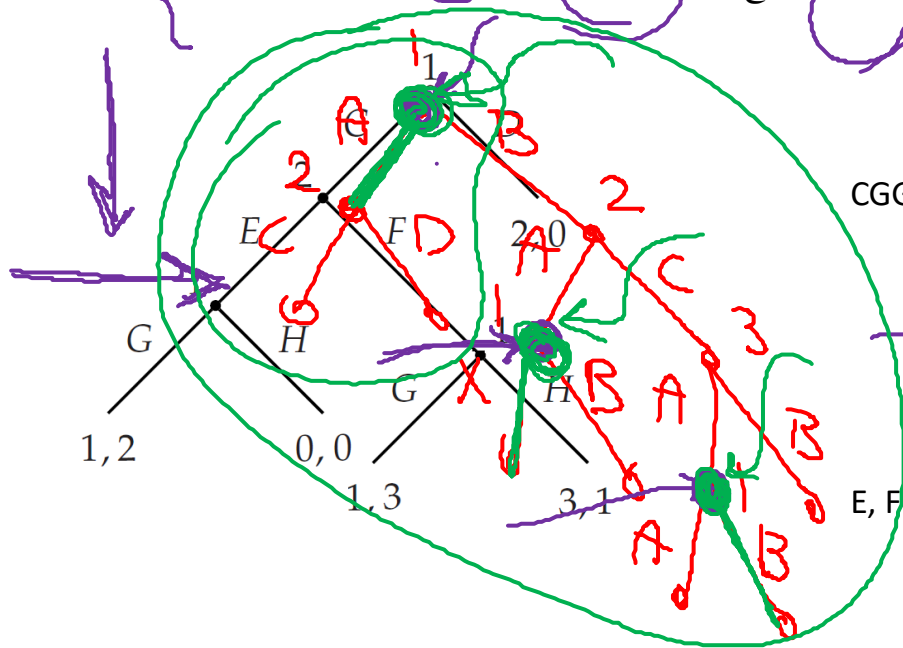
الفاظ بازی

$$S(\emptyset) = B \quad S(B(A)) = B$$

$$S(BA) = X$$

تعریف. استراتژی:

در یک بازی توسیعی، یک استراتژی برای بازیکن  $i$  ام، عبارت است از یک تابع که به هر  $h$  که پس از  $A$ ، نوبت حرکت بازیکن  $i$  است (یعنی  $P(h) = i$ ) یک اکشن از  $A(h)$  نسبت دهد.



$A \times A$

$B \times A$

CGG, CGH, CHG, CHH, DGG, DGH, DHG, DHH,

استراتژیهای بازیکن اول:

$B \times B$

$BBA$

$BBB$

استراتژیهای بازیکن دوم:

$A \times B$

$ABA$

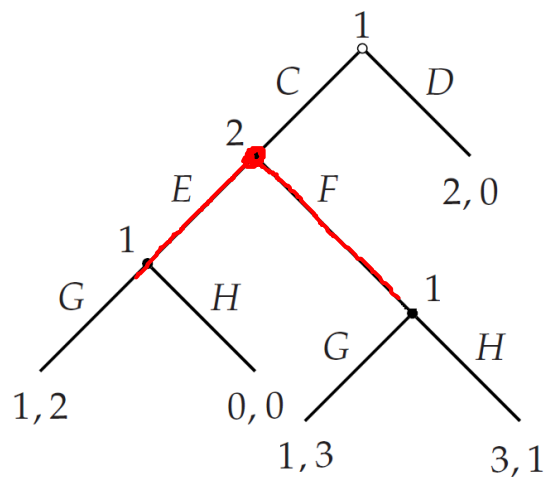
$ABB$

$ABB$

# بازیهای توسیعی Extensive Games

## • تعریف. استراتژی:

□ در یک بازی توسیعی، یک استراتژی برای بازیکن  $i$  ام، عبارت است از یک تابع که به هر  $h$  که پس از آن، نوبت حرکت بازیکن  $i$  است (یعنی  $P(h) = i$ ) یک اکشن از  $A(h)$  نسبت دهد.



## • استراتژیهای بازیکن اول:

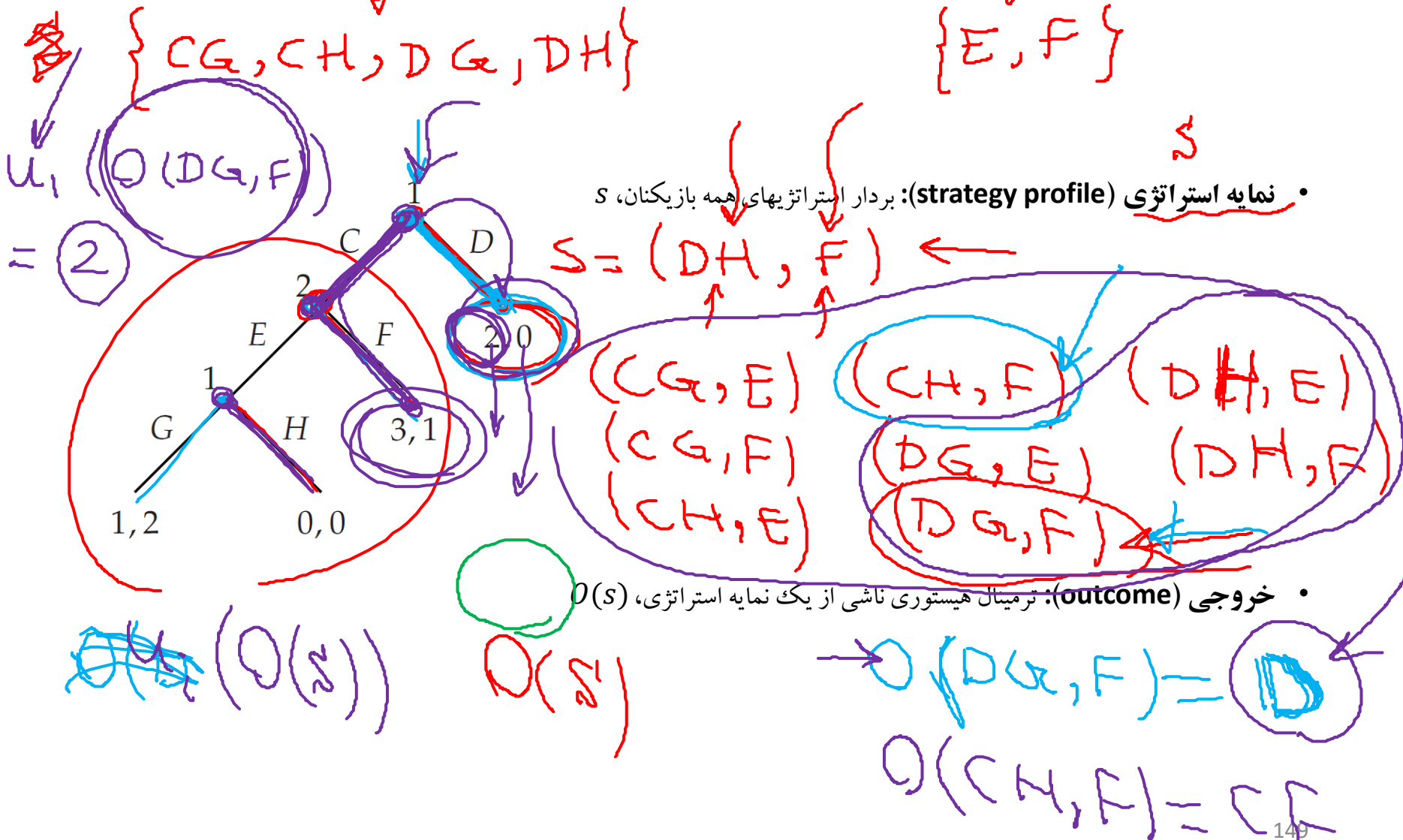
{ CGG, CGH, CHG, CHH, DGG, DGH, DHG, DHH } ←

{ E F }

## استراتژیهای بازیکن دوم: ←



# بازیهای توسیعی Extensive Games



# بازیهای توسیعی Extensive Games

• تعادل در بازیهای توسیعی

❖ تعادل نش

❖ تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium)

# بازیهای توسیعی Extensive Games

$$u_i(s^*)$$

$$u_i(O(s^*))$$

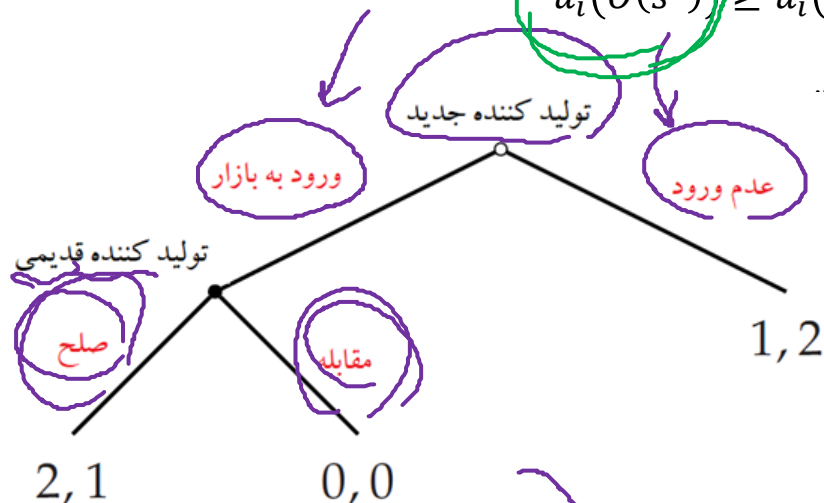
$$u_i(O(r_i, s_{-i}^*))$$

• تعریف. تعادل نش در بازی های توسیعی (با اطلاعات کامل):

□ نمایه استراتژی  $s^*$  را یک تعادل نش گوئیم اگر برای هر بازیکن  $i$  و هر استراتژی  $r_i$  از این بازیکن،

$$u_i(O(s^*)) \geq u_i(O(r_i, s_{-i}^*)).$$

به بیان دیگر، هیچ بازیکنی از تغییر استراتژی خود به تنهایی، سود بیشتری نبرد.



	صلح	مقابله
ورود	2, 1	0, 0
عدم ورود	1, 2	1, 2

# بازیهای توسیعی Extensive Games

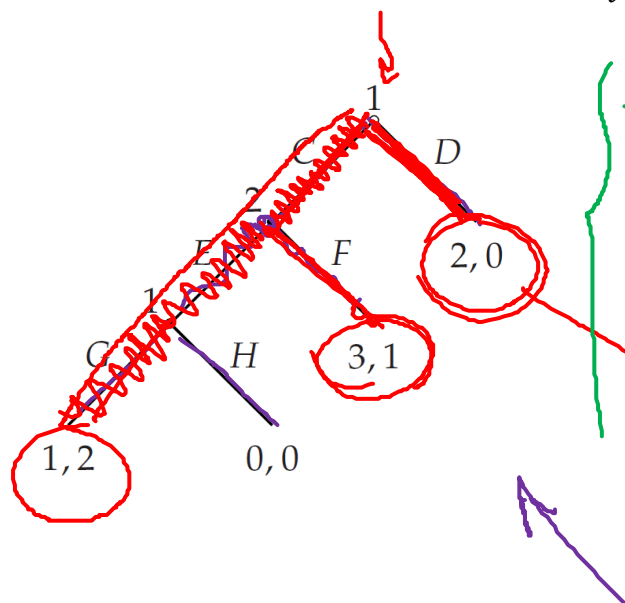


• تعریف. تعادل نش در بازی های توسیعی (با اطلاعات کامل):

□ نمایه استراتژی  $s^*$  را یک تعادل نش گوئیم اگر برای هر بازیکن  $i$  و هر استراتژی  $r_i$  از این بازیکن،

$$u_i(o(s^*)) \geq u_i(o(r_i, s_{-i}^*)).$$

به بیان دیگر، هیچ بازیکنی از تغییر استراتژی خود به تنهایی، سود بیشتری نبرد.



	E	F
CG	1, 2	3, 1
CH	0, 0	3, 1
DG	2, 0	2, 0
DH	2, 0	2, 0

# بازیهای توسیعی Extensive Games

• تعادل در بازیهای توسیعی  
❖ تعادل نش

❖ تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium)

# Extensive Games بازیهای توسیعی



ابتدا تعریف زیربازی (subgame):

**تعریف.** فرض کنید  $\Gamma$  یک بازی توسیعی با اطلاعات کامل باشد. برای هر هیستوری غیر ترمینال مانند  $h$ ، زیربازی  $\Gamma(h)$  عبارت است از یک بازی توسیعی با اطلاعات کامل با اجزای زیر:

- مجموعه بازیکنان: همان مجموعه بازیکنان  $\Gamma$ ؛
- ترمینال هیستوری ها: مجموعه کلیه دنباله اکشن های  $h'$  چنان که  $hh'$  یک ترمینال هیستوری برای  $\Gamma$  باشد؛
- تابع بازیکن:  $P_{\Gamma(h)}(h') = P_{\Gamma}(hh')$ ؛
- اولویت ها: برای هر بازیکن، ترمینال هیستوری  $h'$  به ترمینال هیستوری  $h''$  ترجیح دارد اگر و تنها اگر در بازی  $\Gamma$ ، ترمینال هیستوری  $hh'$  به ترمینال هیستوری  $hh''$  ارجح باشد.

