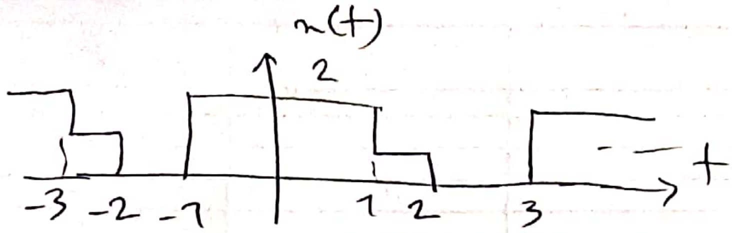
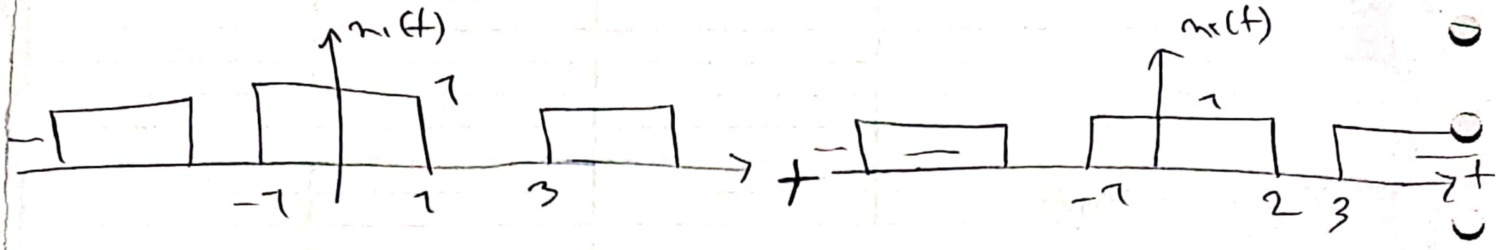
$\boxed{\text{سوال ۶}}$

الف



$= x_1(t) + x_2(t)$



میدانیم تبدیل فوریه پالس مربعی متقارن به شکل زیر است:

$a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{\pi k} \rightarrow$

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{k}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\delta(\omega - k\omega_0)$$

پس $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را برحسب $g(t)$ می‌نویسیم

$x_1(t) = g(t)$ با $\boxed{T_1 = 1} \rightarrow$

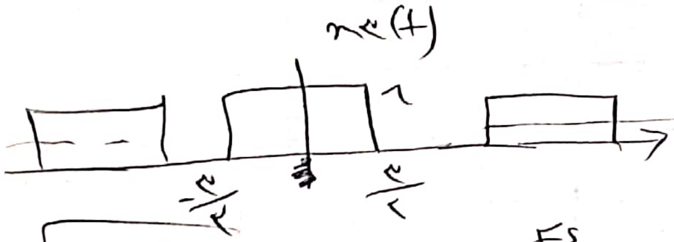
$$X_1(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{k}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}k\right)$$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$,

$T = 4T_1 \rightarrow \boxed{T = 4}$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

برای پیدا کردن $x_2(t)$ برحسب $g(t)$:



$x_2(t) = x_3\left(t - \frac{1}{2}\right)$

طبق خاصیت انتقال زمانی در سری فوریه :

$\boxed{T = 4}$

$x(t - t_0) \xleftrightarrow{FS} e^{-jk\omega_0 t_0} a_k$

$t_0 = \frac{1}{2}$ و $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{\pi}{2}}$

$b_k = e^{-jk\frac{\pi}{2}\frac{1}{2}} a_k \Rightarrow \boxed{b_k = e^{-j\frac{k\pi}{4}} a_k}$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k}\delta(\omega - k\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin\left(\frac{3\pi}{4}k\right)}{k}\delta\left(\omega - \frac{k\pi}{2}\right)$$

$\omega_0 T_1 = \frac{\pi}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3\pi}{4}$

$$b_k = e^{-j\frac{k\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{3}{4}\pi k\right)}{k}$$

اردیبهشت ٩٦

$$\rightarrow X(j\omega) = X_1(j\omega) + X_2(j\omega)$$

$$X_2(j\omega) = 2\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-jk\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(\frac{3}{4}\pi k)}{k}\, \delta(\omega - \frac{k\pi}{2})$$

$$X_1(j\omega) = 2\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\frac{k\pi}{2})}{k}\, \delta(\omega - \frac{\pi}{2}k)$$

$$\rightarrow 2\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\frac{k\pi}{2})}{k}\, \delta(\omega - \frac{\pi}{2}k) + 2\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-jk\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(\frac{3\pi}{4}k)}{k}\, \delta(\omega - \frac{k\pi}{2})$$

جواب

(ب)

$$x(t) = \frac{4t}{(1+t^2)^2} \longrightarrow \boxed{x(t) = -2g'(t)}$$

$$g(t) = \frac{1}{1+t^2} \rightarrow g'(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}$$

$$X(j\omega) = ?$$

طبق خاصیت مشتق گیری در حوزه زمان

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega X(j\omega)$$

پس $X(j\omega) = -2j\omega\, G(j\omega)$

طبق خاصیت دوگانی

$$F\{X(t)\} = 2\pi x(-\omega)$$

$$\rightarrow F\{G(t)\} = 2\pi g(-\omega) = \frac{2\pi}{1+\omega^2}$$

(می دانیم که اگر $X(j\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$ آنگاه $x(t) = e^{-|t|}$)

پس $G(\omega) = \pi e^{-|\omega|} \rightarrow X(j\omega) = -2j\omega\pi e^{-|\omega|}$

جواب

سوال ۶ـ ج)

$$x(t) = ۲e^{۲|t|}\sin(۳t)$$

$$\sin(۳t) = \frac{e^{۳tj} - e^{-۳tj}}{۲j} \rightarrow$$

$$x(t) = \cancel{۲}e^{-۲|t|}\left(\frac{e^{۳tj} - e^{-۳tj}}{\cancel{۲}j}\right) = \frac{1}{j}\left[e^{-۲|t|}.e^{۳tj} - e^{-۲|t|}.e^{-۳tj}\right]$$

اگر فرض کنیم $g(t) = e^{-۲|t|}$ ← می‌دانیم که اگر

$x(t) = e^{-a|t|}$ $a>0$ $\rightarrow X(jw) = \frac{۲a}{a^۲+w^۲} \rightarrow a=۲$ اینجا e

$$\boxed{G(jw) = \frac{۴}{۴+w^۲}}$$

طبق خاصیت انتقال فرکانسی در تبدیل فوریه e

$$e^{jw_0 t}f(t) \xleftrightarrow{F} F(w-w_0)$$

اینجا $e^{-۲|t|}.e^{۳tj}$ را داریم ← $e^{۳tj} = e^{jw_0 t}$ ← $\boxed{w_0 = ۳}$

پس $\boxed{F(w-۳)}$ داریم

برای $e^{-۲|t|}.e^{-۳tj}$ ← $e^{-۳tj} = e^{jw_0 t}$ ← $\boxed{w_0 = -۳} \rightarrow \boxed{F(w+۳)}$

$$\rightarrow \frac{1}{j}\left[G(w-۳) - G(w+۳)\right]$$

$$G(w-۳) = \frac{۴}{۴+(w-۳)^۲}$$

$$G(w+۳) = \frac{۴}{۴+(w+۳)^۲} \rightarrow \frac{1}{j}\left[\frac{۴}{۴+(w-۳)^۲} - \frac{۴}{۴+(w+۳)^۲}\right]$$

