نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها

پاسخ نامه تکلیف پنجم

۱. با توجه به خواص بستاری زبان ها، بسته بودن یا نبودن دسته زبان های زیر را تحت عملگرهای گفته شده مشخص کنید.
(منظور از معکوس یک زبان وارون آن است یا همان W^R)

نوع زبان	اجتماع	اشتراک	الحاق	بستار کلینی	مکمل	معکوس
منظم	✓	✓	✓	✓	✓	✓
خطی	✓	×	×	×	×	✓
مستقل از متن	✓	×	✓	✓	×	✓
حساس به متن	✓	✓	✓	✓	✓	✓
تصمیم پذیر	✓	✓	✓	✓	×	×

۲. بدون استفاده از قضیه rice ثابت کنید زبان های زیر تصمیم ناپذیرند.

L1 = {<M>|M is a TM and |L(M)| ≤3}

Not RE. We prove this by a reduction from $\overline{HP}$. $\tau(\langle M, x\rangle) = \langle M'\rangle$. M' on input w: it erases its input, copies M and x to its tape, and runs M on x; it accepts if M halts on x.
We now prove the validity of reduction:

* $\langle M, x\rangle \in \overline{HP} \Rightarrow M$ does not halt on $x \Rightarrow M'$ does not accept any input $\Rightarrow |L(M')| \leq 3 \Rightarrow M' \in L_2$.
* $\langle M, x\rangle \notin \overline{HP} \Rightarrow M$ halts on $x \Rightarrow M'$ accepts all inputs $\Rightarrow |L(M')| > 3 \Rightarrow M' \notin L_2$.

L2 = {<M>|M is a TM that accepts all even numbers in binary}

Not RE. We prove this by a reduction from $\overline{HP}$. $\tau(\langle M, x\rangle) = \langle M'\rangle$. M' on input w: it runs M on x for $|w|$ steps; it rejects if M halts on x within $|w|$ steps, and accepts otherwise.
We now prove the validity of the reduction:

* $\langle M, x\rangle \in \overline{HP} \Rightarrow M$ does not halt on $x \Rightarrow M'$ accepts all inputs, and in particular, all even numbers $\Rightarrow M' \in L_4$.
* $\langle M, x\rangle \notin \overline{HP} \Rightarrow M$ halts on x within k steps $\Rightarrow M'$ rejects all inputs w whose length is greater than or equal to $k \Rightarrow M'$ rejects an infinite number of even numbers $\Rightarrow M' \notin L_4$.

L3 = {<M>|M is a TM and L(M) is finite}

Not RE. We prove this by a reduction from $\overline{HP}$. $\tau(\langle M,x\rangle) = \langle M'\rangle$. M' on input w: it runs M on x.
We now prove the validity of the reduction:

* $\langle M,x\rangle \in \overline{HP} \Rightarrow M$ does not halt on $x \Rightarrow M'$ does not accept any strings $\Rightarrow L(M')$ is finite $\Rightarrow M' \in L_5$.

* $\langle M,x\rangle \notin \overline{HP} \Rightarrow M$ halts on $x \Rightarrow M'$ accepts all strings $\Rightarrow L(M')$ is infinite $\Rightarrow M' \notin L_5$.

L4 = {<G1, G2>|G1, G2 are CFG and L(G1) ⊆ L(G2)}

فرض می‌کنیم L_3 یک زبان تصمیم‌پذیر باشد. در نتیجه می‌توانیم تصمیم‌گیر D_3 را برای آن در نظر بگیریم. با استفاده از این تصمیم‌گیر، یک بار رابطه $L(G_1) \subseteq L(G_2)$ را بررسی می‌کنیم و بار دیگر $L(G_2) \subseteq L(G_1)$. اگر هر دو بار نتیجه مثبت بگیریم می‌دانیم بدان معناست که $L(G_1) = L(G_2)$ است و در غیر اینصورت $L(G_1) \neq L(G_2)$ حاصل می شود. بدین ترتیب با استفاده از D_3 توانستیم مسئله EQ_{CFG} را به یک مسئله تصمیم‌پذیر تبدیل کنیم که تناقض است. چرا که می‌دانیم EQ_{CFG} تصمیم‌ناپذیر است. در نتیجه فرض اولیه باطل است و L_3 تصمیم‌ناپذیر است.

۳. ثابت کنید زبان های زیر تصمیم پذیرند.

L1 = {<M>|M is a TM and there exists an input on which M halts in less than |<M>| steps}

R. M^* that decides the languages works as follows on input $\langle M\rangle$. It first finds the length of $\langle M\rangle$, and stores it. Then, it runs M on all inputs of length at most $|\langle M\rangle|$, for at most $|\langle M\rangle|$ steps, and accepts if M accepts at least one of the strings within the specified number of steps.
You might wonder why we limited the length of the strings. Since we bound the number of steps that M runs on an input, then there is no point on looking at any strings that are longer than that number, since if a TM is allowed to run for at most c steps, it is not possible for that TM to "process" any input symbol beyond the c^{th} symbol!
The number of possible inputs is finite, and the number of steps M runs on each input is finite, therefore M is guaranteed to halt and decide the language.

