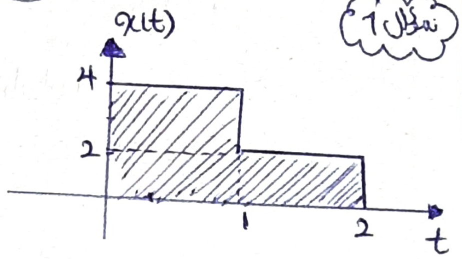
به نام خدا

محمدرضا جباری

حل تکالیف سری سوم - تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

تمرین ۱



* روش اول (استفاده از تعریف تبدیل لاپلاس)

$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}\,dt=\int_0^1 4e^{-st}\,dt+\int_1^2 2e^{-st}\,dt$$

$$=-\frac{4}{s}e^{-st}\Big|_0^1-\frac{2}{s}e^{-st}\Big|_1^2=\frac{2}{s}\left(2-e^{-s}-e^{-2s}\right)\ \checkmark$$

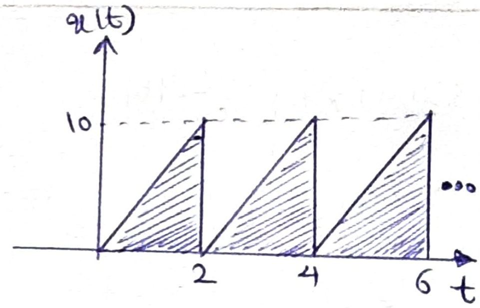
* روش دوم (استفاده از خواص تبدیل لاپلاس)

$$x(t)=4u(t)-2u(t-1)-2u(t-2)$$

از آنجایی که می‌دانیم $\mathcal{L}\{u(t)\}=\frac{1}{s}$ و $\mathcal{L}\{u(t-t_0)\}=\frac{e^{-t_0 s}}{s}$ داریم:

$$X(s)=\frac{4}{s}-\frac{2e^{-s}}{s}-\frac{2e^{-2s}}{s}=\frac{2}{s}\left(2-e^{-s}-e^{-2s}\right)\ \checkmark$$

ناحیه همگرایی این سیگنال چیست؟!



سیگنال داده شده یک سیگنال متناوب یکطرفه سمت راست است که رابطه آن برابر:

سیکل اول آن به صورت زیر است:

$$x_1(t)=5t\,u(t)-5t\,u(t-2)=5t\left[u(t)-u(t-2)\right],\quad 0\le t<2$$

بنابراین داریم:

$$X_1(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)e^{-st}\,dt=\int_0^2 5t\,e^{-st}\,dt=\frac{5}{s^2}\left[1-(2s+1)e^{-2s}\right]$$ رابطه ۱

$$X_2(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t)e^{-st}\,dt=\int_2^4 5(t-2)e^{-st}=\int_0^2 5\tau e^{-s(\tau+2)}\,d\tau=e^{-2s}\int_0^2 5\tau e^{-s\tau}\,d\tau$$

تغییر متغیر: $\tau\triangleq t-2$

$$=e^{-2s}X_1(s)$$

$\vdots$

$$X_m(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} x_m(t)e^{-st}\,dt=\int_{2m-2}^{2m} 5(t-2m+2)e^{-st}\,dt=\int_0^2 5\tau\,e^{-s(\tau+2m-2)}\,d\tau$$

$$\tau\triangleq t-2m+2$$

$$=e^{-2(m-1)s}\int_0^2 5\tau e^{-s\tau}\,d\tau=e^{-2(m-1)s}X_1(s)$$

از طرفی داریم:

$$x(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}5(t-2k)\left[u(t-2k)-u(t-2(k+1))\right]=x_1(t)+x_2(t)+\dots$$

$$X(s)=\mathcal{L}\{x(t)\}=X_1(s)+X_2(s)+\dots=X_1(s)\left[1+e^{-2s}+e^{-4s}+\dots\right]$$

صفحه 2

تصاعد هندسی ← میدانیم: $1+x+x^2+\dots = \dfrac{1}{1-x}$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{X_1(s)}{1-e^{-2s}} \underset{\text{رابطه 1}}{=} \frac{5\left[1-(2s+1)e^{-2s}\right]}{s^2(1-e^{-2s})}$$

! ناحیه ی همگرایی $X(s)$، برابر با اشتراک ناحیه ی همگرایی $X_1(s)$ و $\dfrac{1}{1-e^{-2s}}$ است. باتوجه به اینکه $X(s)$ یک سیگنال دوو محدود و علی است پس ناحیه ی همگرایی آن برابر کل صفحه ی s به جز $s=-\infty$ است. بنابراین ناحیه ی همگرایی $X(s)$ به صورت $Re(s)>0$ خواهد بود.

! درحالت کلی چون در درس سیگنال از تعریف تبدیل لاپلاس دوطرفه استفاده میکنیم (کران انتگرال گیری از $-\infty$ تا $+\infty$ است)، تبدیل لاپلاس برای سیگنال های متناوب نظیر $\sin t$، $\cos t$ و ... قابل تعریف نیست. ولی همانطور که نشان دادیم، برای سیگنال های نیمه متناوب یا اصطلاحاً متناوب یکطرفه تبدیل لاپلاس تعریف میشود.

