تکلیف دوم سیگنال - حدیث غفوری ۹۸۲۳۰۴۱۳

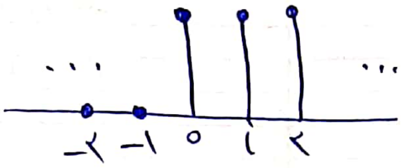
$\boxed{\text{سوال ۶}}$

الف) ج

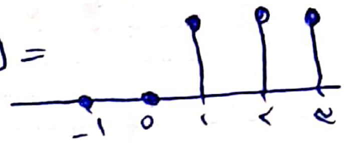
$h[n] = u[n+2] - u[n-1]$

$x[n] = (-1)^n \cdot (u[n-1] - u[n-4])$

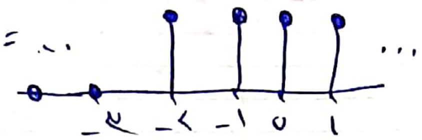
$u[n] =$



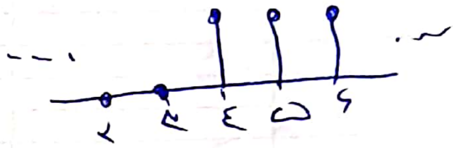
$u[n-1] =$



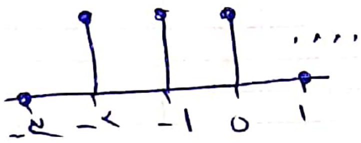
$u[n+2] =$



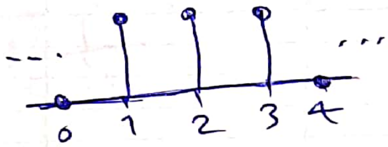
$u[n-4] =$



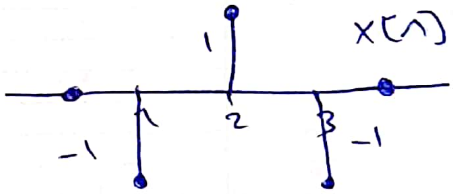
$\rightarrow h[n] =$



$u[n-1] - u[n-4] =$



$(-1)^n (u[n-1] - u[n-4]) =$



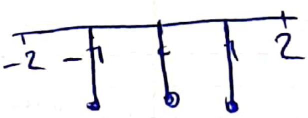
۱ ← زوج n ← $(-1)^n$

۱- ← فرد

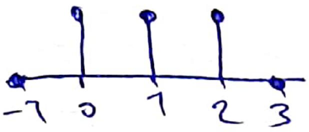
حاصل $x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]$

$y[n] = \underbrace{x[1]}_{-1} h[n-1] + \underbrace{x[2]}_{1} h[n-2] + \underbrace{x[3]}_{-1} h[n-3]$

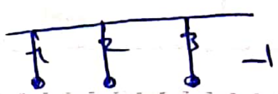
$-1\, h[n-1] =$



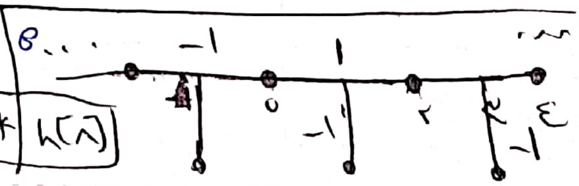
$h[n-1] =$



$-h[n-3] =$



جواب ← $\boxed{x[n] * h[n]}$

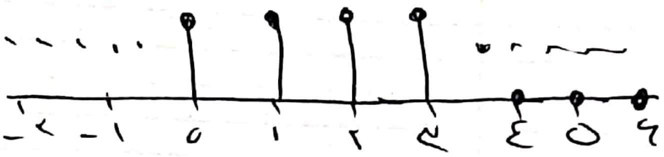


سوال ۱

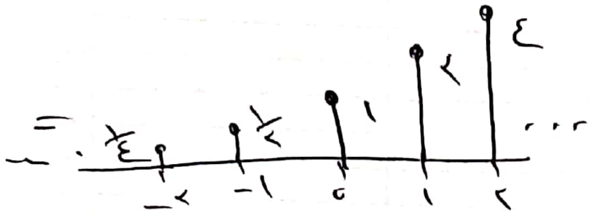
ب

$h[n] = 2^n u[3-n] \qquad x[n] = (\frac{-1}{3})^n u[n-1]$

$u[3-n] =$



$2^n =$

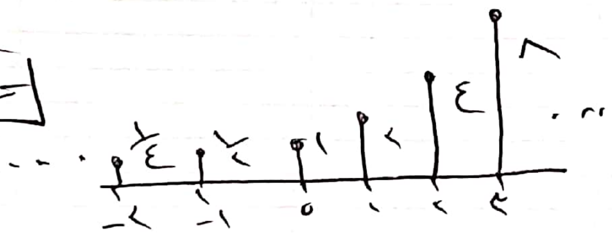


اگر $3<n$ باشد $\longleftarrow h[n]=0$

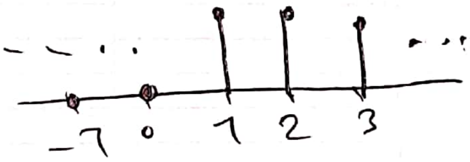
اگر $3 \geq n$ $\longleftarrow \boxed{h[n]=2^n}$

پس

$\boxed{h[n]=}$



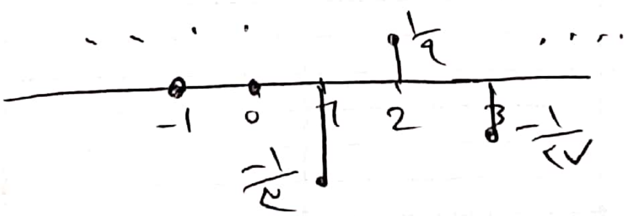
$u[n-1] =$



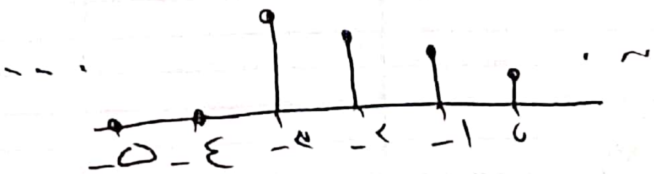
$x[n]=(\frac{-1}{3})^n . u[n-1] \longrightarrow$ $(\frac{-1}{3})^n$ برای $n \geq 1$

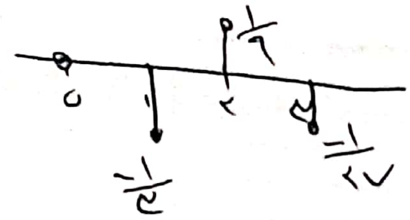
$\longrightarrow n<1 \longrightarrow$ صفر

$x[n] =$



$h[-k]$



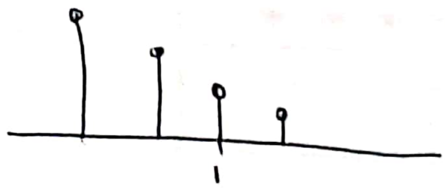


$x[k]$ n اگر منفی باشد n به چپ

صعود

→ برای n<0 و 3-n<2 باشد

→ $n<0$



$h[n-k]$

$$y[n]=\sum_{k=1}^{\infty}x[k]\,h[n-k]\longrightarrow y[n]=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^k\times 2^{n-k}=$$

$$2^n\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{-1}{3}\times\frac{1}{2}\right)^k}_{\left(\frac{-1}{6}\right)^k}=\boxed{2^n\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{6}\right)^k}$$

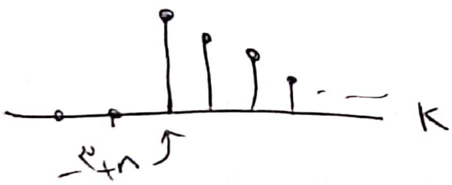
برای $\boxed{n<0}$

$$=2^n\times\frac{\left(\frac{-1}{6}\right)^1-\left(\frac{-1}{6}\right)^{\infty}}{\underbrace{1-\left(\frac{-1}{6}\right)}_{\frac{7}{6}}}=2^n\times\frac{6}{7}\left(\frac{-1}{6}-0\right)=\boxed{\frac{-1}{7}\times 2^n}$$

