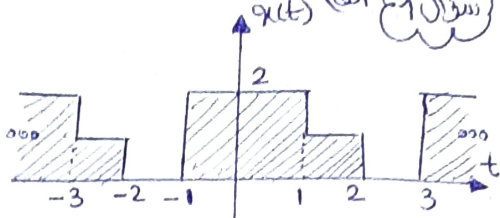
بنام خدا

حل تکلیف سری پنجم - تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

محمدرضا بیاری

سوال ۱) الف)



اگر $x(t)$ سیگنال متناوب با دوره تناوب اصلی T_0 باشد پس طبق فصل قبل می‌توانیم آن را به صورت نمایش سری فوریه‌ی نمایی زیر بیان کنیم:

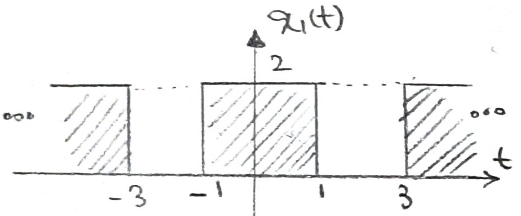
$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad , \quad a_k = F.S\{x(t)\} \quad , \quad \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$$

با تبدیل فوریه گرفتن از دو طرف رابطه‌ی فوق داریم:

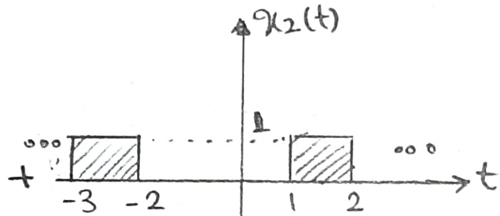
$$X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k F\{e^{jk\omega_0 t}\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega-k\omega_0)$$

به عبارتی اگر سیگنال متناوب باشد، تبدیل فوریه‌ی آن صرفاً شامل ضربه‌هایی در مضارب فرکانس اصلی (ω_0) با دامنه‌ی $2\pi a_k$ است.

پس با توجه به متناوب بودن سیگنال داده‌شده در مسئله در ابتدا باید ضرایب سری فوریه‌ی آن را محاسبه کنیم. سیگنال داده‌شده به صورت مجموع دو سیگنال متناوب زیر قابل نوشتن است:



+



$$F.S\{x_1(t)\}=\frac{2\sin(\frac{k\pi}{2})}{k\pi} = \mathrm{sinc}(\frac{k}{2})$$

$$F.S\{x_2(t)\}=\frac{\sin(\frac{k\pi}{4})}{k\pi} e^{-jk\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{4}\mathrm{sinc}(\frac{k}{4}) e^{-jk\frac{3\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow F.S\{x(t)\}=F.S\{x_1(t)\}+F.S\{x_2(t)\} = \mathrm{sinc}(\frac{k}{2})+\frac{1}{4}\mathrm{sinc}(\frac{k}{4})e^{-jk\frac{3\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow \boxed{X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \underbrace{\left[\mathrm{sinc}(\frac{k}{2})+\frac{1}{4}\mathrm{sinc}(\frac{k}{4})e^{-jk\frac{3\pi}{4}}\right]}_{\triangleq I} \delta(\omega-k\frac{\pi}{2})} \checkmark$$

برای محاسبه‌ی اندازه و فاز داریم:

$$I=\frac{2\sin(\frac{k\pi}{2})+\sin(\frac{k\pi}{4})e^{-jk\frac{3\pi}{4}}}{k\pi} = \frac{2\sin(\frac{k\pi}{2})+\sin(\frac{k\pi}{4})\cos(k\frac{3\pi}{4})+j\sin(\frac{k\pi}{4})\sin(k\frac{3\pi}{4})}{k\pi}$$

$$=\frac{2\sin(\frac{k\pi}{2})+(-1)^k\sin(\frac{k\pi}{4})\cos(\frac{k\pi}{4})+j(-1)^k\sin^2(\frac{k\pi}{4})}{k\pi}$$

$$=\frac{2\sin(\frac{k\pi}{2})+(-1)^k\sin(\frac{k\pi}{2})+j(-1)^k\sin^2(\frac{k\pi}{4})}{k\pi} = \frac{(2+(-1)^k)\sin(\frac{k\pi}{2})+j(-1)^k\sin^2(\frac{k\pi}{4})}{k\pi}$$

محاسبه‌ی اندازه و فاز به صورت دستی در این مسئله راحت نیست و فرم ساده‌ای نخواهد داشت.