جواب

Scanned by CamScanner

سوال ۶ _ د

$$x(t) = \begin{cases} 4 - t^2 & |t|<2 \\ 0 & |t|>2 \end{cases}$$

$x_1(t) = 4$

$x_2(t) = t^2$

$x(t) = x_1(t) - x_2(t)$

$X_1(jw) = 4\delta(w)$

طبق خاصیت مشتق گیری در حوزه فرکانس داریم

$$(-jt)^n f(t) \xleftrightarrow{F} \frac{d^n}{dw^n} F(w)$$

اگر $n=2$ باشد

$$t^2 f(t) \xleftrightarrow{F} \frac{d^2}{dw^n} F(w)$$

پس برای $x_2(t)$ ← مشتق دوم $\delta(w)$ داریم

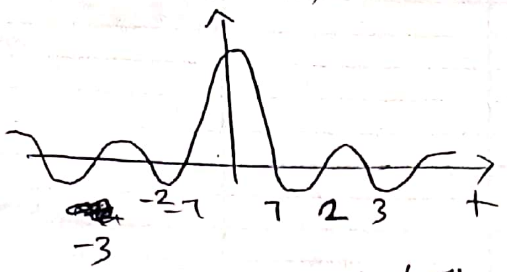
$$\boxed{X_2(jw) = \delta''(w)}$$

$$\boxed{X(jw) = 4\delta(w) - \delta''(w)}$$ جواب

سوال ۱ _ ن

$$x(t) = \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right)^2 * \sin^2(\pi t)$$

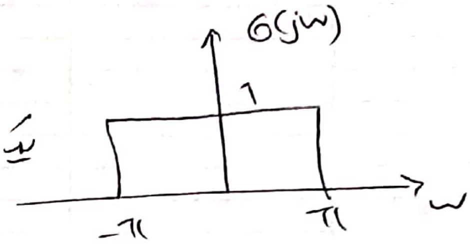
$$\operatorname{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$



$\operatorname{sinc}(0) = 1$

$$G(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W \\ 0 & |\omega| > W \end{cases} \xrightarrow{W=\pi} G(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \pi \\ 0 & |\omega| > \pi \end{cases}$$

یک پالس است.

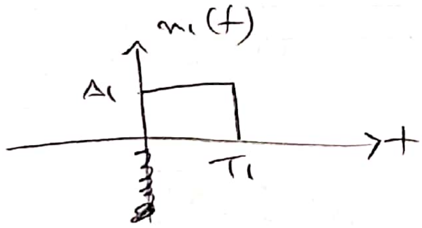


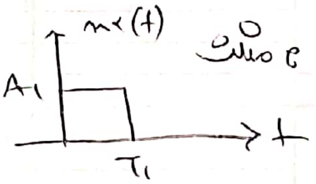
طبق خاصیت کانولوشن در فرکانس

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \xleftrightarrow{F} \frac{F_1(\omega) * F_2(\omega)}{2\pi}$$

پس

$$g(t) \cdot g(t) \xleftrightarrow{F} \frac{G(\omega) * G(\omega)}{2\pi}$$

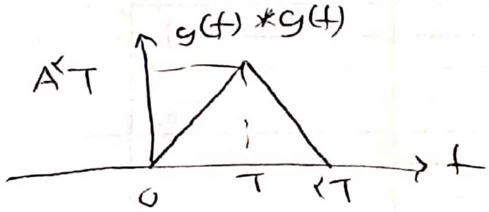




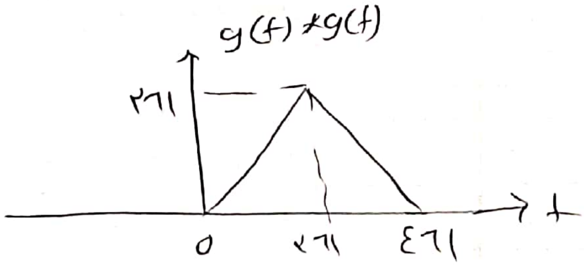
حاصل کانولوشن دو پالس یک مثلث

$x_1(t) = x_2(t) = g(t)$

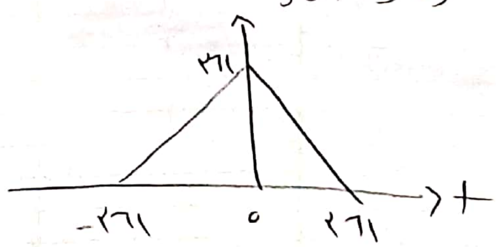
$g(t) * g(t) =$



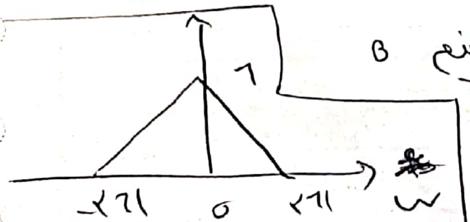
اینجا $A = 1$, $T = 2\pi$ پس



$\longrightarrow$



چون باید در $\frac{1}{2\pi}$ ضرب کنیم



ادامه سوال ۶ـ۵

می دانیم طبق خاصیت کانولوشن در حوزه زمان :

$$f_1(t) * f_2(t) \xleftrightarrow{F} F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

پس چون $x(t) = \underbrace{\left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right)^2}_{x_1(t)} * \underbrace{\sin^2(\pi t)}_{x_2(t)}$ ←

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t)$$

$$X(j\omega) = X_1(j\omega) \cdot X_2(j\omega)$$

باید تبدیل فوریه ی x_1 و x_2 را جداگانه حساب کنیم :

$$x_2(t) = \sin^2(\pi t)$$

می دانیم که $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ ←

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} \rightarrow \sin^2(\pi t) = \frac{1-\cos(2\pi t)}{2} =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\pi t)$$

می دانیم که اگر $x(t) = \cos\omega_0 t$ ←

$$X(j\omega) = \pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)$$

$$F\{\tfrac{1}{2}\} = \tfrac{1}{2}\delta(\omega)$$

در اینجا : $\omega_0 = 2\pi$ است ←

$$F\{\cos(2\pi t)\} = \pi\delta(\omega-2\pi) + \pi\delta(\omega+2\pi)$$

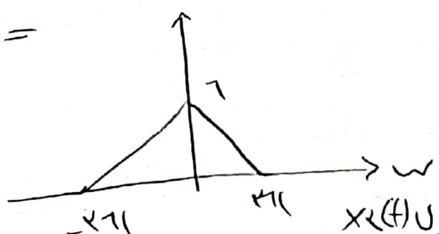
و طبق خاصیت خطی بودن :

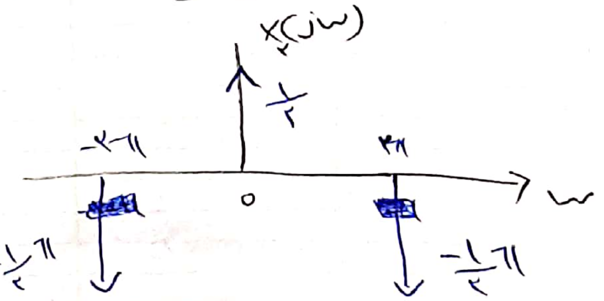
$$F\{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2\pi t)\} = \boxed{\tfrac{1}{2}\delta(\omega) - \tfrac{1}{2}\left(\pi\delta(\omega-2\pi) + \pi\delta(\omega+2\pi)\right)}$$