$n<0$

اگر $n-3\geq 2$ ← $\boxed{n\geq 5}$ باشد

$h[n-k]$ ← n مثبت باشد ← به سمت راست شیفت

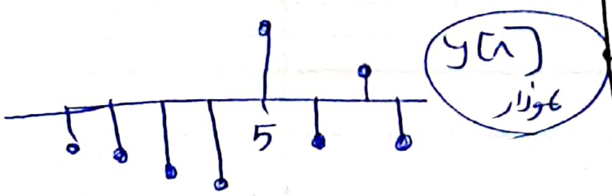


یعنی از $n-3$ به بعد

هم پوشانی غیر صفر داریم

$$y[n]=\sum_{-3+n}^{\infty}x[k]\,h[n-k]=\sum_{-3+n}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^k 2^{n-k}=$$

$$2^n\sum_{-3+n}^{\infty}\left(\frac{-1}{6}\right)^k=2^n\times\frac{\left(\frac{-1}{6}\right)^{n-3}-\cancel{\left(\frac{-1}{6}\right)^{\infty}}}{\underbrace{1-\left(\frac{-1}{6}\right)}_{\frac{7}{6}}}=\boxed{\frac{-6^4}{7}\times\left(\frac{-1}{3}\right)^n}$$



جواب

$$y[n]=\begin{cases}-\frac{6^4}{7}\times\left(\frac{-1}{3}\right)^n & \boxed{n\geq 5}\\ \left(\frac{-1}{7}\right)\times 2^n & \boxed{n<0}\end{cases}$$

$x[n]*h[n]$

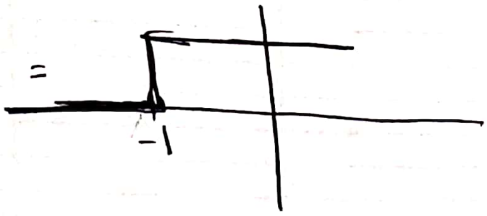
سوال ۶

قسمت 2

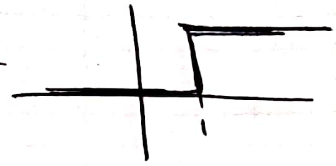
$h(t)=u(t+1)-u(t-1)$

$x(t)=e^{-t}u(t+1)$

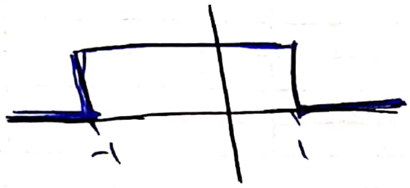
$u(t+1)=$



$u(t-1)=$



$h(t)=$

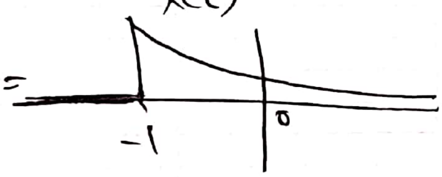


$\boxed{h(t)=h(-t)}$

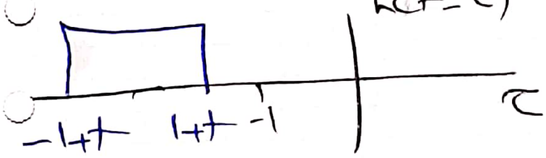
$x(t)=e^{-t}u(t+1) \longrightarrow$ اگر $t\geq -1$ ، e^{-t}

اگر $t<-1$ ، صفر

$x(t)=$



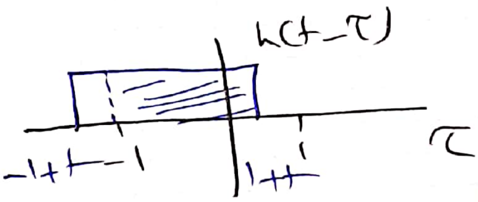
حالت اول $h(t-\tau)$



$1+t<-1 \rightarrow \boxed{t<-2}$

در این حالت هیچ هم‌پوشانی غیرصفری نداریم $\rightarrow \boxed{y(t)=0}$

حالت دوم



$-1+t<-1$ و $1+t>-1$ $\rightarrow$

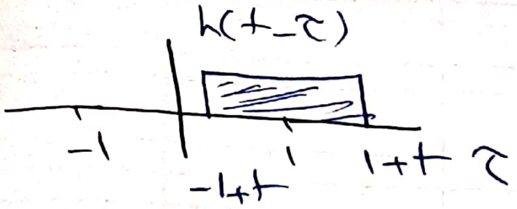
$\boxed{-2<t<0}$

در ناحیه $(-1, 1+t)$ هم‌پوشانی دارند

$y(t)=\int_{-1}^{1+t} e^{-\tau}\,d\tau = -e^{-\tau}\Big|_{-1}^{1+t} = -e^{-(1+t)}-(-e^{-(-1)})$

$-e^{-t-1}+e^{1}$

$\rightarrow \boxed{-e^{-t-1}+e}$ $\quad -2<t<0$



حالت ۳

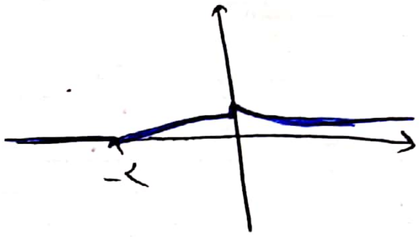
$\boxed{t \geqslant 0}$ [illegible]

پس → در ناحیه $(-1+t, 1+t)$ هم پوشانی دارند

$$y(t) = \int_{-1+t}^{1+t} e^{-\tau}\, d\tau = -e^{-\tau}\Big|_{-1+t}^{1+t}$$

$$\rightarrow \quad -e^{-(1+t)} - \left(-e^{-(-1+t)}\right) = \boxed{-e^{-1-t} + e^{1-t}} \quad t \geqslant 0$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \begin{cases} -e^{-t-1} + e^{1-t} & t \geqslant 0 \\ -e^{-t-1} + e & -2 < t < 0 \\ 0 & t \leq -2 \end{cases}$$



سوال ۶

د

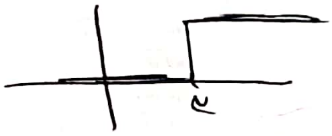
$x(t) = u(t-1) + u(t-3)$

$h(t) = r(t)$

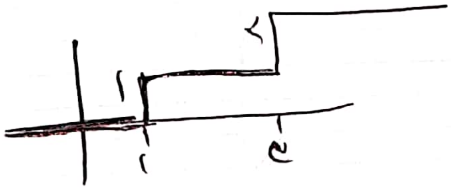
$h(t) =$

$u(t-1) =$

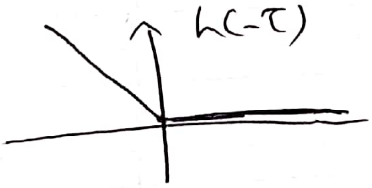
$u(t-3) =$



$x(t) =$



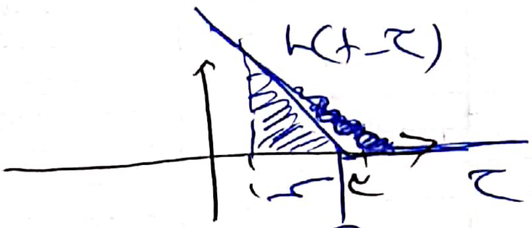
$h(-\tau) =$



حالت اول ۱ هیچ هم پوشانی غیر صفری ندارند

اگر $t \leq 1$ باشد → $y(t) = 0$

چون $x(t) = 0$



حالت دوم

در ناحیه $\boxed{[1, t]}$ هم پوشانی غیر صفر دارند

اگر $\boxed{1 < t < 3}$

از $[1, t]$ $\quad y(t) = \int_{1}^{t} (t-\tau)\, d\tau = t\tau - \frac{1}{2}\tau^2 \Big|_{1}^{t} = \boxed{\frac{t^2}{2} - t - \frac{1}{2}}$

