۹۸۲۵۴۱۳

حدیث غفوری

سوال ۶
الف

سوال ۱ - ب

$$x(t) = \begin{cases} 4 & 0<t<1 \\ 2 & 1<t<2 \end{cases}$$

$$\longleftarrow \quad X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$ طبق فرمول

$$X(s) = \int_0^1 4 e^{-st}\, dt + \int_1^2 2 e^{-st}\, dt =$$

$$4 \times \frac{-1}{s} e^{-st}\Big|_0^1 + 2 \times \frac{-1}{s} e^{-st}\Big|_1^2$$

$$\frac{-4}{s}\left(e^{-s} - \underset{1}{\cancel{e^{0}}}\right) - \frac{2}{s}\left(e^{-2s} - e^{-s}\right) =$$

$$-\frac{4e^{-s}}{s} - \frac{4}{s} - \frac{2e^{-2s}}{s} + \frac{2e^{-s}}{s} =$$

$$-\frac{2e^{-2s}}{s} - \frac{2e^{-s}}{s} - \frac{4}{s} = X(s)$$ به ازای

کل مقادیر s $\longrightarrow$ ROC

جواب

$\boxed{\text{سوال ۲}}$

الف) ①

$$x(t) = e^{-2|t|}$$

$$x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{2t}u(-t)$$

اعمال فرمول تبدیل لاپلاس ، $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$ وطبق خاصیت خطی بودن

انتگرال و تبدیل لاپلاس ←

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-2t}u(t) + e^{2t}u(-t)\right) e^{-st}dt =$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t}u(t)e^{-st}dt}_{\text{در بازه‌ی } t<0 \text{ ، حاصل صفر}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t}u(-t)e^{-st}dt}_{\text{در بازه‌ی } t>0 \text{ ، انتگرال صفر}} =$$

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-2t}\cancel{u(t)}e^{-st}dt + \int_{-\infty}^{0} e^{2t}\cancel{u(-t)}e^{-st}dt =$$

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-(2+s)t}dt + \int_{-\infty}^{0} e^{-(-2+s)t}dt =$$

$$\frac{-1}{2+s}e^{-(2+s)t}\Big|_{0}^{+\infty} + \frac{-1}{s-2}e^{-(-2+s)t}\Big|_{-\infty}^{0} =$$

$$\underbrace{\frac{-1}{2+s}\left(\cancel{e^{-\infty}} - e^{0}\right)}_{\frac{1}{s+2}} + \underbrace{\frac{-1}{s-2}\left(e^{0} - e^{(-2+s)\infty}\right)}_{} =$$

$$\boxed{ROC = 2+Re\{s\}>0 \;②\; \rightarrow Re\{s\}>-2}$$

$$-2+Re\{s\}<0 \rightarrow \frac{-1}{s-2}$$

$$ROC\;① = \boxed{Re\{s\}<2}$$

$$\boxed{\frac{-4}{s^2-4}} \quad + \quad \boxed{ROC_1 \cap ROC_2} \text{ اشتراک } = \text{ کل } ROC$$

جواب $= \boxed{\frac{-4}{s^2-4} \quad ROC: \; -2<Re\{s\}<2}$

$$\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-2} = \frac{s-2-s-2}{s^2-4} = \frac{-4}{s^2-4}$$

Scanned by CamScanner

سوال ۲

الف) ①

$$x(t) = e^{-2|t|}$$

$$x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{2t}u(-t)$$

طبق فرمول تبدیل لاپلاس، $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$ و طبق خاصیت خطی بودن

انتگرال و تبدیل لاپلاس ←

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-2t}u(t) + e^{2t}u(-t)\right)e^{-st}dt =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{-2t}u(t)e^{-st}dt}_{\text{در بازه‌ی } t<0 \text{ حاصل صفر}} + \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{2t}u(-t)e^{-st}dt}_{\text{در بازه‌ی } t>0 \text{ انتگرال صفر}} =$$

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-2t}\cancel{u(t)}e^{-st}dt + \int_{-\infty}^{0} e^{2t}\cancel{u(-t)}e^{-st}dt =$$