تبدیل فوریه ی $X_2(j\omega)$

$$X(j\omega) = X_1(j\omega) \cdot X_2(j\omega)$$

$X_1(j\omega) =$





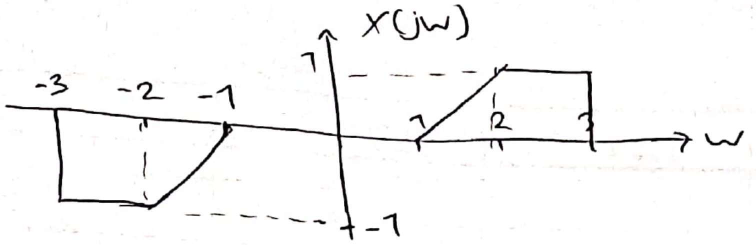
این دو مقدار را در هم ضرب می کنیم ← چون فقط در مقادیر 0 و $\pm 2\pi$ مقدار دارد

جواب ← فقط در مقدار $\omega = 0$ مقدار دارد

$X_1(j\omega) \cdot X_2(j\omega) =$

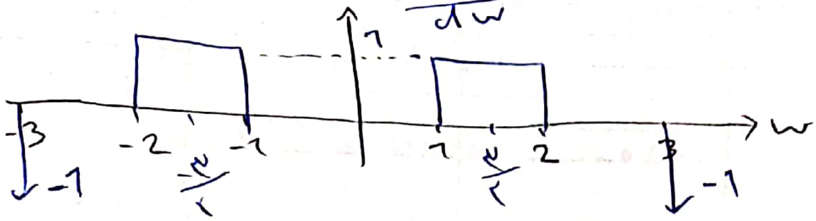
$$\boxed{X(j\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \omega = 0 \\ 0 & \text{other} \end{cases}}$$

سوال ۲ - الف)



اگر مشتق $X(j\omega)$ را بگیریم راحت‌تر مسئله حل می‌شه ←

$$\frac{dX(j\omega)}{d\omega} = G(j\omega)$$

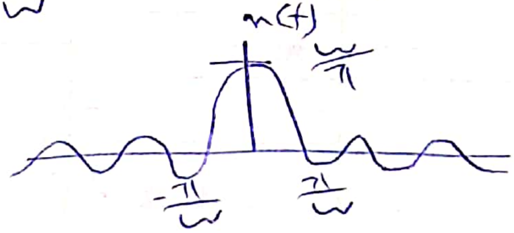


$G(j\omega)$ شامل ۲ سیگنال ضربه و دو سیگنال پالس با ارتفاع ۱ و $\omega=\frac{1}{2}$ است ←

$$g(t) = f^{-1}\{G(j\omega)\} = f^{-1}\{-\delta(\omega+3) + Sp(\omega-\tfrac{3}{2}) + Sp(\omega+\tfrac{3}{2}) - \delta(\omega-3)\}$$

می‌دانیم که اگر $X(j\omega)$ یک پالس باشد ← اگر تبدیل فوریه معکوس بگیریم یک $\text{sinc}(t)$
تبدیل میشه

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{\sin Wt}{\pi t}$$



در پالس‌های شکل اصلی یک $\omega=\frac{1}{2}$ ← $f^{-1}\{Sp(\omega)\} = \dfrac{\sin(\frac{t}{2})}{\pi t}$

چون $f^{-1}\{Sp(\omega-\frac{3}{2})\}$ را می‌خواهیم یعنی انتقال داریم ← طبق خاصیت
انتقال در حوزه فرکانس یک

$$f^{-1}\{Sp(\omega-\tfrac{3}{2})\} = \overset{\text{در فرکانس}}{e^{j(\frac{3}{2})t}}\left[\frac{\sin(\frac{t}{2})}{\pi t}\right]$$

$$f^{-1}\{Sp(\omega+\tfrac{3}{2})\} = e^{-j(\frac{3}{2})t}\left[\frac{\sin(\frac{t}{2})}{\pi t}\right]$$

و می‌دانیم $f^{-1}\{-\delta(\omega+3)\} = -\dfrac{e^{-j3t}}{2\pi}$ و $f^{-1}\{-\delta(\omega-3)\} = -\dfrac{e^{j3t}}{2\pi}$

پس یک

$$g(t) = -\frac{e^{-j3t}}{2\pi} - \frac{e^{j3t}}{2\pi} + e^{j\frac{3}{2}t}\left[\frac{\sin(\frac{t}{2})}{\pi t}\right] + e^{-j\frac{3}{2}t}\left[\frac{\sin(\frac{t}{2})}{\pi t}\right] =$$

ادامه سوال ۲ـ الف

$$-\frac{\left(e^{+3jt}+e^{-3jt}\right)}{2\pi} = \frac{-1}{\pi}\cos(3t)$$

$$\frac{\sin(\frac{t}{2})}{\pi t}\left[\underbrace{e^{j\frac{3}{2}t}+e^{-j\frac{3}{2}t}}_{2\cos(\frac{3}{2}t)}\right] = \frac{2\cos(\frac{3}{2}t)\sin(\frac{t}{2})}{\pi t}$$

$$g(t) = -\frac{1}{\pi}\cos(3t)+\frac{2}{\pi t}\cos(\frac{3}{2}t)\sin(\frac{t}{2})$$

پس

با کمک خاصیت مشتق گیری در حوزه فرکانس

$$(-jt)^n f(t) \xleftrightarrow{F} \frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{-jt\,x(t)\} = G(j\omega) \quad \longleftarrow \text{چون یک بار مشتق گرفتیم}$$

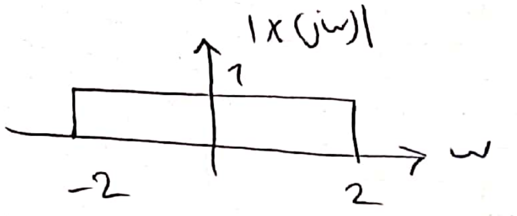
پس $\boxed{-jt\,x(t)=g(t)} \longrightarrow x(t)=\frac{g(t)}{-jt}=\frac{jg(t)}{t}=$

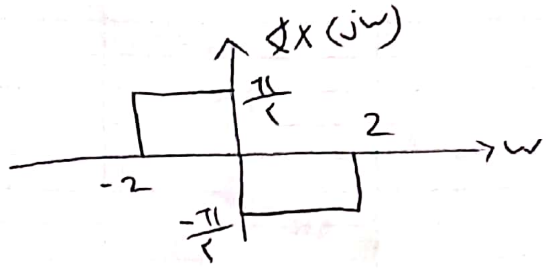
$$\boxed{-\frac{j}{\pi t}\cos(3t)+\frac{2j}{\pi t^2}\cos(\frac{3}{2}t)\sin(\frac{t}{2})}$$