سوال ۲

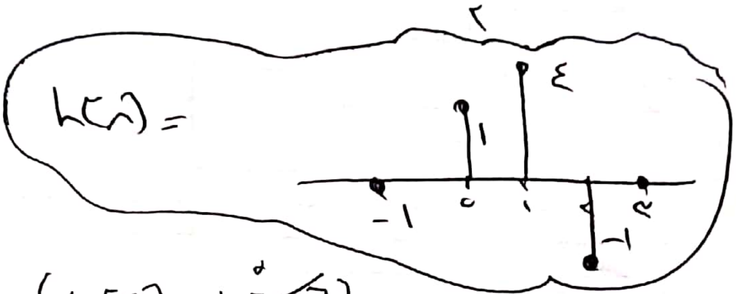
الف) پاسخ ضربه $h[n]$ و قسمت فرد e

* می‌دانیم اگر یک سیستم علی و LTI باشد ← در $\boxed{n<0}$ ، $h[n]=0$

* می‌دانیم $h[n]=\frac{h_e[n]+h_o[n]}{2}$ و

$$h_e[n]=\frac{(h[n]+h[-n])}{2}$$

پس ←



$h_e[1]=\frac{1}{2}(h[1]+\cancel{h[-1]}) \rightarrow$

$h[1]=2h_e[1]=4$

$h_e[2]=\frac{1}{2}(h[2]+\cancel{h[-2]}) \rightarrow h[2]=2h_e[2]=-1$ و ---

با جایگذاری در رابطه بالا ۰ نقاط پیدا می‌شوند

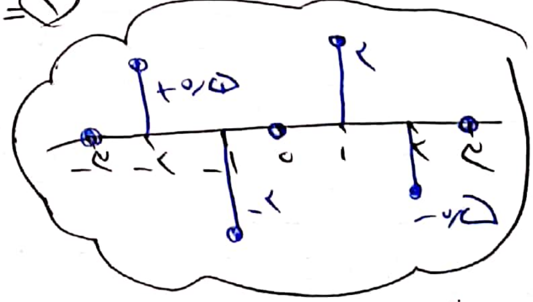
قسمت فرد o

$$h_o[n]=\frac{(h[n]-h[-n])}{2}$$

$h_o[0]=\frac{h[0]-h[0]}{2}=0$

$h_o[2]=\frac{h[2]-\cancel{h[-2]}}{2}=\boxed{-0/5}$

$h_o[1]=\frac{h[1]-\cancel{h[-1]}}{2}=\frac{4}{2}=2$



$h_o[3]=\frac{h[3]-\cancel{h[-3]}}{2}=\boxed{0}$

$h_o[-1]=\frac{\cancel{h[-1]}-h[+1]}{2}=-2$

$h_o[-2]=\frac{\cancel{h[-2]}-h[2]}{2}=\boxed{0/5}$

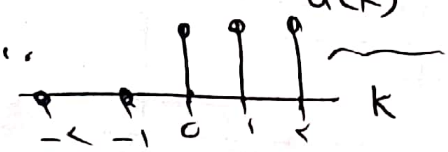
$h_o[n]$ خواسته

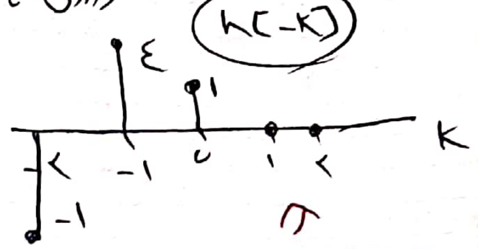
$h_o[-3]=\frac{\cancel{h[-3]}-h[3]}{2}=0$

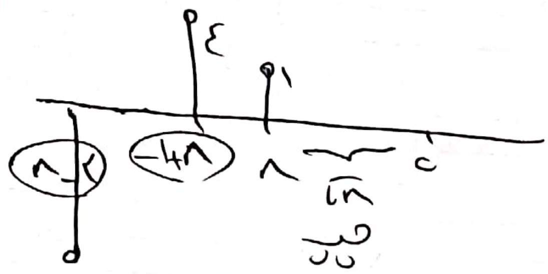
۲- ب) پاسخ پله‌ای ؟

$y[n]=u[n]*h[n]$ ← ورودی ؟ $u[n]$

$u[n]=$ ....







$h[k]$ نسبت به محور y ها قرینه شد

حالت ۱) ؟ اگر $n<0$ باشد ←

هیچ هم پوشانی غیر صفری نداریم ←

$\boxed{y[n]=0}$ $n<0$

حالت دوم ؟ $n=0$ ← در نقطه‌ی صفر هم پوشانی داریم ← $y[n]=x[0]h[0]=1$

سوم ؟ $n=1$ ← در نقاط صفر و یک هم پوشانی داریم ←

$y[n]=x[0]h[0]+x[1]h[1]=1+4=\boxed{5}$

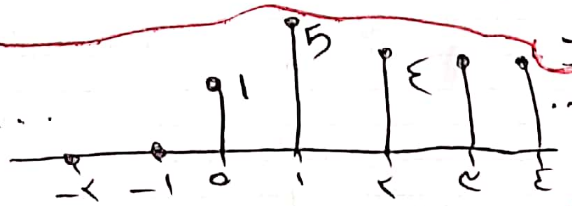
حالت چهارم ؟ اگر $n=2$ یا $n>2$

$(n\geq 2)$

$y[n]=x[0]h[0]+x[1]h[1]+x[2]h[2]=1+4+-1=4$

$$y[n]=\begin{cases}0 & n<0\\ 1 & n=0\\ 5 & n=1\\ 4 & n\geq 2\end{cases}$$

$y[n]=$ ....



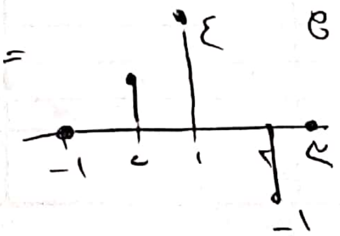
خوب

۲- ج) پاسخ ضربه سیستم حاصل از اتصال سری دو سیستم مشابه ؟

می‌دانیم وقتی دو سیستم سری می‌شوند ← حاصل برابر کانولوشن سیستم اول و دوم است ←

$h'[n]=h_1[n]*h_2[n]$

حالت ۱) ؟ $h[n]=$

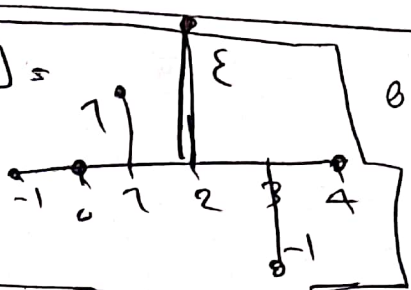


اگر در ~~h[n]~~ 1 ضرب بشود ←

همان $h[n]$ می‌ماند

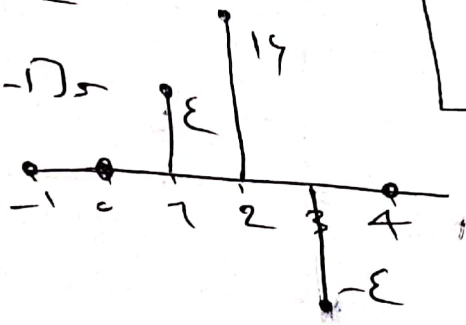
$\cancel{h[1]}\, h[n-1] = ?$ $\underbrace{}_{4}$