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-(2+s)t}dt + \int_{-\infty}^{0} e^{-(-2+s)t}dt =$$

$$\underbrace{\frac{-1}{2+s}e^{-(2+s)t}\Big|_{0}^{+\infty}}_{} + \frac{-1}{s-2}e^{-(-2+s)t}\Big|_{-\infty}^{0} =$$

$$\frac{-1}{2+s}\Big(\underbrace{\cancel{e^{-\infty}}}_{0} - \underbrace{e^{0}}_{1}\Big) + \frac{-1}{s-2}\Big(\underbrace{\cancel{e^{0}}}_{1} - e^{(-2+s)\infty}\Big) =$$

$$\frac{1}{s+2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} ROC = 2 + Re\{s\} > 0 \quad ② \\ \rightarrow Re\{s\} > -2 \end{array}}$$

$$-2 + Re\{s\} < 0 \rightarrow \frac{-1}{s-2}$$

$$ROC ① = \boxed{Re\{s\} < 2}$$

$$\boxed{\frac{-4}{s^2-4}} \leftarrow \boxed{ROC_1 \cap ROC_2} \text{ اشتراک } = \text{ کل } ROC$$

جواب $= \boxed{\frac{-4}{s^2-4}\ ROC: \ -2 < Re\{s\} < 2}$

$$\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-2} = \frac{\cancel{s-2-s-2}\ -4}{s^2-4}$$

سوال ۲

الف ۲

$$x(t)=\begin{cases}\sin(\pi t) & 0<t<1\\ 0 & o.w\end{cases}$$

$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-st}\,dt=\underset{0}{\cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\times e^{-st}\,dt}}+\int_{0}^{1}\sin(\pi t)\,e^{-st}\,dt$$

$$+\underset{0}{\cancel{\int_{1}^{+\infty} 0\times e^{-st}\,dt}} \Rightarrow$$

$$X(s)=\int_{0}^{1}\sin(\pi t)\,e^{-st}\,dt$$

$$\sin(\pi t)=\frac{1}{2j}\left[e^{j\pi t}-e^{-j\pi t}\right]$$ طبق فرمول اویلر

$$X(s)=\int_{0}^{1}\frac{1}{2j}\left[e^{j\pi t}-e^{-j\pi t}\right]e^{-st}\,dt=$$

$$\frac{1}{2j}\int_{0}^{1}e^{-(-j\pi+s)t}\,dt-\frac{1}{2j}\int_{0}^{1}e^{-(j\pi+s)t}\,dt=$$

$$\frac{1}{2j}\times\frac{-1}{-j\pi+s}\,e^{-(-j\pi+s)t}\Big|_{0}^{1}-\frac{1}{2j}\times\frac{-1}{j\pi+s}\,e^{-(j\pi+s)t}\Big|_{0}^{1}$$

$$\frac{1}{2j}\left(\frac{-e^{-(-j\pi+s)t}}{s-j\pi}+\frac{1}{s-j\pi}+e^{-(j\pi+s)}-\frac{1}{s+j\pi}\right)$$

$$\forall s$$

سوال ۲ـ

ب ـ ۶

$$x(t) = [e^{-5t}\sin(5t) + e^{-4t}]u(t)$$

طبق خاصیت خطی بودن

$$a x_1(t) + b x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} a X_1(s) + b X_2(s)$$

ROC containing $\boxed{R_1 \cap R_2}$

$$x_1(t) = e^{-5t}\sin(5t)u(t)$$

$$x_2(t) = e^{-4t}u(t)$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$X_1(s) = \frac{5}{(s+5)^2 + 25} \qquad \boxed{Re\{s\} > -5}$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s+4} \qquad \boxed{Re\{s\} > -4}$$

اشتراک ناحیه ها

$$R_1 \cap R_2 \Rightarrow Re\{s\}$$

$$X(s) = \frac{5}{(s+5)^2 + 25} + \frac{1}{s+4} = \frac{5}{s^2 + 10s + 50} + \frac{1}{s+4} =$$

$$\frac{\cancel{5s} + 20 + \cancel{s^2} + \cancel{10s} + 50}{(s+4)(s^2 + 10s + 50)} = \frac{s^2 + 15s + 70}{(s^2 + 10s + 50)(s+4)}$$