ب)

$x(t) = \frac{4t}{(1+t^2)^2}$

طبق خاصیت دوگانی داریم :

$\text{if } F\{x(t)\} = X(w) \longrightarrow F\{X(t)\} = 2\pi x(-w)$

بنابراین باید عکس تبدیل فوریه ی $\frac{-8\pi w}{(1+w^2)^2}$ را محاسبه کرده و به جای t، w را قرار دهیم :

به یاد داشته باشیم : $e^{-a|t|}$ و $a>0 \xrightarrow{F} \frac{2a}{w^2+a^2}$

$$F\{e^{-|t|}\} = \frac{2}{1+w^2}$$

$$F\{te^{-|t|}\} = j\frac{d}{dw}F\{e^{-|t|}\} = j\frac{-4w}{(1+w^2)^2}$$

$$F\{\tfrac{1}{j}(2\pi)te^{-|t|}\} = F\{-2\pi jte^{-|t|}\} = \frac{-8\pi w}{(1+w^2)^2}$$

پس تابع مورد نظر ساخته شد و کافی است w را با t جایگذاری کنیم :

$$\boxed{F\{x(t)\} = F\left\{\frac{4t}{(1+t^2)^2}\right\} = -2\pi jwe^{-|w|}}$$

برای محاسبه ی دامنه و فاز داریم :

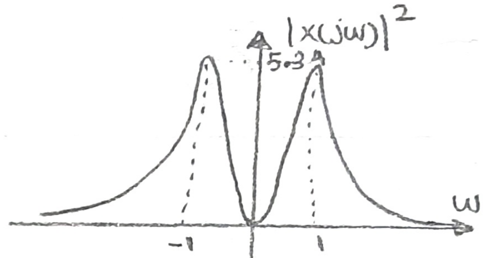
$$|X(jw)|^2 = X(jw)X^*(jw) = 4\pi^2w^2e^{-2|w|}$$

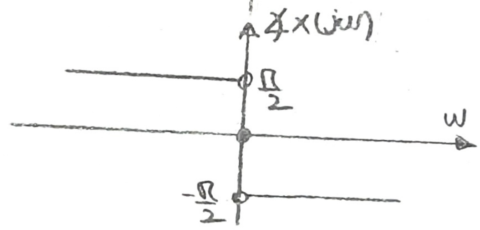
$$\measuredangle X(jw) = \tan^{-1}\left(\frac{-2\pi we^{-|w|}}{0}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & w=0 \\ \frac{\pi}{2} & w<0 \\ \frac{\pi}{2} & w>0 \end{cases}$$

دقت کنید که $X(jw)$ صرفاً شامل مقدار موهومی است و مقدار حقیقی آن صفر است.

از آنجایی که $x(t)$ یک سیگنال حقیقی و فرد است پس انتظار داشتیم که تبدیل فوریه آن موهومی خالص و فرد باشد.





ج)

$$x(t) = 2e^{-2|t|}\sin(3t)$$

$$x(t) = 2e^{-2|t|}\left(\frac{e^{j3t}-e^{-j3t}}{2j}\right) = \frac{1}{j}\left[e^{-2|t|}e^{j3t} - e^{-2|t|}e^{-j3t}\right]$$

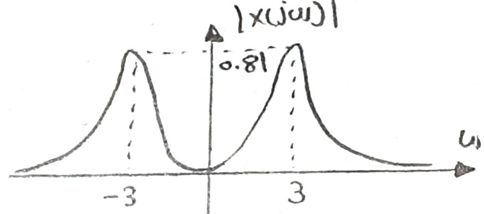
$$\rightsquigarrow X(jw) = \frac{1}{j}\left\{\frac{4}{(w-3)^2+4} - \frac{4}{(w+3)^2+4}\right\} = j4\left\{\frac{1}{(w+3)^2+4} - \frac{1}{(w-3)^2+4}\right\}$$

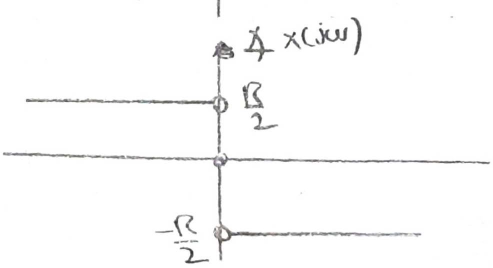
$$= \frac{-j48w}{w^4-10w^2+169}$$

$$|X(jw)|^2 = X(jw)X^*(jw) = \frac{2304w^2}{(w^4-10w^2+169)^2}$$

$$\measuredangle X(jw) = \begin{cases} 0 & w=0 \\ \frac{\pi}{2} & w<0 \\ -\frac{\pi}{2} & w>0 \end{cases}$$

مشابه نکته ی بیان شده در قسمت قبل، چون سیگنال حقیقی و فرد است پس انتظار داشتیم که تبدیل فوریه آن موهومی خالص و فرد باشد.





