سوال ۱)

الف) $\boxed{0 \le x_1, x_2 \le 1}$

$u_i(x_1,x_2)=2.5\sqrt{x_1+x_2}-x_i$

$u_1(x_1,x_2)=2.5\sqrt{x_1+x_2}-x_1$

$u_2(x_1,x_2)=2.5\sqrt{x_1+x_2}-x_2$

$b_1(x_2)=?$ $\quad \frac{du_2}{dx_2}=0$ و $\frac{du_1}{dx_1}=0 \to$

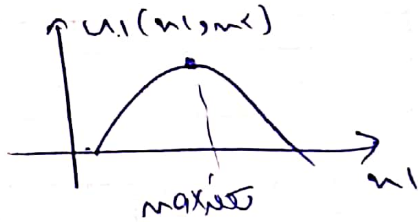
وقتی که ماکزیمم است

الف $\frac{du_2}{dx_2}=\frac{5}{4\sqrt{x_1+x_2}}\times(1)-1=0 \to \frac{5}{4}=\sqrt{x_1+x_2} \Rightarrow$

$\frac{25}{16}=x_1+x_2 \to \boxed{x_2=\frac{25}{16}-x_1}$

باید $0\le\frac{25}{16}-x_1\le 1$ باشد

$\frac{du_1}{dx_1}=\frac{5}{4\sqrt{x_1+x_2}}\times(1)-1=0 \to \boxed{x_1=\frac{25}{16}-x_2}$



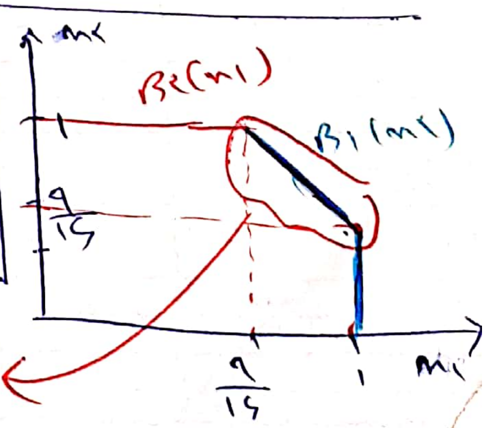
$$b_2(x_1)=\begin{cases}\frac{25}{16}-x_1 & 0\le\frac{25}{16}-x_1\le 1 \quad \left(\frac{9}{16}\le x_1\le \cancel{\frac{25}{16}}\right)\\ 1 & \frac{25}{16}-x_1>1 \quad \left(0\le x_1<\frac{9}{16}\right)\\ \cancel{0} & \cancel{\frac{25}{16}-x_1<0}\end{cases}$$

$\cancel{x_1>\frac{25}{16}}$ چون $0<x_1<1$

$$b_2 \Rightarrow B_2(x_1)=\begin{cases}\frac{25}{16}-x_1 & \frac{9}{16}\le x_1\le 1\\ 1 & 0\le x_1<\frac{9}{16}\end{cases}$$

تعادل نش = کل تقاطع‌ها در نمودار B

$$b_1=B_1(x_2)=\begin{cases}\frac{25}{16}-x_2 & \frac{9}{16}\le x_2\le 1\\ 1 & 0\le x_2<\frac{9}{16}\end{cases}$$



$x_2=\frac{25}{16}-x_1$ $\quad \frac{9}{16}\le x_1\le 1$

نقاط تعادل نش ؟ $=\left\{(x_1, \frac{25}{16}-x_1) \;\middle|\; \frac{9}{16}\le x_1\le 1\right\}$

دارای بازه

سوال ۱ _ ب)

$$u_1(x_1,x_2) = 2{,}5\sqrt{x_1+x_2} - x_1$$

$$u_2(x_1,x_2) = 3\sqrt{x_1+x_2} - x_2$$

توابع بهترین پاسخ و تعادل‌های نش ؟ تابع بهترین پاسخ بازیکن ۱

$$BR_1(x_2) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \rightarrow \frac{5}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{x_1+x_2}} - 1 = 0 \rightarrow$$

$$\frac{5}{4} = \sqrt{x_1+x_2} \Rightarrow \frac{25}{16} = x_1+x_2 \Rightarrow x_1 = \frac{25}{16} - x_2$$

