تمرین اول الگوریتم / حدیث غفوری / ۹۸۱۲۵۶۴۳

سوال ۶

۱) تحلیل تابع زیر

```
void f(int n, int m){
    long long sum=0;
    for(int i=2; i<n; i*=3){          → ① log_3 n → O(log n)
        for(int j=0; j<m; j+=2){      → ② m/2 → O(m)
            for(int z=0; z<j; z++){   → ③ m → O(m)
                sum+=6;
            }
        }
    }
    cout<<sum;
}
```

طبق حلقه های for ←

حلقه ی اول هر بار ۳ برابر می شود ← از $\log n$ است

حلقه ی دوم هر بار به اندازه ی ۲ می شود ← از m است

سوم هم از اردر m است ←

حلقه ها تو در تو هستند ← $\log_n \times m \times m = O(m^2 \log_n)$

```
int main(){
    int a;
    cin>>a;
    for(int i=0; i<a; i++){
        f(6^i, i);
    }
    return 0;
}
```

ب)

برای $i=0 \rightarrow 0$

$i=1 \rightarrow \log_3 6$

$i=2 \rightarrow 4\log_3^{36}$

$i=3 \rightarrow 9\log_3^{6^3}$

از الف

$f(n,m) \rightarrow m^2\log_3^n$

در واقع → $i=0 \xrightarrow[\text{تابع}]{\text{فراخوانی}} f(1,0) \xrightarrow{\text{خروجی}} 0$

$i=1 \rightarrow f(6,1) \rightarrow \log_3^6$

$i=2 \rightarrow f(36,2) \rightarrow 4\log_3^{36}$ — جمع می زنیم +

$i=3 \rightarrow f(6^3,3) \rightarrow 9\log_3^{6^3}$

⋮

$i=a-1 \rightarrow f(6^{a-1}, a-1) \rightarrow (a-1)^2 \log_3 6^{a-1}$

① $= \log_3^6 + 4\log_3^{36} + 9\log_3^{6^3} + \dots + (a-1)^2\log_3 6^{a-1} \longrightarrow$

$= \log_3^6 + 2^2\log_3^{6^2} + 3^2\log_3^{6^3} + \dots + (a-1)^2\log_3^{6^{a-1}} \longrightarrow$

از $\log_3^2$ فاکتور می گیریم

$$\log_3^2\left(1+2^3+\dots+(a-1)^3\right)$$

طبق فرمول زیر

$$1^3+2^3+\dots+n^3=(1+2+\dots+n)^2$$

$$=\log_3^2\left(\cancel{1}+2+\dots+(a-\cancel{1})\right)^2=\log_3^2\left(2+3+\dots+a\right)^2$$

جمع اعداد ۲ تا a به
جز ۱

$$=\log_3^2\left(\frac{a(a+1)}{2}-1\right)^2\Rightarrow\boxed{O(a^4)}$$

[illegible]

فرمول جمع اعداد ۱ تا n

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

جواب از order a^4 است

سوال ۲

$f(n)$	$g(n)$	O	o	ω	Ω	Θ
۱) n^k	c^n	✓	✓	✗	✗	✗
۲) 2^n	$2^{\frac{n}{2}}$	✗	✗	✓	✓	✗
۳) $\log n!$	$\log n^n$	✓	✓	✗	✗	✗
۴) 2^n	2^{n-2}	✓	✗	✗	✓	✓
۵) $n2^n$	3^n	✗	✗	✓	✓	✗

۱) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{c^n} = 0 \rightarrow$ O, o ✓ ω, Ω, Θ ✗

۲) $\cancel{2^n \leq c \cdot 2^{\frac{n}{2}}} \rightarrow 2^{\frac{n}{2}} \leq c$ ✗ غلط

$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{\frac{n}{2}}} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{n}{2}} = \infty \rightarrow$ ✓ ω و Ω

✗ O, o, Θ

۳) $\log n! = \log 1 + \log 2 + \ldots + \log(n-2) + \ldots + \log n$

کوچکتر مساوی

$\ll \log n + \log n + \ldots + \log n$

$\log n$ تا n و $\boxed{n \log n = \log n^n}$

می‌دانیم

پس $\log n! \leq \cancel{n \log n}$ $\log n^n$ $\rightarrow$ $\boxed{\log(n!) = O(\log n^n)}$

۴) $2^n = c \times 2^{n-2}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{n-2}} = 4 \rightarrow$ O, Ω, Θ ✓ بزرگ