سوال 2

الف-1) $x(t) = e^{-2|t|}$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t|} e^{-st}\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^{2t} e^{-st}\,dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-2t} e^{-st}\,dt$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2-s} e^{(2-s)t}\Big|_{-\infty}^{0}}_{\substack{Re(2-s)>0 \\ Re(s)<2}} + \underbrace{\frac{-1}{2+s} e^{-(2+s)t}\Big|_{0}^{+\infty}}_{\substack{Re(2+s)>0 \\ Re(s)>-2}} = \frac{1}{2-s} - \frac{1}{2+s}\ ,\quad -2<Re(s)<2$$

برای همگرایی هر این انتگرال ها باید داشته باشیم

ناحیه همگرایی کل، از اشتراک نواحی همگرایی بدست میآید.

الف-2) $x(t) = 3e^{-2t}u(t) + 4e^{t}u(-t)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[3e^{-2t}u(t) + 4e^{t}u(-t)\right] e^{-st}\,dt = \int_{0}^{+\infty} 3e^{-(2+s)t}\,dt + \int_{-\infty}^{0} 4e^{(1-s)t}\,dt$$

$$= \underbrace{-\frac{3}{2+s} e^{-(2+s)t}\Big|_{0}^{+\infty}}_{\substack{Re(2+s)>0 \\ Re(s)>-2}} + \underbrace{\frac{4}{1-s} e^{(1-s)t}\Big|_{-\infty}^{0}}_{\substack{Re(1-s)>0 \\ Re(s)<1}} = \frac{3}{s+2} - \frac{4}{s-1}\ ,\quad -2<Re(s)<1$$

! به سیگنال های بیان شده در قسمت "الف-1" و "الف-2" در اصطلاح سیگنال های دوطرفه یا دوسمتی گفته میشود زیرا

صفحه 3

از هر دو طرف نامحدود بوده و از $t=-\infty$ تا $t=+\infty$ امتداد دارند. به عنوان یک قاعده کلی به خاطر بسپارید که ناحیه همگرایی سیگنال های دوطرفه درصورت وجود به صورت نوار عمودی $a_1 < Re(S) < a_2$ در صفحه S خواهد بود، که a_1 و a_2 قطب های تبدیل لاپلاس هستند. (عکس این موضوع نیز صادق است)

3- الف) $x(t)=\begin{cases}\sin(\pi t) & 0<t<1\\ 0 & o.w\end{cases} = \sin(\pi t)\left[u(t)-u(t-1)\right]$

$$X(S)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(\pi t)\left[u(t)-u(t-1)\right]e^{-st}\,dt \underset{\text{فرمول اویلر}}{=} \frac{1}{2j}\int_0^1\left(e^{j\pi t}-e^{-j\pi t}\right)e^{-st}\,dt$$

$$=\frac{1}{2j}\int_0^1 e^{(j\pi-s)t}-e^{-(j\pi+s)t}\,dt$$

$$=\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{j\pi-s}e^{(j\pi-s)t}+\frac{1}{j\pi+s}e^{-(j\pi+s)t}\right]_0^1=\frac{1}{2j}\left[\frac{e^{(j\pi-s)}}{j\pi-s}+\frac{e^{-(j\pi+s)}}{j\pi+s}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{j\pi-s}+\frac{1}{j\pi+s}\right]\underset{e^{j\pi}=e^{-j\pi}=-1}{=}\frac{1}{2j}\left[-\frac{e^{-s}}{j\pi-s}-\frac{e^{-s}}{j\pi+s}-\frac{1}{j\pi-s}-\frac{1}{j\pi+s}\right]$$

$$=\frac{\pi(1+e^{-s})}{s^2+\pi^2}$$

در مراحل انتگرال گیری به مرحله ای خاص برخورد نکردیم که علامت S موجب واگرایی شود پس ناحیه همگرایی کل صفحه S خواهد بود. اما با توجه به اینکه به ازای $S=-\infty$ حاصل تبدیل لاپلاس بی کران می شود پس ناحیه همگرایی کل صفحه S به جز $S=-\infty$ خواهد بود.

- در حالت کلی، اگر سیگنال $x(t)$ در حوزه زمان محدود باشد، ROC آن کل صفحه S است و باید $S=\pm\infty$ بررسی شود. (عکس این قضیه نیز درست است)

صفحه 4

4-الف) $x(t) = |t| e^{-2|t|} = te^{-2t}u(t) - te^{2t}u(-t)$

$$X(S) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[te^{-2t}u(t) - te^{2t}u(-t)\right]e^{-St}\,dt = \int_{0}^{+\infty} te^{-(2+S)t}\,dt - \int_{-\infty}^{0} te^{(2-S)t}\,dt$$

$$= \underbrace{\left[(t)\left(-\frac{e^{-(2+S)t}}{2+S}\right) - (1)\left(\frac{e^{-(2+S)t}}{(2+S)^2}\right)\right]_0^{+\infty}}_{Re(2+S)>0 \rightsquigarrow Re(S)>-2} - \underbrace{\left[(t)\left(\frac{e^{(2-S)t}}{2-S}\right) - (1)\left(\frac{e^{(2-S)t}}{(2-S)^2}\right)\right]_{-\infty}^{0}}_{Re(2-S)>0 \rightsquigarrow Re(S)<2}$$

$$= \frac{1}{(2+S)^2} + \frac{1}{(2-S)^2}, \quad \boxed{-2 < Re(S) < 2} \ \checkmark$$