$\boxed{ROC \quad Re\{s\} > -4}$

$\boxed{\text{سوال ۲ - ب - ۲}}$

$$x(t) = te^{-2|t|}$$

$$x(t) = te^{-2t}u(t) + te^{2t}u(-t)$$

طبق خاصیت مشتق گیری در حوزه فرکانس

$$\frac{d}{ds}X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-t)\,x(t)\,e^{-st}\,dt$$

$$-t\,x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{dX(s)}{ds} \qquad ROC = R$$

$$\text{پس} \rightarrow X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{te^{-2t}u(t) + te^{2t}u(-t)\} =$$

$$-\mathcal{L}\{-te^{-2t}u(t)\} - \mathcal{L}\{-te^{-2(-t)}u(-t)\} =$$

$$-\frac{d}{ds}\left[\mathcal{L}\{e^{-2t}u(t)\}\right] - \frac{d}{ds}\left[\mathcal{L}\{e^{-2(-t)}u(-t)\}\right]$$

$$= -\Big(\underbrace{\frac{d}{ds}\Big(\frac{1}{s+2}\Big)}_{Re\{s\}>-2}\Big) - \Big(\underbrace{\frac{d}{ds}\Big(\frac{1}{-s+2}\Big)}_{Re\{s\}<2}\Big) =$$

$$-\frac{d}{ds}\Big(\frac{1}{s+2}\Big) - \frac{d}{ds}\Big(\frac{1}{-s+2}\Big) \quad \text{با} \quad \boxed{-2<Re\{s\}<2} \ \text{ناحیه همگرایی}$$

$$= \frac{-1\times -1}{(s+2)^2} \quad \frac{-1\times +1}{(-s+2)^2} = \frac{1}{(s+2)^2} \quad \frac{-1}{(2-s)^2}$$

$\boxed{\text{۲ - ب - ۳}}$

$$x(t) = \int_0^t e^{-3\tau}\cos(2\tau)\,d\tau \qquad X(s)\ \text{؟}$$

طبق خاصیت انتگرال گیری در حوزه زمان

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s}X(s) \qquad \underset{\text{شامل}}{ROC}\ \boxed{R \cap \{Re\{s\}>0\}}$$

$$x(\tau) = e^{-3\tau}\cos(2\tau)u(\tau)$$

① باید $X(s)$ را بدست بیاوریم

$$X(s) = \frac{s+3}{(s+3)^2+4} \qquad Re\{s\} > -3$$

$$\longrightarrow x(t) = X(s) \cdot \frac{1}{s} \longrightarrow \frac{(s+3)}{s \times (s^2+6s+9+4)} =$$

$$\frac{s+3}{s^3+6s^2+9s+4s} \rightarrow \frac{s+3}{s^3+6s^2+13s}$$

$$\longleftarrow Re\{s\}>0 \quad \text{و} \quad Re\{s\} > -3 \text{ اشتراک}$$

$$\boxed{Re\{s\}>0} \qquad \frac{s+3}{s^3+6s^2+13s}$$

سوال $\boxed{4\text{-ب-ج}}$

$$x(t) = r(t) * [\delta(t) + e^{t}u(t)]$$

$$x(t) = r(t) * \delta(t) + r(t) * e^{t}u(t)$$ طبق خاصیت خطی بودن

$$a x_1(t) + b x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} a X_1(s) + b X_2(s)$$

$$X(s) = X_1(s) + X_2(s)$$

طبق این نکته که تبدیل لاپلاس کانولوشن دو سیگنال = ضرب تبدیل لاپلاس هر سیگنال

$$x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s) X_2(s)$$ حداقل $R_1 \cap R_2$

$$\mathcal{L}\{r(t)\} = \frac{1}{s^2} \quad \boxed{Re\{s\}>0} \longrightarrow X(s) = \frac{1}{s^2} \times 1 + 1 \times \frac{1}{s-1} =$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \quad \boxed{\text{All } s}$$

$$\mathcal{L}\{e^{t}u(t)\} = \frac{1}{s-1} \quad \boxed{Re\{s\}>1}$$

$$\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-1} = \frac{s^2+s-1}{s^3-s^2}$$

$$\boxed{\frac{s^2+s-1}{s^3-s^2} \quad Re\{s\}>1}$$ جواب

سوال ۳

الف)