$h[n-1] =$



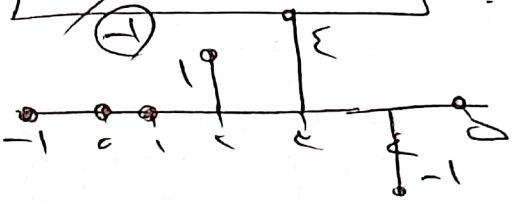
حالت ۲ ؟

$\rightarrow 4h[n-1] =$



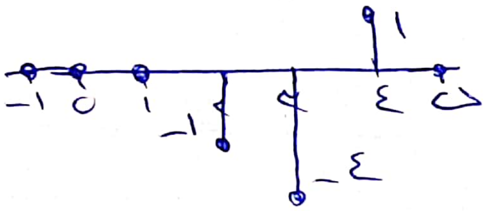
$\boxed{h[2] \times h[n-2]}\ ?$

$h[n-2] =$



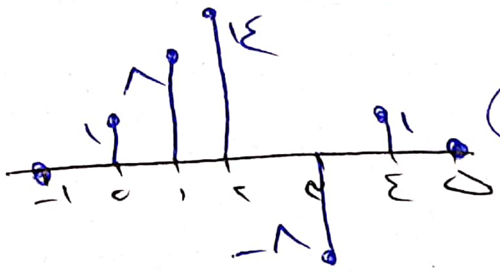
حالت سوم ؟

$\rightarrow \boxed{-1 \times h[n-2]}\ ?$



در آخر هم جمع همشون ؟

$h[0]\,h[n] + h[1]\,h[n-1] + h[2]\,h[n-2] =$



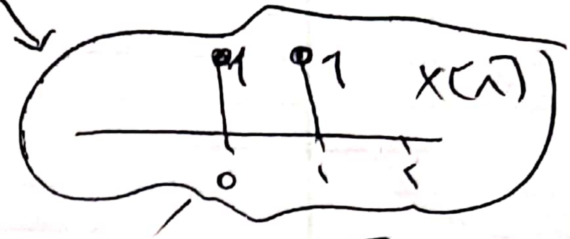
$h'[n]$ جواب

۲. $\boxed{u[n]-u[n-2]}$

~~h[n]~~

$x[n] * h'[n] = ?$

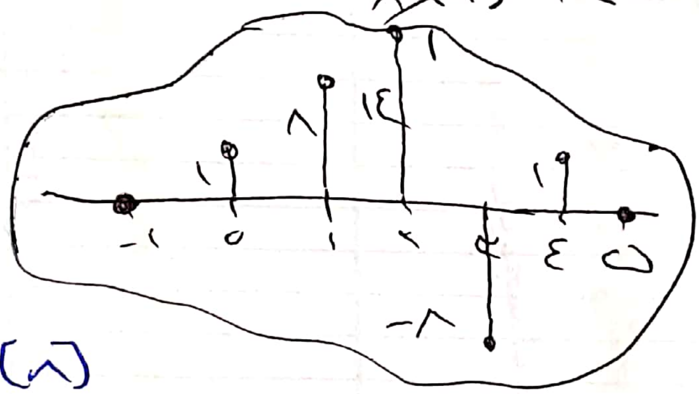
① پاسخ سیستم حاصل در



تنها در صفر و یک
مقدار ۱ دارد و در بقیه صفر ←

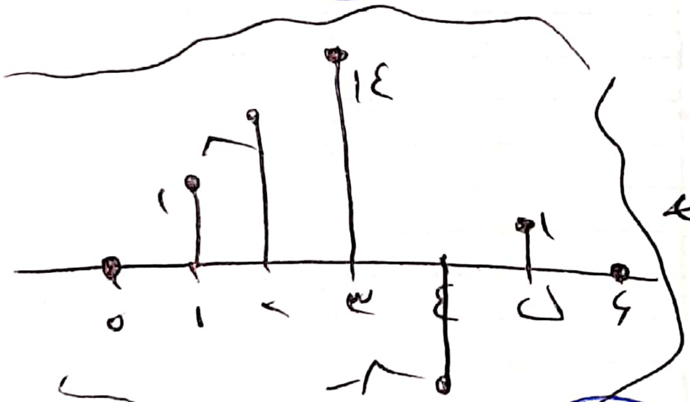
$y[n] = x[n] * h'[n] = \cancel{x[0]}h'[n] + \cancel{x[1]}h'[n-1] = ?$

$h'[n] =$



$\overset{1}{\cancel{x[0]}}h'[n]$

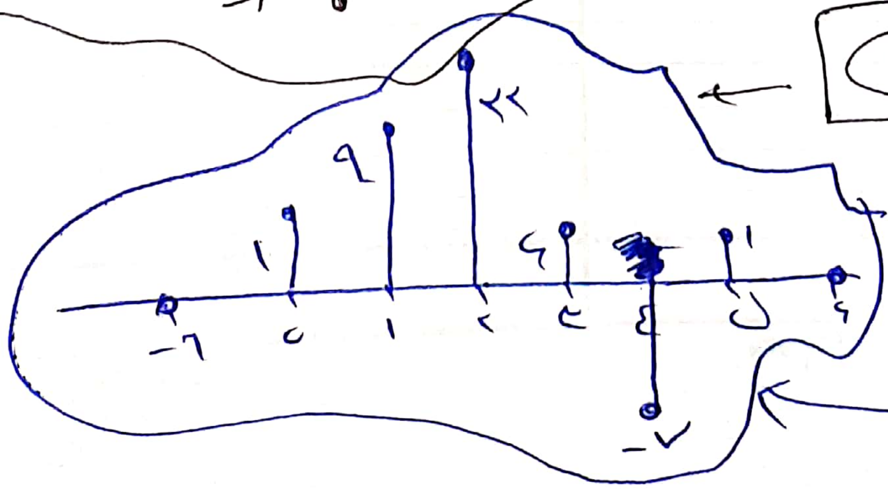
همین می‌شود



② $= 1 \times h[n-1]$

$h[n]$ یک واحد به راست شیفت ←

$\boxed{\text{جمع ① و ②}}$ ←



$h'[n] + h'[n-1] = *$

$y[n]$

سوال ۳

الف) سیستم حاصل از اتصال سری دو سیستم LTI زمان پیوسته و پایدار، یک سیستم LTI پایدار است.

اگر ~~پاسخ~~ سیستم LTI اول را $h_1(t)$ در نظر بگیریم و دومی را $h_2(t)$ ،

پاسخ ضربه

طبق پایدار بودن (فرض) ←

$$h_1(t) \xrightarrow[\text{الف}]{\text{پایدار}} \boxed{h_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |h_1(t)|\,dt \leq M < \infty}$$

$$h_2(t) \xrightarrow{\text{پایدار الف}} \boxed{h_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |h_2(t)|\,dt \leq M' < \infty}$$

ورودی محدود ↓ خروجی محدود

حاصل سری دو سیستم $\xrightarrow[\text{هستند}]{\text{LTI}}$ حاصل کانولوشن این دو می‌شود پس ←

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

باید اثبات کنیم که $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |h_1(t) * h_2(t)|\,dt} \boxed{\leq M'' < \infty}$ محدود است و کمتر از $\boxed{\infty}$ است.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h_1(t) * h_2(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau)\, h_2(t-\tau)\,d\tau \right| dt$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |h_1(\tau)\, h_2(t-\tau)|\,d\tau\,dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |h_1(\tau)|\,|h_2(t-\tau)|\,d\tau$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |h_1(\tau)|\,|h_2(t-\tau)|\,dt\,d\tau \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h_1(\tau)| \int_{-\infty}^{+\infty} |h_2(t-\tau)|\,dt\,d\tau$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h_1(\tau)| \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |h_2(t-\tau)|\,dt}_{M'}\,d\tau \leq M' \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |h_1(\tau)|\,d\tau}_{M}$$

$$\boxed{\leq MM' < \infty}$$ ← اثبات شد

سوال ۳

الف) اتصال موازی ۲ سیستم LTI و زمان گسسته و پایدار ← یک سیستم LTI پایدار است

یعنی اگر $h_1[n]$ پایدار است و $h_2[n]$ هم پایدار است ←

اثبات کنیم $h_1[n]+h_2[n]$ هم پایدار است

$$h_1[n] \xrightarrow[\text{باشد}]{\text{پایدار}} h_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h_1[n]| \leq M < \infty$$

$$h_2[n] \xrightarrow[\text{پایدار باشد}]{} h_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h_2[n]| \leq N < \infty$$

$$\underbrace{h[n] = h_1[n]+h_2[n]}_{\text{باید اثبات کنیم } h[n] \text{ پایدار است}} \longrightarrow \underbrace{\sum_{-\infty} |h_1[n]+h_2[n]| \leq M' < \infty}_{\text{محدود است}}$$