جواب

$$X(j\omega) = |X(j\omega)|\, e^{j\measuredangle X(j\omega)}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|\, e^{j\measuredangle X(j\omega)}\, e^{j\omega t}\, d\omega$$





$$|X(j\omega)| = \begin{cases} 1 & -2\le\omega\le 2 \\ 0 & oth \end{cases}$$

$$\measuredangle X(j\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & 0\le\omega\le 2 \\ \frac{\pi}{2} & -2\le\omega\le 0 \\ 0 & oth \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} e^{j\measuredangle X(j\omega)}\, e^{j\omega t}\, d\omega =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{0} e^{j(\frac{\pi}{2})}\, e^{j\omega t}\, d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2} e^{j(-\frac{\pi}{2})}\, e^{j\omega t}\, d\omega =$$

$$\frac{1}{2\pi} e^{\frac{j\pi}{2}} \underbrace{\int_{-2}^{0} e^{j\omega t}\, d\omega} + \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{j\pi}{2}} \int_{0}^{2} e^{j\omega t}\, d\omega =$$

$$\frac{1}{2\pi} e^{\frac{j\pi}{2}} \cdot \frac{e^{j\omega t}}{jt}\Big|_{-2}^{0} + \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{j\pi}{2}} \cdot \frac{e^{j\omega t}}{jt}\Big|_{0}^{2}$$

$$= \frac{e^{\frac{j\pi}{2}}}{2\pi jt}\left(\underbrace{\cancel{e}^{0}}_{1} - e^{-2jt}\right) + \frac{e^{-\frac{j\pi}{2}}}{2\pi jt}\left(e^{2jt} - \underbrace{\cancel{e}^{0}}_{1}\right) =$$

$$\frac{e^{\frac{j\pi}{2}}}{2\pi jt} - \frac{e^{j(\frac{\pi}{2}-2t)}}{2\pi jt} + \frac{e^{-j(\frac{\pi}{2}-2t)}}{2\pi jt} - \frac{e^{-\frac{j\pi}{2}}}{2\pi jt} =$$

$$\frac{1}{\pi t}\underbrace{\left(\frac{e^{\frac{j\pi}{2}} - e^{-\frac{j\pi}{2}}}{2j}\right)}_{\sin(\frac{\pi}{2})} - \frac{1}{\pi t}\underbrace{\left(\frac{e^{j(\frac{\pi}{2}-2t)} - e^{-j(\frac{\pi}{2}-2t)}}{2j}\right)}_{\sin(\frac{\pi}{2}-2t)} =$$

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{\pi t} - \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - 2t)}{\pi t} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(\frac{\pi}{2} - 2t)}{\pi t}$$

جواب

$$= \frac{1 - \sin(\frac{\pi}{2} - 2t)}{\pi t}$$

$\boxed{\text{سوال ۲\_2}}$

$$X(j\omega) = \frac{\sin^2(3\omega)\cos(\omega)}{\omega^2}$$

می‌توانیم فرم $X(j\omega)$ را به صورت زیر بنویسیم ؛

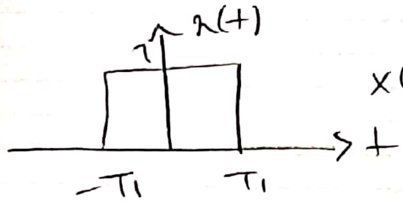
$$X(j\omega) = \underbrace{\left(\frac{\sin(3\omega)}{\omega}\right)^2}_{X_1(j\omega)} \cdot \underbrace{\cos(\omega)}_{X_2(j\omega)}$$

چون $X(j\omega) = X_1(j\omega)\cdot X_2(j\omega)$ ← طبق خاصیت کانولوشن در زمان ؛

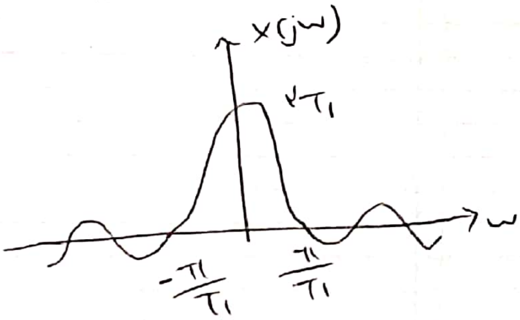
$$f_1(t) * f_2(t) \xleftrightarrow{F} F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$$

پس $x(t) = x_1(t) * x_2(t)$

فرم $\frac{\sin(3\omega)}{\omega}$ ، به فرم تابع $\boxed{\text{sinc}}$ است . می‌دانیم تبدیل فوریه‌ی یک پالس ، تابع sinc می‌شود ؛



$$X(j\omega) = \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$$



چون $X_1(j\omega) = \frac{\sin(3\omega)}{\omega}\cdot\frac{\sin(3\omega)}{\omega}$

پس تبدیل فوریه عکس اگر بگیریم ، از کانولوشن تابع با خودش تشکیل شده ← یعنی $F^{-1}\left\{\frac{\sin(3\omega)}{\omega}\right\} * F^{-1}\left\{\frac{\sin(3\omega)}{\omega}\right\}$

پس $x(t)$ می‌شه ؛

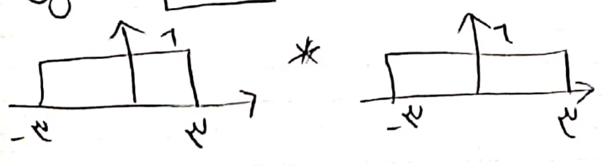
$$x(t) = F^{-1}\left\{\left(\frac{\sin(3\omega)}{\omega}\right)^2\right\} * F^{-1}\{\cos\omega\}$$

$$= \frac{1}{4} F^{-1}\left\{\frac{2\sin 3\omega}{\omega}\right\} * F^{-1}\left\{\frac{2\sin 3\omega}{\omega}\right\} * F^{-1}\left\{\frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{2}\right\} =$$

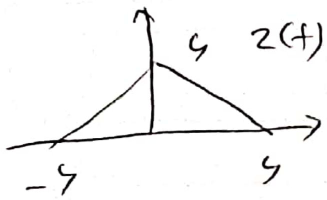
$$\frac{1}{8} g(t) * g(t) * \underbrace{\{\delta(t+1)+\delta(t-1)\}}$$

طبق خاصیت شیفت در حوزه‌ی زمان ؛

$g(t)$ ، یک پالس مستطیلی الف ، $\boxed{T_1=3}$ ← پس



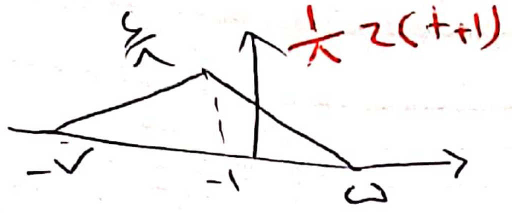
$\Rightarrow$ $\boxed{f(t-t_0) \xleftrightarrow{F} F(\omega)e^{-j\omega t_0}}$



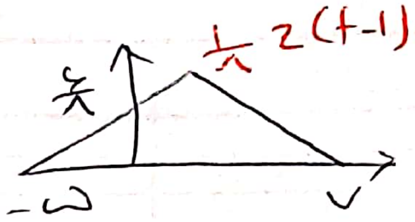
$z(t) = g(t) * g(t) \rightarrow x(t) = \frac{1}{8} z(t) * (\delta(t+1) + \delta(t-1))$