# بازیهای توسیعی Extensive Games

## ❖ تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium).

□ تعریف: در یک بازی توسیعی با اطلاعات کامل، یک نمایه استراتژی  $s^*$  را یک تعادل کامل زیربازی گوئیم اگر برای هر بازیکن  $i$ ، و هر استراتژی  $r_i$  از این بازیکن، و هر هیستوری  $h$  که پس از آن نوبت بازیکن  $i$  است (یعنی  $P(h) = i$ ) داشته باشیم

$$u_i(O_h(s^*)) \geq u_i(O_h(r_i, s_{-i}^*))$$

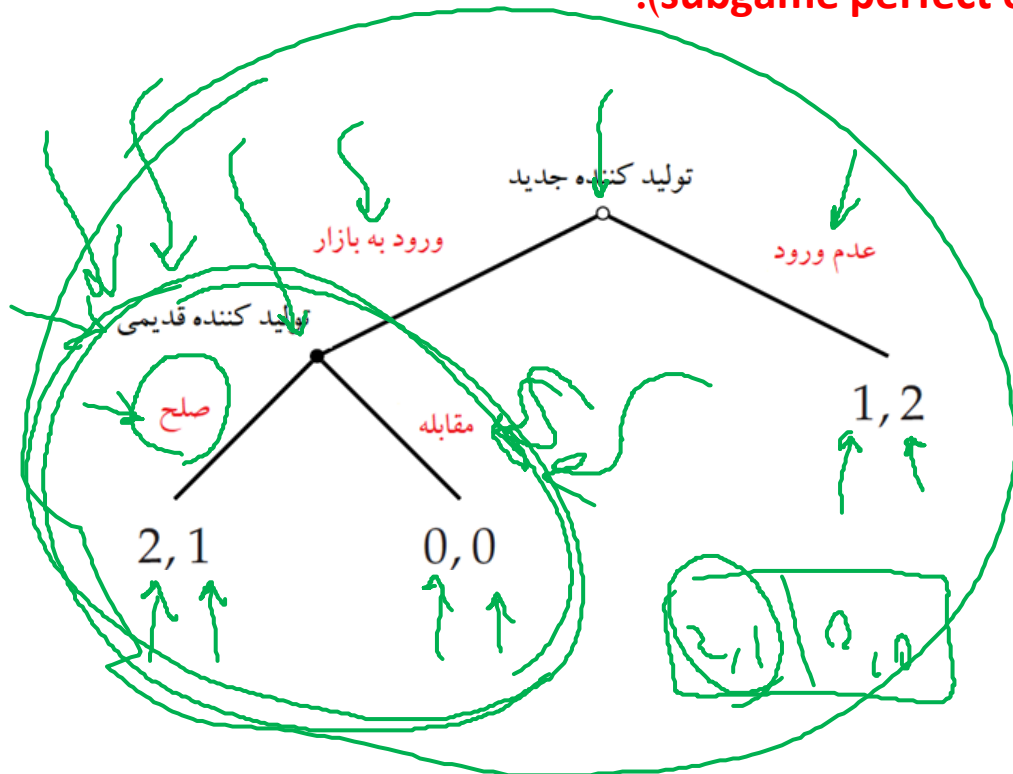
□ یک تعادل کامل زیربازی عبارت است از یک نمایه استراتژی  $s^*$  با این خاصیت که در هیچ زیربازی، هیچ بازیکن  $i$  با تغییر استراتژی خود از  $s_i^*$  نتواند به سود بیشتری دست یابد (زمانی که سایر بازیکنان در  $s_{-i}^*$  باقی مانده اند).

□ یک تعادل کامل زیربازی عبارت است از یک نمایه استراتژی که در هر زیربازی، تعادل نش ایجاد کند. (نتیجه: هر تعادل کامل زیربازی یک تعادل نش است)

# بازیهای توسیعی Extensive Games

تبادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium).

مثال: ➤



	صلح	مقابله
ورود	$2, 1$	$0, 0$
عدم ورود	$1, 2$	$1, 2$

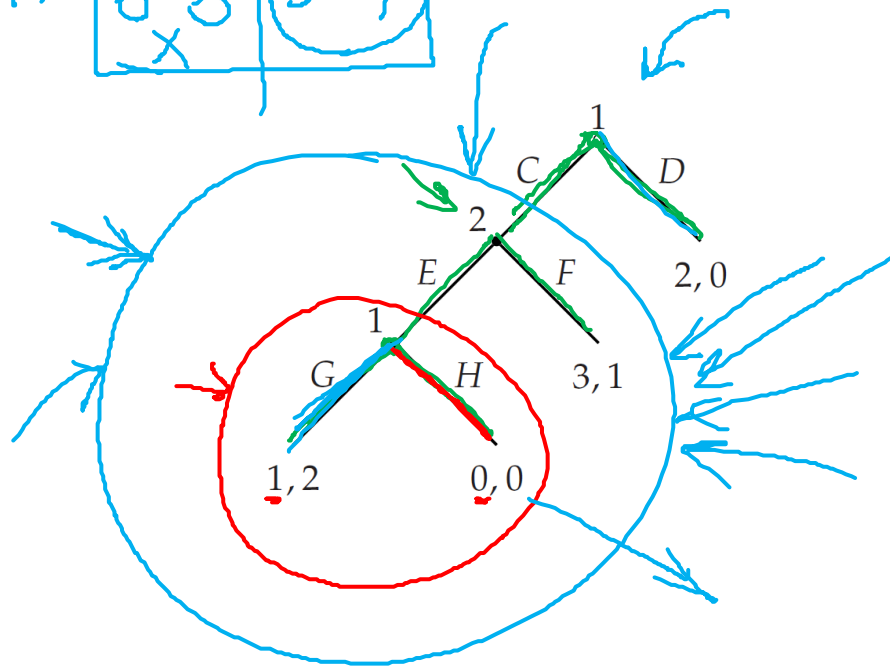


# بازیهای توسیعی Extensive Games

	E	F
G	2	3, 1
H	0, 0	3, 1



❖ تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium). مثال:



	E	F
CG	1, 2	3, 1
CH	0, 0	3, 1
DG	2, 0	2, 0
DH	2, 0	2, 0



# بازیهای توسیعی Extensive Games

S P E

❖ تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium).

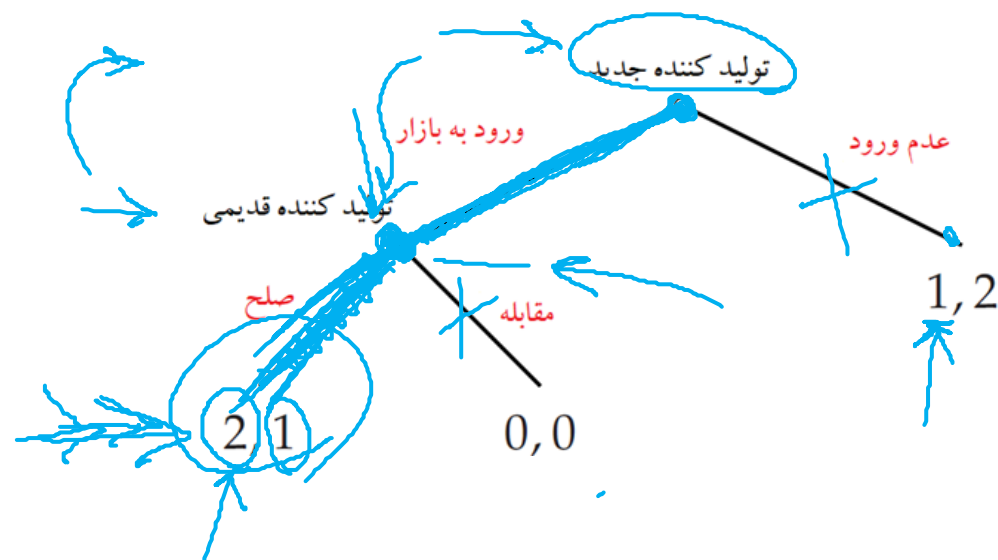
✓ Backward induction procedure = روال استنتاج معکوس = روال استقراء معکوس

**قضیه:** در هر بازی توسیعی با اطلاعات کامل و افق محدود، مجموعه تعادل های کامل زیربازی برابر است با مجموعه نمایه استراتژی های جدا شده توسط روال backward induction

# بازیهای توسیعی Extensive Games

❖ تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium).

✓ Backward induction procedure = روال استنتاج معکوس = روال استقراء معکوس

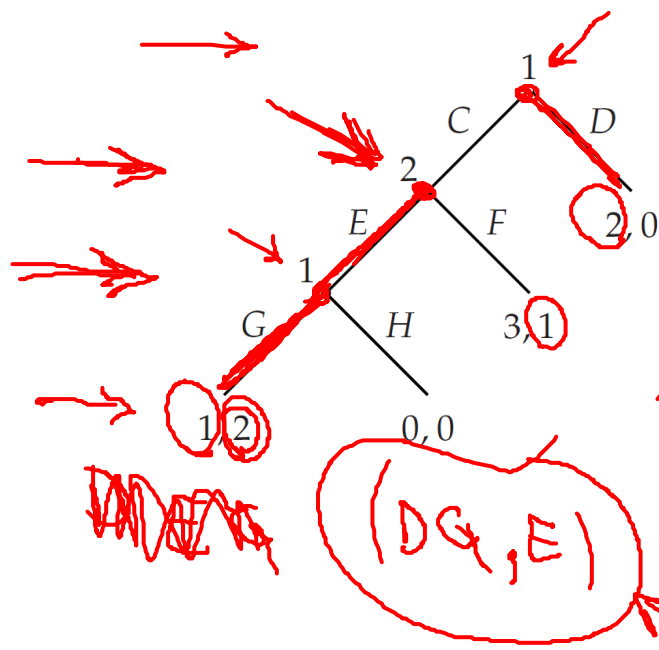


	صلح	مقابله
ورود	2,1	0,0
عدم ورود	1,2	1,2

# بازیهای توسیعی Extensive Games

❖ تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium).

Backward induction procedure = روال استنتاج معکوس = روال استقراء معکوس ✓



	E	F
CG	1,2	3,1
CH	0,0	3,1
DG	2,0	2,0
DH	2,0	2,0

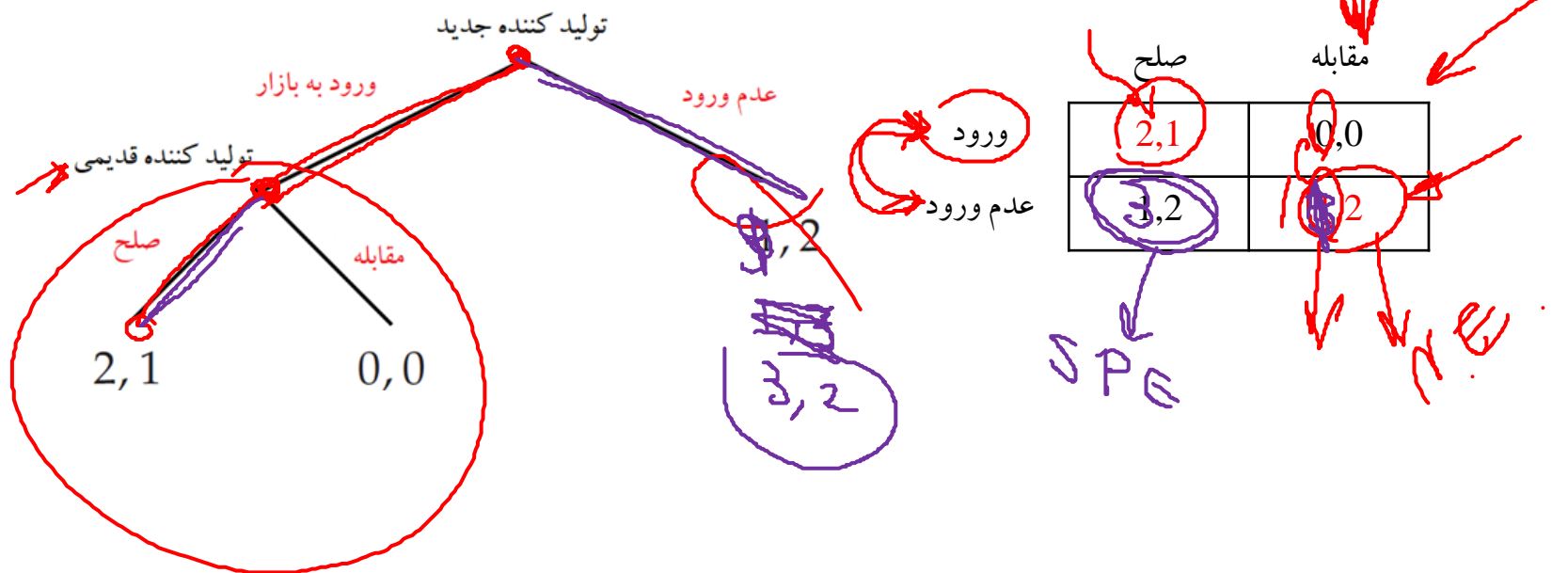
تعادل کامل زیربازی

(DG, E)

# بازیهای توسیعی Extensive Games

❖ تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium).