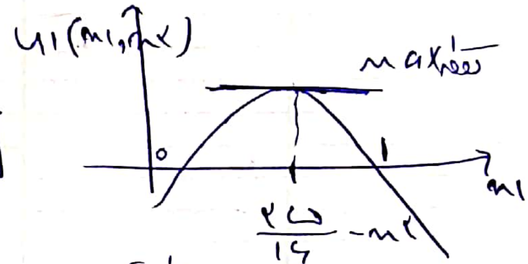
چون $0 \le x_1, x_2 \le 1$ ← باید $0 \le \frac{25}{16} - x_2 \le 1 \Leftarrow$

① $x_2 \ge \frac{9}{16}$

② $x_2 \le \frac{25}{16}$

③ $0 \le x_2 \le 1$

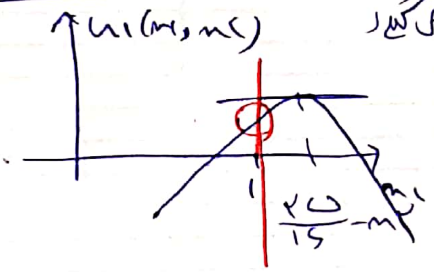
از ① و ② و ③ $\Rightarrow \boxed{\frac{9}{16} \le x_2 \le 1}$



نقطه max زمانی اتفاق بیفتد که

اگر $\frac{25}{16} - x_2 > 1$ باشد یعنی x_1 بزرگتر از ۱ باشد ← $\boxed{BR_1(x_2) = 1}$

چراکه در $x_1 = 1$ و بیشترین سود بازیکن قرار می‌گیرد



پس اگر $x_2 \le \frac{9}{16}$ باشد و چون $0 \le x_2 \le 1 \Leftarrow$

$$BR_1(x_2) = \begin{cases} \frac{25}{16} - x_2 & \frac{9}{16} \le x_2 \le 1 \\ 1 & 0 \le x_2 \le \frac{9}{16} \end{cases}$$

تابع بهترین پاسخ بازیکن ۲

$$BR_2(x_1) = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow 3 \times \frac{1}{2\sqrt{x_1+x_2}} - 1 = 0 \rightarrow$$

$$\frac{3}{2} = \sqrt{x_1+x_2} \Rightarrow \frac{9}{4} = x_1+x_2 \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{9}{4} - x_1}$$

① $x_1 \ge \frac{5}{4} \leftarrow 0 \le \frac{9}{4} - x_1 \le 1 \leftarrow 0 \le x_1, x_2 \le 1$ چون

② $x_1 \le \frac{9}{4}$

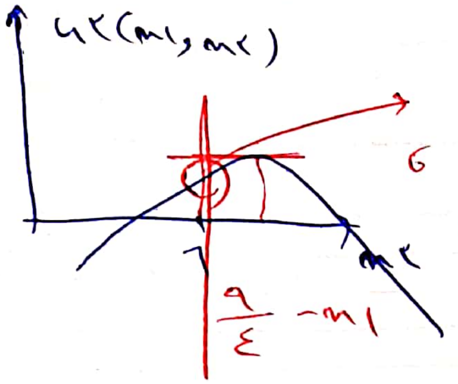
③ $0 \le x_1 \le 1$

پس $x_2 = \frac{9}{4} - x_1$ و به دلیل اینکه $0 \le x_1 \le 1 \leftarrow$

$$-1 \le -x_1 \le 0 \rightarrow \frac{5}{4} = \cancel{\frac{9}{4} - 1} \le \frac{9}{4} - x_1 \le \frac{9}{4}$$