$\rightarrow x(t) = \boxed{\frac{1}{8} z(t+1) + \frac{1}{8} z(t-1)}$ جواب

$$x(t) = \frac{1}{8} z(t+1) + \frac{1}{8} z(t-1)$$



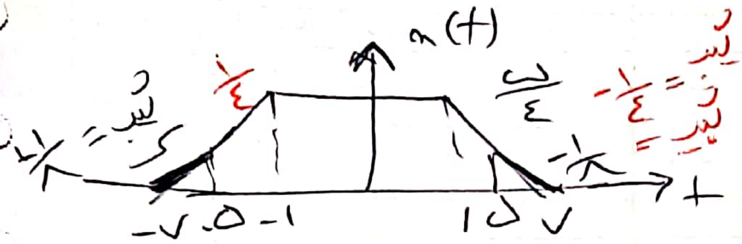
+



=

یک واحد به چپ رفته

یک واحد به راست



$$x(t) = \begin{cases} \frac{5}{4} & -1 < t < 1 \\ -\frac{|t|}{4} + \frac{3}{2}, & 1 \le t \le 5 \\ & -5 \le t \le -1 \\ -\frac{|t|}{8} + \frac{7}{8}, & 5 \le t < 7 \\ & -7 < t \le -5 \\ 0 & oth \end{cases}$$

جواب

سوال ۲ (د)

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} j^k \delta\left(\omega - \frac{k\pi}{4}\right) \rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{\pi}{4}}$$

می‌دانیم که $\mathcal{F}\left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \right\} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$

در اینجا $a_k = j^k$ است ←

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} j^k \delta\left(\omega - \frac{k\pi}{4}\right) \right\} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} j^k e^{jk\frac{\pi}{4}t} = x(t)$$

جواب

سوال ۲

ب

$$X(j\omega) = \frac{j\omega}{2(1+j\omega)} = \frac{1}{2} j\omega \cdot \frac{1}{1+j\omega}$$

طبق خاصیت مشتق گیری در حوزه زمان ←

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) \xleftrightarrow{F} (j\omega)^n F(\omega)$$

پس اگر $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$ باشد ←

$$\frac{d}{dt} g(t) \longleftrightarrow (j\omega) \times \frac{1}{1+j\omega}$$

پس باید مشتق $g(t)$ را پیدا کنیم

$$g(t) = F^{-1}\left\{\frac{1}{1+j\omega}\right\} = e^{-t}u(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-t}u(t)\right) = -e^{-t}u(t) + \underbrace{e^{-t}\delta(t)}_{\delta(t)} = \boxed{\delta(t) - e^{-t}u(t)}$$

در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم جواب ←

جواب $\boxed{\frac{1}{2}\left(\delta(t) - e^{-t}u(t)\right)}$

سوال ۳ (الف)

$$y(t) = x^*(t)\sin(t)$$

$$\sin(t) = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} \rightarrow x^*(t)\left(\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}\right) =$$

$$\frac{1}{2j} \cdot x^*(t)e^{jt} - \frac{1}{2j} x^*(t) e^{-jt}$$

طبق خاصیت انتقال در حوزه فرکانس

$$e^{j\omega_0 t} f(t) \xleftrightarrow{F} F(\omega - \omega_0)$$

و طبق خاصیت خطی بودن

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2j}\left(f\{x^*(t)e^{jt}\} - f\{x^*(t)e^{-jt}\}\right)$$

طبق خاصیت مزدوج

$$\boxed{f^*(t) \xleftrightarrow{F} F^*(-\omega)}$$ پس

سوال ۳ الف) ادامه

$$x^*(t) \longleftrightarrow X^*(-j\omega)$$

پس یعنی $x^*(t)$ را در حوزه فرکانس باید شیفت دهیم ←

$$f\{x^*(t)e^{jt}\} = X^*(-j(\omega-1)) = X^*(-\omega+1)$$

$$e^{j\omega_0 t} = e^{jt} \rightarrow \omega_0 = 1$$

$$f\{x^*(t)e^{-jt}\} = X^*(-j(\omega+1)) = X^*(-\omega-1)$$

$$e^{j\omega_0 t} = e^{-jt} \rightarrow \boxed{\omega_0 = -1}$$

پس

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2j}\left(X^*(-\omega+1) - X^*(-\omega-1)\right)$$

ب)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)x(\tau - t + 1)\,d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,x(-(t-\tau-1))\,d\tau = x(t) * x(-(t-1))$$

$$= x(t) * x(-t+1)$$

$x(-t+1)$ و

$x(-(t-1)) \longrightarrow$ یعنی انتقال زمانی $x(-t)$ و

$$f\{x(-(t-1))\} = e^{-j\omega} f\{x(-t)\} = \boxed{e^{-j\omega}X(-j\omega)}$$

و می‌دانیم اگر $x(t) * y(t)$ ← در حوزه فرکانس $X(j\omega)\cdot Y(j\omega)$ و

پس

$$Y(j\omega) = X(j\omega)\cdot e^{-j\omega}X(-j\omega)$$

جواب

سوال ۳ ۲-

اول از $x(t)$ مشتق گرفته لذا بعد تغییر مقیاس داری ←

طبق خاصیت مشتق گیری در حوزه زمان و

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) \xleftrightarrow{F} (j\omega)^n F(\omega)$$

و خاصیت تغییر مقیاس و

$$f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

پس

$$\frac{d}{dt} x(t) = g(t)$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt} x(t)\right\} = j\omega X(j\omega)$$

$$G(j\omega) = j\omega X(j\omega)$$

$$\mathcal{F}\{x(3t)\} = \frac{1}{3} X\left(\frac{j\omega}{3}\right)$$

$$\mathcal{F}\{g(3t)\} = \frac{1}{3} G\left(\frac{j\omega}{3}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{j\omega}{3} \times \left(X\left(\frac{j\omega}{3}\right)\right) =$$

$$= \boxed{\frac{j\omega}{9} X\left(\frac{j\omega}{3}\right)}$$

سوال ٤

$x(t)$ ، انتقال یافته‌ی یک سیگنال حقیقی و زوج است که به اندازه یک واحد به راست منتقل شده

پس می‌توانیم $x(t)=g(t-1)$ در نظر بگیریم $g(t)$ یک سیگنال حقیقی و زوج است

پس $G(j\omega)$ که تبدیل فوریه‌اش است هم یک سیگنال حقیقی و زوج است

$$\boxed{X(j\omega) = e^{-j\omega} G(j\omega)}$$

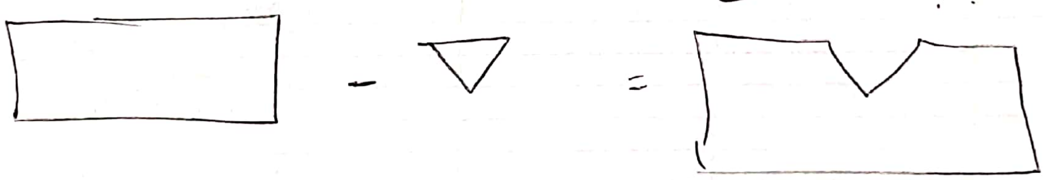
$$\rightarrow |X(j\omega)| = \underbrace{|e^{-j\omega}|\,|G(j\omega)|}_{\text{اندازه‌ها}} = |G(j\omega)|$$