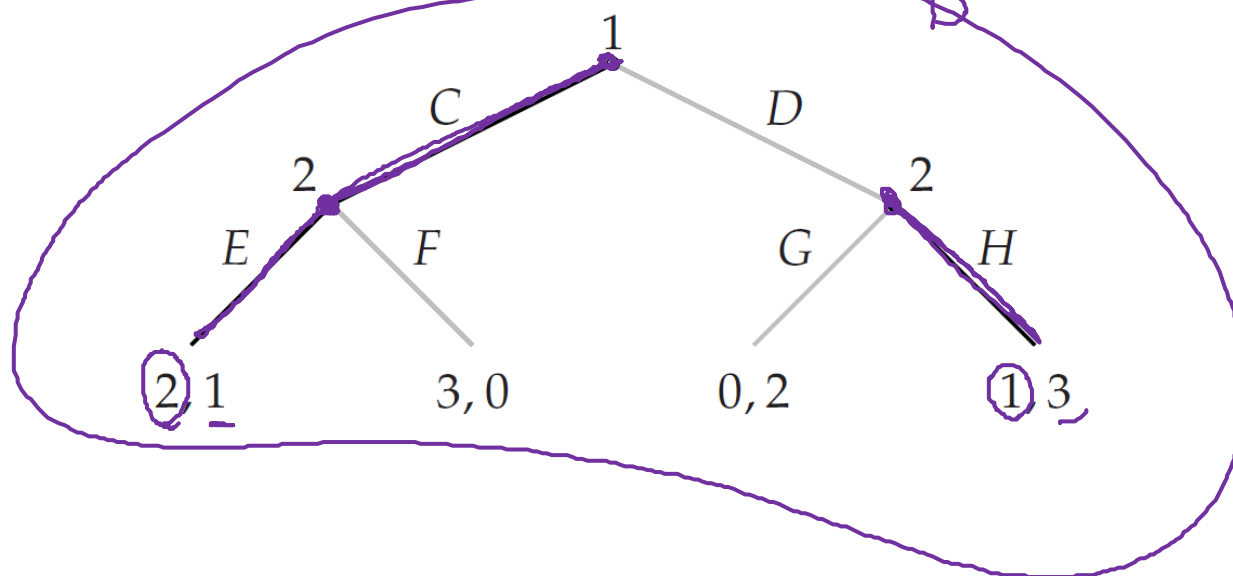
## تفاوت تعادل نش و تعادل کامل زیر بازی: تفسیر



# بازیهای توسیعی Extensive Games

❖ تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium).

✓ Backward induction procedure = روال استنتاج معکوس = روال استقراء معکوس



# بازیهای توسیعی Extensive Games

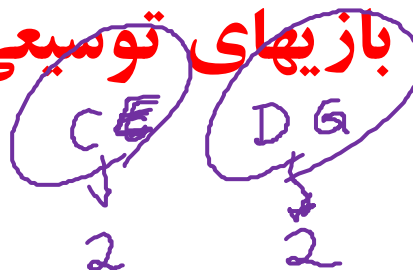
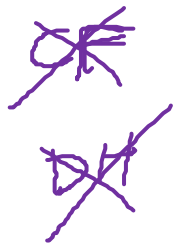
## ❖ تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium).

قضیه: هر بازی توسیعی با اطلاعات کامل و متناهی (افق متناهی - مجموعه اکشن‌ها متناهی)، حداقل یک تعادل کامل زیربازی دارد.

(اثبات ناشی از این نکته است که برای یک بازی متناهی، روال استنتاج معکوس، خوش تعریف است و حتما جواب دارد)

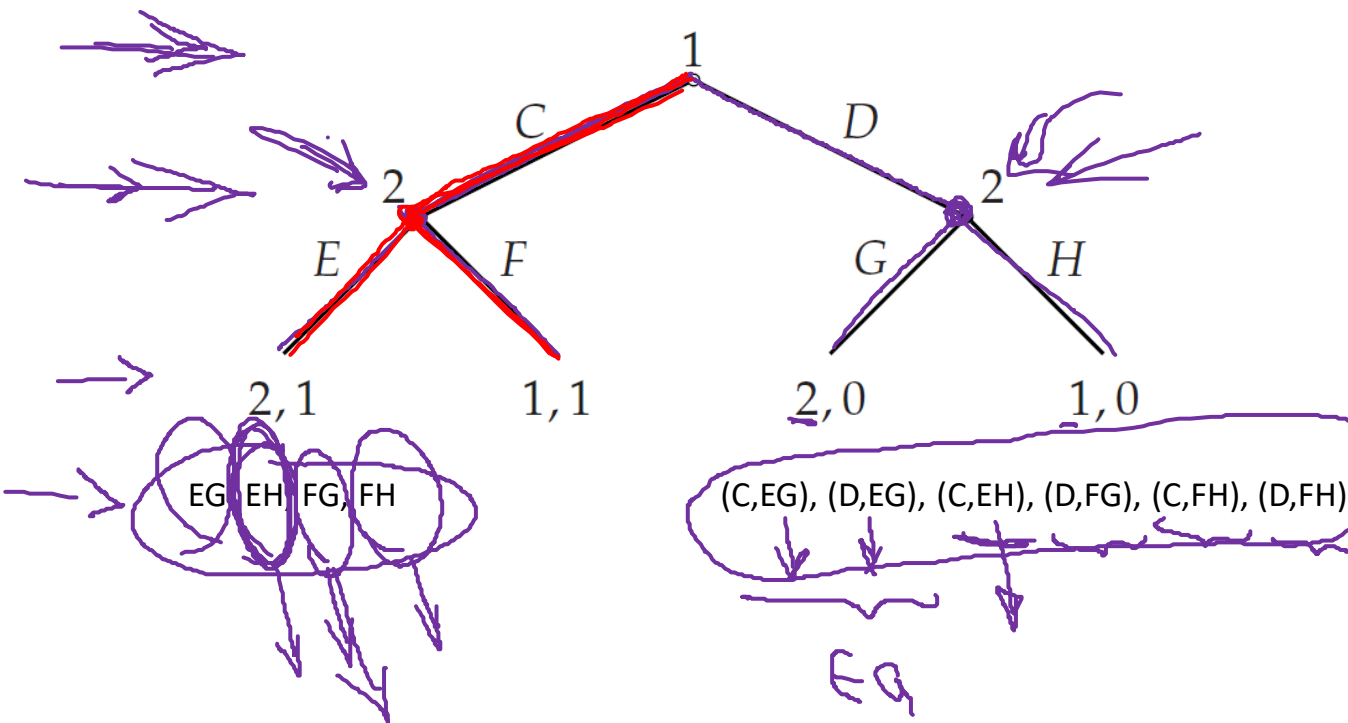


# Extensive Games بازیهای توسعه‌ی



❖ تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium).

مثال:



تعادل کامل زیربازی



# بازیهای توسیعی Extensive Games

① C, FHK

② C, FIK

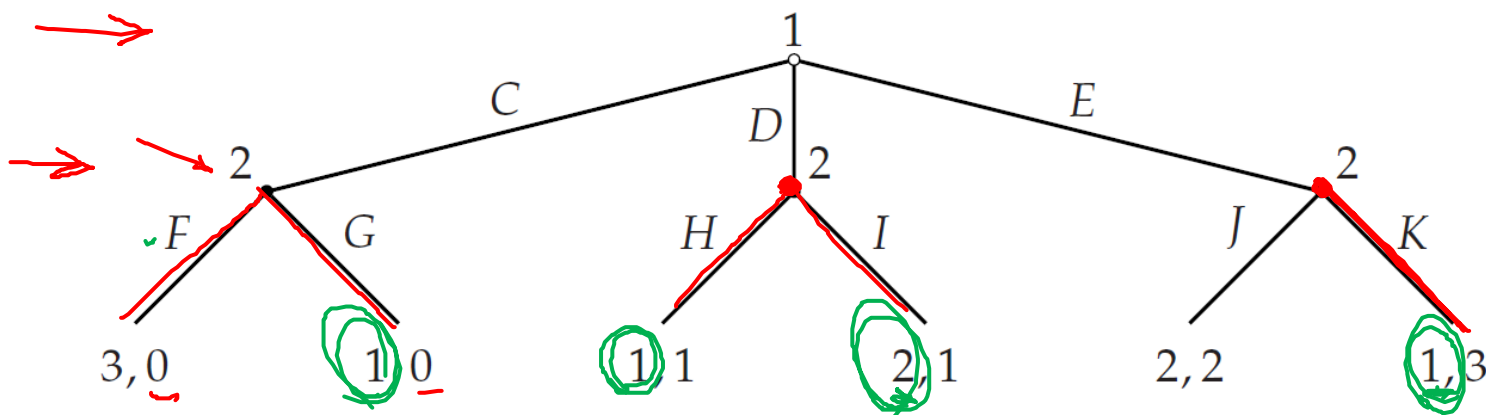
③ C, GHK

④ D, GIK

⑤ D, GHK  
⑥ E, GHK

❖ تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium).

مثال:



FHK, FIK, GHK,  
GIK

(C,FHK), (C,FIK), (C,GHK), (D,GHK), (E,GHK), (D,GIK)

# بازیهای توسیعی Extensive Games

❖ چند مثال ساده (اما مهم):

1. بازی اولتیماتوم (اتمام حجت).

الف. بازیکنان: دو نفر 1 و 2؛

ب. ترمینال هیستوری ها: مجموعه دنباله های  $(x, Z)$  که در آن،  $x$  عددی حقیقی در بازه  $[0, c]$  است و  $Z$  یکی از دو مقدار  $Y$  یا  $N$  (به معنی قبول یا رد پیشنهاد نفر اول) است؛

ج. تابع بازیکنان:  $P(\emptyset) = 1$  و  $P(x) = 2$  برای هر  $x$ ؛

د. ترجیحات (اولویت ها): با توابع سود زیر نشان داده می شوند:

$$\begin{aligned} u_1(x, N) &= u_2(x, N) = 0, \\ u_2(x, Y) &= c - x, \quad u_1(x, Y) = x, \end{aligned}$$

# بازیهای توسیعی Extensive Games



❖ چند مثال ساده (اما مهم):

~~2~~  $x \in [0, c]$

1. بازی اولتیماتوم (اتمام حجت).

✓ بازی افق محدود است و در نتیجه برای یافتن نقاط تعادل کامل زیربازی، الگوریتم استنتاج معکوس قابل استفاده است.

✓ چون در مرحله اول، تعداد اکشنهای ممکن برای بازیکن نامحدود است، پس بازی نامحدود است و ممکن است تعادل کامل زیر بازی وجود نداشته باشد.