می‌دانیم $|a+b| \leq |a|+|b|$

اثبات: $\sum_{-\infty}^{+\infty} |h_1[n]+h_2[n]| \leq \sum_{-\infty}^{+\infty} |h_1[n]| + |h_2[n]| \leq$

$$\underbrace{\sum_{-\infty}^{+\infty} |h_1[n]|}_{\leq M \text{ طبق فرض}} + \underbrace{\sum_{-\infty}^{+\infty} |h_2[n]|}_{\leq N} \leq \boxed{M+N}$$

چون M و N محدود هستند ← جمع آنها هم محدود است

$\boxed{M+N < \infty}$ ← پس جمع $h[n]$ ها پایدار شد ← اثبات شد

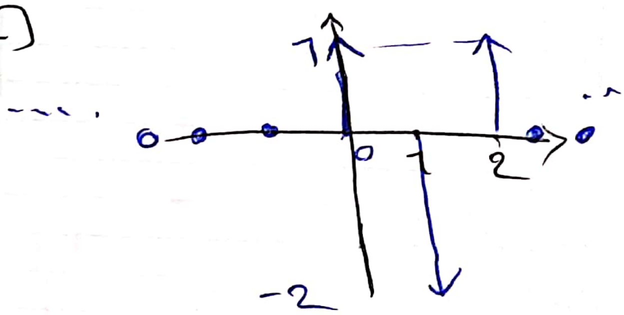
سوال ۴

ج) بله برای حالت زمان گسسته و پیوسته نیز برقرار است. (اگر همین اثبات ها را برای حالات دیگر انجام دهیم
صحت آن را ثابت کنیم)

$\boxed{\text{سوال ۴}}$. شرط وارون پذیری دو سیستم با یکدیگر ←

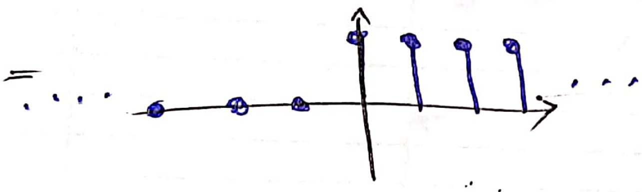
$h_1[n] * h_2[n] = \delta[n]$

$h_1[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$

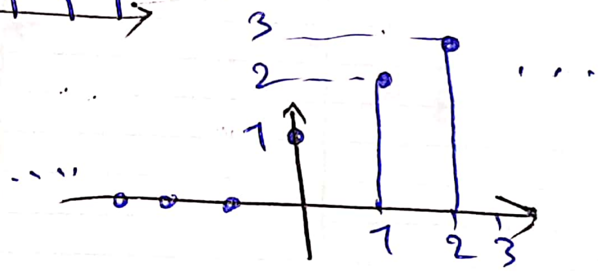


$h_2[n] = (n+1)u[n]$

$u[n] =$



$(n+1)u[n] \longrightarrow$



سوال ٤

حاصل کانولوشن دو سیگنال

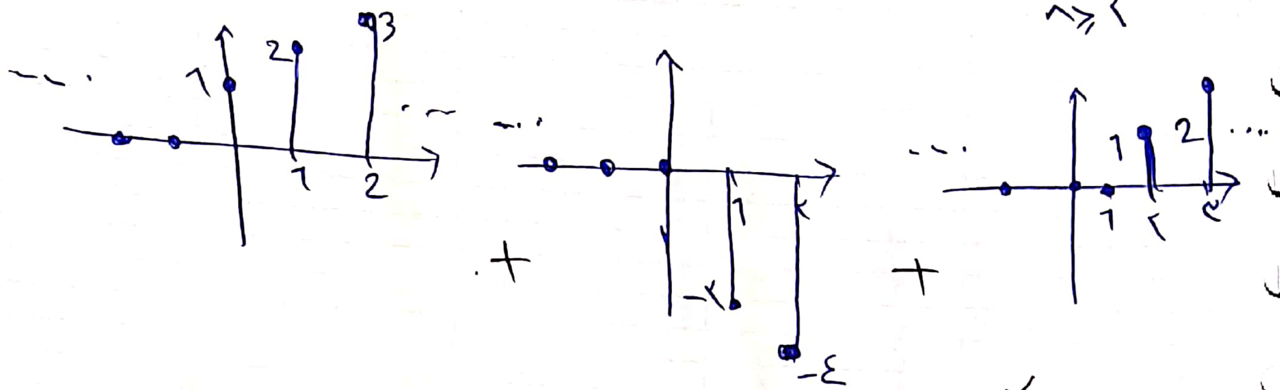
$$(\delta[n]-2\delta[n-1]+\delta[n-2]) * ((n+1)u[n]) =$$

طبق خاصیت سیگنال ضربه در کانولوشن با سیستم های دیگر

خاصیت شیفت دهندگی ضربه

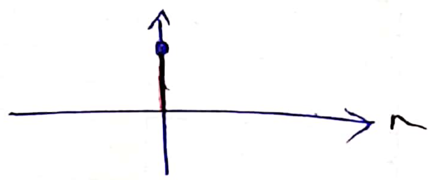
$$(n+1)u[n]-2((n-1+1)u[n-1])+((n-2+1)u[n-2])$$

$$\underbrace{(n+1)u[n]}_{n\geq 0} \quad \underbrace{\boxed{-2(n)u[n-1]}}_{n\geq 1} + \underbrace{\boxed{(n-1)u[n-2]}}_{n\geq 2}$$



جمع ۳ سیگنال بالا

جواب δ



جواب ←

در $n=0$ ←

$y[n]=\delta$ ← $\delta[n]$ که جواب ← واحد ضربه هستند.

ب) در حالت زمانی پیوسته ←

$$h_1(t)=\delta(t)-2\delta(t-1)+\delta(t-2)$$

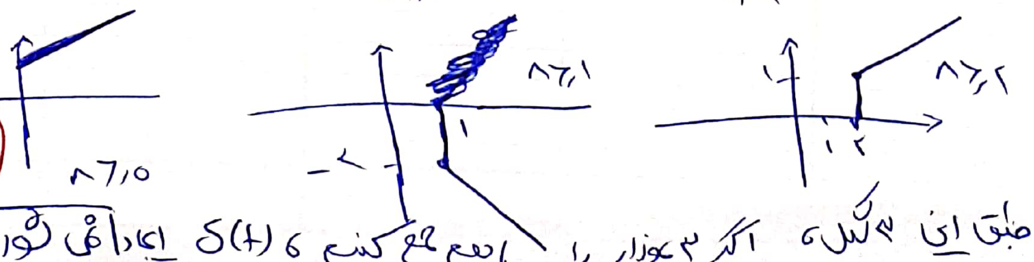
برقرار نیست ←

$$h_2(t)=(n+1)u(t)$$

واحد هم نیست ← $\delta(t)$ نمی شود

$$h_1(t)*h_2(t)=(\delta(t)-2\delta(t-1)+\delta(t-2))*(u(t)(n+1))$$

$$=\underbrace{(n+1)u(t)}_{t\geq 0}-2(\underbrace{(n)u(t-1)}_{t\geq 1})+(\underbrace{(n-1)u(t-2)}_{t\geq 2})$$

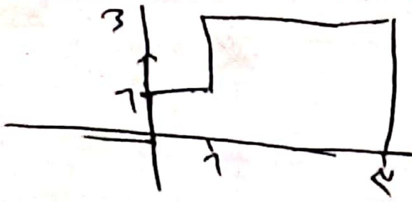


مبدا سیگنال ها

طبق این ۳ شکل، اگر ۳ نمودار را باهم جمع کنیم $\delta(t)$ ایجاد نمی شود | برقرار نیست