1-ب) $x(t) = \left[e^{-5t}\sin(5t) + e^{-4t}\right]u(t) = \underbrace{e^{-5t}\sin 5t\, u(t)}_{x_1(t)} + \underbrace{e^{-4t}u(t)}_{x_2(t)}$

$$*\ \sin(5t)u(t) \xrightarrow{L} \frac{5}{S^2+25}, \quad Re(S)>0$$

$$e^{-5t}\sin(5t)u(t) \xrightarrow{L} \frac{5}{(S+5)^2+25}, \quad Re(S)+5>0$$

$$*\ e^{-4t}u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{S+4}, \quad Re(S)>-4$$

در حالت کلی ناحیه همگرایی ترکیب خطی دو سیگنال، حداقل برابر با اشتراک نواحی همگرایی دو سیگنال خواهد بود؛ و اگر حذف قطب رخ دهد، ممکن است بزرگتر از ناحیه اشتراک نیز شود.

$$\rightsquigarrow X(S) = \frac{5}{(S+5)^2+25} + \frac{1}{S+4}, \quad ROC \geqslant \{Re(S)>-5\} \cap \{Re(S)>-4\}$$

$$ROC = \{Re(S)>-4\}$$

اما در اینجا حذف قطب رخ نمی‌دهد

2-ب) $x(t) = te^{-2|t|}$

$$x(t) = te^{-2t}u(t) + te^{2t}u(-t) \equiv x_1(t) + x_2(t)$$

$$*\ e^{-2t}u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{S+2}, \quad Re(S)+2>0$$

$$te^{-2t}u(t) \xrightarrow{L} -\frac{d}{dS}\left\{\frac{1}{S+2}\right\} = \frac{1}{(S+2)^2}, \quad Re(S)+2>0$$

$$*\ -e^{2t}u(-t) \xrightarrow{L} \frac{1}{S-2}, \quad Re(S)-2<0$$

$$-te^{2t}u(-t) \xrightarrow{L} -\frac{d}{dS}\left\{\frac{1}{S-2}\right\} = \frac{1}{(S-2)^2}, \quad Re(S)-2<0$$

$$\rightsquigarrow X(S) = \frac{1}{(S+2)^2} - \frac{1}{(S-2)^2}, \quad ROC \geqslant \{Re(S)+2>0\} \cap \{Re(S)-2<0\}$$

$$\geqslant \{-2 < Re(S) < 2\}$$

$$3-\text{ب})\quad x(t)=\int_0^t e^{-3\tau}\cos(2\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^t e^{-3\tau}\cos(2\tau)\,u(\tau)\,d\tau$$

$$*\cos(2t)\,u(t)\xrightarrow{L}\frac{S}{S^2+4}\ ,\ Re(S)>0$$

$$e^{-3t}\cos(2t)\,u(t)\xrightarrow{L}\frac{S+3}{(S+3)^2+4}\ ,\ Re(S)+3>0$$

مشابه نکته‌ی قسمت "ب-1"

$$\int_{-\infty}^t e^{-3\tau}\cos(2\tau)\,u(\tau)\,d\tau\xrightarrow{L}\frac{S+3}{S\left[(S+3)^2+4\right]}\ ,\ Roc\supseteq\{Re(S)+3>0\}\cap\{Re(S)>0\}$$

$$\boxed{Roc=\{Re(S)>0\}}\ \checkmark$$

$$4-\text{ب})\quad x(t)=r(t)*\left[\delta(t)+e^t u(t)\right]$$

$$*\,r(t)=t\,u(t)\xrightarrow{L}\frac{1}{S^2}\ ,\ Re(S)>0$$

$$*\,\delta(t)+e^t u(t)\xrightarrow{L}1+\frac{1}{S-1}=\frac{S}{S-1}\ ,\ Re(S)>1$$

دقت کنید در اینجا نیز باید مراقب حذف قطب باشید.

$$\Rightarrow X(S)=\left(\frac{1}{S^2}\right)\left(\frac{S}{S-1}\right)\ ,\ Roc\supseteq\{Re(S)>0\}\cap\{Re(S)>1\}=\{Re(S)>1\}$$

• دقت کنید در اینجا حذف قطب در $S=0$ رخ می‌دهد ولی همچنان یک قطب در $S=0$ باقی خواهد ماند و علاوه‌براین قطب $S=0$ تعیین کننده‌ی ناحیه‌ی همگرایی نیست پس داریم:

$$\boxed{X(S)=\frac{1}{S(S-1)}\ ,\ Roc=\{Re(S)>1\}}\ \checkmark$$

$$5-\text{ب})\quad x(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}u(t-k)=u(t)+u(t-1)+u(t-2)+\dots$$

$$u(t)\xrightarrow{L}\frac{1}{S}\ ,\ Re(S)>0$$

$$u(t-1)\xrightarrow{L}\frac{e^{-S}}{S}\ ,\ Re(S)>0$$

$$\vdots$$

دقت کنید باید همگرایی در $Re(S)=+\infty$ بررسی شود که در اینجا چون سرعت کاهش صورت کسر بیشتر از سرعت افزایش مخرج کسر است، مشکلی در همگرایی ایجاد نمی‌کند.

$$X(S)=\frac{1}{S}+\frac{e^{-S}}{S}+\frac{e^{-2S}}{S}+\dots=\frac{1}{S}\left(1+e^{-S}+e^{-2S}+\dots\right)=\frac{1}{S(1-e^{-S})}\ ,\ Roc=\{Re(S)>0\}$$