چون $x(t)$ ، انتقال یافته‌ی $g(t)$ است پس تغییر فاز داشته فقط و اندازه‌اش عوض نشده

$$\boxed{\angle X(j\omega) = -\omega}$$ قسمت ب

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt =$$ انتگرال از $x(t)$

که برابر مساحت سطح زیر شکل است



$SA - SB = S$

$SA = 4 \times 2 = 8$ پس $S = 8 - 1 = \boxed{7} \rightarrow$

$SB = \frac{2 \times 1}{2} = 1$ جواب الف $\boxed{X(0) = 7}$

ج) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\, d\omega = ?$

طبق خاصیت انتگرال در حوزه فرکانس

$$2\pi f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, d\omega$$

پس حاصل برابر $2\pi x(0)$ است که

$x(0) = 2 \rightarrow$

$2\pi x(0) = \boxed{4\pi}$ جواب

د) $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = ?$

طبق رابطه‌ی پارسوال:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

$\boxed{\text{ادامه سوال ۴}}$

$$۲\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^{۲} dt = ?$$

$$x(t) = \begin{cases} ۲ & ۲ \le t \le ۳ \\ t & ۱ \le t \le ۲ \\ (-t+۲) & ۰ \le t \le ۱ \\ ۲ & -۱ \le t \le ۰ \end{cases} \longrightarrow x^{۲}(t) = \begin{cases} ۴ & ۲ \le t \le ۳ \\ t^{۲} & ۱ \le t \le ۲ \\ t^{۲}-۴t+۴ & ۰ \le t \le ۱ \\ ۴ & -۱ \le t \le ۰ \end{cases}$$

$|x^{۲}(t)| = x^{۲}(t)$ چون مثبت اند مقادیر

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{۲}(t)\,dt = \int_{-۱}^{۰} ۴\,dt + \int_{۰}^{۱} (t^{۲}-۴t+۴)\,dt + \int_{۱}^{۲} t^{۲}\,dt + \int_{۲}^{۳} ۴\,dt =$$

$$۴t \Big|_{-۱}^{۰} + \left(\frac{۱}{۳}t^{۳} - ۲t^{۲} + ۴t\right)\Big|_{۰}^{۱} + \frac{۱}{۳}t^{۳}\Big|_{۱}^{۲} + ۴t\Big|_{۲}^{۳}$$

$$۴ + \underbrace{\left(\frac{۱}{۳} - ۲ + ۴\right)}_{\frac{۷}{۳}} + \underbrace{\frac{۱}{۳}(۸-۱)}_{\frac{۷}{۳}} + \underbrace{۴(۳-۲)}_{۴} = ۸ + \frac{۱۴}{۳} = \boxed{\frac{۳۸}{۳}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^{۲} d\omega = ۲\pi \cdot \frac{۳۸}{۳} = \frac{۷۶\pi}{۳}$$

پس

جواب د

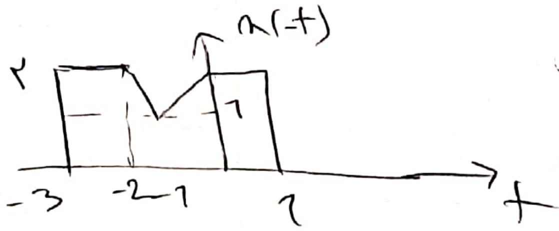
ت

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X^{۲}(j\omega)\,d\omega = ? = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\,X(j\omega)\,d\omega =$$

$$۲\pi\, \mathcal{F}^{-۱}\{X(j\omega)X(j\omega)\}\Big|_{t=۰} = ۲\pi\,(x(t) * x(t))\Big|_{t=۰}$$

$$۲\pi \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,x(۰-\tau)\,d\tau = ۲\pi \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,x(-\tau)\,d\tau = ?$$

$$x(-t) = \begin{cases} ۲ & ۰ \le t \le ۱ \\ t+۲ & -۱ \le t \le ۰ \\ -t & -۲ \le t \le -۱ \\ ۲ & -۳ \le t \le -۲ \end{cases}$$



اشتراک $x(t)$ و $x(-t)$ در بازه $(-۱ \le t \le ۱)$ الف

$$x(t)\,x(-t) = \begin{cases} ۲(-t+۲) & ۰ \le t \le ۱ \\ ۲(t+۲) & -۱ \le t \le ۰ \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

ادامه سوال ٤

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(-t)\,dt = \int_0^1 (-2t+4)\,dt + \int_{-1}^{0} 2t+4 =$$

$$-t^2+4t\Big|_0^1 + (t^2+4t)\Big|_{-1}^{0} = (\underbrace{-1+4}_{3}) + (\underbrace{0-(1-4)}_{3}) = \boxed{6}$$

پس جواب ۶ ، $2\pi \times 6 = \boxed{12\pi}$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} X^2(j\omega)\,d\omega = 12\pi}$$

سوال ٥

$$H(j\omega) = \frac{4+j\omega}{-\omega^2+5j\omega+6} \qquad -\omega^2 = (j\omega)^2$$

$$(j\omega)^2 H(j\omega) + 5j\omega H(j\omega) + 6H(j\omega) = j\omega + 4$$

الان از طرفین ، تبدیل فوریه می گیریم

$$F^{-1}\{(j\omega)^2 H(j\omega)\} + 5F^{-1}\{j\omega H(j\omega)\} + 6F^{-1}\{H(j\omega)\} =$$

$$F^{-1}\{j\omega\} + 4F^{-1}\{1\} \to \frac{d^2h(t)}{dt^2} + 5\frac{dh(t)}{dt} + 6h(t) = \frac{d}{dt}\delta(t) + 4\delta(t)$$

طبق خواص مشتق گیری در حوزه زمان ،

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 4x(t)$$

به جای $\delta(t)$ ، $h(t)$ ← $y(t)$, $x(t)$ می گذاریم

معادله دیفرانسیل سیستم

برای پیدا کردن پاسخ ضربه کافیه که از $H(j\omega)$ ، تبدیل عکس فوریه بگیریم

$$h(t) = F^{-1}\{H(j\omega)\} = F^{-1}\left\{\frac{4+j\omega}{(j\omega+3)(j\omega+2)}\right\}$$

$$\leftarrow \left(\frac{A}{j\omega+3} + \frac{B}{j\omega+2}\right)$$

$$A(j\omega)+2A+B(j\omega)+3B = 4+j\omega \to A+B=1 \quad \text{و} \quad \begin{cases}2A+3B=4\\ 2A+2B=2\end{cases} \to$$

$$\leftarrow A=-1, \quad B=2$$

$$F^{-1}\left\{\frac{-1}{j\omega+3} + \frac{2}{j\omega+2}\right\} \to$$

$$F^{-1}\left\{\frac{-1}{j\omega+3}\right\} + 2F^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega+2}\right\} = \boxed{-e^{-3t}u(t) + 2e^{-2t}u(t)} = h(t)$$

جواب

ادامه سوال یک ۲۰

اگر ورودی $x(t)=(1-t)e^{-4t}u(t)$ باشد خروجی ؟

$$x(t)=e^{-4t}u(t)-te^{-4t}u(t)$$

$$X(j\omega)=? \qquad \mathcal{F}\{e^{-4t}u(t)\}=\frac{1}{j\omega+4}$$

طبق خاصیت مشتق گیری در حوزه فرکانس

$$(-jt)^n f(t) \longleftrightarrow \frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)$$

پس

$$\mathcal{F}\{te^{-4t}u(t)\}=j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{j\omega+4}\right)$$

$$X(j\omega)=\frac{1}{j\omega+4}-\underbrace{j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{j\omega+4}\right)}_{\frac{-j}{(j\omega+4)^2}}=\frac{1}{j\omega+4}-\frac{1}{(j\omega+4)^2}=\boxed{\frac{j\omega+3}{(j\omega+4)^2}}$$