پس نقطه max تابع $u_2(x_1,x_2)$ در $x_2 = 1$ اتفاق می‌افتد ←

Scanned by CamScanner



در بازه‌ی $\in [0,1]$ نقطه‌ی $m_2 = 1$ تابع $u_2(m_1, m_2)$ را max می‌کند

$\longrightarrow BR_2(m_1) = \begin{cases} 1 & 0 \le m_1 \le 1 \end{cases}$

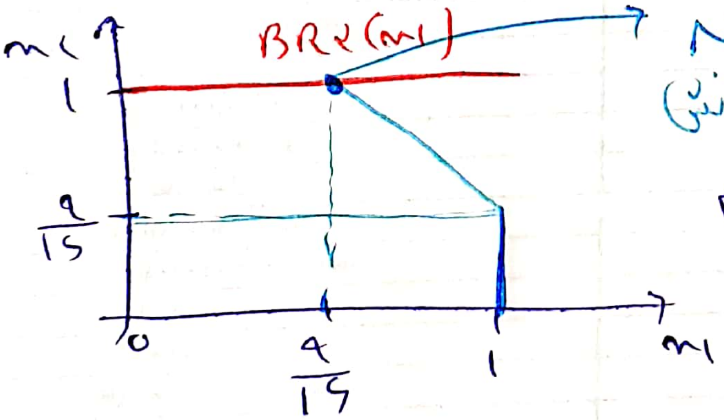
اگر $\frac{9}{4} - m_1 \le 0$ ← یعنی $m_1 \ge \frac{9}{4}$ که ممکن نیست چراکه بازه‌ی $m_1 \in [0,1]$ است

تعادل‌های نش از تلاقی نمودارهای بهترین پاسخ بدست می‌آیند ←

$$\begin{cases} a^* = (a_1^*, a_2^*) \\ a_1^* = BR_1(a_2^*) \\ a_2^* = BR_2(a_1^*) \end{cases}$$

از حل این دستگاه تعادل‌های نش بدست می‌آیند

بازیکن ۱   بازیکن ۲



NE تعادل نش $a^* = (m_1 = \frac{9}{16}, m_2 = 1)$

تنها تعادل نش

زمانی که نفر دوم سود بیشتری ببرد ← سرمایه‌گذاری (هزینه‌ی) بیشتری هم حاضر است که بپردازد

سوال ۲

الف

$u_2(x_1,x_2) = -(x - v_2)^2$ $\quad 0 \le x_2 \le 10$

$x = \frac{x_1+x_2}{2}$

$\boxed{\begin{array}{l} v_1 = 6 \\ v_2 = 3 \end{array}}$

$u_1(x_1,x_2) = -\left(\frac{x_1+x_2}{2} - 6\right)^2$

$u_2(x_1,x_2) = -\left(\frac{x_1+x_2}{2} - 3\right)^2$

بیشترین نتیجه هر بازیکن زمانی اتفاق می‌افتد که مقدار $\left(\frac{x_1+x_2}{2} - v_i\right)^2$ کمینه شود

فرض کنیم نقطه‌ی تعادل بازی $x_1 = 6$, $x_2 = 3$ باشد الف ← هیچ بازیکنی نباید بتواند به تنهایی سودش را بیشتر کند

و اگر بتواند این نقطه، نقطه تعادل نیست ولی از این $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$

اگر بازیکن اول از $x_1 = 6$ به $x_2 = 8$ تغییر وضعیت دهد ← $|6 - 4.5| = 1.5$ و $|3 - 4.5| = 1.5$

$\frac{8+3}{2} = \frac{11}{2} = 5.5$ ← $|6 - 5.5| = 0.5$, $|3 - 5.5| = 2.5$ سود بازیکن اول به تنهایی بیشتر شد