سؤال 3

الف) $F(S) = \dfrac{S-5}{S^2-6S+13}$, $Re(S)>3$

$$X(S) = \frac{(S-3)-2}{(S-3)^2+4} = \frac{S-3}{(S-3)^2+4} - \frac{2}{(S-3)^2+4} = X_1(S)+X_2(S)$$

درنرم افزار متلب از دستور partfrac برای تجزیه کسرهای تجزیه استفاده می شود.

$$* \cos(2t)u(t) \xrightarrow{L} \frac{S}{S^2+4} , Re(S)>0$$

$$e^{+3t}\cos(2t)u(t) \xrightarrow{L} \frac{S-3}{(S-3)^2+4} , Re(S)>3$$

$$* \sin(2t)u(t) \xrightarrow{L} \frac{2}{S^2+4} , Re(S)>0$$

$$e^{3t}\sin(2t)u(t) \xrightarrow{L} \frac{2}{(S-3)^2+4} , Re(S)>3$$

$$\Rightarrow e^{3t}\left[\cos(2t)-\sin(2t)\right]u(t) \xrightarrow{L} \frac{S-3}{(S-3)^2+4} - \frac{2}{(S-3)^2+4} = F(S) , Re(S)>3$$

با استفاده از بسط به کسرهای جزئی نیز می توان جواب را محاسبه نمود. خودتان امتحان کنید!!

ب) $F(S) = \dfrac{1}{S^2(S+1)^2}$, $-1<Re(S)<0$

از تجزیه کسرهای جزئی استفاده می کنیم:

$$F(S) = \frac{A}{S^2} + \frac{B}{S} + \frac{C}{(S+1)^2} + \frac{D}{S+1}$$

(قضیه مانده ها) اگر تبدیل لاپلاس $F(S)$ به صورت یک کسر گویا باشد:

$$F(S) = \frac{b_{n-1}S^{n-1}+b_{n-2}S^{n-2}+\dots+b_0}{a_nS^n+a_{n-1}S^{n-1}+\dots+a_0} , a_n \neq 0$$

دراین صورت مجموع مانده های این تابع برابر $\dfrac{b_{n-1}}{a_{n-1}}$ خواهد بود.

از طرفی ضرایب قطب های مرتبه اول در بسط $F(S)$ به کسرهای جزئی، همان مانده های تابع هستند.

لذا با توجه به نکته فوق، B و D مانده های $F(S)$ بوده که مجموع آن ها برابر $\frac{0}{1}=0$ است:

$*B+D=0$ رابطه 1

$$* A = S^2F(S)\Big|_{S=0} = 1$$

$$* C = (S+1)^2F(S)\Big|_{S=-1} = 1$$

به یک رابطه دیگر برای محاسبه D, B نیاز داریم. لذا از عددگذاری استفاده می کنیم.

اگر $S=1$ قرار دهیم باید داشته باشیم:

$$F(S=1) = \frac{1}{4} = \cancel{A}+B+\frac{\cancel{C}}{4}+\frac{D}{2} \rightsquigarrow B+\frac{D}{2}=1$$ رابطه 2

رابطه 1 و رابطه 2 $\rightsquigarrow \begin{cases} B+D=0 \\ B+\frac{D}{2}=1 \end{cases} \rightsquigarrow B=-2$ و $D=2$

$$\rightsquigarrow F(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{2}{s}+\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{2}{s+1} \quad , \quad -1<Re(s)<0$$

بنابراین عبارت های مربوط به $\frac{2}{s}$ و $\frac{1}{s^2}$ باید به صورت یک سیگنال سمت چپ، و عبارت های مربوط به $\frac{2}{s+1}$ و $\frac{1}{(s+1)^2}$ به صورت یک سیگنال سمت راست به حوزه ی زمان تبدیل شوند.

$$* -u(-t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s} \quad , \quad Re(s)<0$$

$$-tu(-t) \xrightarrow{L} -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right)=\frac{1}{s^2} \quad , \quad Re(s)<0$$

$$* e^{-t}u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s+1} \quad , \quad Re(s)>-1$$

$$te^{-t}u(t) \xrightarrow{L} -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+1}\right)=\frac{1}{(s+1)^2} \quad , \quad Re(s)>-1$$

$$\rightsquigarrow f(t)=-tu(-t)+2u(-t)+te^{-t}u(t)+2e^{-t}u(t)$$

$$=(2-t)u(-t)+(t+2)e^{-t}u(t) \checkmark$$

ج) $\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-3}\right)$, $Re(s)>3$

با توجه به ناحیه ی همگرایی، سیگنال زمانی متناظر یک سیگنال سمت راست است:

$$* e^{3t}u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s-3} \quad , \quad Re(s)>3$$

$$t^2e^{3t}u(t) \xrightarrow{L} \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-3}\right) \quad , \quad Re(s)>3$$

$$\rightsquigarrow f(t)=t^2e^{3t}u(t)$$

د) $F(s)=\frac{s^2-2}{s^4+4}$

$$F(s)=\frac{s^2-2}{s^4+4s^2+4-4s^2}=\frac{s^2-2}{(s^2+2)^2-4s^2}=\frac{s^2-2}{(s^2+2+2s)(s^2+2-2s)}$$