✓ چون در مرحله اول، تعداد اکشنهای ممکن برای بازیکن نامحدود است، نمایش درختی برای بازی ممکن نیست

# بازیهای توسیعی Extensive Games

الف

$$0 \leq x \leq c$$

$$0 \leq x \leq c$$

بازیکن دوم، آتش  
را اکتفا می کند

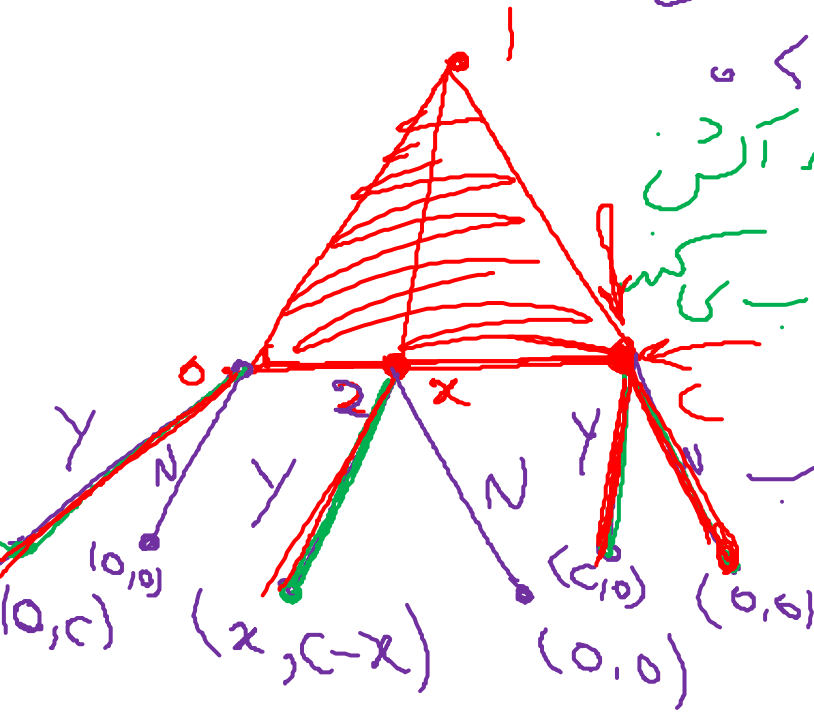
❖ چند مثال ساده (اما مهم):

1. بازی اولتیماتوم (اتمام حجت).  
حل:

بازیکن دوم، آتش را اکتفا می کند  
 $\rightarrow x=0$

$\rightarrow x=c$  (ج)

بازیکن دوم، آتش را  
نمی آتش است اکتفا می کند



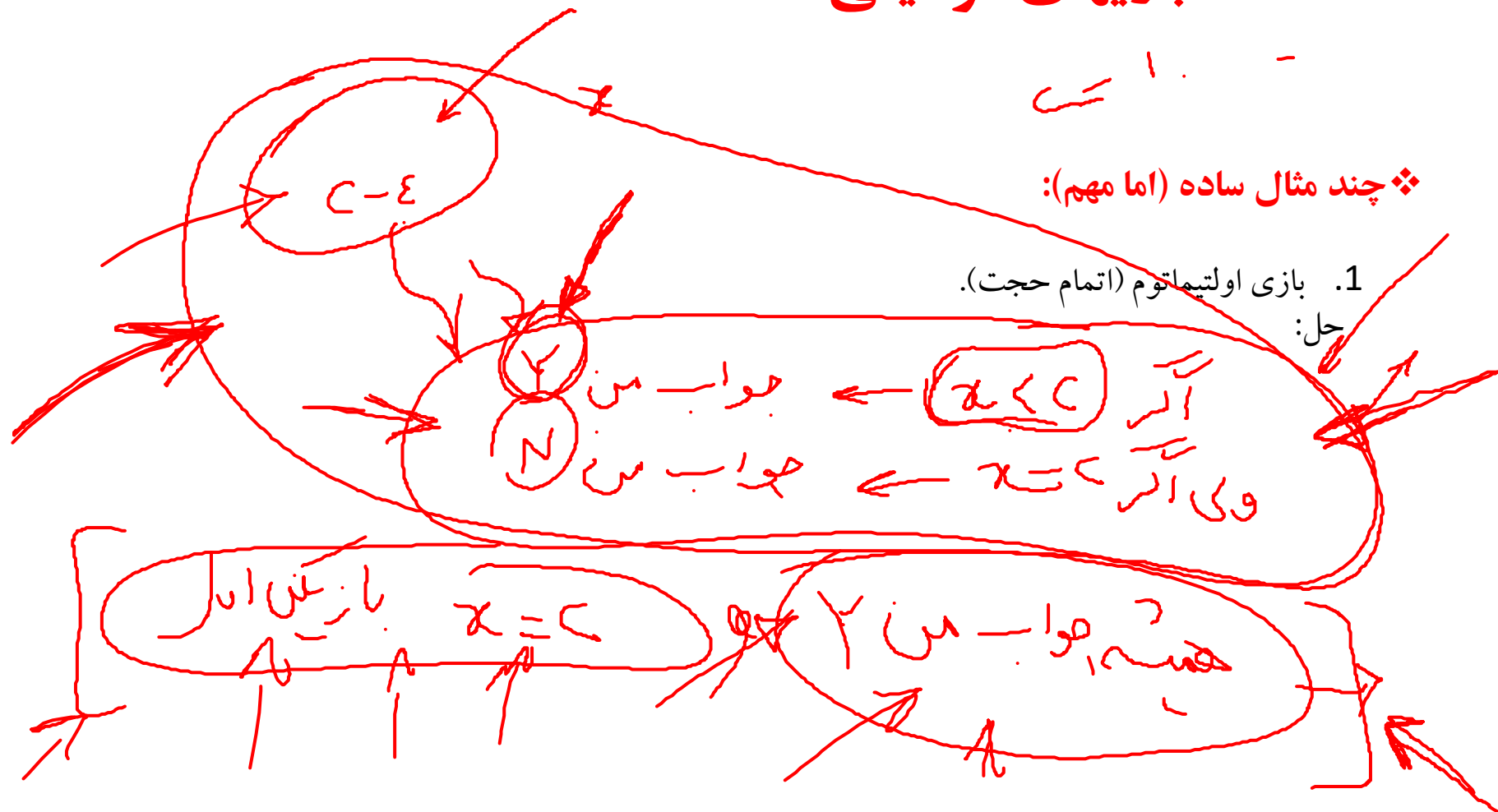
# بازیهای توسیعی Extensive Games

۱. -

❖ چند مثال ساده (اما مهم):

1. بازی اولتیماتوم (اتمام حجت).

حل:



# بازیهای توسیعی Extensive Games

❖ چند مثال ساده (اما مهم):

2. مدل استکلبرگ (Stackelberg) برای بازار دوجانبه.

# بازیهای توسیعی Extensive Games

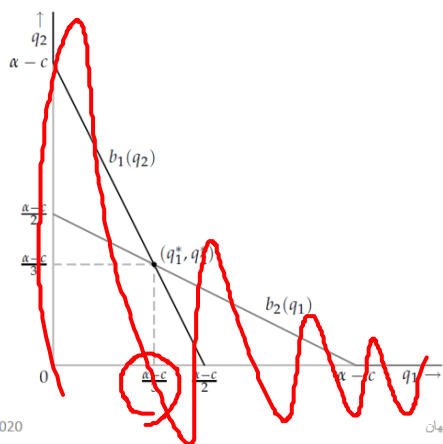
❖ چند مثال

2.

بازی

## فصل سوم: تعادل نش - مثالها

• مدل کورنات (Cournot) برای بازار با انحصار چندجانبه



$$b_i(q_j) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha - c - q_j) & \text{for } q_j \leq \alpha - c \\ 0 & \text{for } q_j > \alpha - c \end{cases}$$

5/29/2020

دانشگاه صنعتی اصفهان

47

Activate Windows  
Go to Settings to activate Windows.

# بازیهای توسیعی Extensive Games

❖ چند مثال ساده (اما مهم):

2. مدل استکلبرگ (Stackelberg) برای بازار دوقطبی.

الف. بازیکنان: دو تولیدکننده 1 و 2؛

ب. ترمینال هیستوری ها: مجموعه دنباله های  $(q_1, q_2)$  که در آنها،  $q_i$  عددی نامنفی و نشان دهنده میزان تولید هر تولید کننده است؛

ج. تابع بازیکنان:  $P(\emptyset) = 1$  و  $P(q_1) = 2$  برای هر  $q_1$ ؛

د. ترجیحات (اولویت ها): با توابع سود  $\pi_i(q_1, q_2) = q_i(P(q_1 + q_2) - c)$  نشان داده می شوند.



# بازیهای توسیعی Extensive Games

❖ چند مثال ساده (اما مهم):

2. مدل استکلبرگ

## فصل سوم: تعادل نش - مثالها

• مدل کورنات (Cournot) برای بازار با انحصار چندجانبه

$$b_i(q_j) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha - c - q_j) & \text{for } q_j \leq \alpha - c \\ 0 & \text{for } q_j > \alpha - c \end{cases}$$

Activate Windows  
Go to Settings to activate Windows.

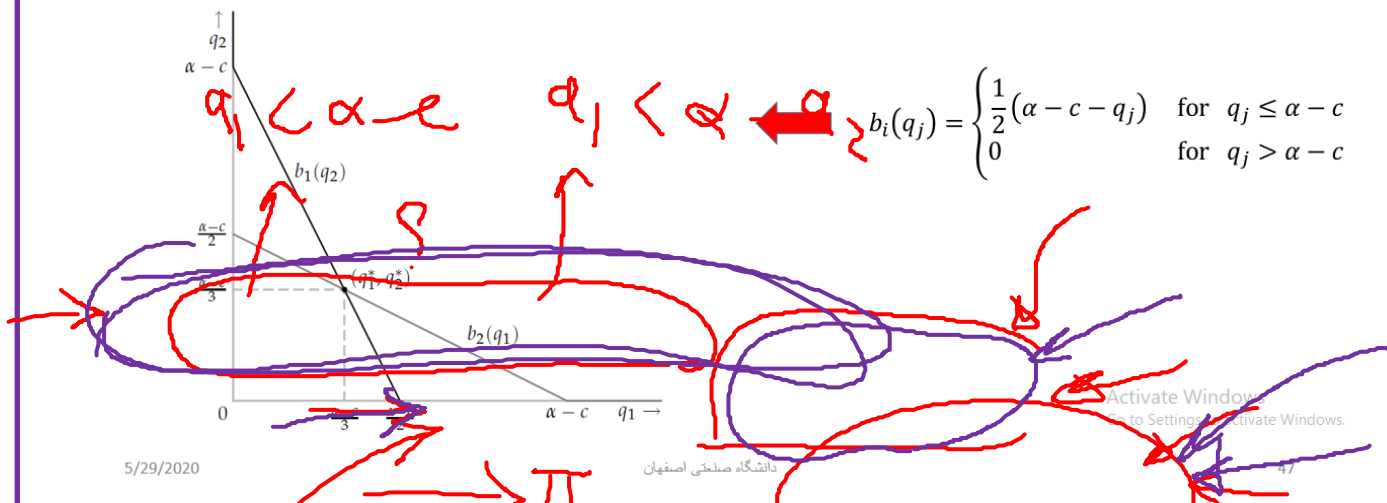
## فصل سوم: تعادل نش - مثال ها

• مدل کورنات (Cournot) برای بازار با انحصار چندجانبه

$q_1$   $q_2$

❖ چند مثال

2. مدل



$$\Rightarrow q_1^* = \frac{1}{2}(\alpha - c)$$

$$\Rightarrow q_2^* = \frac{1}{4}(\alpha - c)$$

$$\Rightarrow u_1(q_1^*, q_2^*) = \frac{1}{8}(\alpha - c)^2, u_2(q_1^*, q_2^*) = \frac{1}{16}(\alpha - c)^2,$$

Else  $\Rightarrow u_1 = u_2 = 0$

# بازیهای توسیعی Extensive Games

❖ چند مثال ساده (اما مهم):

3. چانه زنی دو طرفه.

فروشنده ای کالایی در اختیار دارد که از نظرش ۱۰۰ تومان ارزش دارد و خریداری به او مراجعه نموده است که آن کالا برای او ۱۵۰ تومان ارزش دارد. فرض کنید به طور معمول فرآیند زیر برای معامله رخ می دهد: فروشنده از خریدار می خواهد که قیمت پیشنهادی خود را اعلام کند. اگر مورد پذیرش فروشنده بود، معامله با همان قیمت انجام می شود؛ اما اگر فروشنده نپذیرفت، آنگاه فروشنده قیمت خود را اعلام می کند. اگر خریدار پذیرفت معامله با این قیمت انجام می شود و اگر نپذیرفت، معامله ای انجام نمی شود. (برای سادگی فرض کنید در شرایط تساوی منفعت، افراد معامله را انجام می دهند)

استراتژی فروشنده و خریدار در وضعیت تعادل چیست؟

# بازیهای توسیعی Extensive Games

❖ چند مثال ساده (اما مهم):

3. چانه زنی دو طرفه.