صفحه 3

د)

$$x(t) = \begin{cases} 4-t^2 & |t|<2 \\ 0 & |t|>2 \end{cases}$$

$$x(t) = (4-t^2)\big(u(t+2)-u(t-2)\big)$$

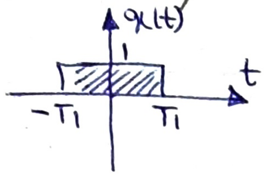
$$x'(t) = (-2t)\big(u(t+2)-u(t-2)\big) + \underbrace{(4-t^2)\big(\delta(t+2)-\delta(t-2)\big)}_{0}$$

$$=(-2t)\big(u(t+2)-u(t-2)\big)$$

$$x''(t) = (-2)\big(u(t+2)-u(t-2)\big) + (-2t)\big(\delta(t+2)-\delta(t-2)\big)$$

$$= (-2)\big(u(t+2)-u(t-2)\big) + 4\delta(t+2) + 4\delta(t-2)$$ رابطه 1

می‌دانیم:



$$\xrightarrow{F} X(j\omega) = \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$$

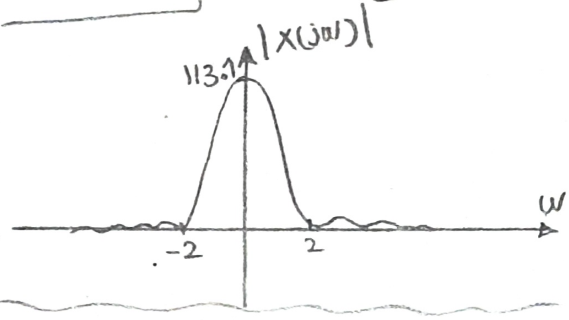
از دو طرف رابطه 1 تبدیل فوریه می‌گیریم:

$$F\{x''(t)\} = -\omega^2 X(j\omega) = -4\frac{\sin(2\omega)}{\omega} + \underbrace{4e^{j2\omega} + 4e^{-j2\omega}}_{2\cos(2\omega)}$$

$$\rightsquigarrow X(j\omega) = \frac{4}{\omega^2}\left[\frac{\sin(2\omega)}{\omega} - 2\cos(2\omega)\right]$$ ✓

! از آنجایی که سیگنال داده شده، حقیقی و زوج است پس انتظار داشتیم که تبدیل فوریه آن نیز حقیقی و زوج باشد. همچنین برای این سیگنال ها، اندازه تبدیل فوریه همواره زوج و فاز آن صفر خواهد بود.

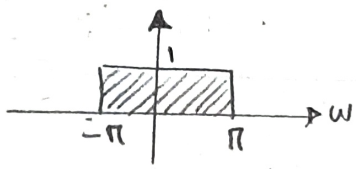
$\measuredangle X(j\omega) = 0$ و :



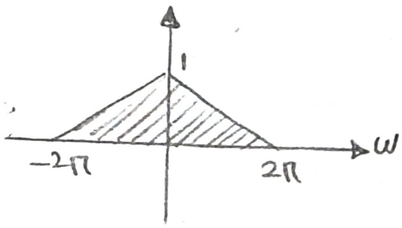
ه)

$$x(t) = \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right)^2 * \sin^2(\pi t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x_{11}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \xrightarrow{F} X_{11}(j\omega) =$$

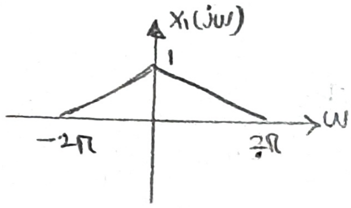


$$x_1(t) = x_{11}(t)\,x_{11}(t) \xrightarrow{F} X_1(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\{X_{11}(j\omega) * X_{11}(j\omega)\} =$$

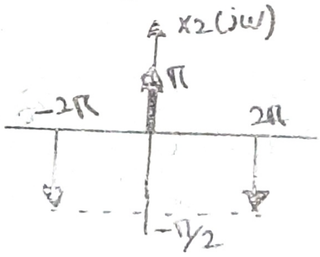


$$x_2(t) = \sin^2(\pi t) = \frac{1-\cos(2\pi t)}{2} \rightsquigarrow X_2(j\omega) = \pi\delta(\omega) - \frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega-2\pi) + \delta(\omega+2\pi)\right]$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = X_1(j\omega)\,X_2(j\omega) =$$



×



$$= \pi\delta(\omega)$$

! از آنجایی که سیگنال داده شده حقیقی و زوج است پس تبدیل فوریه آن نیز حقیقی و زوج بوده و اندازه آن زوج و فاز آن صفر است.