L2 = {<M>|M is a TM, M0 is a TM that halts on all inputs, and M ∈ L(M0)}

R. M^* that decides L_{13} runs M_0 on M and accepts if M_0 accepts M and rejects if M_0 rejects M. The difference between this and L_{12} is that here M_0, the machine that runs on the input, is guaranteed to always halt; however, in L_{12}, M, the machines that runs on the input, might not halt!

L3 = {<M>|M is a TM, and M is the only TM that accepts L(M)}

چون می دانیم هر زبان بینهایت TMدارد که می توانند آن را بپذیرند. پس این زبان تصمیم پذیر است و کافی است یک تصمیم گیر برای آن در نظر بگیریم که با توجه به ورودی rejectبرگرداند.

L4 = {<M>|M is a TM, and |M| < 1000}

در این سوال، ما در مورد تمام توصیفات ماشین های تورینگ با استفاده از یک الفبای ثابت (البته با اندازه محدود) صحبت می کنیم، یعنی TM هایی که به عنوان ورودی به یک TMدلخواه روی ورودی دلخواه کدگذاری می شوند. بنابراین، متناهی است و در نتیجه بازگشتی است.

۴. فرض کنید زبان های L1, L2, L3, ..., Lk مجموعه ای از زبان ها بر روی الفبای Σ باشند به طوری که:

الف) برای هر دوتایی از این زبان ها مانند Li, Lj $Li \cap Lj = \emptyset$.

ب) $L1 \cup L2 \cup L3 \cup \ldots \cup Lk = \Sigma*$

ج) هر کدام از این زبان ها RE است.

ثابت کنید همه این زبان ها Recursive هم هستند.

برای نشان دادن اینکه هر یک از این زبان ها بازگشتی هستند، باید بتوانیم برای هر ورودی تعیین کنیم که کدام یک از k زبان ما حاوی آن است. سپس می دانیم (بر اساس ویژگی اول) که هر زبان دیگری حاوی آن نیست.

از آنجایی که هر زبان RE است، برای هر زبان می توانیم یک ماشین تورینگ با یک نوار واحد بسازیم که تمام ورودی های آن زبان را می پذیرد. برای تعیین اینکه کدام زبان حاوی هر ورودی است، یک ماشین تورینگ با k نوار می سازیم. ابتدا ورودی را در هر نوار کپی می کنیم. سپس هر یک از k ماشین را برای زبان ها به صورت موازی در نوارهای مختلف خود اجرا می کنیم. برخی از اینها ممکن است ورودی را رد کنند و برخی ممکن است برای همیشه اجرا کنند اما از آنجایی که ورودی ما به زبان خاصی است، در نهایت یکی از ماشین ها این کار را انجام خواهد داد.

اگر ماشین i قبول کند، آنگاه می دانیم که ورودی ما در زبان Li است و نه در هیچ کدام زبان های دیگر.

۵. برای زبان های زیر یک گرامر unrestricted طراحی کنید.

L1 = { $a^i b^{2i} c^{3i}$: i ≥ 1}

S –> aBSccc
S –> aBccc
Ba –> aB
Bc –> bbc
Bb –> bbb

$L2 = \{wc^i d^j \mid w \in \{a, b\}^*, i = n_a(w), j = n_b(w)\}$

$S \to S_1\#$
$S_1 \to aS_1C$
$S_1 \to bS_1D$
$S_1 \to \varepsilon$
$DC \to CD$
$D\# \to d$
$Dd \to dd$
$C\# \to c$
$Cd \to cd$
$Cc \to cc$
$\# \to \varepsilon$

۶. گرامر های unrestricted زیر چه زبان هایی تولید می‌کنند.

L1) $\Sigma = \{a,b,c\}$

$S \to aHSc$ تعداد برابر a,c را به دست می دهد.

$S \to \varepsilon$

$Ha \to aH$ حرف a را به سمت چپ ترین نقطه H میبرد

$Hc \to bc$

$Hb \to bb$

بعد از چند مرحله اشتقاق و با امتحان کردن چند رشته مختلف معلوم می شود که زبان گرامر فوق بصورت زیر است:

$L(G)=\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$

L2) $\Sigma = \{a,b\}$

$S \to aXS \mid bYS \mid C$

$Yb \to bY$

$Ya \to aY$

$Xa \to aX$

$Xb \to bX$

$YC \to Cb$

$XC \to Ca$

$C \to \lambda$

بعد از چند مرحله اشتقاق و با امتحان کردن چند رشته مختلف معلوم می شود که زبان گرامر فوق بصورت زیر است.

$L(G) = \{WW : W \in \{a, b\}^*\}$