الف. بازیکنان: خریدار 1 و فروشنده 2؛

ب. ترمینال هیستوری‌ها: مجموعه دنباله‌های  $(x, \text{Yes})$ ،  $(x, \text{No}, y, \text{Yes})$  و  $(x, \text{No}, y, \text{No})$  که در آن،  $x$  و  $y$  اعداد حقیقی هستند؛

ج. تابع بازیکنان: خریدار  $P(\emptyset) =$  فروشنده  $P(x) =$  برای هر  $x$ ، فروشنده  $P(x, \text{No}) =$  برای هر  $x$ ،  $P(x, \text{No}, y) =$

خریدار  $=$  برای هر  $x$  و  $y$ ؛

د. ترجیحات (اولویت‌ها): با توابع سود

$$u_1(x, \text{Yes}) = 150 - x,$$

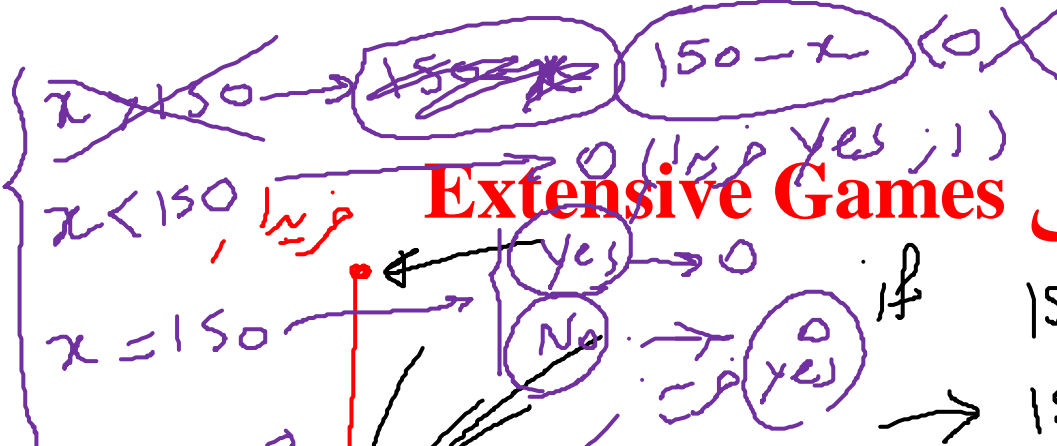
$$u_2(x, \text{Yes}) = x - 100$$

$$u_1(x, \text{No}, y, \text{No}) = u_2(x, \text{No}, y, \text{No}) = 0$$

$$u_1(x, \text{No}, y, \text{Yes}) = 150 - y,$$

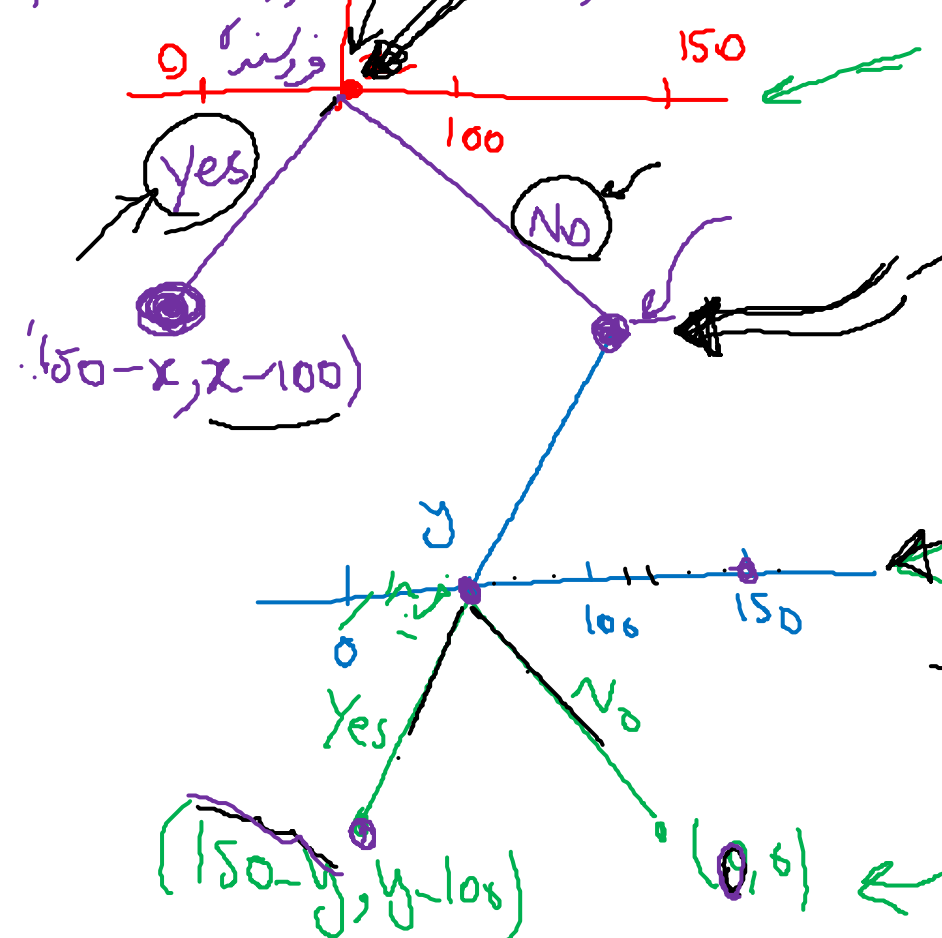
$$u_2(x, \text{No}, y, \text{Yes}) = y - 100$$

# بازیهای توسیعی Extensive Games



1  
 خیر / No  $150 - y < 0$   
 خیر / Yes  $150 - y \geq 0$   
 چند مثال ساده (اما مهم):

3. چانه زنی دو طرفه.



2  
 $y = 150$   
 3  
 $x - 100 > 50 \rightarrow \text{Yes}$   
 $x - 100 < 50 \rightarrow \text{No}$   
 $x - 100 = 50 \rightarrow \begin{cases} \text{Yes} \\ \text{No} \end{cases}$   
 $x = 150 \rightarrow$   
 $x < 150 \rightarrow$

## بازیهای توسیعی Extensive Games

❖ چند مثال ساده (اما مهم):

3. چانه زنی دوطرفه.

$\left\{ \begin{array}{l} (x=150, \text{yes}) \quad \checkmark \\ (x=150, \text{No}, y=150, \text{yes}) \quad \checkmark? \end{array} \right.$

$(\underbrace{x < 150}_{\text{No}}, \underbrace{\text{No}}_{\text{yes}}, \underbrace{y=150}_{\text{yes}})$   $\leftrightarrow$

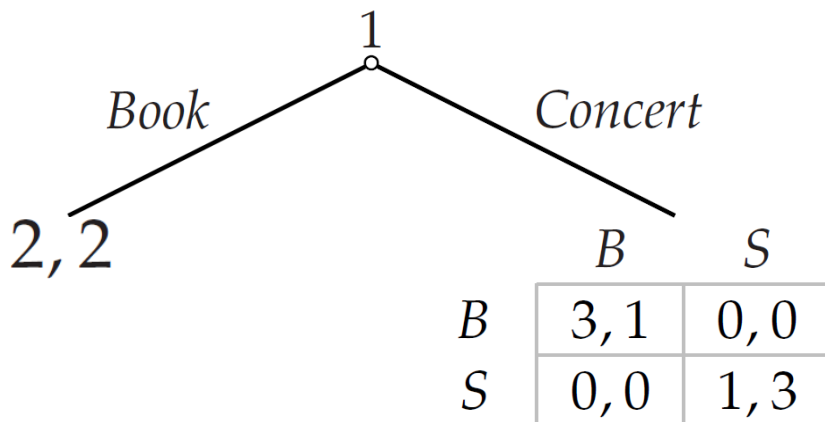
150

با اطلاعات

# تعمیم و توسعه‌ی بازیهای توسیعی

## تعمیم و توسعه‌ی بازیهای توسیعی

مثال: دو نفر باید تفریح روز خود را با روال زیر تعیین کنند:  
ابتدا نفر اول تعیین می کند که در خانه کتاب بخوانند یا به کنسرت بروند. در صورت کتابخوانی، منفعت هر نفر برابر ۲ است. اما اگر بخواهند به کنسرت بروند، دو انتخاب باخ یا استراوینسکی را دارند که به صورت همزمان رخ می دهد و ترجیحات این دو نفر روی انتخاب نوع کنسرتها، مشابه بازی BOS است.  
تعادل چنین بازی چگونه تعریف و تعیین می شود؟





# تعمیم و توسعه‌ی بازیهای توسیعی

Book ①

③

Concert, (B, S)

⑤

Concert, (S, B)

④

Concert, (B, S, S)

② Concert, (B, B)

تعریف. بازی توسیعی با اطلاعات کامل و حرکات همزمان عبارت است از

یک مجموعه از بازیکنان؛

یک مجموعه از دنباله‌های اکشن‌ها (terminal history) به طوری که هیچ زیردنباله‌ای یک زیردنباله اکید (proper subhistory) از terminal history دیگر نباشد؛

یک تابع که به هر proper subhistory، یک مجموعه از بازیکنان نسبت دهد (player function)؛

برای هر بازیکن، اولویت‌های بین terminal history ها.

برای هر proper subhistory مانند  $h$ ، و هر بازیکن مانند  $i$  که در  $h$  نوبت حرکت دارد، یک مجموعه از اکشن‌های ممکن که با

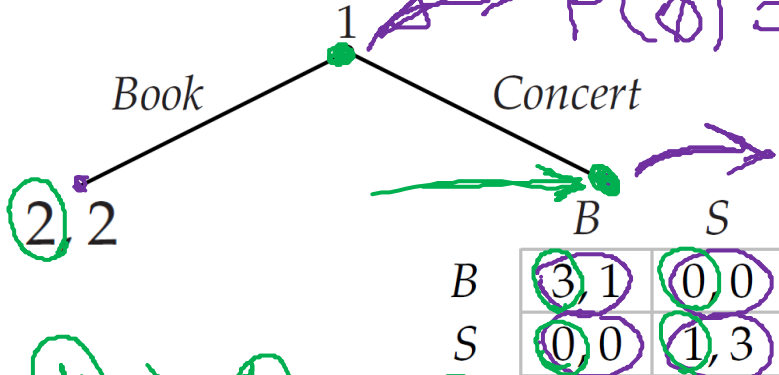
$A_i(h)$  نمایش می‌دهیم.

$$A(∅) = \{Book, Concert\}$$

$$A_1(Concert) = \{B, S\} = A_2(Concert)$$

$$P(∅) = \{1\}$$

$$P(Concert) = \{1, 2\}$$



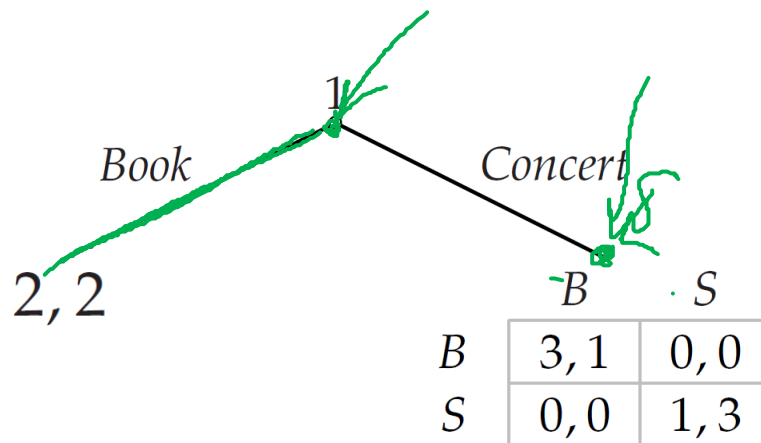
$$⑤_1 > ①_1 > ②_1 > ④_1 = ③_1$$

$$②_2 > ①_2 > ⑤_2 > ③_2 = ④_2$$

# تعمیم و توسعه‌ی بازیهای توسیعی

تعریف. استراتژی:

□ در یک بازی توسیعی با اطلاعات کامل و حرکات همزمان، یک استراتژی برای بازیکن  $i$  ام، عبارت است از یک تابع که به هر  $h$  که پس از آن، نوبت حرکت بازیکن  $i$  است (یعنی  $i \in P(h)$ ) یک اکشن از  $A_i(h)$  نسبت دهد.



For player 1:

- Book, B
- Book, S
- Concert, B
- Concert, S

For player 2:

- B
- S

Handwritten notes in green ink list the possible outcomes for each player's strategy profile:

- Book, B
- Book, S
- Concert, B
- Concert, S

## تعمیم و توسعه‌ی بازیهای توسیعی

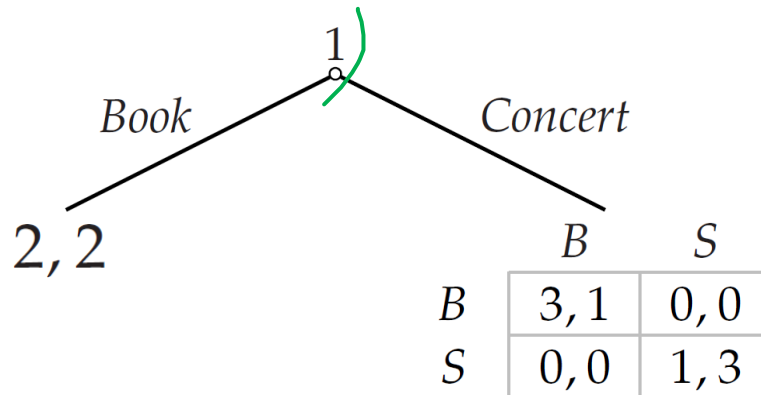
$(\text{Concert}, B), B$

$(\text{Book}, B), S$

- تعریف: تعادل نش در بازی های توسیعی با اطلاعات کامل و حرکات همزمان:  $\square$  نمایه استراتژی  $s^*$  را یک تعادل نش گوئیم اگر برای هر بازیکن  $i$  و هر استراتژی  $r_i$  از این بازیکن،

$$u_i(O(s^*)) \geq u_i(O(r_i, s_{-i}^*)).$$

به بیان دیگر، هیچ بازیکنی از تغییر استراتژی خود به تنهایی، سود بیشتری نبرد.