سوال ۵

$x(t) = u(t) + 2u(t-1) - 3u(t-3)$

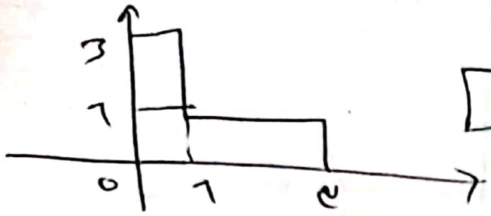


① طبق خاصیت ۶

مشتق کانولوشن دو سیگنال = مشتق یکی کانولوشن با دیگری

$\boxed{y'(t) = x(t) * h'(t)}$

$h(t) = 3u(t) - 2u(t-1) - u(t-3)$



$\boxed{h'(t) = \delta(t)}$ ؟

از $h(t)$ مشتق می‌گیریم ←

$h'(t) = 3\delta(t) - 2\delta(t-1) - \delta(t-3)$

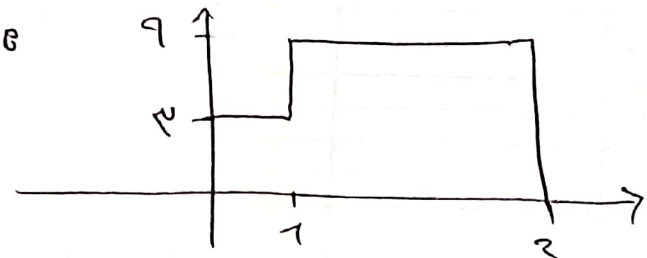
$x(t) * h(t) = ?$

$y'(t) = x(t) * h'(t) \Rightarrow$

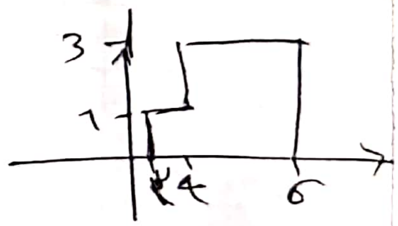
$y'(t) = x(t) * \left(3\delta(t) - 2\delta(t-1) - \delta(t-3)\right) =$

$3x(t) - 2x(t-1) - x(t-3)$

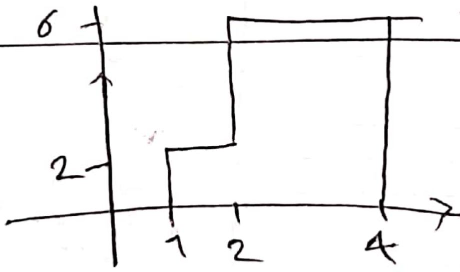
$3x(t)$:



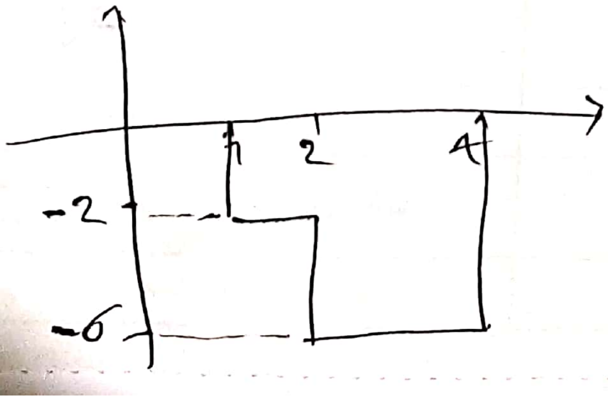
$x(t-3)$:



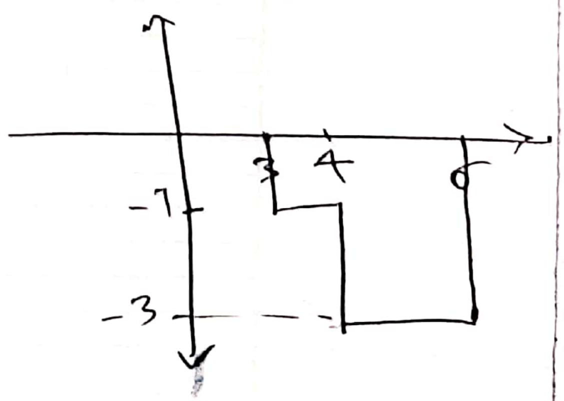
$2x(t-1)$:



$-2x(t-1)$



$-x(t-3)$

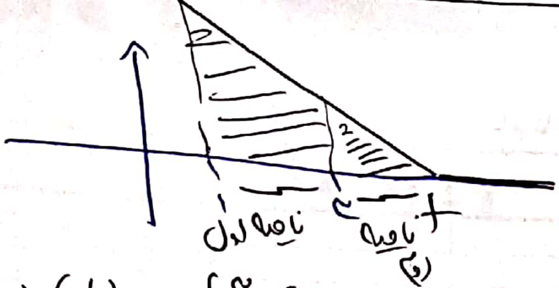


Scanned by CamScanner

سوال ۶

۲: حالت سوم

اگر $t>3$



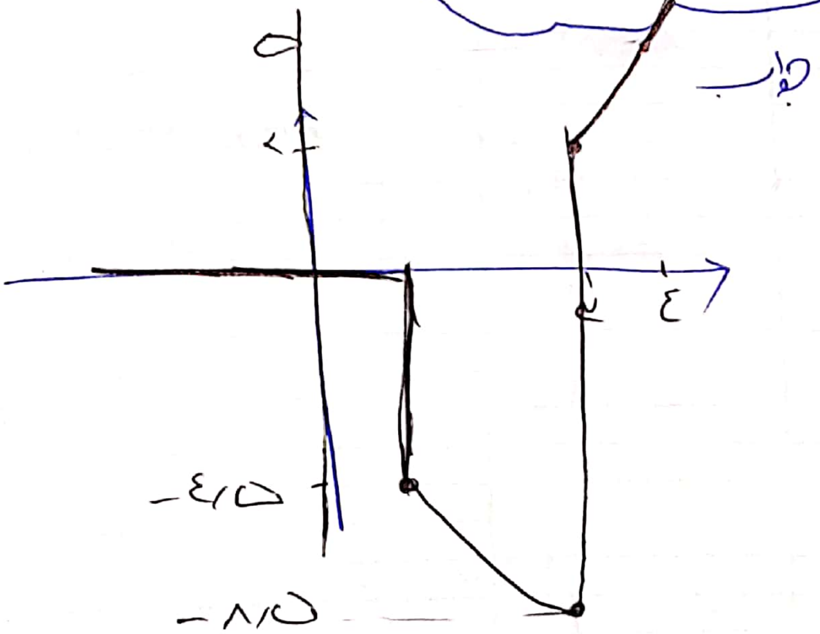
$$y(t) = \int_1^3 (t-\tau)\,d\tau + \int_3^t 2(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \underbrace{t\tau - \frac{\tau^2}{2}\Big|_1^3}_{3t-\frac{9}{2}-t+\frac{1}{2}} + \underbrace{2\left(t\tau - \frac{1}{2}\tau^2\right)\Big|_3^t}_{2\left(\left(t^2-\frac{1}{2}t^2\right)-\left(3t-\frac{9}{2}\right)\right)}$$

$$\longrightarrow \cancel{3t} - \frac{9}{2} \cancel{-t} + \frac{1}{2} + 2t^2 - t^2 \cancel{-6t} + 9 = -3t + \frac{9}{2}$$

برای $t>3$: $\boxed{t^2-4t+5} = 3 - 9 + 5 \ldots$ $t^2 - 4t$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \begin{cases} t^2 - 4t + 5 & t>3 \\ \frac{t^2}{2} - 4t - 1 & 3>t>1 \\ 0 & t<1 \end{cases}$$