$$=\frac{s^2-2}{[(s+1)^2+1][(s-1)^2+1]}=\frac{A}{s+1+j}+\frac{B}{s+1-j}+\frac{C}{s-1+j}+\frac{D}{s-1-j}$$

$$A=(s+1+j)F(s)\Big|_{s=-1-j}=\frac{(-1-j)^2-2}{(-1-j+1-j)(-1-j-1+j)(-1-j-1-j)}=\frac{1-1+2j-2}{(-2j)(-2)(-2-2j)}$$

$$=\frac{2(j-1)}{-8j(1+j)}=-\frac{(1+j)}{4(1+j)}=-\frac{1}{4}$$

تابع 7

$B = (s+1-j)F(s)\Big|_{s=-1+j} = \circ\circ\circ = -\frac{1}{4}$

$C = (s-1+j)F(s)\Big|_{s=1-j} = \circ\circ\circ = \frac{1}{4}$, $D = (s-1-j)F(s)\Big|_{s=1+j} = \circ\circ\circ = \frac{1}{4}$

$$F(s) = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s+1+j} + \frac{1}{s+1-j}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-1+j} + \frac{1}{s-1-j}\right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{2s+1}{(s+1)^2+1}\right)$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{2s-2}{(s-1)^2+1}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{s-1}{(s-1)^2+1} - \frac{1}{2}\,\frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

$$\rightsquigarrow f(t) = \frac{1}{2}e^{t}\cos(t) - \frac{1}{2}e^{-t}\cos(t) = \cos(t)\left(\frac{e^{t}-e^{-t}}{2}\right) = \boxed{\cos(t)\sinh(t)}\ \checkmark$$

---

8) $F(s) = \dfrac{s}{s^3+2s^2+9s+18}$, $Re(s) > -2$

$$F(s) = \frac{s}{(s+2)(s^2+9)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3j} + \frac{C}{s-3j}$$

$A = (s+2)F(s)\Big|_{s=-2} = \dfrac{-2}{4+9} = -\dfrac{2}{13}$

$B = (s+3j)F(s)\Big|_{s=-3j} = \circ\circ\circ = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{2+3j}{13}$

$C = (s-3j)F(s)\Big|_{s=3j} = \circ\circ\circ = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{2-3j}{13}$

$$\rightsquigarrow F(s) = \frac{-2/13}{s+2} + \frac{2}{13}\left(\frac{s}{s^2+9}\right) + \frac{3}{13}\left(\frac{3}{s^2+9}\right)$$

$$\rightsquigarrow f(t) = \boxed{\left(-\frac{2}{13}e^{-2t} + \frac{2}{13}\cos(3t) + \frac{3}{13}\sin(3t)\right)u(t)}\ \checkmark$$

---

9) $F(s) = \dfrac{2+2se^{-2s}+4e^{-4s}}{s^2+4s+3}$, $Re(s) > -1$

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s)e^{-2s} + F_3(s)e^{-4s} = \frac{2}{s^2+4s+3} + \frac{2s}{s^2+4s+3}e^{-2s} + \frac{4}{s^2+4s+3}e^{-4s}$$

$s^2+4s+3 \to (s+3)(s+1)$

$F_1(s) = \dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{s+3} \rightsquigarrow f_1(t) = (e^{-t} - e^{-3t})u(t)$

$F_2(s) = \dfrac{-1}{s+1} + \dfrac{3}{s+3} \rightsquigarrow f_2(t) = (-e^{-t} + 3e^{-3t})u(t)$

سوم

$$F_3(S) = \frac{2}{S+1} - \frac{2}{S+3} \rightsquigarrow f_3(t) = 2(e^{-t} - e^{-3t})u(t)$$

$$\rightsquigarrow f(t) = (e^{-t} - e^{-3t})u(t) + \left[-e^{-(t-2)} + 3e^{-3(t-2)}\right]u(t-2)$$

$$\boxed{+2\left[e^{-(t-4)} - e^{-3(t-4)}\right]u(t-4)} \checkmark$$

سؤال 4

الف) $x(t) = e^{-|t|}$ $\qquad h(t) = e^{-t}\cos(t)\,u(t)$

$$x(t) = e^{-t}u(t) - (-e^{+t}u(-t)) \rightsquigarrow X(S) = \frac{1}{S+1} - \frac{1}{S-1} = \frac{-2}{S^2-1} \quad , \quad -1 < Re(S) < 1$$

$$\cos(t)u(t) \xrightarrow{L} \frac{S}{S^2+1}$$

$$e^{-t}\cos(t)u(t) \xrightarrow{L} \frac{S+1}{(S+1)^2+1} \rightsquigarrow H(S) = \frac{S+1}{S^2+2S+2} \qquad Re(S) > -1$$

قطب های $H(S)$ در $S = -1 \pm j$ قرار دارند و از آنجایی که در صورت سؤال به پایداری سیستم اشاره نشده است، لذا ناحیه همگرایی آن باید شامل محور jw باشد.

$$y(t) = h(t) * x(t) \rightsquigarrow Y(S) = H(S)\,X(S) \quad , \quad ROC \supseteq ROC_x \cap ROC_h$$

$$Y(S) = \frac{-2}{(S-1)(S^2+2S+2)} = -\frac{2}{5}\frac{1}{S-1} + \frac{2}{5}\frac{(S+1)}{(S+1)^2+1} + \frac{2}{5}\frac{2}{(S+1)^2+1}$$

$$ROC = \{-1 < Re(S) < 1\} \cap \{Re(S) > -1\}$$

دقت کنید قطب محدود کننده ناحیه همگرایی حذف نشده است و لذا علامت نامساوی به مساوی تبدیل می شود.