	B	S
(Concet,B)	3,1	0,0
(Concert,S)	0,0	1,3
(Book,B)	2,2	2,2
(Book,S)	2,2	2,2

## تعمیم و توسعه‌ی بازیهای توسیعی

• تعریف. تعادل کامل زیربازی در بازی های توسیعی با اطلاعات کامل و حرکات همزمان:

□ یک نمایه استراتژی  $s^*$  را یک تعادل کامل زیربازی گوئیم اگر برای هر بازیکن  $i$ ، و هر استراتژی  $r_i$  از این بازیکن، و هر هیستوری  $h$  که پس از آن نوبت بازیکن  $i$  است (یعنی  $i \in P(h)$ ) داشته باشیم

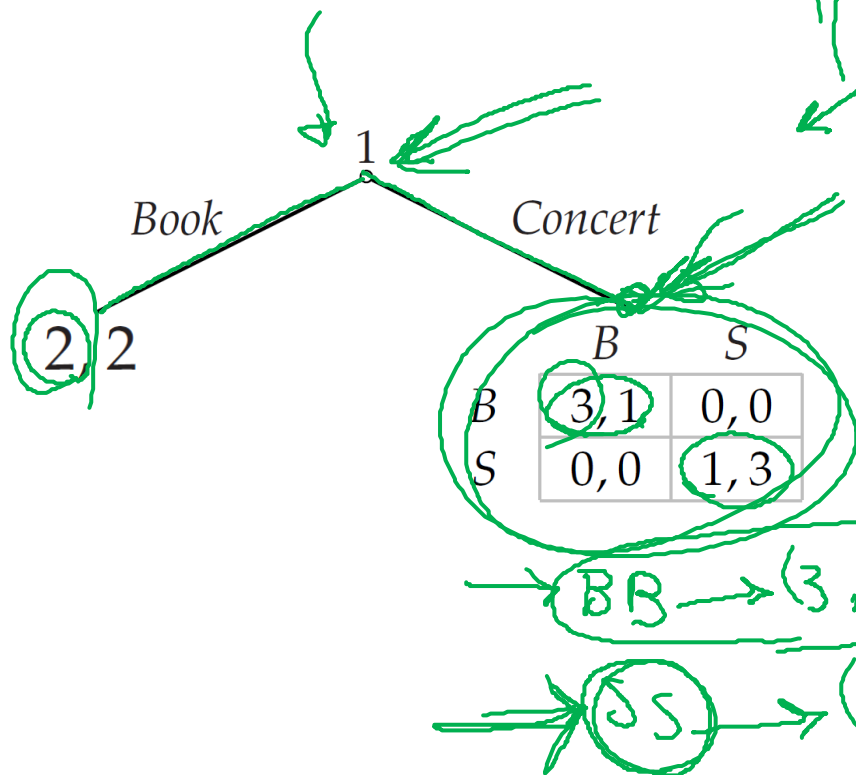
$$u_i(O_h(s^*)) \geq u_i(O_h(r_i, s_{-i}^*))$$

یعنی  $i$

□ یک تعادل کامل زیربازی عبارت است از یک نمایه استراتژی  $s^*$  با این خاصیت که در هیچ زیربازی، هیچ بازیکن  $i$ ی با تغییر استراتژی خود از  $s_i^*$  نتواند به سود بیشتری دست یابد (زمانی که سایر بازیکنان در  $s_{-i}^*$  باقی مانده اند).

□ یک تعادل کامل زیربازی عبارت است از یک نمایه استراتژی که در هر زیربازی، تعادل نش ایجاد کند. (نتیجه: هر تعادل کامل زیربازی یک تعادل نش است)

## تعمیم و توسعه‌ی بازیهای توسیعی

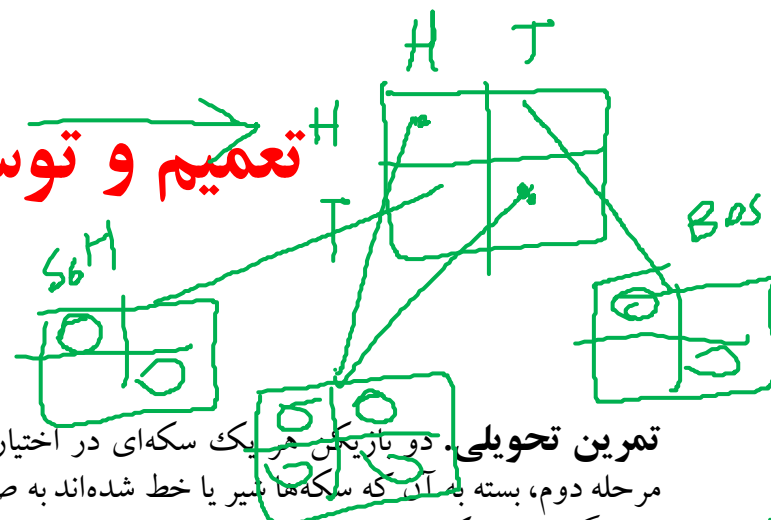


• تعادل کامل زیربازی و روال استنتاج معکوس

• وجود تعادل کامل زیربازی در هر بازی متناهی؟

## تعمیم و توسعه‌ی بازیهای توسیعی

0.4'



- تمرین تحویلی.** دو بازیکن هر یک سکه‌ای در اختیار دارند و به طور هم‌زمان باید یک روی سکه (شیر یا خط) را نشان دهند. در مرحله دوم، بسته به آن که سکه‌ها شیر یا خط شده‌اند به صورت زیر، حرکت بعدی (مرحله دوم) انجام می‌شود و بازی خاتمه می‌یابد:
- اگر هر دو یک رو را نشان دهند، بازی معمای زندانی بین دو نفر انجام می‌شود با تابع سود جدول ۱۳.۱ کتاب مرجع
  - اگر نفر اول شیر و نفر دوم خط را نشان دهد، بازی باخ-استراوینسکی بین دو نفر انجام می‌شود با تابع سود جدول ۱۶.۱ کتاب مرجع
  - اگر نفر اول خط و نفر دوم شیر را نشان دهد، بازی شکار کوزن بین دو نفر انجام می‌شود با تابع سود جدول ۱۸.۱ کتاب مرجع

مطلوب است یافتن کلیه نمایه استراتژی‌های تعادل کامل زیر بازی.

همکاری

Cooperative Games

بازی های ائتلافی

→ Coalitional Games

# بازی های ائتلافی Coalitional Games

□ وضعیتی در فضای رقابتی که در آن چند بازیکن با یکدیگر برای رسیدن به سود بیشتر، همکاری کرده و تشکیل یک ائتلاف می دهند.

❖ بازی غیرهمکارانه Non-cooperative و بازی همکارانه Cooperative

➤ در صورت امکان تعامل و تماس بین بازیکنان، به چه شرطی یک همکاری (ائتلاف) پایدار شکل می گیرد؟

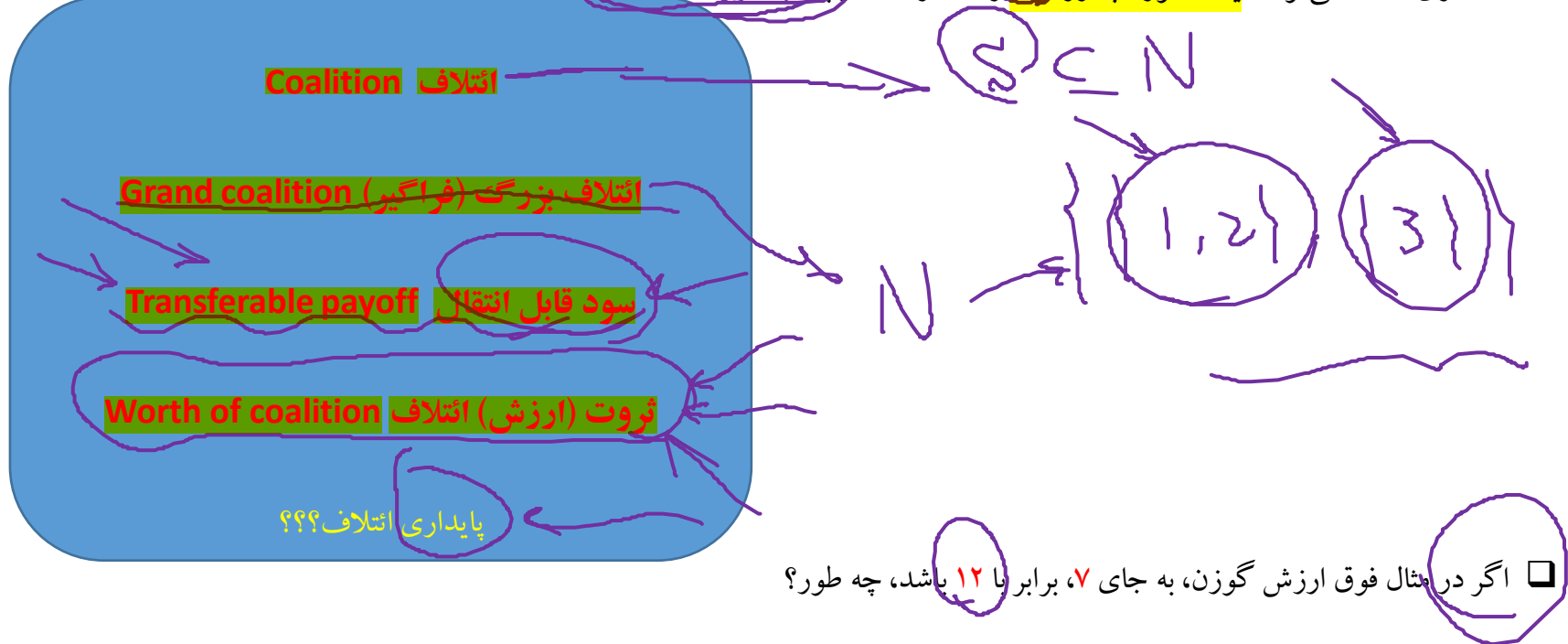
➤ در حالت کلی، پایداری یک ائتلاف به سایر ائتلاف ها هم بستگی دارد، اما در این درس فرض می کنیم که منفعت بازیکنان در هر ائتلاف فقط به خود آن ائتلاف وابسته است.



# بازی های ائتلافی Coalitional Games

$$I = \{1, 2\} \quad N = \{1, 2, 3\} \quad N = \{1, 2, 3\}$$

**مثال ۱:** سه شکارچی ۱، ۲ و ۳ به شکار رفته اند. هر کدام می توانند یک خرگوش با ارزش ۲ را شکار کنند، اما اگر دو نفر از آنها با یکدیگر همکاری کنند، می توانند یک قوچ با ارزش ۶ را شکار کنند و به هر صورت توافق تقسیم کنند؛ و اگر سه نفر با یکدیگر همکاری کنند، می توانند یک گوزن با ارزش ۷ را شکار کنند (به هر صورت توافق تقسیم کنند). آیا همکاری، رخ خواهد داد؟ چگونه؟



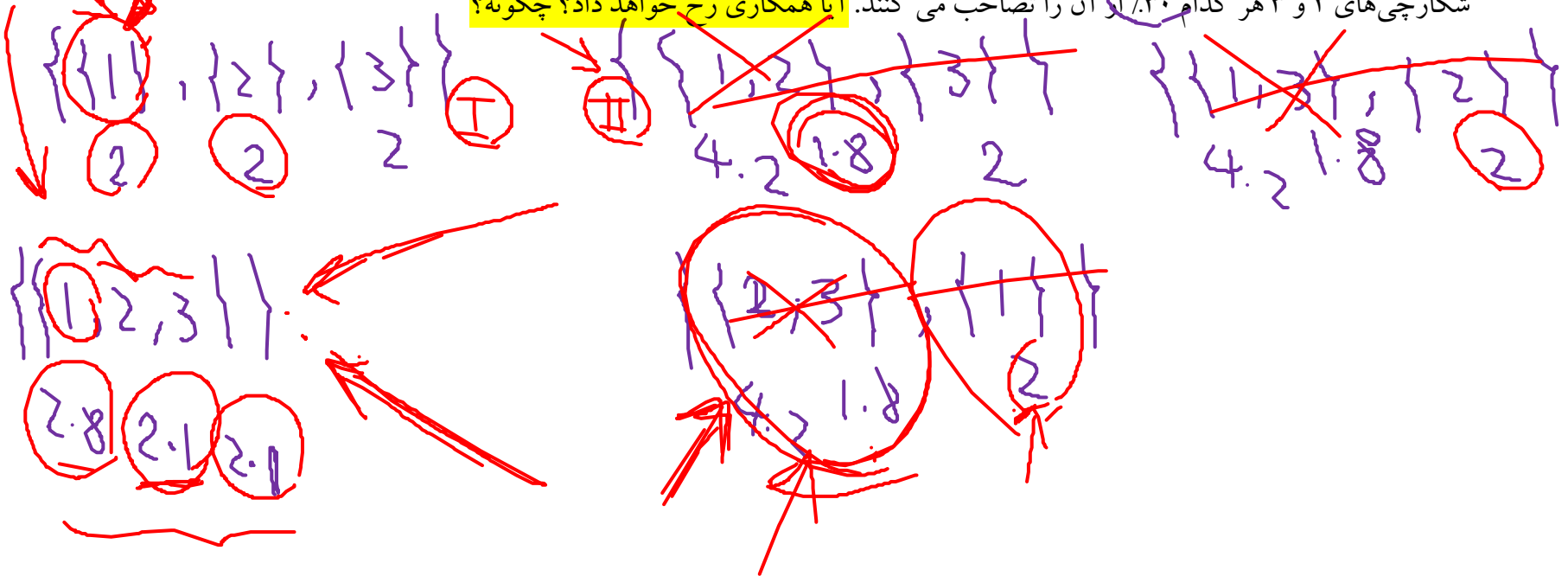
# بازی های ائتلافی Coalitional Games

**مثال ۲:** سه شکارچی ۱، ۲ و ۳ به شکار رفته اند. هر کدام به تنهایی می توانند یک خرگوش با ارزش ۲ را شکار کنند، اما اگر دو نفر از

