سوال ۴

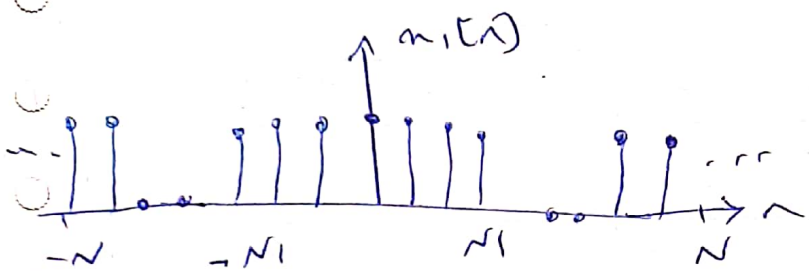
$$x[n]=\begin{cases}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) & 0\le n\le 2\\ 0 & 3\le n\le 4\end{cases}$$

$T=4$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\omega_0 n}$$

$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{2}$

$$x[n]=\begin{cases}\dfrac{e^{j\left(\frac{n\pi}{2}\right)}+e^{-j\left(\frac{n\pi}{2}\right)}}{2} & 0\le n\le 2\\ 0 & 3\le n\le 4\end{cases}$$



طول پالس $2N_1+1$

دوره تناوب اصلی N

طبق رابطه زیر

$$a_k=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(k\pi\frac{2N_1+1}{N}\right)}{N\sin\left(\frac{k\pi}{N}\right)} & k\neq 0,\pm N,\pm 2N,\dots\\ \dfrac{2N_1+1}{N} & k=0,\pm N,\pm 2N,\dots\end{cases}$$

و می‌دانیم اگر در حوزه‌ی فوریه‌ی سیگنال ضرب در $e^{jm\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$ باشد

$$x[n]\xleftrightarrow{FS} a_{k-m}$$

$$e^{j\left(\frac{n\pi}{2}\right)}=e^{jm\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}\rightarrow m=1$$

$$e^{jm\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

و طبق خاصیت خطی در ضرایب برای هر α و β

$$Ax[n]+By[n]\xleftrightarrow{FS} Aa_k+B b_k$$

$$x[n]=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{j\left(\frac{n\pi}{2}\right)} & 0\le n\le 2\\ 0 & 3\le n\le 4\end{cases}+\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-j\left(\frac{n\pi}{2}\right)} & 0\le n\le 2\\ 0 & 3\le n\le 4\end{cases}$$

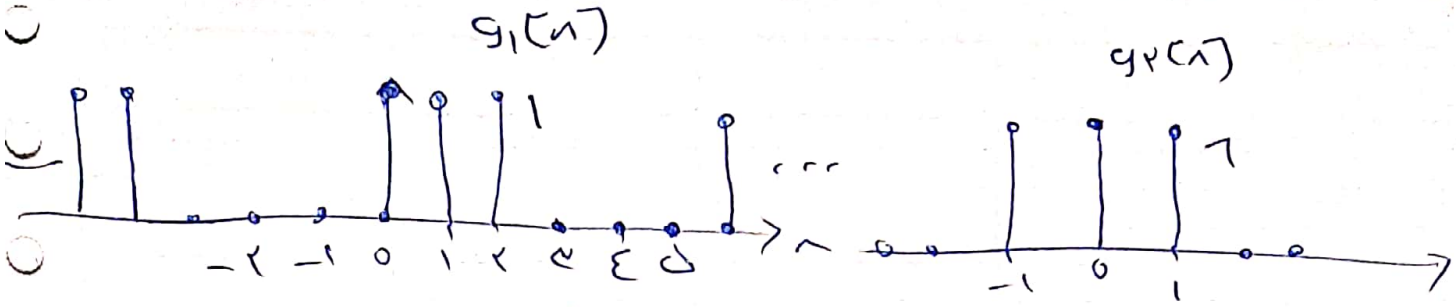
همان پالس است که در $e^{j\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$ ضرب شده

همان پالس است که در $e^{-j\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$ ضرب شده

$$a_k=\frac{1}{2}g_{k-1}+\frac{1}{2}g_{k+1}$$

اگر ضرایب سری فوریه پالس g_k

یعنی باید g_k را بدست آوریم.



اگر $g_2[n] = g_1[n+1]$ یعنی $g_1[n]$ را یک واحد به چپ شیفت دهیم g

پس $g_1[n] = g_2[n-1]$

$N_1 = 1$ و $N = 4 \rightarrow$

	$k \neq 0, \pm N, \dots$	$k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$
$c_k =$ ضرایب سری فوریه $g_2[n]$	$\frac{\sin(k\pi \frac{2+1}{4})}{4\sin(\frac{k\pi}{4})}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{\sin(\frac{k\pi}{2})}{4\sin(\frac{k\pi}{4})}$	

طبق خاصیت شیفت در حوزه‌ی زمان g

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{FS} a_k e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n_0}$$

$$\leftarrow \boxed{g_k = e^{-jk(\frac{\pi}{2})} c_k} \leftarrow n_0 = 1$$

$$a_k = \frac{1}{2} g_{k-1} + \frac{1}{2} g_{k+1}$$

$$g_{k+1} = e^{-j(k+1)(\frac{\pi}{2})} c_{k+1}$$ پس

$$g_{k+1} = \begin{cases} e^{-j(k+1)\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\sin((k+1)\frac{\pi}{2})}{4\sin((k+1)\frac{\pi}{4})} & k \neq -1, \pm N-1, \dots \\ e^{-j(k+1)\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{2} & k = -1, \pm N-1, \pm 2N-1, \dots \end{cases}$$

$$g_{k-1} = \begin{cases} e^{-j(k-1)\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\sin((k-1)\frac{\pi}{2})}{4\sin((k-1)\frac{\pi}{4})} & k \neq 1, \pm N+1, \dots \\ e^{-j(k-1)\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{2} & k = 1, \pm N+1, \dots \end{cases}$$

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-j(k+1)\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\sin\left((k+1)\frac{\pi}{2}\right)}{5\sin\left((k+1)\frac{\pi}{5}\right)} + \frac{1}{2} e^{-j(k-1)\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\sin\left((k-1)\frac{\pi}{2}\right)}{5\sin\left((k-1)\frac{\pi}{5}\right)} & k \neq \pm 1, \pm 5-1, \pm 5+1, \dots \\ \frac{1}{2} e^{-j(k+1)\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} e^{-j(k-1)\frac{\pi}{2}} = & \\ \frac{1}{2}\left(e^{-jk\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{-jk\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}\right) = & \\ e^{-jk\frac{\pi}{2}}\left(\frac{e^{j\frac{\pi}{2}} + e^{-j\frac{\pi}{2}}}{2}\right) = & \\ e^{-jk\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & k = \pm 1, \pm 5+1, \pm 5-1, \dots \end{cases}$$

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(e^{-j\frac{(k+1)\pi}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{(k+1)\pi}{2}\right)}{6\sin\left(\frac{(k+1)\pi}{6}\right)} + e^{-j\frac{(k-1)\pi}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{(k-1)\pi}{2}\right)}{6\sin\left(\frac{(k-1)\pi}{6}\right)} \right) & k \neq \pm 1, (\pm 6 - 1), (\pm 6 + 1), \cdots \\ e^{-j\frac{k\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & k = \pm 1, (\pm 6 - 1), (\pm 6 + 1), \cdots \end{cases}$$

حواس باشد