$$= \{-1 < Re(S) < 1\}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{y(t) = \frac{2}{5}e^{t}u(-t) + \frac{2}{5}e^{-t}\left(\cos(t) + 2\sin(t)\right)u(t)} \checkmark$$

ب) $x(t) = e^{6t}$ $\qquad h(t) = \frac{1}{4}(e^{-2t})u(t) + \frac{1}{4}(e^{2t})u(-t)$

$$H(S) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{S+2} - \frac{1}{S-2}\right) = \frac{-1}{(S+2)(S-2)} = \frac{1}{4-S^2} \quad , \quad -2 < Re(S) < 2$$

! اگر $H(S)$ تابع تبدیل یک سیستم LTI باشد، پاسخ آن به ورودی هایی به فرم $y(t) = H(S_0)e^{S_0 t}$ برابر $x(t) = e^{S_0 t}$ خواهد بود (برای اثبات این موضوع از تعریف لاپلاس استفاده کنید) به عبارت دقیق تر داریم:

$$x(t) = e^{S_0 t} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} LTI \\ H(S) \end{matrix}} \longrightarrow y(t) = \begin{cases} H(S_0)e^{S_0 t} & \forall t,\ S_0 \in ROC_h \\ +\infty & \forall t,\ S_0 \notin ROC_h \end{cases}$$

بنابراین با توجه به نکته فوق داریم:

$$\boxed{s_0 = 6 \rightsquigarrow s_0 \notin ROC_h \rightsquigarrow y(t) = +\infty} \checkmark$$

ج) $x(t) = e^{t}u(t)$ $\qquad h(t) = -e^{-t}u(-t)$

$X(s) = \frac{1}{s-1}, \quad Re(s) > 1$

$H(s) = \frac{1}{s+1}, \quad Re(s) < -1$

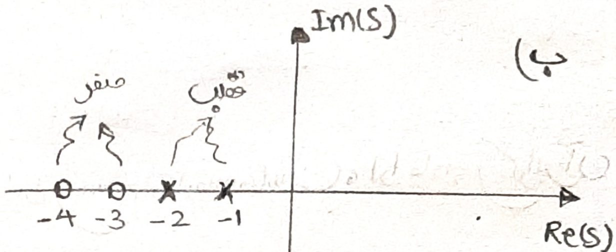
$$\rightsquigarrow \boxed{ROC_x \cap ROC_h = \phi \rightsquigarrow y(t) = +\infty} \checkmark$$

سؤال 5

الف) $H(s) = 1 + \frac{6}{s+1} - \frac{2}{s+2} = 1 + \frac{4s+10}{(s+1)(s+2)}$

$$= \frac{s^2 + 7s + 12}{(s+1)(s+2)} = \frac{(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)}$$

ب)



ج)

$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2+7s+12}{s^2+3s+2} \rightsquigarrow Y(s)\left(s^2+3s+2\right) = X(s)\left(s^2+7s+12\right)$

$$\xrightarrow{L^{-1}} \boxed{y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x''(t) + 7x'(t) + 12x(t)} \checkmark$$

د) سیستم پایدار است $\rightsquigarrow ROC_h = \{Re(s) > -1\}$

$X(s) = \frac{1}{s+3} - \frac{1}{s+4} = \frac{+1}{(s+3)(s+4)}, \quad Re(s) > -3$

$\rightsquigarrow Y(s) = X(s)H(s) = \left(\frac{1}{(s+3)(s+4)}\right)\left(\frac{(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)}\right) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$

$$ROC_y = \{Re(s) > -1\} \cap \{Re(s) > -3\} = \{Re(s) > -1\}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{y(t) = \left(e^{-t} - e^{-2t}\right)u(t)} \checkmark$$

محاسبه مقدار نهایی $\rightsquigarrow y(+\infty) = y(-\infty) = 0$

▪ درحالتی اگر می خواستیم از روی $Y(s)$ مقدار نهایی پاسخ را حساب کنیم، چون ناحیه همگرایی y شامل محور [illegible] بود

لذا مستقیماً می‌توانستیم نتیجه بگیریم که $y(+\infty) = y(-\infty) = 0$ است.

ه) این رابطه را به خاطر داشته باشید

$x(t)=u(t) \rightsquigarrow X(S)=\frac{1}{S}, \quad Re(S)>0$

$\rightsquigarrow y(t)=x(t)*h(t) \underset{x(t)=u(t)}{\rightsquigarrow} s(t)=u(t)*h(t) \overset{L}{\rightsquigarrow} S(S)=\frac{1}{S}H(S)$

$ROC_S \geqslant \{ROC_h \cap Re(S)>0\}$

$\rightsquigarrow S(S)=\frac{(S+3)(S+4)}{S(S+1)(S+2)}=\dots=\frac{6}{S}+\frac{1}{S+2}-\frac{6}{S+1}, \quad Re(S)>0$

$\overset{L^{-1}}{\rightsquigarrow} \boxed{s(t)=(6+e^{-2t}-6e^{-t})u(t)}$ ✓

سؤال 6

الف)