$$|X(j\omega)|^2 = \pi^2\delta^2(\omega) \quad , \quad \measuredangle X(j\omega) = 0$$

صفحه 4

و)

$x(t) = \sin(|t|)$

تابع علامت

$$x(t) = \begin{cases} \sin(t) & t>0 \\ -\sin(t) & t<0 \end{cases} = \sin(t)\ \mathrm{sgn}(t)$$

$$F\{x(t)\} = X(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left\{ F\{\sin(t)\} * F\{\mathrm{sgn}(t)\}\right\}$$

می دانیم : $\frac{1}{\pi t} \xrightarrow{F} -j\,\mathrm{sgn}(\omega)$ (خودتان محاسبه کنید!)

پس اگر از خاصیت دوگانی استفاده کنیم داریم :

$$F\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} = -j\,\mathrm{sgn}(\omega)$$

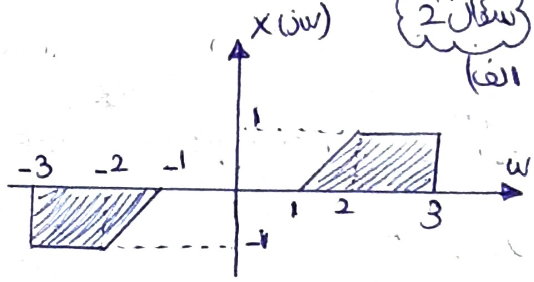
$$F\{-j\,\mathrm{sgn}(t)\} = 2\pi \times \frac{1}{\pi(-\omega)} \rightsquigarrow F\{\mathrm{sgn}(t)\} = \frac{2}{j\omega}$$

$$\rightsquigarrow X(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2}{j\omega} * \frac{\pi}{j}\left(\delta(\omega-1) - \delta(\omega+1)\right)\right] = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{2\pi}{\omega+1} - \frac{2\pi}{\omega-1}\right\} = \boxed{\frac{2}{1-\omega^2}}$$

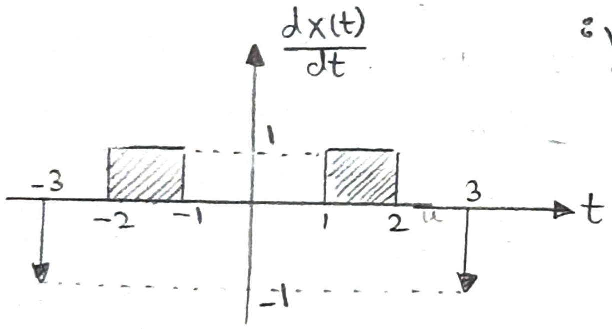
$$|X(j\omega)|^2 = \frac{4}{(1-\omega^2)^2} \quad \text{و} \quad \measuredangle X(j\omega) = 0$$

سوال 2

الف)



از خاصیت دوگانی استفاده می کنیم. ابتدا فرض می کنیم شکل داده شده مربوط به تابع X(t) است بنابراین داریم :



$$\rightsquigarrow F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \frac{2\sin(\frac{\omega}{2})}{\omega}\left[2\cos\left(\frac{3\omega}{2}\right)\right] - 2\cos(3\omega)$$

$$F\{x(t)\} = -\frac{j}{\omega} F\{x'(t)\}$$

حال طبق خاصیت دوگانی داریم :

$$F\{x(t)\} = 2\pi x(-\omega) = -\frac{j}{\omega} F\{x'(t)\}$$

$$\rightsquigarrow x(-\omega) = \frac{-j}{2\pi\omega}\left[\frac{4\sin(\frac{\omega}{2})\cos(\frac{3\omega}{2})}{\omega} - 2\cos(3\omega)\right]$$

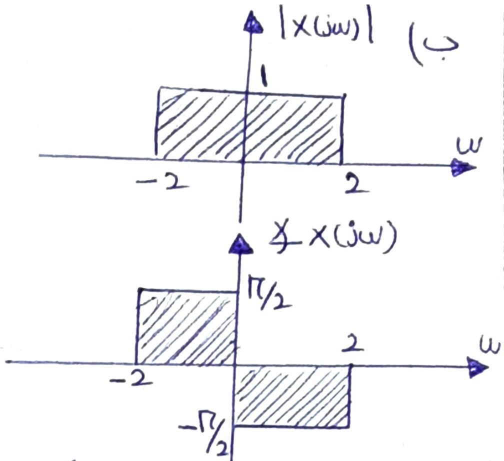
و حال قرار می دهیم $-\omega \longrightarrow t$:

$$\boxed{x(t) = -\frac{j}{\pi t}\cos(3t) + \frac{2j}{\pi t^2}\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

از آنجایی که تبدیل فوریه داده شده حقیقی و فرد است بنابراین سیگنال زمانی متناظر موهومی خالص و فرد خواهد بود.