← بازیکن دوم هم با همین حساب مقدار x_2 را کم می‌کند مثلاً

$x_2 = 1 \rightarrow x_1 = 8, x_2 = 1 \rightarrow \frac{8+1}{2} = 4.5$

$|6 - 4.5| = 1.5$, $|3 - 4.5| = 1.5$ دوباره به نقطه تعادل رسیدیم ولی

باز هم اگر بازیکن ۱ $x_1 = 10$ قرار دهد و $x_2 = 1$ بماند ← $\frac{10+1}{2} = 5.5 \rightarrow$ $|6 - 5.5| = 0.5$, $|3 - 5.5| = 2.5$ → سودش بیشتر شد ← $\boxed{x_2 = 0}$ قرار می‌دهد ← $\frac{10+0}{2} = 5$

بازی به تعادل می‌رسد چون $|6 - 5| = 1$, $|3 - 5| = 2$

$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 10 \\ x_2 = 0 \end{array}}$

افراد با فرض اینکه طرف مقابل چه کاری را انتخاب می‌کند که نزدیک‌تر به ای الف ما تصمیم‌گیری می‌کنند ← در به تعادل می‌رسد بازی.

سوال ۳

فرد A ۲۰ رای، فرد B ۳۰ رای، فرد C ۴۰ رای

$N_A \quad N_B \quad N_C$

	۳ ۲ ۱
فرد A	$N_A > N_B > N_C$
فرد B	$N_B > N_A > N_C$
فرد C	$N_C > N_A > N_B$

ارزش اولویت هر فرد به فرد دیگر را با یک عدد مشخص می‌کنیم ۳ و ۲ و ۱

با آگاهی اولویت

حالت ۱

$C = A$

فرد C به A رای بدهد

A \ B	A	B	C
A	3,2,2	3,2,2	3,2,2
B	3,2,2	2,3,1	1,1,3
C	3,2,2	1,1,3	1,1,3

N.E

حالت ۲ $C = B$

فرد C به B رای بدهد

A \ B	A	B	C
A	3,2,2	2,3,1	1,1,3
B	2,3,1	2,3,1	2,3,1
C	1,1,3	2,3,1	1,1,3

N.E

حالت ۳

$C = C$

فرد C به خودش رای بدهد

A \ B	A	B	C
A	3,2,2	1,1,3	1,1,3
B	1,1,3	2,3,1	1,1,3
C	1,1,3	1,1,3	1,1,3

N.E.

حالت‌های تعادل نش ۵

(A,A,A) برنده A و (B,B,B) برنده B و

(A,A,C) و ⟵ برنده A

(B,B,C) و ⟵ برنده B

(C,C,C) ⟵ برنده C

پس ۵ تا تعادل نش داریم.

سوال ۴

n کشاورز داریم ⟵ هر کشاورز i به میزان $n_i \geq 0$ در مزرعه تلاش می‌کند.

$g(0) = 0$ با رشد صعودی نزولی و

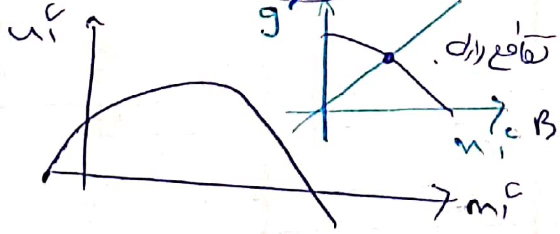
$g(\sum_{k=1}^{n} n_k)$ کل محصول

$g''(0) < 0$ و $g'(0) > 0$

در نقطه صفر و اکیداً صعودی — تقعر به سمت پایین

$$u_i = \frac{1}{n} g\left(\sum_{k=1}^{n} n_k\right) - \frac{1}{2} n_i^2$$

تلاش n_i ⟵ هزینه $\frac{1}{2} n_i^2$



$BR_i(n_i) = ?$

$$\frac{\partial u_i}{\partial n_i} = 0 \rightarrow \frac{1}{n} g'\left(\sum_{k=1}^{n} n_k\right) - n_i = 0$$

$$\boxed{n_i = \frac{1}{n} g'\left(\sum_{k=1}^{n} n_k\right)}$$

به ازای n_i

در تعادل نش همه n_iها با هم برابر هستند پس

جواب ⟵ $n^*_1 = n^*_2 = \dots = n^*_n = \frac{1}{n} g'\left(\sum_{k=1}^{n} n_i\right)$