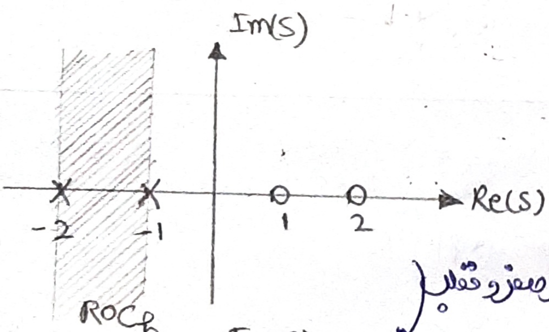
$h(t)=\delta(t)-6\left[e^{-t}+(2e^{-2t}-e^{-t})u(t)\right]$

$h(t)=\delta(t)-6\left[\underbrace{e^{-t}-e^{-t}u(t)}_{e^{-t}(1-u(t))}+2e^{-2t}u(t)\right]=\delta(t)-6\left[e^{-t}u(-t)+2e^{-2t}u(t)\right]$

$=\delta(t)-6e^{-t}u(-t)-12e^{-2t}u(t)$

$\boxed{H(S)=\underset{\forall s}{1}+\underset{Re(S)+1<0}{\frac{6}{S+1}}-\underset{Re(S)+2>0}{\frac{12}{S+2}}=\frac{S^2-3S+2}{(S+1)(S+2)}=\frac{(S-1)(S-2)}{(S+1)(S+2)}, \quad -2<Re(S)<-1}$ ✓

حال نمایش صفر و قطب سیستم را رسم می‌کنیم :

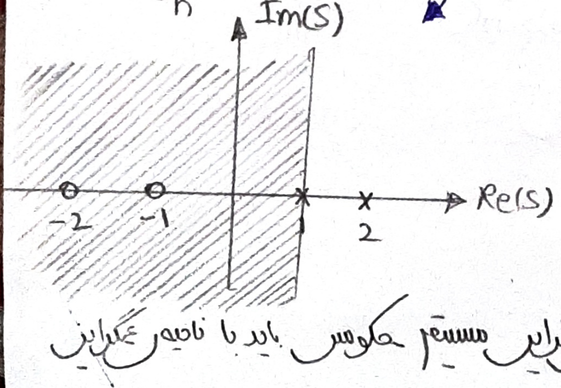


واضح است که ناحیه‌ی همگرایی سیستم اصلی شامل محور $j\omega$ و $S=+\infty$ نیست

پس سیستم علی و پایدار نیست . برای محاسبه‌ی سیستم وارون باید جای

صفرها و قطب‌ها را عوض کنیم .

تغییر صفر و قطب



■ شرط لازم برای وارون‌پذیری یک سیستم LTI زمان پیوسته این است که

تابع تبدیل آن در ناحیه‌ی همگرایی خود شامل هیچ صفری نباشد . بنابراین

با توجه به ناحیه‌ی همگرایی بدست آمده سیستم مذکور شرط لازم معکوس‌پذیری را دارد .

■ از آنجا که در صورت سؤال به وارون‌پذیری سیستم اشاره شده است ، پس ناحیه‌ی همگرایی سیستم معکوس باید با ناحیه‌ی همگرایی

سیستم اصلی اشتراک داشته باشد . بنابراین ناحیه‌ی همگرایی سیستم معکوس به صورت $Re(S)<1$ خواهد بود .

پس سیستم وارون پایدار و ضد علی است .

صفحه 12

برای بررسی زوج یا فرد بودن سیستم معکوس داریم:

اگر $h_I(t)$ زوج باشد $\rightsquigarrow h_I(t)=h_I(-t) \xrightarrow[\text{لاپلاس}]{\text{خواص تبدیل}} H_I(S)=H_I(-S) \rightsquigarrow$ $H_I(S)$ زوج است

اگر $h_I(t)$ فرد باشد $\rightsquigarrow h_I(-t)=-h_I(t) \rightsquigarrow H_I(-S)=-H_I(S) \rightsquigarrow$ $H_I(S)$ فرد است

بنابراین سیستم معکوس نه زوج است و نه فرد. (البته به صورت مستقیم نیز می‌توان از روی $h(t)$ و یا $H(S)$ نیز درمورد زوج یا فرد بودن سیستم معکوس اظهار نظر کرد. چگونه؟!)

ب)
$$H_I(S)=\frac{(S+1)(S+2)}{(S-1)(S-2)}=1+\frac{12}{S-2}-\frac{6}{S-1} \quad , \quad Re(S)<1$$

$$h_I(t)=\delta(t)+6\left(e^{t}-2e^{2t}\right)u(t)$$

سؤال 7)

$$H(S)=\frac{1}{S-2} \qquad x(t)=3u(t) \rightsquigarrow X(S)=\frac{1}{S} \quad , \quad ROC_x=\{Re(S)>0\}$$

$$y(t)=x(t)*h(t) \rightsquigarrow Y(S)=X(S)H(S) \quad , \quad ROC_y = ROC_x \cap ROC_h$$

دقت کنید حذف قطبی اتفاق نمی‌افتد لذا علامت نامساوی به مساوی تبدیل می‌شود.