صفحه ۵

ب)



$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{0}e^{j\omega t}e^{j\pi/2}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2}e^{j\omega t}e^{-j\frac{\pi}{2}}d\omega$$

$$=\frac{j}{2\pi}\left[\int_{-2}^{0}e^{j\omega t}d\omega-\int_{0}^{2}e^{j\omega t}d\omega\right]=\frac{1-\cos(2t)}{\pi t}$$

$$\rightsquigarrow x(t)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos(2t)}{\pi t} & t\neq 0\\ 0 & t=0\end{cases}$$

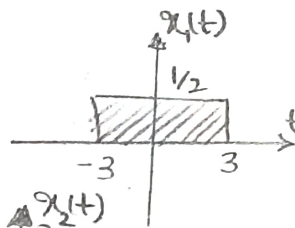
! $x(t)$ حقیقی خواهد بود اگر و فقط اگر منحنی اندازه تبدیل فوریه آن زوج و منحنی فاز آن فرد باشد.

ج)

$$X(j\omega)=\frac{\sin^2(3\omega)\cos(\omega)}{\omega^2}$$

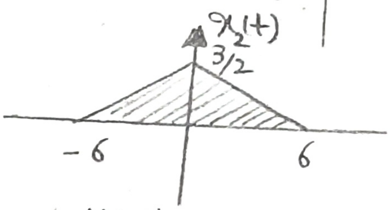
$$=\frac{1}{2}e^{j\omega}\frac{\sin^2(3\omega)}{\omega^2}+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\frac{\sin^2(3\omega)}{\omega^2}$$

دوگانی:



$\xrightarrow{F}\ \frac{\sin(3\omega)}{\omega}$

$$\rightsquigarrow F\{x_1(t)*x_1(t)\}=\frac{\sin^2(3\omega)}{\omega^2}\rightsquigarrow$$



$\xrightarrow{F}\ \frac{\sin^2(3\omega)}{\omega^2}$

$$\Longrightarrow x(t)=\frac{1}{2}\left[x_2(t-1)+x_2(t+1)\right]=\begin{cases}\frac{5}{4} & |t|<1\\ -\frac{|t|}{4}+\frac{3}{2} & 1<|t|<5\\ -\frac{|t|}{8}+\frac{7}{8} & 5<|t|<7\\ 0 & \text{o.w}\end{cases}$$

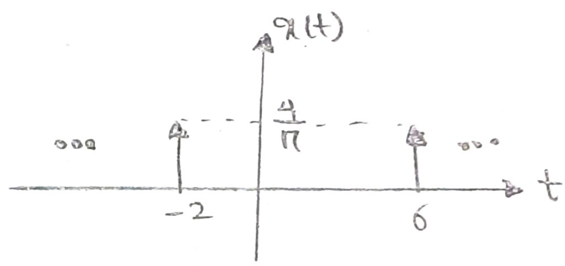
د)

$$X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}j^k\delta\left(\omega-\frac{k\pi}{4}\right)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{jk\frac{\pi}{2}}\delta\left(\omega-\frac{k\pi}{4}\right)=e^{j2\omega}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\frac{k\pi}{4}\right)$$

دوگانی: $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)\xrightarrow{F}\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{T}\right)$

$$\rightsquigarrow x(t)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t+2-8k)$$



صفحه ۳

ه)

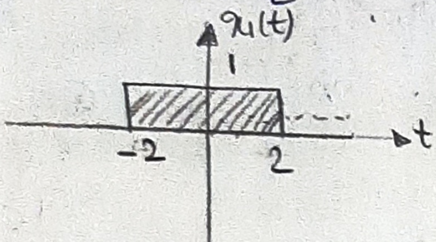
$$X(j\omega) = \frac{j\omega}{2(1+j\omega)}$$

$$F\{e^{-t}u(t)\} = \frac{1}{1+j\omega} \rightsquigarrow F\left\{\frac{d}{dt}(e^{-t}u(t))\right\} = j\omega\, F\{e^{-t}u(t)\} = \frac{j\omega}{1+j\omega}$$

$$\rightsquigarrow x(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(e^{-t}u(t)) = \frac{1}{2}\left[-e^{-t}u(t) + e^{-t}\delta(t)\right] = \frac{1}{2}\left[\delta(t) - e^{-t}u(t)\right]$$

