بسم الله الرّحمن الرّحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده برق و کامپیوتر

تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مدرس: مسعود عمومی

جلسه هفتم _ بخش 2.1 کتاب

با سلام خدمت دانشجویان محترم

سیستم‌های خطّی و تغییرناپذیر با زمان (LTI) زمان‌گسسته و جمع کانولوشن

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\;T\;} \longrightarrow y[n]$$

خطّی :

$$T\left\{\sum_{k=1}^{N} \alpha_k x_k[n]\right\} = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k y_k[n]$$

تغییرناپذیر با زمان :

$$T\{x[n-n_0]\} = T\{Z_{n_0}\{x[n]\}\}$$

$$= Z_{n_0}\{T\{x[n]\}\}$$

$$= y[n-n_0]$$

نکتهٔ اساسی: نمایش هر سیگنال زمان‌گسستهٔ دلخواه به صورت ترکیبی خطی از ضربه‌ها

با توجه به خاصیت غربالی سیگنال ضربه، برای هر سیگنال زمان گسسته دلخواه $x[n]$ می‌توان نوشت:

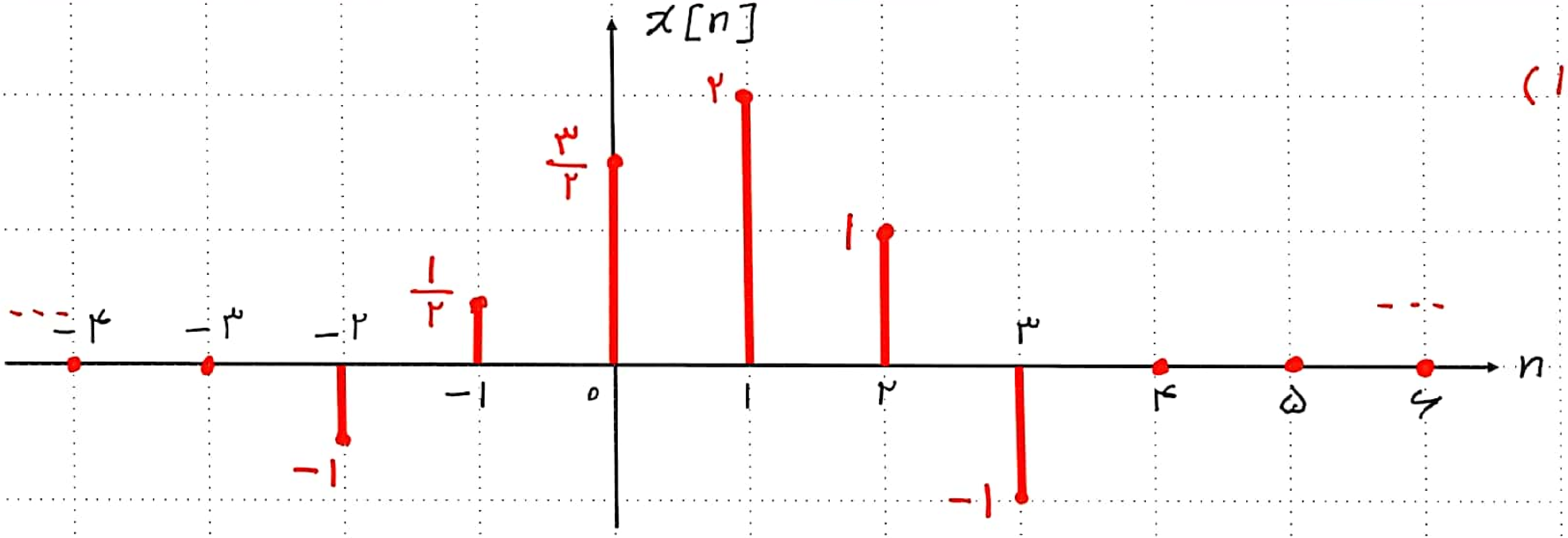
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta_k[n]$$

$\delta_k[n] = \delta[n-k]$ برای مقادیر مختلف $k \in \mathbb{Z}$، نشان دهندهٔ ضربه واحد و همهٔ شیفت یافته‌های آن است. اثبات: برای هر مقدار معلوم n (مثلاً ۲) $\delta_k[n] = \delta_k[2] = \delta[2-k]$ فقط در $k=2$ برابر ۱ و در سایر مقادیر k برابر صفر است.

$$\Rightarrow \forall n: \; x[n]\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k[n] = x[n]$$

$$\Rightarrow x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]\delta_k[n] \overset{\text{غربالی}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta_k[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