بنابراین برای استفاده از قضیه‌ی مقدار نهایی برای تعیین پاسخ سیستم در $t=+\infty$، به ناحیه‌ی همگرایی Y نیاز خواهیم داشت:

۱- اگر سیستم علّی باشد ناحیه همگرایی آن به صورت $Re(S)>2$ بوده و ناحیه‌ی همگرایی $Y(S)$ نیز به صورت $Re(S)>0$ بدست می‌آید. لذا در این حالت نمی‌توان از قضیه‌ی مقدار نهایی استفاده کرد و باید فرم زمانی پاسخ را محاسبه کنیم:

$$Y(S)=\frac{3}{S(S-2)}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{S-2}-\frac{1}{S}\right) \quad , \quad Re(S)>2$$

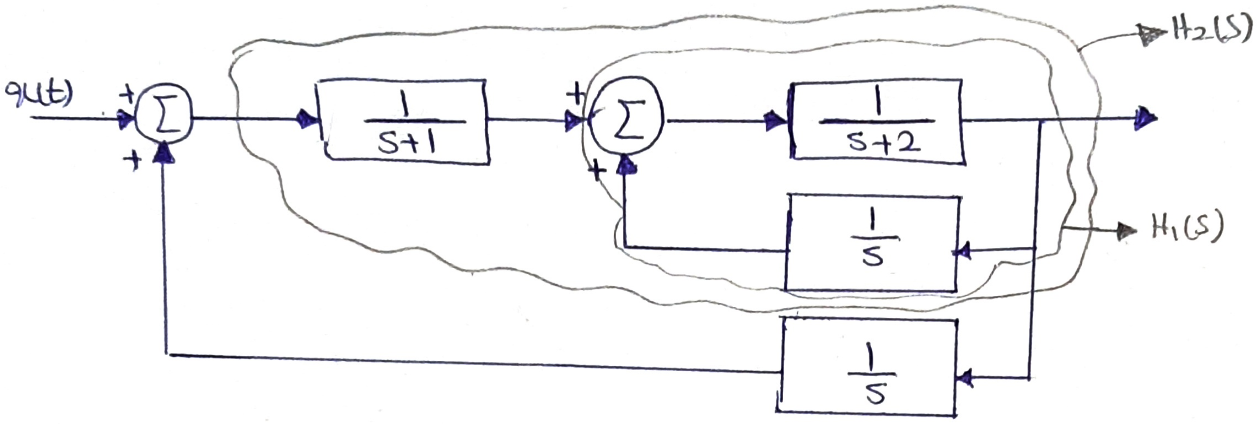
$$y(t)=\frac{3}{2}\left(e^{2t}-1\right)u(t) \rightsquigarrow y(t=+\infty)=+\infty$$

2_ اگر سیستم پایدار باشد ناحیه همگرایی آن به صورت $Re(s)<2$ بوده و ناحیه همگرایی $Y(s)$ به صورت $0<Re(s)<2$ بدست می‌آید. لذا در این حالت طبق قضیه مقدار نهایی داریم:

$$y(+\infty) = \lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} \frac{3}{s-2} = \boxed{-\frac{3}{2}} \checkmark$$

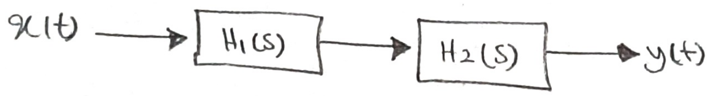
در این حالت، با فرض پایدار بودن سیستم، پاسخ سیستم در $t=+\infty$ را به صورت مستقیم (مانند قسمت 1) نیز می‌توان محاسبه نمود.
(به عنوان تمرین انجام دهید)

سؤال 8



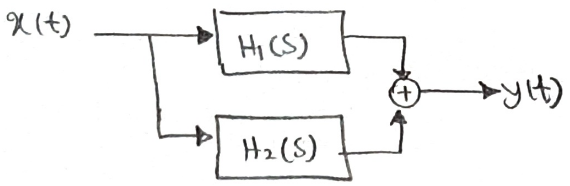
در حالت کلی نحوه اتصال سیستم‌ها در اینگونه سؤالات از سه حالت خارج نیست:

اتصال سری:



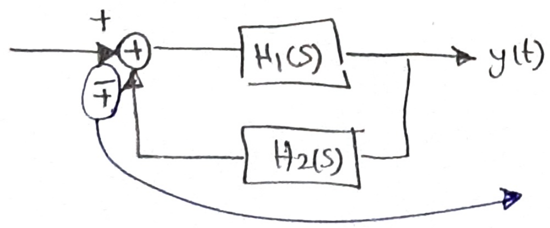
و $H(s) = H_1(s)\,H_2(s)$

اتصال موازی:



و $H(s) = H_1(s) + H_2(s)$

اتصال فیدبک:



و $$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 \pm H_1(s)H_2(s)}$$

به علامت دقت کنید

بنابراین در این مسئله داریم:

$$H_1(s) = \frac{\frac{1}{s+2}}{1-\left(\frac{1}{s+2}\right)\left(\frac{1}{s}\right)} = \frac{s}{s^2+2s-1}$$ اتصال فیدبک

$$H_2(s) = \left(\frac{1}{s+1}\right)\left(\frac{s}{s^2+2s-1}\right) = \frac{s}{(s+1)(s^2+2s-1)}$$ اتصال سری

$$H_3(s) = H_{eq}(s) = \frac{\frac{s}{(s+1)(s^2+2s-1)}}{1-\left(\frac{s}{(s+1)(s^2+2s-1)}\right)\left(\frac{1}{s}\right)} = \boxed{\frac{s}{s^3+3s^2+s-2}} \checkmark$$