و)

$$X(j\omega) = \frac{d}{d\omega}\left[4\sin(4\omega)\,\frac{\sin(2\omega)}{\omega}\right]$$



$$\xrightarrow{F} X_1(j\omega) = \frac{2\sin(2\omega)}{\omega}$$

$$F\{x_1(t-4) - x_1(t+4)\} = X_1(j\omega)e^{-j\omega 4} - X_1(j\omega)e^{j\omega 4} = -2j\sin(4\omega)X_1(j\omega)$$

$$F\{j[x_1(t-4) - x_1(t+4)]\} = \sin(4\omega)\,\frac{4\sin(2\omega)}{\omega}$$

$$F\{(jt)(j)[x_1(t-4) - x_1(t+4)]\} = \frac{d}{d\omega}F\{j[x_1(t-4) - x_1(t+4)]\}$$

$$= \frac{d}{d\omega}\left[4\sin(4\omega)\,\frac{\sin(2\omega)}{\omega}\right]$$

$$\rightsquigarrow \boxed{x(t) = t\,x_1(t+4) - t\,x_1(t-4)} \checkmark$$

سوال 3

الف) $y(t) = x^*(t)\sin(t)$

$$= x^*(t)\left[\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}\right] = \frac{1}{2j}\left[x^*(t)e^{jt} - x^*(t)e^{-jt}\right]$$

$$F\{x^*(t)\} = X^*(-j\omega) \rightsquigarrow F\{x^*(t)e^{jt}\} = X^*(-j(\omega-1))$$

$$F\{x^*(t)e^{-jt}\} = X^*(-j(\omega+1))$$

$$\rightsquigarrow \boxed{Y(j\omega) = \frac{1}{2j}\left[X^*(-j(\omega-1)) - X^*(-j(\omega+1))\right]} \checkmark$$

دقت کنید که اول کانجوگیت را اعمال می‌کنیم و بعد شیفت می‌دهیم.

ب) $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(\tau - t + 1)\,dt \rightsquigarrow$ به فرم کانولوشن می‌نویسیم

$$= x(t) * x(-t+1)$$

تقارن هرمیتی

$$\rightsquigarrow F\{x(t) * x(-t+1)\} = X(j\omega)X(-j\omega)e^{-j\omega} = X(j\omega)X^*(j\omega)e^{-j\omega} = |X(j\omega)|^2 e^{-j\omega}$$

ج)

$y(t) = x'(3t)$

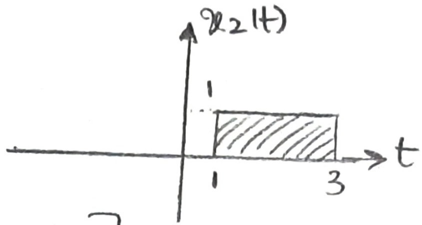
$F\{x'(t)\} = j\omega X(j\omega) \rightsquigarrow F\{x'(3t)\} = \frac{1}{|3|}\, j\frac{\omega}{3} X(j\frac{\omega}{3})$

$\rightsquigarrow Y(j\omega) = \frac{j\omega}{9} X(\frac{\omega}{3})$ ✓

د)

$y(t) = \int_{t-3}^{t-1} x(\tau)\,d\tau$

$= x(t) * [u(t-1) - u(t-3)] = x(t) *$



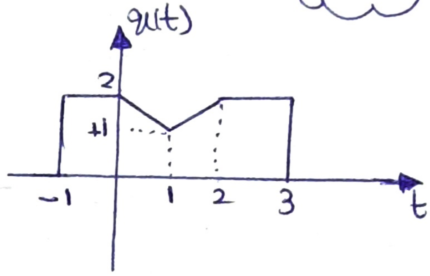
$\rightsquigarrow Y(j\omega) = X(j\omega)\,X_2(j\omega) = X(j\omega)\,\frac{2\sin\omega}{\omega}\,e^{-j2\omega}$ ✓

از روش مشتق گیری نیز می توان استفاده نمود. خودتان امتحان کنید.

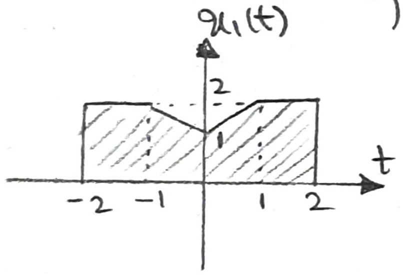
سوال ۴

الف) $X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt =$ مساحت زیر منحنی سیگنال $x(t)$

$= 7$ ✓



ب) به راحتی نشان داده می شود که اگر سیگنال حقیقی و زوج باشد در این صورت $|X(j\omega)|$ زوج و $\measuredangle X(j\omega)$ صفر است. لذا داریم:



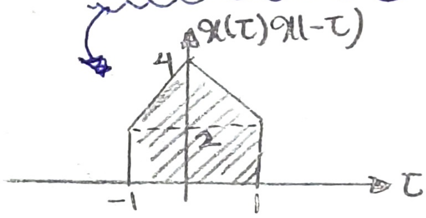
چون $x_1(t)$ حقیقی و زوج است $\rightsquigarrow \measuredangle X_1(j\omega) = 0$

از طرفی داریم: $x(t) = x_1(t-1) \rightsquigarrow X(j\omega) = X_1(j\omega)\,e^{-j\omega} \rightsquigarrow \measuredangle X(j\omega) = -\omega$ ✓

ج) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\,d\omega = 2\pi x(0) = 2\pi(2) = 4\pi$ ✓

د) $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \underbrace{=}_{\text{رابطه پارسوال}} 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{76\pi}{3}$ ✓

ه) $\int_{-\infty}^{+\infty} X^2(j\omega)\,d\omega = 2\pi \{x(t) * x(t)\}\Big|_{t=0} = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)x(-\tau)\,d\tau = 2\pi \times 6 = 12\pi$



و) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega}\,d\omega = 2\pi x(1) = 2\pi$ ✓

صفحه 8

سؤال 5

$$H(j\omega) = \frac{4+j\omega}{-\omega^2+5j\omega+6}$$

الف) $H(j\omega) = \dfrac{2}{j\omega+2} - \dfrac{1}{j\omega+3} \xrightarrow{F^{-1}} \boxed{h(t) = \left(2e^{-2t} - e^{-3t}\right)u(t)}$ ✓

ب) $H(j\omega) = \dfrac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \dfrac{j\omega+4}{-\omega^2+5j\omega+6} \rightsquigarrow Y(j\omega)\left[-\omega^2+5j\omega+6\right] = X(j\omega)\left[j\omega+4\right]$

$$\xrightarrow{F^{-1}} \boxed{\frac{d^2y(t)}{dt} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6 = \frac{dx(t)}{dt} + 4x(t)} \checkmark$$

ج) $x(t) = (1-t)e^{-4t}u(t) = e^{-4t}u(t) - te^{-4t}u(t)$

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega+4} - \frac{1}{(j\omega+4)^2}$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = \frac{1}{(j\omega+2)(j\omega+4)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{j\omega+2} - \frac{1}{j\omega+4}\right]$$

$$\xrightarrow{F^{-1}} \boxed{y(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-2t} - e^{-4t}\right)u(t)} \checkmark$$

سؤال 6

الف) $Y(j\omega) = e^{j2\omega}X(j\omega) + j\dfrac{dX(j\omega)}{d\omega}$

$$\xrightarrow{F^{-1}} y(t) = x(t+2) + tx(t)$$

* این سیستم خطی است چون خاصیت همگنی و جمع‌پذیری را دارد.

$$T\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = ax_1(t+2) + bx_2(t+2) + tax_1(t) + tbx_2(t)$$

$$= a\left[x_1(t+2) + tx_1(t)\right] + b\left[x_2(t+2) + tx_2(t)\right]$$

$$= aT\{x_1(t)\} + bT\{x_2(t)\} \checkmark$$

* سیستم تغییرپذیر با زمان است به واسطه‌ی حضور ضریب t در ترم دوم رابطه ورودی و خروجی:

$$T\{x(t-t_0)\} = x(t+2-t_0) + tx(t-t_0) \rightsquigarrow T\{x(t-t_0)\} \neq y(t-t_0)$$

$$y(t-t_0) = x(t+2-t_0) + (t-t_0)x(t-t_0)$$

* سیستم غیرعلی است چون $y(0)$ به مقادیر ورودی در آینده یعنی $x(2)$ نیاز دارد.

* سیستم ناپایدار است زیرا حتی اگر ورودی کران‌دار باشد، با افزایش/کاهش زمان خروجی زیاد می‌شود:

$$x(t) = A \rightsquigarrow |y(t)| = |A(1+t)| \leq |A||1+t| \xrightarrow[t \to \pm\infty]{\text{if}} |y(t)| \to +\infty$$

ب) $Y(j\omega) = X(j\omega) + X(0)$

$$\xrightarrow{F^{-1}} y(t) = x(t) + X(0)\delta(t) = x(t) + \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt\right]\delta(t)$$

* این سیستم خطی است چون خاصیت همگن و جمع پذیری را دارد.

* سیستم تغییر پذیر با زمان است به واسطه ی حضور عبارت $X(0)\delta(t)$.