$$F(s)=\frac{s-۵}{s^۲-۶s+۱۳}\qquad \underbrace{Re\{s\}>۳}_{\text{نیم صفحه راست}}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-۵}{s^۲-۶s+۱۳}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-۵}{(s-۳)^۲+۲^۲}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\underbrace{\frac{s-۳}{(s-۳)^۲+۴}}_{Re\{s\}>۳}+\underbrace{\frac{-۲}{(s-۳)^۲+۴}}_{Re\{s\}>۳}\right)$$

$$=\left(e^{۳t}\cos(-۲t)\right)u(t)$$

$$+\left(e^{۳t}\sin(-۲t)\right)u(t)$$

$$=\boxed{e^{۳t}u(t)\left[\cos(-۲t)+\sin(-۲t)\right]}$$

ب)

$$F(s)=\frac{1}{s^۲(s+1)^۲}\qquad -1<Re\{s\}<0$$

$$\frac{1}{s^۲(s+1)^۲}=\frac{A_1}{s}+\frac{A_۲}{s^۲}+\frac{B_1}{(s+1)}+\frac{B_۲}{(s+1)^۲}$$

$$B_۲=(s+1)^۲F(s)\Big|_{s=-1}\quad\frac{1}{s^۲}=\boxed{1}$$

$$B_1=\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s^۲}\right]\Big|_{s=-1}\quad\frac{-۲}{s^۳}=\boxed{۲}$$

$$A_۲=s^۲F(s)\Big|_{s=0}\quad\frac{1}{(s+1)^۲}\Big|_{s=0}=\boxed{1}$$

$$A_1=\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{(s+1)^۲}\right]\Big|_{s=0}\quad\frac{-۲}{(s+1)^۳}\Big|_{s=0}=\boxed{-۲}$$

$$=\underbrace{\frac{-۲}{s}+\frac{1}{s^۲}}_{\text{نیم صفحه سمت چپ}}+\underbrace{\frac{۲}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^۲}}_{\text{سمت راست}}$$

Scanned by CamScanner

ادامه ۳_ب

$$\mathcal{L}^{-1}\{-\frac{2}{s}\} = -2\times -u(-t) = 2u(-t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2}\} = -tu(-t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{s+1}\} = 2e^{-t}u(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s+1)^2}\} = te^{-t}u(t)$$

$$\to F(t) = 2u(-t) - tu(-t) + 2e^{-t}u(t) + te^{-t}u(t)$$

$$= (2-t)u(-t) + (2+t)e^{-t}u(t)$$

جواب

سوال ۳_ج

$$F(s) = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-3}\right)$$

طبق خاصیت مشتق گیری در حوزه فرکانس

$$-tx(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{dX(s)}{ds}$$

$Re\{s\}>3$

پس

$$t^2x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{d^2X(s)}{ds^2}$$

پس ابتدا $X(s)$ را حساب می کنیم ← وارون لاپلاس

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] = e^{3t}u(t)$$

→ در t^2 ضرب می کنیم ← $F(t)$ بدست میاد

$$F(t) = t^2e^{3t}u(t)$$

جواب

سوال ۳ ـ د

$$F(s) = \frac{s^2-2}{s^4+4} \qquad Re\{s\} > 1$$

نیم صفحه سمت راست

$$\frac{s^2-2}{s^4+4} = \frac{-s-1}{2(s^2+2s+2)} + \frac{s-1}{2(s^2-2s+2)}$$

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

$$\frac{-s-1}{2(s^2+2s+2)} = \frac{-1}{2}\,\frac{(s+1)}{(s+1)^2+1} \qquad Re\{s\} > -1$$

$$\frac{s-1}{2(s^2-2s+2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(s-1)}{(s-1)^2+1} \qquad Re\{s\} > 1$$

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{2}\,\frac{(s+1)}{(s+1)^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{(s-1)}{(s-1)^2+1}\right\}$$

$$-\frac{1}{2}\,e^{-t}\cos t\,u(t) + \frac{1}{2}\,e^{t}\cos t\,u(t) = F(t)$$

$\boxed{\text{سوال ٤}}$

الف)

$$h(t) = e^{-t}\cos(t)u(t) \qquad x(t) = e^{-|t|}$$

$$x(t) = e^{-t}u(t) + e^{t}u(-t)$$

طبق نکته ی زیر

ابتدا باید حاصل تبدیل لاپلاس های $H(s)$ و $X(s)$ را بدست آوریم

سپس ، لاپلاس وارون می گیریم.