طبق رابطه ی $\leftarrow Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)$

$$Y(j\omega)=\frac{\cancel{j\omega+3}}{\cancel{(j\omega+4)^2}}\times\frac{\cancel{4+j\omega}}{(\cancel{j\omega+3})(j\omega+2)}=\frac{1}{(j\omega+4)(j\omega+2)}=$$

$(j\omega+4)$

$$\frac{A}{j\omega+4}+\frac{B}{j\omega+2} \qquad (A+B)j\omega+2A+4B=1$$

$$A+B=0 \rightarrow A=-B$$

$$\cancel{2A}+4B=1 \rightarrow 2B=1 \rightarrow B=\frac{1}{2}$$

$-2B$

$$A=\frac{-1}{2}$$

$$\frac{-1}{2(j\omega+4)}+\frac{1}{2(j\omega+2)} \Rightarrow$$

تبدیل عکس فوریه می گیریم

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{-\frac{1}{2(j\omega+4)}\right\}=\frac{-1}{2}e^{-4t}u(t)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2(j\omega+2)}\right\}=\frac{1}{2}e^{-2t}u(t)$$

$$\rightarrow y(t)=\frac{1}{2}\left(-e^{-4t}u(t)+e^{-2t}u(t)\right)$$

$$\boxed{y(t)=\frac{1}{2}u(t)\left[e^{-2t}-e^{-4t}\right]}$$

جواب

سوال ۶

الف

$$Y(j\omega) = e^{2j\omega} . X(j\omega) + j \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$$

$$(-jt) f(t) \xleftrightarrow{F} \frac{d}{d\omega} F(\omega)$$

شیفت در حوزه زمان

ضرب در j از دو طرف

$$e^{-j\omega t_0} = e^{2j\omega} \rightarrow \boxed{t_0 = -2}$$

$$f^{-1}\{ j \frac{d}{d\omega} F(\omega) \} = t f(t)$$

$$y(t) = (x(t+2)) + (t x(t))$$

① خطی بودن: خطی است چون تبدیل فوریه خطی است

② علی بودن: علی نیست چون در $t=0$ به $x(t+2)$ یعنی $x(2)$ نیاز است و از انتگرال هم استفاده شده ← علی نیست (به ازای یک ورودی در یک t خاص به جواب در t های آینده هم نیاز است)

③ اگر

$$x(t) = u(t) \leftarrow |x(t)| \leq 1$$

و

$$y(t) = t x(t)$$

اگر $t \to \infty$ پس $y(t) \to \infty$ پس ناپایدار است

④ تغییرناپذیری با زمان

$$T\{x(t)\} = x(t+2) + t x(t)$$

$$T\{x(t-t_0)\} = x(t-t_0+2) + t x(t-t_0)$$

$\neq$

$$Z_{t_0}\{x(t+2) + t x(t)\} = x(t-t_0+2) + (t-t_0) x(t-t_0)$$

مخالف هم هستند → TI نیست

سوال ۶

$$Y(j\omega) = X(j\omega) + X(0)$$

ب)

برای خطی بودن ؟ اگر ورودی صفر باشد ← خروجی هم صفر می‌شه

$$x(t) = 0 \rightarrow X(j\omega) = 0 \rightarrow$$

$$Y(j\omega) = 0 + 0 = 0$$

خطی است ✓ (تبدیل فوریه خطی است)

علی بودن ؟ علی نیست چون به ازای یک مقدار t ، ممکن است به مقدار آینده هم نیاز داشته باشد

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$$

و رابطه‌ی انتگرال هم ، علی نیست

پایداری ؟ پایدار است چون به ازای ورودی $x(t)$ محدود ، خروجی محدود می‌شود

سطح زیر [illegible] نمودار محدود می‌شود ← $\boxed{\text{محدود}}$ → پایدار

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0) dt$$

تغییرناپذیری با زمان ؟

$$t - t_0 = \tau \rightarrow \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega(\tau + t_0)} d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) d\tau \right) \quad A$$

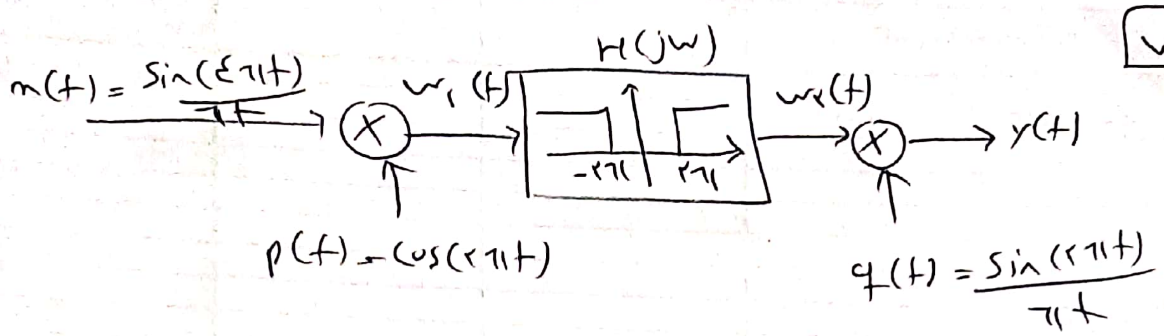
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0) e^{-j\omega(t-t_0)} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0) dt$$

$$t - t_0 = \tau$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega(\tau)} d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) d\tau \quad B$$

با مقایسه‌ی A و B ← $A \neq B$ ← تغییرپذیر است ← TI نیست ✗

سوال ۷



$$w_1(t) = \frac{\sin(4\pi t)}{\pi t} \cdot \cos(2\pi t)$$

$$\cos(2\pi t) = \frac{e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}}{2} \rightarrow$$

$$w_1(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(4\pi t)}{\pi t} e^{j2\pi t} + \frac{\sin(4\pi t)}{\pi t} e^{-j2\pi t} \right)$$

یعنی در حوزه فرکانس شیفت داریم ←

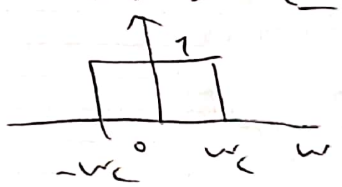
$$\mathcal{F}\left\{ \frac{\sin(4\pi t)}{\pi t} \right\} = G(j\omega)$$

$$W_1(j\omega) = \frac{1}{2}\left(G(\omega - 2\pi) + G(\omega + 2\pi) \right)$$

می دانیم که اگر $H(j\omega)$

$G(j\omega) = ?$

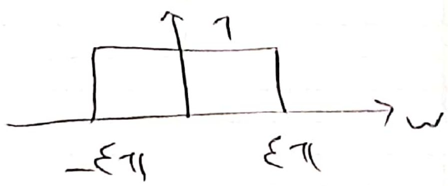
$H(j\omega) =$



$$h(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t}$$

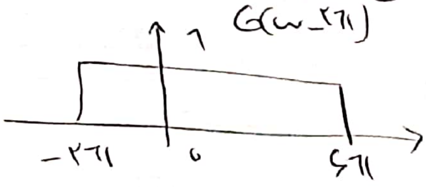
چون اینجا $\frac{\sin 4\pi t}{\pi t}$ داریم ← $\boxed{\omega_c = 4\pi}$ ←