سوال ۳

هر شرکت کننده یک عدد بین ۱ تا ۴ — اگر عدد به $\frac{2}{3}$ مجموع دو عدد نزدیک‌تر باشد ← (۵ دلار و ۲ دلار)

اگر $\left|\frac{2}{3}(m_1+m_2)-m_1\right| = \left|\frac{2}{3}(m_1+m_2)-m_2\right|$

هر کدام یک دلار ← $(1,1)$

$m_1 \backslash m_2$	1	2	3	4
1	1,1	0,2	0,2	0,2
2	2,0	1,1	0,2	0,2
3	2,0	2,0	1,1	0,2
4	2,0	2,0	2,0	1,1

$\boxed{(4,4)}$

$m_1, m_2 \in \{1,2,3,4\}$ که (m_1, m_2) (فاصله)

$(2,3) \rightarrow \frac{2}{3}(5)-2=\frac{4}{3}$ و $\frac{2}{3}(5)-3=\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}<\frac{4}{3}$ ← به عدد بازیکن ۲ نزدیک‌تر است ← $(0,2)$

پیدا کردن اکشن‌های مغلوب ←

① برای بازیکن ۱ ← انتخاب عدد ۱ < انتخاب عدد ۴ ← حذف اکید ۱

② ~ ۲ ← انتخاب عدد ۱ < انتخاب عدد ۴ ← حذف اکید ۱ (نسبت اکید)

③ ~ ۱ ← ~ ۲ < ~ ۴ ← حذف اکید 2

④ ~ 2 ← ~ 2 < ~ ۴ ← حذف اکید ۲

⑤ ~ ۱ ← ~ ~ 3 < ~ ۴ ← حذف اکید 3

⑥ ~ 2 ← ~ 3 < ~ ~ ← حذف اکید 3

تعادل نش ⟵ $(4,4)$ ← هر دو بازیکن عدد ۴ را انتخاب کنند

یعنی هر کدام ۱ دلار ببرند

سوال ۴

$1 \le m_1, m_2 \le 4$

1 m_1 | m_2 4

اگر نقطه‌ی وسط m_1 و m_2 را در نظر بگیریم که $\frac{m_1+m_2}{2}$

و مقایسه‌اش را با $\frac{2}{3}(m_1+m_2)$ مقایسه کنیم

$$\frac{2}{3}(m_1+m_2)-\left(\frac{m_1+m_2}{2}\right)=\frac{4m_1+4m_2-3m_1-3m_2}{6}=\frac{m_1+m_2}{6}$$

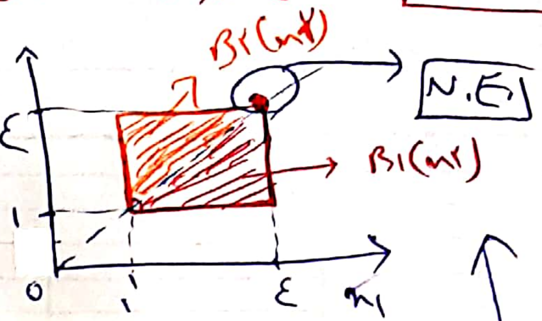
و چون $1 \le m_1, m_2 \le 4$ → $\frac{m_1+m_2}{6}>0$ → همواره مقدار $\frac{2}{3}(m_1+m_2)$ بیش از وسط m_1, m_2