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$Y(s) = X(s).H(s)$$

$$X(s) = \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{Re\{s\}>-1} + \underbrace{\left(-\frac{1}{s-1}\right)}_{Re\{s\}<1} = \frac{s-1-s-1}{s^2-1} = \boxed{\frac{-2}{s^2-1}}$$

$$X(s) = \frac{-2}{s^2-1} \qquad -1 < Re\{s\} < 1$$

$$H(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+1} \qquad Re\{s\} > -1$$

$$\boxed{ROC \ \ -1 < Re\{s\} < 1}$$

$$Y(s) = X(s).H(s) = \frac{(\cancel{s+1})}{(s+1)^2+1} \cdot \frac{-2}{(\cancel{s+1})(s-1)} = \frac{-2}{((s+1)^2+1)(s-1)}$$

$$\frac{-2}{(s^2+2s+2)(s-1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2} =$$

$$\frac{As^2+2As+2A+Bs^2+Cs-Bs-C}{(s-1)(s^2+2s+2)} =$$

$$(A+B)s^2 + s(2A-B+C) + 2A - C = -2$$

① $A+B=0$ ③ $2A-C=-2$ $3A=-C$

② $2A-B+C=0$ $\longrightarrow$ $-B=A \longrightarrow 3A+C=0$

$\boxed{\text{ادامه‌ی سوال ۴ ـ الف}}$

$$+\begin{cases} 3A + C = 0 \\ 2A - C = -2 \end{cases}$$

$$5A = -2 \longrightarrow \boxed{A = \frac{-2}{5}} \quad \boxed{B = \frac{2}{5}} \quad \boxed{C = -3A = \frac{6}{5}}$$

$$\longrightarrow \frac{2}{((s+1)^2+1)(s-1)} = \frac{2}{5(s-1)} + \frac{-2s-6}{5(s^2+2s+2)}$$

$$\frac{-2s-6}{5(s^2+2s+2)} = \frac{-2}{5}\cdot\frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{(s+1)^2+1}$$

$$\longrightarrow Y(s) = \frac{2}{5(s-1)} - \frac{2}{5}\cdot\frac{(s+1)}{(s+1)^2+1} - \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{(s+1)^2+1}$$

$$y(t) = -\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{5(s-1)}\right\}}_{\frac{-2}{5}e^{t}u(-t)} - \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{2}{5}\cdot\frac{(s+1)}{(s+1)^2+1}\right\}}_{\frac{-2}{5}e^{-t}\cos t\, u(t)} - \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\}}_{\frac{-4}{5}e^{-t}\sin t\, u(t)}$$

نیم صفحه سمت چپ

$$= \frac{2}{5}e^{t}u(-t) + \frac{2}{5}e^{-t}(\cos t + 2\sin t)\,u(t)$$

$\leftarrow -1 < Re\{s\} < 1$ فقط

$$= \frac{2}{5}e^{t}u(-t) + \frac{2}{5}e^{-t}u(t)[\cos t + 2\sin t] = y(t)$$

سوال ۴ _ ب

$$x(t) = e^{4t}$$

$$h(t) = \frac{1}{4}\left(e^{-2t}u(t) + e^{2t}u(-t) \right)$$

$$H(s) = \frac{1}{4}\underbrace{\mathcal{L}\{ e^{-2t}u(t) \}}_{Re\{s\} > -2} + \underbrace{\mathcal{L}\{ e^{2t}u(-t) \}}_{Re\{s\} < 2} =$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s+2} \right) + \frac{1}{s-2} =$$

$$\frac{1}{4s+8} + \frac{1}{s-2} = \frac{s-2+4s+8}{(4s+8)(s-2)} = \frac{5s+6}{4(s+2)(s-2)}$$

$$y(t) = H(s)\Big|_{s_0} \cdot e^{s_0 t}$$

$$x(t) = e^{4t} \rightarrow y(t) = \left(\frac{1}{4s+8} + \frac{1}{s-2} \right)\Big|_4 \cdot e^{4t}$$

$$\left(\frac{1}{4\times 4+8} + \cancel{\frac{1}{4-2}} \right) e^{4t} = \frac{9}{24} e^{4t}$$