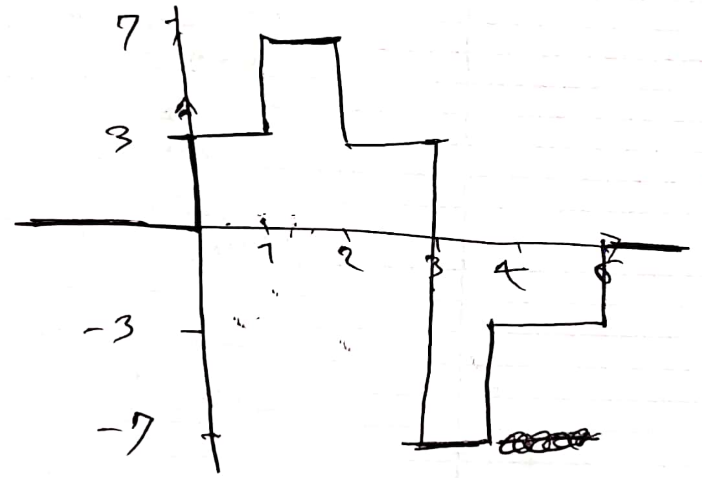


$$3x(t)=\begin{cases}3 & 0\le t\le 1\\ 9 & 1\le t\le 3\end{cases}$$

$$-2x(t-1)=\begin{cases}-2 & 1\le t\le 2\\ -6 & 2\le t\le 4\end{cases}$$

$$-x(t-3)=\begin{cases}-1 & 3\le t\le 4\\ -3 & 4\le t\le 6\end{cases}$$

$$3x(t)-x(t-3)-2x(t-1)=\begin{cases}3 & 0\le t\le 1\\ 7 \;\; \cancel{-2+9} & 1\le t\le 2\\ \cancel{-6+9}\;\; 3 & 2\le t\le 3\\ \cancel{-6-1}\;\; -7 & 3\le t\le 4\\ -3 & 4\le t\le 6\end{cases} \Rightarrow y'(t)$$



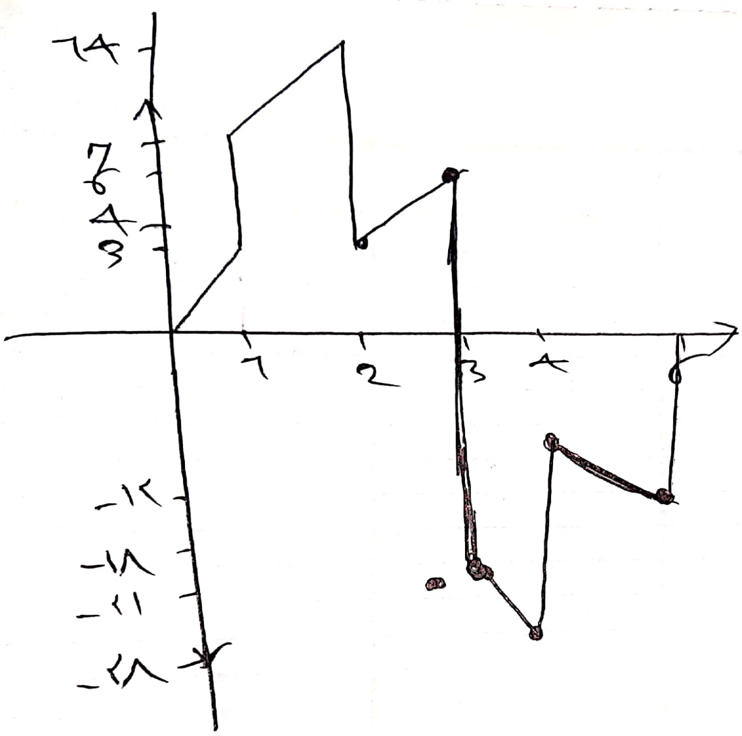
$\to y'(t)$

$$\int_0^6 y'(t)\,dt = \int_0^1 \underbrace{\cancel{y'(t)dt}}_{3dt} + \int_1^2 \underbrace{\cancel{y'(t)dt}}_{7dt} + \int_2^3 \underbrace{\cancel{y'(t)dt}}_{3dt} +$$

$$\int_3^4 \underbrace{\cancel{y'(t)dt}}_{-7dt} + \int_4^6 \underbrace{\cancel{y'(t)dt}}_{-3dt} \longrightarrow$$

$$= 3t\Big|_0^1 + 7t\Big|_1^2 + 3t\Big|_2^3 + -7t\Big|_3^4$$

$$+ (-3t)\Big|_4^6 +$$



$$y(t)=\begin{cases} 9t & 0\le t\le 1 \\ 7t & 1\le t\le 2 \\ 9t & 2\le t\le 3 \\ -7t & 3\le t\le 4 \\ -9t & 4\le t\le 6 \end{cases}$$

فسلط $y(t)$

$\boxed{\text{سوال ۴}}$

$$h(t) = \left(h_1(t) * h_2(t) + h_1(t) * h_3(t)\right) * h_4(t)$$

$$\rightarrow h(t) = \left(u(t-1) * 2\delta'(t) + u(t-1) * \delta(t-2)\right) * u\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\boxed{\delta'(t) * x(t) = \frac{d}{dt} x(t)}$$ طبق خاصیت ، ویدیو ۶

پس

① $u(t-1) * 2\delta'(t) = \boxed{2u'(t-1)}$

طبق خاصیت $x(t) * \delta(t) = x(t)$

($\delta(t)$ عضو خنثی است) ←

② $u(t-1) * \delta(t-2) = u(t-2-1) = \boxed{u(t-3)}$

طبق خاصیت

ترکیب‌پذیری (توزیع‌پذیری)

$$\rightarrow \left(2\cancel{u'(t-1)} + u(t-3)\right) * u\left(\frac{t}{2}\right) \Longrightarrow$$

$2\delta(t-1)$

$$\underbrace{2\delta(t-1) * u\left(\frac{t}{2}\right)} + u(t-3) * u\left(\frac{t}{2}\right)$$

طبق خاصیت‌ها $\Rightarrow \boxed{2u\left(\frac{t-1}{2}\right) + \underbrace{u(t-3) * u\left(\frac{t}{2}\right)}} = h(t)$

حاصل این کانولوشن

$$u(t-3) * u\left(\frac{t}{2}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau-3)\, \underbrace{u\left(\frac{t-\tau}{2}\right)} d\tau$$

باید $\boxed{\tau \geq 3}$ باشد ①

$\frac{t-\tau}{2} \geq 0 \rightarrow$ $\boxed{t \geq \tau}$ ②

$$\rightarrow \boxed{\int_3^t d\tau} = \boxed{t-3}$$

$$\boxed{h(t) = (t-3) + 2u\left(\frac{t-1}{2}\right)}$$

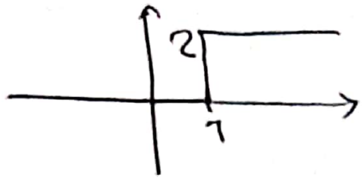
Scanned by CamScanner

$h(t) = (t-3) + 2u\left(\frac{t-1}{2}\right) \rightarrow t \geq 1 \;،\; t-3+2 = \boxed{t-1}$

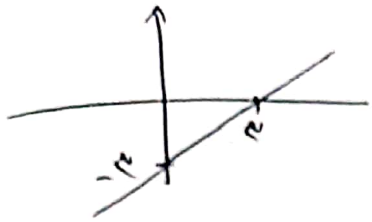
$t < 1 \;،\; \boxed{t-3}$

سؤال

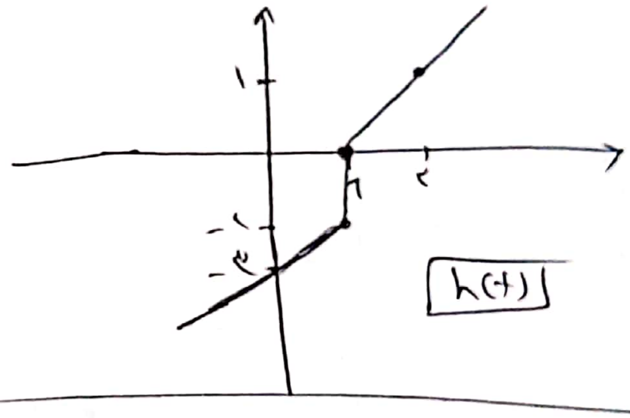
$2u\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\right)$