ادامه سوال ۴

پس هر فردی که عددی بزرگتر انتخاب کنه برنده می‌شه

$B_1(x_2)=\{x_1 \mid x_1>x_2\}$ و $x_2<4$

$B_2(x_1)=\{x_2 \mid x_2>x_1\}$ و $x_1<4$



اگر $x_1=4$ یا $x_2=4$ ←

اگر بازیکن دیگر عددی کمتر از ۴ انتخاب کنه شکست می‌خوره ← بهترین کاری که می‌تونه بکنه انتخاب $\boxed{4}$ است و تساوی بازی ← هر دو به یک اندازه سود ۶ را باید ببرند

اگر $x_1=4 \rightarrow \boxed{x_2=4}$

اگر $x_2=4 \rightarrow \boxed{x_1=4}$

نمودار بهترین پاسخ‌ها

$$B_1(x_2)=\begin{cases} x_1>x_2 & x_2<4 \\ 4 & x_2=4 \end{cases}$$

$$B_2(x_1)=\begin{cases} x_2>x_1 & x_1<4 \\ 4 & x_1=4 \end{cases}$$

محل تلاقی ۲ تا B ها نقاط تعادل می‌شه که چون تنها نقطه‌ی تلاقی (۴،۴) است ←

$\boxed{\text{نقطه تعادل: } x_1=x_2=4}$ N.E.

تعیین اکشن‌های غالب و مغلوب: اگر بازیکن دوم مقدار $\boxed{x_2=4}$ را انتخاب کنه، بهترین کاری که بازیکن اول می‌تونه انجام بده انتخاب $x_1=4$ است و اگر بازیکن دوم $x_2<4$ را انتخاب کنه، اگر بازیکن اول $x_1=x_2$ انتخاب کنه که سودش ۶ می‌شه و اگر $x_1<x_2$ انتخاب کنه سودش صفر می‌شه ولی اگر $x_1=4$ انتخاب کنه سودش ۱۲ می‌شه ← بهترین کاری که می‌تونه انجام بده انتخاب $x_1=4$ است ←

چه بازیکن دوم $x_2=4$ برداره چه $x_2<4$ ← انتخاب اکشن $x_1=4$ برای بازیکن اول به اکشن‌های دیگر غلبه داره

پس اکشن غالب: انتخاب $x_1=4$
اکشن مغلوب: $x_1<4$

به همین ترتیب برای بازیکن دوم هم می‌تونیم استدلال کنیم که صرف نظر از انتخاب x_1 توسط بازیکن اول (اگر $x_1=4$ یا $x_1<4$ باشه)، همواره به نفع بازیکن دوم است که $\boxed{x_2=4}$ را انتخاب کنه ←

$x_2=4$ غلبه اکید داره به $x_2<4$

سوال ۷

الف) حذف اکشن های مغلوب اکید

	A	B	C	D
E	3,1	2,2	1,1	2,3
~~F~~	~~2,2~~	~~1,3~~	~~1,1~~	~~1,0~~
~~G~~	~~2,3~~	~~0,2~~	~~0,4~~	~~-1,3~~
~~H~~	~~4,0~~	~~-1,1~~	~~0,6~~	~~0,4~~

① E > G ← حذف سطر ۳

② B > A ← حذف ستون ۱

③ E > H ← حذف سطر ۴

④ B > C ← حذف ستون ۳

⑤ E > F ← حذف سطر ۲

⑥ D > B ← حذف ستون ۲

N.E. تعادل نش اکید

تعادل نش اکید = (E,D) عالیه استادی

ب) حذف اکشن های مغلوب ضعیف N.E. تعادل نش اکید

	A	B	C	D
E	3,1	2,2	1,1	2,3
~~F~~	~~2,2~~	~~1,3~~	~~1,1~~	~~1,0~~
~~G~~	~~2,3~~	~~0,2~~	~~0,4~~	~~-1,3~~
~~H~~	~~4,0~~	~~-1,1~~	~~0,6~~	~~0,4~~

① E ≥ F ← حذف سطر ۲

② C ≥ A ← حذف ستون ۱

③ E > G ← حذف سطر ۳

④ D > B ← حذف ستون ۲

⑤ E > H ← حذف سطر ۴

⑥ B > C ← حذف ستون ۳