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{4}$$

سوال ۵

$$h(t) = \delta(t) + [4e^{-t} - 2e^{-2t}]u(t)$$

الف) تابع تبدیل

$$H(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} + \underbrace{\mathcal{L}\{4e^{-t}u(t)\}}_{Re\{s\}>-1} + \underbrace{\mathcal{L}\{-2e^{-2t}u(t)\}}_{Re\{s\}>-2} =$$

اشتراک → $\boxed{Re\{s\}>-1}$

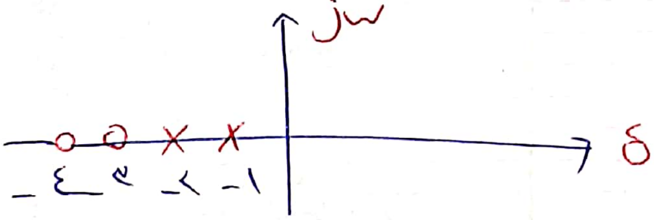
$$1 + 4\cdot\frac{1}{s+1} - 2\cdot\frac{1}{s+2} =$$

$$1 + \frac{4}{s+1} - \frac{2}{s+2} = \frac{s^2+3s+2+4s+12-2s-2}{(s+1)(s+2)} =$$

$$\frac{s^2+7s+12}{(s+1)(s+2)} = \boxed{\frac{(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)} \quad Re\{s\}>-1}$$

ب) صفرها ← ریشه‌های صورت ، -3 و -4

قطب‌ها ← مخرج ← -1 و -2



ج)

$$H(s) = \frac{s^2+7s+12}{s^2+3s+2} \rightarrow \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 7\frac{dy(t)}{dt} + 12y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 3\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

د) طبق قضیه کانولوشن در لاپلاس ، داریم

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$Y(s) = X(s) \times H(s) \quad \text{ROC شامل } R_1 \cap R_2$$

سیستم LTI پایدار ← ROC $H(s)$ محور $j\omega$ را در صفحه s دربرگیرد

ادامه سوال $\boxed{\text{الف - د}}$

$$x(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t)$$

$$X(s) = \frac{1}{s+3} - \frac{1}{s+4}$$

$$Re\{s\} > -3 \qquad Re\{s\} > -4 \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{اشتراک}}$$

$$X(s) = \frac{s+4-s-3}{(s+3)(s+4)} = \frac{1}{(s+3)(s+4)} \qquad ROC \in Re\{s\} > -3$$

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) \qquad \leftarrow \text{طبق نتیجه}$$

$$Y(s) = \frac{\cancel{(s+4)}\,\cancel{(s+3)}}{(s+1)(s+2)} \times \frac{1}{\cancel{(s+3)}\,\cancel{(s+4)}} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$Re\{s\} > -1$

ROC ـ کل باید شامل $R_H \cap R_X$ باشد

$$R_H = Re\{s\} > -1 \xrightarrow{\text{اشتراک}} Re\{s\} > -1$$

$$R_X = Re\{s\} > -3$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$

$\boxed{\text{الف - ه}}$ پاسخ پله سیستم ؟ اگر $x(t) = u(t)$

$$X(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s} \qquad Re\{s\} > 0$$

$$\frac{1}{s} \cdot H(s) = ? \qquad R_H = Re\{s\} > -1$$

$$\frac{(s+4)(s+3)}{(s+1)(s+2)} \times \frac{1}{s} = \frac{-6}{s+1} + \frac{1}{s+2} + \frac{6}{s}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-6}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s}\right\} = \quad \text{اشتراک}$$

جواب: $-6e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) + 6u(t) \qquad Re\{s\} > 0$

$$\frac{(s+4)(s+3)}{(s+1)(s+2)} \times \frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

ادامه‌ی ل ـ هـ

محاسبات دقیق تر

$$A = s\,Y(s)\Big|_{s=0} \qquad \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

$$B = (s+1)\,Y(s)\Big|_{s=-1} \qquad \frac{(\cancel{-1+4})^{3}\,(\cancel{-1+3})^{2}}{\cancel{(-1+2)}} \times (-1) = -6$$

$$C = (s+2)\,Y(s)\Big|_{s=-2} \qquad \frac{(\cancel{-2+4})^{1}\,(\cancel{-2+3})^{1}}{(\cancel{-2+1})_{-1}} \times \frac{1}{\cancel{-2}} = 1$$

$$= \boxed{\frac{-6}{s+1} + \frac{1}{s+2} + \frac{6}{s}}$$

$$\boxed{-6e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) + 6u(t)} \quad Re\{s\}>0$$