$t-3 \;،\; 3-t$



$h(t) = \begin{cases} t-1 & t \geq 1 \\ t-3 & t < 1 \end{cases}$



$\boxed{h(t)}$

$x(t) = u(t+1) \rightarrow \boxed{y(t) = ?}$ ب) أوجد

$y(t) = x(t) * h(t) \rightarrow y(t) = u(t+1) * \left((t-3) + 2u\left(\frac{t-1}{2}\right)\right)$

$= \underbrace{u(t+1) * (t-3)}_{1} + \underbrace{u(t+1) * 2u\left(\frac{t-1}{2}\right)}_{2}$

حل 1 ، $\int_{-\infty}^{+\infty} (\tau-3)\, u(\underbrace{t-\tau+1}) d\tau =$

$= \boxed{\int_{-\infty}^{t+1} (\tau-3)\, d\tau}$ $\quad t-\tau+1 \geq 0 \quad \boxed{\tau \leq t+1}$

$\frac{1}{2}\tau^2 - 3\tau \Big|_{-\infty}^{t+1} =$

$\frac{1}{2}(t+1)^2 - 3(t+1) - \Big(\underbrace{\frac{1}{2}(\infty)^2 - 3 \times -\infty}_{+\infty}\Big) = \boxed{-\infty}$ وأكمل

الطالب

سوال ۶

قسمت ب

علی بودن ، شرط لازم و کافی علی بودن LTI ها ← علی بودن پاسخ ضربه آنهاست

یا $h[n]=0 \rightarrow \forall n<0$ ←

$h(t)=0 \rightarrow \forall t<0$

طبق جواب قسمت الف ، $h(t)$ در $t<0$ مقدار دارد ← $\boxed{h(t)\neq 0}$ در $t<0$

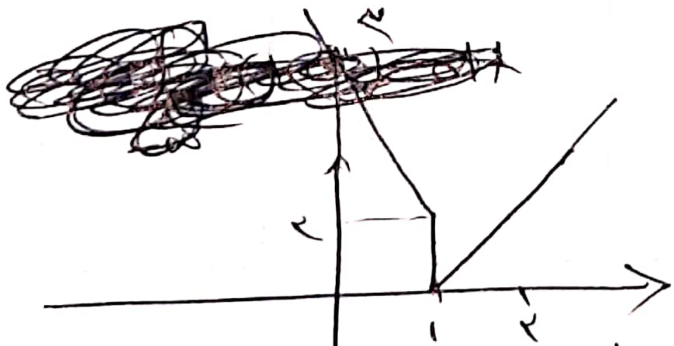
پس شرط علی بودن را ندارد ← $\boxed{\text{علی نیست}}$

علی نیست

پایداری بودن ، شرط پایدار بودن سیستم LTI ها

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,dt<\infty}$$

$h(t)=(t-3)+2u(t-\frac{1}{2})$ یا
$$\begin{cases} t-1 & t\geq 1 \\ t-3 & t<1 \end{cases}$$



$|h(t)|$

پس از $h(t)$ قدر مطلق می‌گیریم

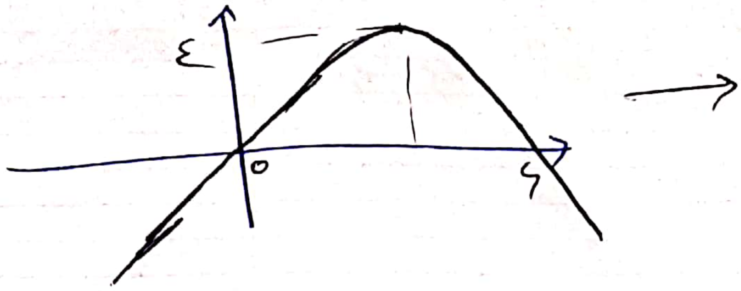
$$\rightarrow |h(t)|=\begin{cases} t-1 & t\geq 1 \\ -t+3 & t<1 \end{cases}$$

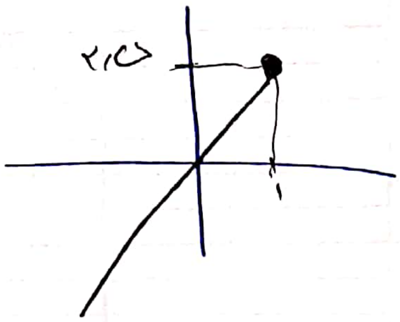
$$=\int_{-\infty}^{1}(-t+3)\,dt+\int_{1}^{+\infty}(t-1)\,dt=$$

$$\left(-\frac{1}{2}t^2+3t\right)\Big|_{-\infty}^{1}+\left(\frac{1}{2}t^2-t\right)\Big|_{1}^{+\infty}$$

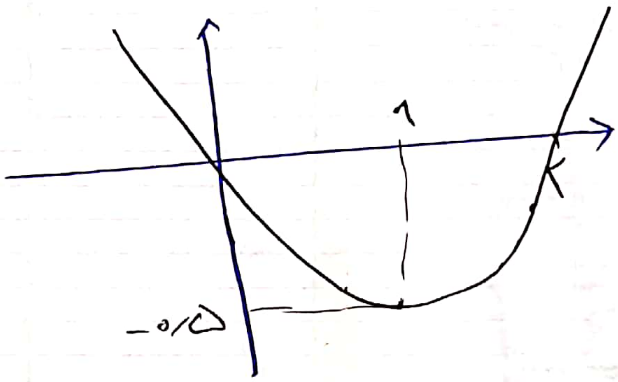
$-\frac{1}{2}t^2+3t$ ـه

از : $(-\infty, 6]$

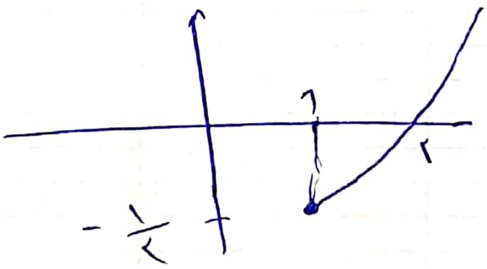




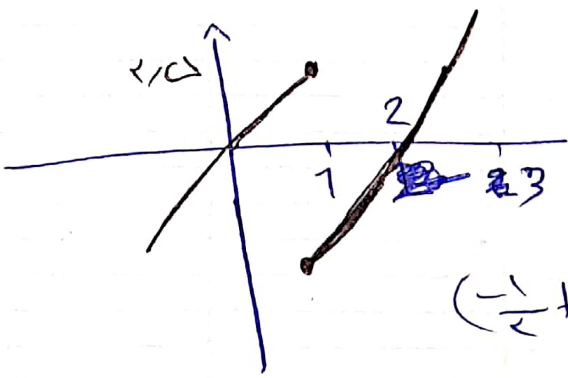
$\frac{1}{2}t^2-t$ ـه



از $[1, +\infty)$



ـه جمع ۲ نمودار



طبق نمودار حاصل

$$\left(-\frac{1}{2}t^2+3t\right)\Big|_{-\infty}^{1} + \left(\frac{1}{2}t^2-t\right)\Big|_{1}^{+\infty}$$

می‌شود $= \infty$

$\boxed{\text{پس پایدار نیست}}$

$\boxed{\text{سوال ۷}}$

$y''(t) + 3y'(t) - 10y(t) = x(t)$

الف) وقتی $x(t)=0$ ، $\forall t$ ، پاسخ $Ae^{2t} + Be^{-5t}$

$y'' + 3y' - 10y = 10 \longrightarrow \underbrace{s^2 + 3s - 10 = 0}_{\text{معادله مشخصه}} \longrightarrow$

ریشه ها : $\dfrac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{2} \Rightarrow \boxed{s_1 = 2}$, $\boxed{s_2 = -5}$

$y_h = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} = \boxed{Ae^{2t} + Be^{-5t}}$

فرم کلی معادله همگن با ضرایب
ثابت

اثبات شد