$G(j\omega) =$



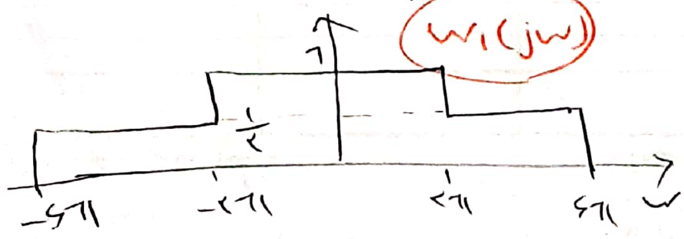
$G(\omega - 2\pi)$ e

شیفت به راست $G(\omega - 2\pi)$



e $\frac{1}{2}\left(G(\omega - 2\pi) + G(\omega + 2\pi) \right)$

$W_1(j\omega)$

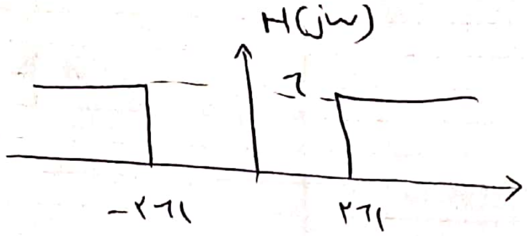


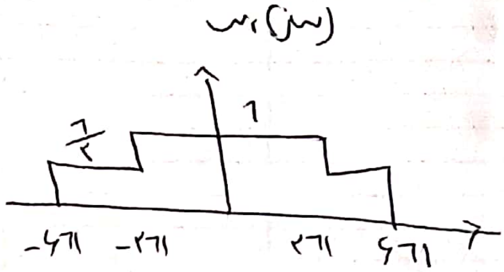
$G(\omega + 2\pi)$

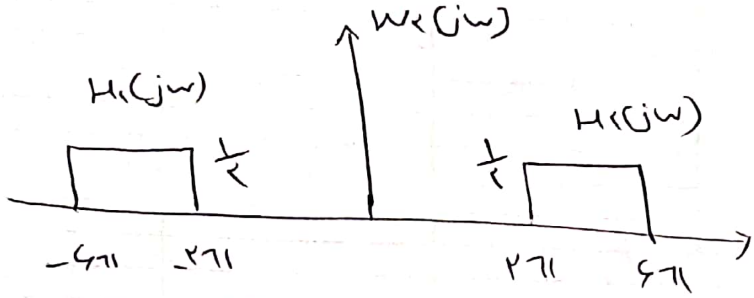
$G(\omega + 2\pi)$ شیفت به چپ

ادامه سوال ۷

$$W_2(j\omega) = W_1(j\omega) \cdot H(j\omega)$$



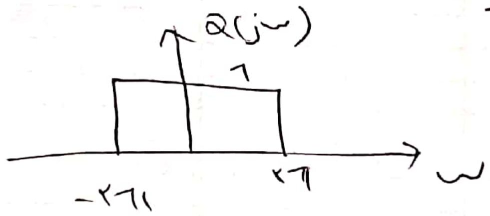




$H(j\omega)$ فرکانس بین 2π , -2π را صفر می‌کند

$$y(t) = w_2(t)\, q(t) \qquad q(t) = \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t} \qquad \omega_c = 2\pi$$

$Q(j\omega) =$



$$Y(j\omega) = \frac{W_2(j\omega) * Q(j\omega)}{2\pi}$$

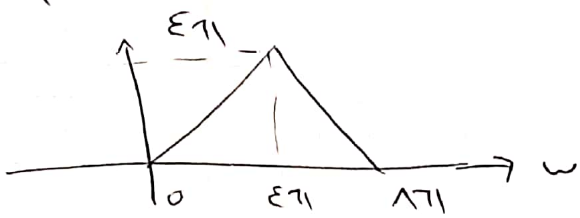
$$H_1(j\omega) = Q(\omega + 4\pi)$$

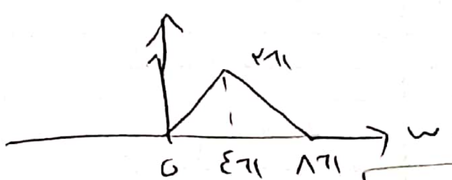
$$H_2(j\omega) = Q(\omega - 4\pi)$$

$$W_2(j\omega) * Q(j\omega) = H_1(j\omega) * Q(j\omega) + H_2(j\omega) * Q(j\omega)$$

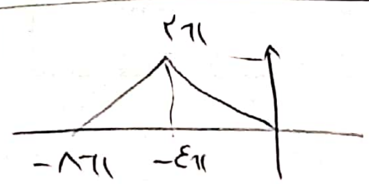
$$= \frac{1}{2} Q(\omega + 4\pi) * Q(\omega) + \frac{1}{2} Q(\omega - 4\pi) * Q(\omega)$$

$\frac{1}{2} Q(\omega - 4\pi) * Q(\omega)$





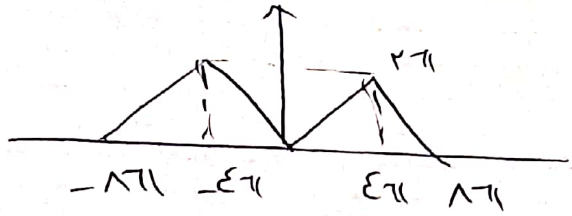
$\frac{1}{2} Q(\omega + 4\pi) * Q(\omega)$



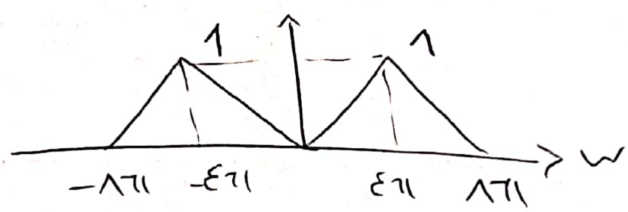
ادامه‌ی سوال ۷

$y(t) = w_2(t)\, q(t) \Rightarrow$

$W_2(j\omega) * Q(j\omega) =$



$Y(j\omega) = \frac{W_2(j\omega) * Q(j\omega)}{2\pi}$



$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(j\omega)\}$

می‌دانیم که

$G(j\omega) * G(j\omega) = Z(j\omega)$ پس در حوزه‌ی فرکانس

$\mathcal{F}^{-1}\{G(j\omega)\} = \cancel{\frac{\sin Wt}{\pi t}}$ و $W = 2\pi$

در حوزه زمان

$\frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$

$\mathcal{F}^{-1}\{Z(j\omega)\} = \frac{\sin 2\pi t}{\pi t} \cdot \frac{\sin 2\pi t}{\pi t} = \frac{(\sin(2\pi t))^2}{(\pi t)^2}$

$Z(\omega - 2\pi)$

اگر $Z(j\omega)$ را در حوزه‌ی فرکانس شیفت دهیم ←

$\xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{+j2\pi t} \frac{(\sin 2\pi t)^2}{(\pi t)^2}$

$\mathcal{F}^{-1}\{Z(\omega + 2\pi)\} = e^{-j2\pi t} \frac{(\sin 2\pi t)^2}{(\pi t)^2}$

$y(t) = \left(\frac{\sin 2\pi t}{\pi t}\right)^2 \left(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}\right) = 2\cos(2\pi t)$

$y(t) = 2\left(\frac{\sin 2\pi t}{\pi t}\right)^2 \cos(2\pi t)$

جواب $2\left(\frac{\sin 2\pi t}{\pi t}\right)^2 \cos(2\pi t)$