آنها با یکدیگر همکاری کنند، می توانند یک قوچ با ارزش ۶ را شکار کنند و شکارچی با شماره ۱ کمتر، ۷۰٪ و شکارچی دیگر، ۳۰٪ را

آن را تصاحب می کنند؛ و اگر سه نفر با یکدیگر همکاری کنند، می توانند یک گوزن با ارزش ۷ را شکار کنند و شکارچی ۱، ۴۰٪ و

شکارچی های ۲ و ۳ هر کدام ۳۰٪ از آن را تصاحب می کنند. آیا همکاری رخ خواهد داد؟ چگونه؟



# بازی های ائتلافی Coalitional Games

□ تعریف بازیهای ائتلافی با سود قابل انتقال: یک بازی ائتلافی با سود قابل انتقال مشتمل است بر:

➤ یک مجموعه از بازیکنان (معمولا با نماد  $N$  نمایش می دهیم)،

➤ یک تابع که به هر زیر مجموعه غیرتهی از بازیکنان (که به آن ائتلاف گوئیم و معمولا با نماد  $S$  نمایش می دهیم)، یک

مقدار حقیقی نسبت می دهد (که به آن، ارزش/ثروت ائتلاف گوئیم و به این تابع، تابع ارزش/ثروت ائتلاف ها گوئیم).

$\langle N, v \rangle$

$R \rightarrow$  مجموعه زیرمجموعه ها  $N$  :  $v$

# بازی های ائتلافی Coalitional Games

□ تعریف. یک بازی ائتلافی با سود قابل انتقال را چسبنده (cohesive) گوئیم اگر برای هر افراز

$\{S_K, \dots\}$

## بازی های ائتلافی Coalitional Games

□ مثال: سه شکارچی ۱، ۲ و ۳ به شکار رفته اند. هر کدام به تنهایی می تواند یک خرگوش با ارزش ۲ را شکار کند، اما اگر دو نفر از آنها با یکدیگر همکاری کنند، می توانند یک قوچ با ارزش ۶ را شکار کنند و به هر صورت توافقی تقسیم کنند؛ و اگر سه نفر با یکدیگر همکاری کنند، می توانند یک گوزن با ارزش ۷ را شکار کنند و به هر صورت توافقی تقسیم کنند. آیا همکاری رخ خواهد داد؟ چگونه؟

✓ اگر بازی چسبنده نباشد، ائتلاف بزرگ قابل شکل گیری نیست (اثبات به عنوان تمرین)

❖ در بازی ائتلافی با سود قابل انتقال و چسبنده، چه زمانی (با چه تقسیم سودی) یک ائتلاف بزرگ شکل می گیرد؟

□ اگر در مثال فوق ارزش گوزن، به جای ۷، برابر با ۱۲ باشد، چه طور؟  
Go to Settings to activate Windows.

# بازی های ائتلافی Coalitional Games

➤ اگر ائتلاف  $S$  شامل اعضا  $\{a_1, a_2, \dots, a_M\}$  باشد آنگاه سود بازیکنان داخل ائتلاف، برداری از اعداد حقیقی نامنفی به صورت  $(x_{a_1}, x_{a_2}, \dots, x_{a_M})$  است چنان که  $\sum_{a_k \in S} x_{a_k} = v(S)$ .  
لذا چنین بردارهایی را **بردار سود شدنی برای  $S$  (S-feasible payoff vector)** می نامیم.  
➤ برای ائتلاف بزرگ به چنین برداری، یک **نمایه سود شدنی (feasible payoff profile)** گوییم.

➤ تعریف هسته (Core) در یک بازی ائتلافی با سود قابل انتقال: **هسته** عبارت است از مجموعه نمایه سود شدنی های  $(x_a)_{a \in N}$  با این خاصیت که هیچ ائتلاف  $S$  و بردار سود شدنی برای  $S$  مانند  $(y_a)_{a \in S}$  وجود نداشته باشد چنان که  $y_a \geq x_a$  برای هر  $a \in S$ .  
(به طور معادل، برای هر ائتلاف غیرفراگیر  $S$  و بردار سود شدنی برای  $S$  مانند  $(y_a)_{a \in S}$ ، برای حداقل یک عضو  $S$  داشته باشیم  $y_a < x_a$ )  
□ به طور معادل، هیچ مجموعه ای از بازیکنان برای خروج از ائتلاف توافق نداشته باشند

# بازی های ائتلافی Coalitional Games

□ مثال: سه شکارچی ۱، ۲ و ۳ به شکار رفته اند. هر کدام به تنهایی می تواند یک خرگوش با ارزش ۲ را شکار کند، اما اگر دو نفر از آنها با یکدیگر همکاری کنند، می توانند یک قوچ با ارزش ۶ را شکار کنند و به هر صورت توافق تقسیم کنند؛ و اگر سه نفر با یکدیگر همکاری کنند، می توانند یک گوزن با ارزش ۷ را شکار کنند و به هر صورت توافق تقسیم کنند. آیا همکاری رخ خواهد داد؟ چگونه؟

□ اگر در مثال فوق ارزش گوزن، به جای ۷، برابر با ۱۲ باشد، چه طور؟

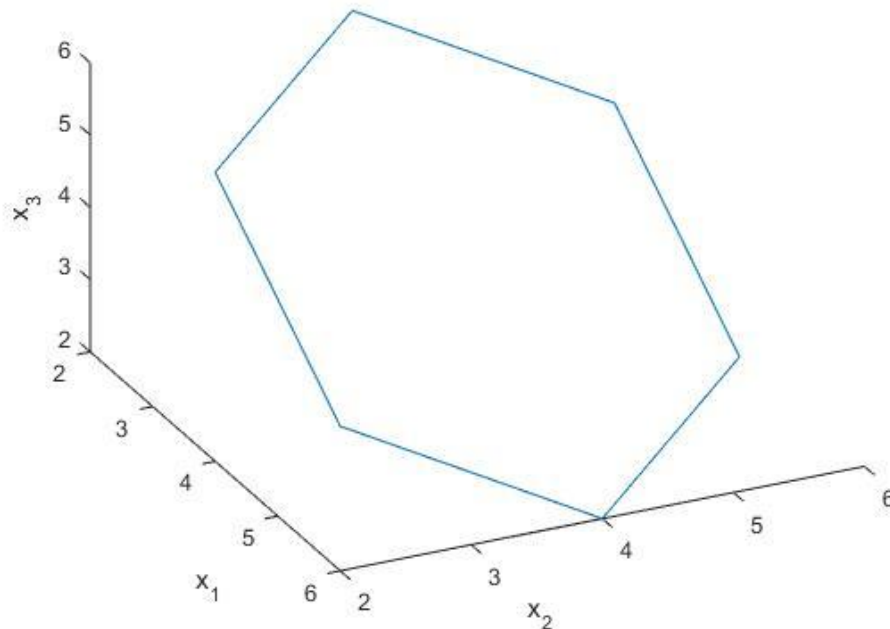
## بازی های ائتلافی Coalitional Games

- مثال: سه شکارچی ۱، ۲ و ۳ به شکار رفته اند. هر کدام به تنهایی می تواند یک خرگوش با ارزش ۲ را شکار کند، اما اگر دو نفر از آنها با یکدیگر همکاری کنند، می توانند یک قوچ با ارزش ۶ را شکار کنند و به هر صورت توافق تقسیم کنند؛ و اگر سه نفر با یکدیگر همکاری کنند، می توانند یک گوزن با ارزش ۷ را شکار کنند و به هر صورت توافق تقسیم کنند. آیا همکاری رخ خواهد داد؟ چگونه؟
- اگر در مثال فوق ارزش گوزن، به جای ۷، برابر با ۱۲ باشد، چه طور؟

# بازی های ائتلافی Coalitional Games

□ مثال: سه شکارچی ۱، ۲ و ۳ به شکار رفته اند. ....

□ اگر در مثال فوق ارزش گوزن، به جای ۷، برابر با ۱۲ باشد، چه طور؟





# بازی های ائتلافی Coalitional Games

❖ نکته: در یک بازی ائتلافی با سود قابل انتقال، یک ائتلاف  $S$  می تواند بر بردار تخصیص سود  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  از ائتلاف بزرگ غلبه کند (یعنی ائتلاف بزرگ با آن تخصیص سود را بشکند) اگر و تنها اگر ارزش آن ائتلاف (یعنی  $v(S)$ ) بیشتر از مجموع سود بازیکنان عضو آن ائتلاف در ائتلاف بزرگ باشد؛ به عبارت دیگر

$$v(S) \geq \sum_{j \in S} x_j$$

❖ به طور معادل، نمایه سود شدنی  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  در هسته است اگر و تنها اگر برای هر ائتلاف  $S$ ، مجموع سود بازیکنان  $S$  در زمان ائتلاف بزرگ، حداقل به اندازه ارزش ائتلاف باشد؛ به عبارت دیگر

$$v(S) < \sum_{j \in S} x_j \quad \text{for all } S$$

## بازی های ائتلافی Coalitional Games

□ مثال ۲: سه شکارچی ۱، ۲ و ۳ به شکار رفته اند. هر کدام به تنهایی می تواند یک خرگوش با ارزش ۲ را شکار کند، اما اگر دو نفر از آنها با یکدیگر همکاری کنند، می توانند یک قوچ با ارزش ۶ را شکار کنند و شکارچی با شماره ی کمتر، ۷۰٪ و شکارچی دیگر، ۳۰٪ از آن را تصاحب می کنند؛ و اگر سه نفر با یکدیگر همکاری کنند، می توانند یک گوزن با ارزش ۷ را شکار کنند و شکارچی ۱، ۴۰٪ و شکارچی های ۲ و ۳ هر کدام ۳۰٪ از آن را تصاحب می کنند. آیا همکاری سه نفره رخ خواهد داد؟ چگونه؟

## بازی های ائتلافی Coalitional Games

□ مثال ۲: سه شکارچی ۱، ۲ و ۳ به شکار رفته اند. هر کدام به تنهایی می تواند یک خرگوش با ارزش ۲ را شکار کند، اما اگر دو نفر از آنها با یکدیگر همکاری کنند، می توانند یک قوچ با ارزش ۶ را شکار کنند و شکارچی با شماره ی کمتر، ۷۰٪ و شکارچی دیگر، ۳۰٪ از آن را تصاحب می کنند؛ و اگر سه نفر با یکدیگر همکاری کنند، می توانند یک گوزن با ارزش ۷ را شکار کنند و شکارچی ۱، ۴۰٪ و شکارچی های ۲ و ۳ هر کدام ۳۰٪ از آن را تصاحب می کنند. آیا همکاری سه نفره رخ خواهد داد؟ چگونه؟

# بازی های ائتلافی Coalitional Games

□ تعریف بازیهای ائتلافی (شاید با سود غیر قابل انتقال). یک بازی ائتلافی مشتمل است بر:

➤ یک مجموعه از بازیکنان (که معمولاً با نماد  $N$  نمایش می دهیم)،

➤ برای هر زیر مجموعه غیر تهی از بازیکنان (که ائتلاف گفته می شود و با معمولاً با نماد  $S$  نشان داده می

شود)، یک مجموعه از حرکت ها (actions) (که معمولاً با نماد  $a_S$  نشان داده می شود).

➤ برای هر بازیکن، اولویت ها بین همه اکشن های همه ی ائتلاف هایی که آن بازیکن

در آن ائتلاف هست. (معمولاً یا مقادیر عددی سود بازیکنان نشان داده می شود)

- اکشن ها در بند دوم می توانند با چگونگی تقسیم دست آورد ائتلاف بین اعضای جایگزین شوند (به آن  $S$ -allocation گوئیم)؛ و در این صورت بند آخر قابل حذف است (در واقع بند دوم و سوم با هم بیان شده اند).