* سیستم غیرعلی است چون خروجی در هر لحظه به تمامی مقادیر ورودی در تمامی لحظات نیاز دارد به واسطه ی حضور عبارت
$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt$

* سیستم ناپایدار است چون به واسطه ی حضور عبارت $X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt$ ، اگر ورودی کران دار هم باشد، حاصل خروجی بی کران می شود.

سؤال 7) الف)

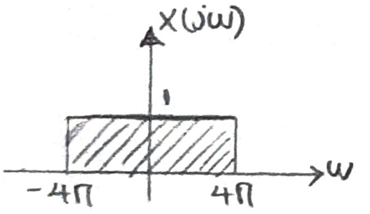
$$x(t) = \frac{\sin(4\pi t)}{\pi t} \xrightarrow{F} X(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < 4\pi \\ 0 & |\omega| > 4\pi \end{cases}$$

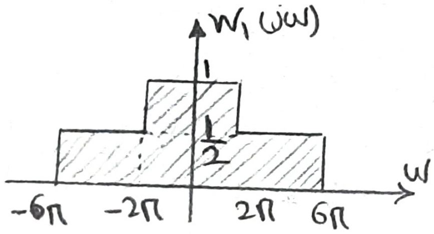
$$w_1(t) = x(t)p(t) = x(t)\cos(2\pi t) = \frac{1}{2}\left[x(t)e^{j2\pi t} + x(t)e^{-j2\pi t}\right]$$

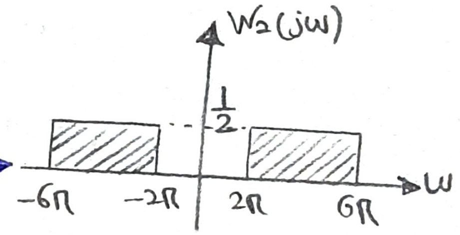
$$\xrightarrow{F^{-1}} W_1(j\omega) = \frac{1}{2}\left[X(j(\omega - 2\pi)) + X(j(\omega + 2\pi))\right]$$

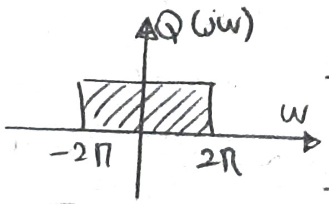
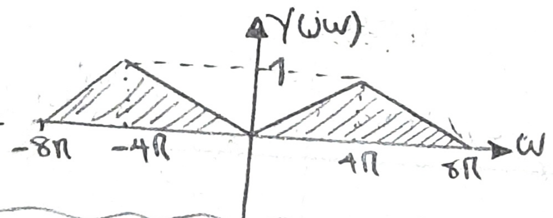
$$W_2(j\omega) = W_1(j\omega)\,H(j\omega)$$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[W_2(j\omega) * Q(j\omega)\right] , \quad Q(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < 2\pi \\ 0 & |\omega| > 2\pi \end{cases}$$







$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\Big[W_2(j\omega) *$  $\Big] =$ 

ب)

$$w_2(t) = \frac{1}{2}e^{j4\pi t}\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j4\pi t}\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t} = \cos(4\pi t)\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}$$

$$\boxed{y(t) = w_2(t)\,q(t) = \cos(4\pi t)\left(\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}\right)^2}$$

سؤال ۵

$$h(t) = T_s \frac{\sin(W_c t)}{\pi t} = \frac{T_s W_c}{\pi} \frac{\sin(W_c t)}{W_c t}$$

$$x_s(t) = x(t)\,p(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s)\,\delta(t - kT_s)$$

$$y(t) = x_s(t) * h(t) = \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s)\,\delta(t - kT_s)\right] * h(t)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s)\left[h(t) * \delta(t - kT_s)\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s)\,h(t - kT_s)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s) \frac{T_s W_c}{\pi} \frac{\sin(W_c(t - kT_s))}{W_c(t - kT_s)}$$

$$\text{if } W_c = \frac{W_s}{2} \rightsquigarrow \frac{T_s W_c}{\pi} = 1$$

$$\rightsquigarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s) \frac{\sin\left(\frac{W_s}{2}(t - kT_s)\right)}{\frac{W_s}{2}(t - kT_s)}$$

$$y(mT_s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s) \frac{\sin(\pi(m-k))}{\pi(m-k)} \quad \text{و} \quad \frac{\sin(\pi(m-k))}{\pi(m-k)} = \begin{cases} 0 & m \neq k \\ 1 & m = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(mT_s) = x(mT_s) \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

این سیستم شرط لازم برای بازیابی صحیح اطلاعات یک سیگنال آنالوگ را از روی نمونه‌های گسسته زمان آن بیان می‌کند.

موفق باشید

محمدرضا چیاری