جواب ج

سوال ۳

$$h(t) = \delta(t) - 4\left[\cdot e^{-t} + (2e^{-2t} - e^{-t})u(t)\right]$$

$$h(t) = \delta(t) - 4e^{-t} \cancel{- 4\times 2\, e^{-2t} u(t)} + 4e^{-t}u(t)$$

$$-12\, e^{-2t} u(t)$$

$$h(t) = \delta(t) + 4e^{-t}(\cancel{u(t)-1}) - 12\, e^{-2t} u(t)$$

$$-u(-t)$$

$$H(s) = ?$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} + \mathcal{L}\{-4e^{-t}u(-t)\} + \mathcal{L}\{-12e^{-2t}u(t)\}$$

$$= \underbrace{1}_{\forall s} + \underbrace{\left(+4\cdot\frac{1}{s+1}\right)}_{Re\{s\}<-1} + \underbrace{\left(-12\cdot\frac{1}{s+2}\right)}_{Re\{s\}>-2} = 1 + \frac{4}{s+1} - \frac{12}{s+2}$$

$$= \frac{\cancel{s^2} + \cancel{3s} + 2 \cancel{+ 4s} \cancel{+ 8} \cancel{- 12s} - 8}{(s+1)(s+2)} = \boxed{\frac{s^2 - 5s + 2}{(s+1)(s+2)}}$$

$$R_1 \cap R_2 \cap R_3 \rightarrow \forall s \cap Re\{s\} < -1 \cap Re\{s\} > -2$$

$$-2 < Re\{s\} < -1$$

$\boxed{\text{ادامه‌ی سوال ۴}}$

طبق نکته‌ی زیر

می‌توانیم $h^{-1}(t)$ را پیدا کنیم

حاصل کانولوشن $h(t)$ با وارون خودش ، سیگنال ضربه است ←

$$h(t) * h^{-1}(t) = \delta(t)$$

به کمک خاصیت کانولوشن در لاپلاس

$$H(s) \cdot H^{-1}(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \rightarrow \boxed{H^{-1}(s) = \frac{1}{H(s)}}$$

ما قبلاً $H(s)$ را پیدا کرده بودیم ←

برای پیدا کردن $H^{-1}(s)$ ←

$$H^{-1}(s) = \frac{1}{\frac{(s^2-3s+2)}{(s+1)(s+2)}} = \frac{(s+1)(s+2)}{s^2-3s+2}$$

$$H^{-1}(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{(s-1)(s-2)} = 1 + \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2}$$

$h^{-1}(t)$ باید شامل

$-2 < Re\{s\} < -1$

باشد

پس

$$A = H^{-1}(s)(s-1)\Big|_{s=1} = \frac{2 \times 3}{-1} = -6$$

$$B = H^{-1}(s)(s-2)\Big|_{s=2} = \frac{3 \times 4}{1} = 12$$

$$H^{-1}(s) = 1 - \frac{6}{s-1} + \frac{12}{s-2} \Rightarrow$$ لاپلاس وارون

اشتراک بگیریم

$$\mathcal{L}^{-1}\{H^{-1}(s)\} = \boxed{\delta(t) + 6e^{t}u(-t) - 12e^{2t}u(-t)} \quad \boxed{Re\{s\} < 1}$$

$h^{-1}(t)$

چون $Re\{s\}<1$ ⟵ $h^{-1}(t)$ یک سیگنال سمت چپی الف

چون ROC این سیگنال، شامل محور $\boxed{j\omega}$ است ⟵
سیستم پایدار الف

طبق نکته (شرط کافی و لازم پایداری سیستم ها
ROC شامل محور $j\omega$)

چون سیگنال سمت چپی الف ⟵ سیستم غیرعلی است

برای چک کردن زوج یا فرد بودن ⟵ اگر $x(t)=x(-t)$ ⟵ سیگنال
زوج
الف

اگر $x(t)=-x(t)$ ⟵
فرد الف