# بازی های ائتلافی Coalitional Games

مثال.  $N = \{1,2,3\}$  □

$$\{1,2,3\} \Rightarrow (5,4,3) \quad , \quad \{1,2,3\} \Rightarrow (2,1,5) \quad , \quad \{1,2,3\} \Rightarrow (2,5,6) \quad ,$$

$$\{1,2\} \Rightarrow (2,2) \quad ,$$

$$\{1,3\} \Rightarrow (4,2) \quad , \quad \{1,3\} \Rightarrow (1,4) \quad ,$$

$$\{2,3\} \Rightarrow (4,1) \quad , \quad \{2,3\} \Rightarrow (4,5) \quad ,$$

$$\{1\} \Rightarrow (1) \quad ,$$

$$\{2\} \Rightarrow (1) \quad ,$$

$$\{3\} \Rightarrow (0)$$

# بازی های ائتلافی Coalitional Games

□ در بازی ائتلافی، در بسیاری اوقات به دنبال شرایطی هستیم که ائتلاف بزرگ شکل گیرد؛ یعنی همه بازیکنان با یکدیگر همکاری کنند.

□ **تعریف بازی ائتلافی چسبنده.** یک بازی ائتلافی را چسبنده گوئیم اگر برای هر افراز  $\{S_1, S_2, \dots, S_K\}$  از کلیه بازیکنان و هر ترکیب از اکشن ها  $(a_{S_1}, a_{S_2}, \dots, a_{S_K})$ ، برای ائتلاف بزرگ یک اکشن  $a_N$  داشته باشیم با این خاصیت که این اکشن برای هر بازیکن حداقل به خوبی اکشن متناظر آن بازیکن در  $(a_{S_1}, a_{S_2}, \dots, a_{S_K})$  باشد.

□ اثبات کنید که برای بازی با سود قابل انتقال، این تعریف با تعریف چسبندگی در آن بازیها یکسان است

# بازی های ائتلافی Coalitional Games

مسئله

مثال.  $N = \{1,2,3\}$

$\{1,2,3\} \Rightarrow (5,4,3)$  ,  $\{1,2,3\} \Rightarrow (2,1,5)$  ,  $\{1,2,3\} \Rightarrow (2,5,6)$  ,

$\{1,2\} \Rightarrow (2,2)$  ,

$\{1,3\} \Rightarrow (4,2)$  ,  $\{1,3\} \Rightarrow (1,4)$  ,

$\{2,3\} \Rightarrow (4,1)$  ,  $\{2,3\} \Rightarrow (4,5)$  ,

$\{1\} \Rightarrow (1)$  ,

$\{2\} \Rightarrow (1)$  ,

$\{3\} \Rightarrow (0)$  ,

f

g

b

a

a

b

a

a

a

d e

e j

f j

g i

h i

ijk

2 2 0

4 1 2

1 1 4

1 4 1

1 4 5

1 1 0

# بازی های ائتلافی Coalitional Games

□ مثال.  $N = \{1,2,3\}$

$$\{1,2,3\} \Rightarrow (5,4,3) \quad , \quad \{1,2,3\} \Rightarrow (2,1,5) \quad , \quad \{1,2,3\} \Rightarrow (2,5,6) \quad ,$$

$$\{1,2\} \Rightarrow (2,2) \quad ,$$

$$\{1,3\} \Rightarrow (4,2) \quad , \quad \{1,3\} \Rightarrow (1,4) \quad ,$$

$$\{2,3\} \Rightarrow (4,1) \quad , \quad \{2,3\} \Rightarrow (4,5) \quad ,$$

$$\{1\} \Rightarrow (1) \quad ,$$

$$\{2\} \Rightarrow (1) \quad ,$$

$$\{3\} \Rightarrow (0)$$



## بازی های ائتلافی Coalitional Games

□ مثال.  $N = \{1,2,3\}$

$$\{1,2,3\} \Rightarrow (5,4,3) \quad , \quad \{1,2,3\} \Rightarrow (2,1,5) \quad , \quad \{1,2,3\} \Rightarrow (2,5,6) \quad ,$$

$$\{1,2\} \Rightarrow (2,2) \quad ,$$

$$\{1,3\} \Rightarrow (4,2) \quad , \quad \{1,3\} \Rightarrow (1,4) \quad ,$$

$$\{2,3\} \Rightarrow (4,1) \quad , \quad \{2,3\} \Rightarrow (4,5) \quad ,$$

$$\{1\} \Rightarrow (1) \quad ,$$

$$\{2\} \Rightarrow (1) \quad ,$$

$$\{3\} \Rightarrow (0)$$

# بازی های ائتلافی Coalitional Games

تعریف

□ **تعریف هسته.** هسته‌ی یک بازی ائتلافی عبارت است از مجموعه‌ی اکشن‌های  $a_N$  از ائتلاف بزرگ با این خاصیت که برای هیچ ائتلافی هیچ اکشنی وجود نداشته باشد که همه بازیکنان آن ائتلاف، آن اکشن را به  $a_N$  ترجیح دهند.

- نکته ۱: ممکن است برای یک بازی، چنین اکشنی وجود نداشته باشد. در این حالت **نمی‌گوییم** که هسته وجود ندارد، بلکه می‌گوییم هسته مجموعه تهی است.
  - نکته ۲: اگر یک بازی چسبنده نباشد آنگاه هسته‌ی آن تهی است.
- آیا می‌توانید مثالی بزنید که یک بازی چسبنده باشد اما هسته‌ی آن تهی باشد؟

# بازی های ائتلافی Coalitional Games

مثال.  $N = \{1,2,3\}$  □

$$\{1,2,3\} \Rightarrow (5,4,3) \quad , \quad \{1,2,3\} \Rightarrow (2,1,5) \quad , \quad \{1,2,3\} \Rightarrow (2,5,6) \quad ,$$

$$\{1,2\} \Rightarrow (2,2) \quad ,$$

$$\rightarrow \{1,3\} \Rightarrow (4,2) \quad , \quad \{1,3\} \Rightarrow (1,4) \quad ,$$

$$\rightarrow \{2,3\} \Rightarrow (4,1) \quad , \quad \{2,3\} \Rightarrow (4,5) \quad ,$$

$$\rightarrow \{1\} \Rightarrow (1) \quad ,$$

$$\rightarrow \{2\} \Rightarrow (1) \quad ,$$

$$\rightarrow \{3\} \Rightarrow (0) \quad ,$$

~~$$(5,4,3)$$~~

~~$$(2,1,5)$$~~

$$(2,5,6)$$

$$\bar{w} = \{(2,5,6)\}$$

## بازی های ائتلافی Coalitional Games

□ مثال.  $N = \{1,2,3\}$

$$\{1,2,3\} \Rightarrow (5,4,3) \quad , \quad \{1,2,3\} \Rightarrow (2,1,5) \quad , \quad \{1,2,3\} \Rightarrow (2,5,6) \quad ,$$

$$\{1,2\} \Rightarrow (2,2) \quad ,$$

$$\{1,3\} \Rightarrow (4,2) \quad , \quad \{1,3\} \Rightarrow (1,4) \quad ,$$

$$\{2,3\} \Rightarrow (4,1) \quad , \quad \{2,3\} \Rightarrow (4,5) \quad ,$$

$$\{1\} \Rightarrow (1) \quad ,$$

$$\{2\} \Rightarrow (1) \quad ,$$

$$\{3\} \Rightarrow (0)$$

## بازی های ائتلافی Coalitional Games

□ مثال.  $N = \{1,2,3\}$

$$\{1,2,3\} \Rightarrow (5,4,3) \quad , \quad \{1,2,3\} \Rightarrow (2,1,5) \quad , \quad \{1,2,3\} \Rightarrow (2,5,6) \quad ,$$

$$\{1,2\} \Rightarrow (2,2) \quad ,$$

$$\{1,3\} \Rightarrow (4,2) \quad , \quad \{1,3\} \Rightarrow (1,4) \quad ,$$

$$\{2,3\} \Rightarrow (4,1) \quad , \quad \{2,3\} \Rightarrow (4,5) \quad ,$$

$$\{1\} \Rightarrow (1) \quad ,$$

$$\{2\} \Rightarrow (1) \quad ,$$

$$\{3\} \Rightarrow (0)$$

# بازی های ائتلافی Coalitional Games

□ مثال. یک کارفرما می خواهد کارگاه خود را با تعدادی کارگر راه اندازی کند. تعداد کارگران در منطقه،  $m = 2$  نفر است.

سود حاصل از کارگاه به صورت  $f(k+1)$  است که در آن،  $k$  تعداد کارگرانی است که در کارگاه کار می کنند و  $f(\cdot)$  تابعی صعودی است و  $f(0) = 0$ . کارفرما می تواند سود را به هر شکل دلخواه بین کارگران توزیع کند. چگونه دستمزد بدهد

که هر دو کارگر برای او کار کنند؟

$$f(1), 0, 0$$

هم کارگر  
استعداد ندارد

مجموعه بازیکنان: کارفرما، کارگر ۱، کارگر ۲

$$f(2) - x_1, x_1, 0$$

کارفرما

هر ائتلاف که شامل کارفرما نباشد، منجر به سود صفر برای هر کارگر می شود.

$$f(3) - x_1 - x_2, x_1, x_2$$

ائتلاف فقط شامل کارفرما، منجر به سود  $f(1)$  برای کارفرما می شود.

در هر ائتلاف شامل کارفرما و فقط یک کارگر، کلیه تخصیص سودهای به فرم  $(x, f(2) - x)$  ممکن هستند که در آنها،

$0 \leq x \leq f(2)$  و سود کارگر است.

در ائتلاف بزرگ (کارفرما و هر دو کارگر)، کلیه تخصیص سودهای به فرم  $(x_1, x_2, f(3) - x_1 - x_2)$  ممکن هستند

که در آنها،  $0 \leq x_1 + x_2 \leq f(3)$  و سود کارگر نام است.

$$f(3) - x_1 - x_2, x_1, x_2$$

هر دو کارگر

در ائتلاف بزرگ (کارفرما و هر دو کارگر)، کلیه تخصیص سودهای به فرم  $(x_1, x_2, f(3) - x_1 - x_2)$  ممکن هستند

که در آنها،  $0 \leq x_1 + x_2 \leq f(3)$  و سود کارگر نام است.

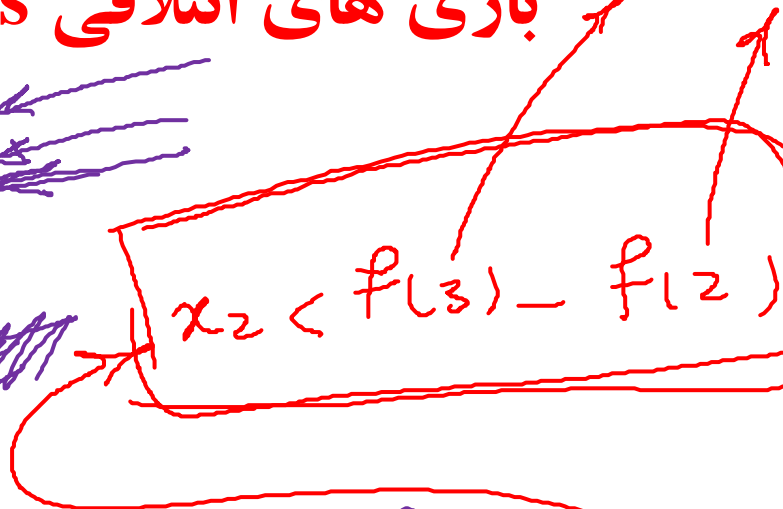
# بازی های ائتلافی Coalitional Games

$$\rightarrow (x_1, x_2, f_{13} - x_1 - x_2)$$

$$\rightarrow x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$



$$x_2 < f_{13} - f_{12}$$



$$\rightarrow (x'_1, f_{12} - x'_1)$$

$$\rightarrow x'_1 \geq x_1$$

$$\rightarrow f_{12} - x'_1 \geq f_{13} - x_1 - x_2$$



$$x_1 \leq x'_1 \leq x_1 + x_2 + f_{12} - f_{13}$$

$$\rightarrow x_1 > x_1 + x_2 + f_{12} - f_{13}$$

## بازی های ائتلافی Coalitional Games

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_2 < f(3) - f(2)$$

$$x_1 < f(3) - f(2)$$

$$f(3) - x_1 - x_2 > f(1) \Rightarrow$$

$$x_1 + x_2 < \underbrace{f(3)}_{\text{}} - \underbrace{f(1)}_{\text{}}$$

$$\rightarrow (x_1, x_2, f(3) - x_1 - x_2)$$



## بازی های ائتلافی Coalitional Games

$$x_i < f(n+1) - f(n)$$

$$\frac{n}{n}$$

$$x_i + x_j < f(n+1) - f(n-1)$$

$$x_i + x_j + x_k < f(n+1) - f(n-2)$$

$$\sum_{k \in I} x_k$$

$$\text{جمع صورتها هر کس} < f(n+1) - f(1)$$

# بازی های ائتلافی Coalitional Games

## بازی های ائتلافی Coalitional Games

پایان

Evolutionary  
Game Theory

بازی های تکاملی