کوچک ω و o ✗

۵) $\lim_{n\to\infty} \frac{n2^n}{3^n} = 0 \rightarrow$ O, o, Θ ✗

$n2^n < 3^n c \rightarrow$ ω, Ω ✓

اگر $f(n) = O(g(n)) \rightarrow |f(n)| \leq K \cdot g(n)$

اگر $f(n) = o(g(n)) \rightarrow |f(n)| < K \cdot g(n)$

اگر $f(n) = \omega(g(n)) \rightarrow |f(n)| > K \cdot g(n)|$

اگر $f(n) = \Omega(g(n)) \rightarrow |f(n)| \geq K \cdot g(n)$

اگر $f(n) = \Theta(g(n)) \rightarrow K_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq K_2 \cdot g(n)$

۳

سوال ۳

آ) $n=O(n\log n)$ $\quad n \ge 1 \rightarrow \log n \ge 1 \rightarrow \underline{n\log n \ge n} \rightarrow$

اگر $\exists c, n_0 \quad n \le c\,n\log n \quad n > n_0 \qquad n=O(n\log n)$

$0 \le c\,n\log n - n \rightarrow n(c\log n - 1) \ge 0 \rightarrow c\log n - 1 \ge 0 \rightarrow \boxed{c\log n \ge 1}$

ب) برقراری؟ اگر $f(n), g(n) \ge 0 \quad f(n)=O(g(n)) \nrightarrow 2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$

غلط ✗ مثال نقض: اگر $f(n)=4n \,,\; g(n)=n \rightarrow$

$f(n)=O(g(n))$

به برهان خلف

$$\underbrace{2^{4n}}_{(2^n)^4} = O(2^n) \xrightarrow[\times]{\text{غلط است}} \text{قضیه اشتباه است}$$

ج) $f(n)+g(n) = \Theta(\max\{f(n), g(n)\})$

① $f(n) \le f(n)+g(n)$

② $g(n) \le f(n)+g(n)$

$\rightarrow \max(\{f(n), g(n)\}) = O(f(n)+g(n))$ $\boxed{A}$

$\max(\{f(n), g(n)\}) \le 2(f(n)+g(n))$

می‌دانیم $f(n)+g(n) \le 2\max(f(n), g(n)) \rightarrow \max(\{f(n), g(n)\}) = \Omega(f(n)+g(n))$ $\boxed{B}$

$\longrightarrow \max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n)+g(n))$

از A و B نتیجه می‌گیرم که

$f(n)+g(n) = \Theta(\max\{f(n), g(n)\})$

تمارین هفتم $\underbrace{1 + c + c^2 + \cdots + c^n}_{f(n)} = \Theta(\underbrace{c^n}_{g(n)})$ (۳ ج

① $\underbrace{1 + c + c^2 + \cdots + c^n}_{} \geq c^n \rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$ $\boxed{f(n) = \Theta(g(n))}$

② $\underbrace{1 + c + c^2 + \cdots + c^n}_{} \leq 2c^n \rightarrow f(n) = O(g(n))$

جمع این اعداد از c^n کمتر است

سوال ۴

$T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + \Theta(\sqrt{n})$ (آ

به کمک قضیه اصلی ←

$T(n) = aT(\frac{n}{b}) + \Theta(n^d)$

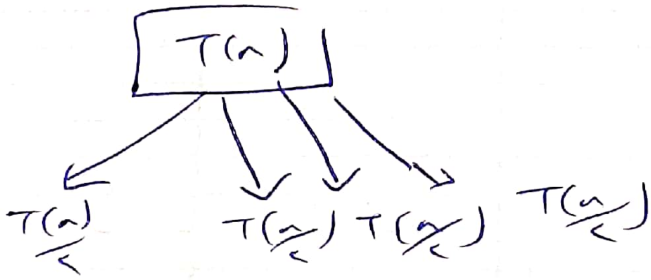
$T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + \Theta(n^{\frac{1}{2}}) \rightarrow a = 7, b = 2, d = \frac{1}{2}$

$b^d = \sqrt{2} \rightarrow 7 > \sqrt{2} \rightarrow$ case 3 →

$O(n^{\log_b a}) = O(n^{\log_2 7})$

$T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^2 \log n$ (ب

$a = 4 \quad b = 2$



$\cancel{\log_2 n}$ $\times \frac{n^2}{\cancel{(2^{\log_2 n})^2}}$ $= \boxed{n^2}$

$\rightarrow 4^{\log_2 n} = n^{\log_2 4} \rightarrow n^{2\log_2 2} \rightarrow n^2$

$n^2(\log n + \log \frac{n}{2} + \log \frac{n}{4} + \cdots + 1) = \boxed{O(n^2 \log n)}$

جواب