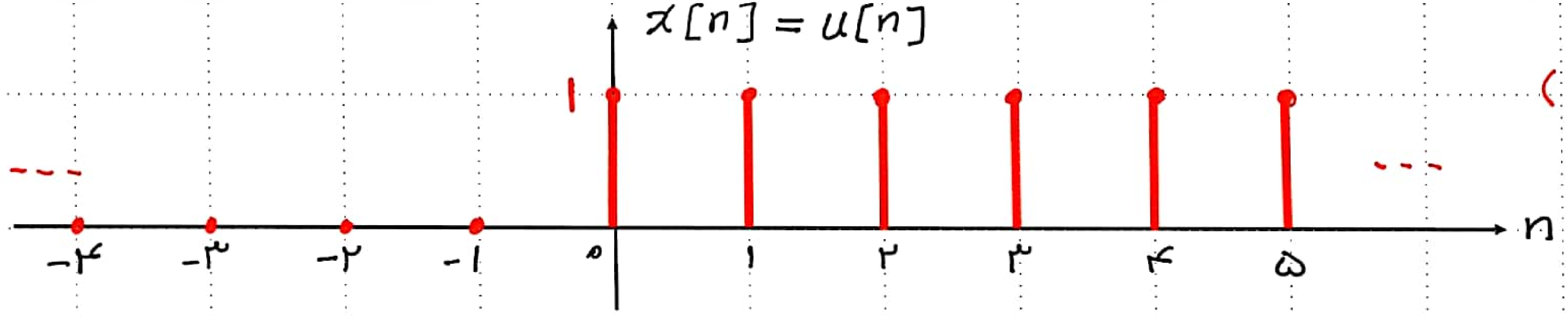
مثال ۱)



$$x[n] = (-1)\delta[n+2] + \left(\frac{1}{2}\right)\delta[n+1] + \left(\frac{3}{2}\right)\delta[n] + (2)\delta[n-1] + (1)\delta[n-2]$$
$$+ (-1)\delta[n-3]$$

$$= -\delta_{-2}[n] + \frac{1}{2}\delta_{-1}[n] + \frac{3}{2}\delta_{0}[n] + 2\delta_{1}[n] + \delta_{2}[n] - \delta_{3}[n]$$

مثال ۲:



$$x[n] = u[n] = \begin{cases} 0 & , \quad n < 0 \\ 1 & , \quad n \geq 0 \end{cases} = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \cdots$$

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k]\,\delta[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} u[k]\,\delta[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k[n]$$

جمع کانولوشن (Convolution Sum)

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\;T\;} \longrightarrow y[n]$$

فرض کنیم T عملکرد یک سیستم خطی را نشان دهد. پاسخ این سیستم به ورودی دلخواه $x[n]$ چگونه است؟

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta_k[n]$$ (نکتهٔ اساسی)

$$y[n] = T\{x[n]\} = T\Big\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta_k[n]\Big\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,T\{\delta_k[n]\}$$

تعریف می‌کنیم: $h_k[n] \triangleq T\{\delta_k[n]\}$ ، $h_k[n]$ را پاسخ سیستم خطی T

به ضربهٔ واحد واقع شده در لحظهٔ $n=k$ یعنی $\delta[n-k]$ نامگذاری می‌کنیم.

$\Rightarrow$ پاسخ سیستم خطی : $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h_k[n]$

یعنی در یک سیستم خطی، پاسخ سیستم به یک ورودی دلخواه مانند سیگنال $x[n]$ ، عبارتست از ترکیب خطی پاسخ های سیستم به ورودی های ضربهٔ واحد واقع در نقاط مختلف $n = k \in \mathbb{Z}$ که وزن هر پاسخ ضربه را مقدار سیگنال ورودی در آن لحظه، یعنی $x[k]$ تعیین می کند.

مثال) فرض کنیم $x[n] = -\delta[n+1] + 2\delta[n] + \delta[n-1]$ ورودی یک سیستم خطی تعریف شده توسط تبدیل T باشد. با معلوم بودن :

$$h_{-1}[n] = T\{\delta_{-1}[n]\} = T\{\delta[n+1]\} \quad , \quad h_0[n] = T\{\delta_0[n]\} = T\{\delta[n]\}$$

$$h_1[n] = T\{\delta_1[n]\} = T\{\delta[n-1]\}$$ و

خواهیم داشت:

$$y[n] = x[-1]h_{-1}[n] + x[0]h_0[n] + x[1]h_1[n]$$

$$= (-1)h_{-1}[n] + (2)h_0[n] + (1)h_1[n]$$

پس در هر سیستم خطی برای تعیین پاسخ سیستم به هر ورودی دلخواه کافی است که پاسخ سیستم را به ورودی های ضربهٔ واحدی که در نقاط غیرصفر آن ورودی به سیستم اعمال شده‌اند بدانیم، یعنی سیگنالهای $h_k[n]$ را.

$$x[n] \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow y[n]$$

حال فرض کنیم این سیستم علاوه بر خطی بودن ، تغییر ناپذیر با زمان نیز باشد ، به عبارت دیگر T معرف یک سیستم LTI باشد . در این صورت داریم :

$$h_k[n] = T\{\delta_k[n]\} = T\{\delta[n-k]\} \overset{TI}{=} h_0[n-k] \triangleq h[n-k]$$

که در آن $h[n] = h_0[n] = T\{\delta[n]\}$ ، پاسخ سیستم به ورودی ضربه واحد واقع در لحظهٔ $n=0$ است که آن را به نام پاسخ ضربهٔ سیستم (Impulse Response) می‌نامیم .

بنابراین فقط با معلوم بودن پاسخ سیستم LTI به ورودی ضربهٔ واحد، یعنی $h[n]$،

برای هر ورودی دلخواه $x[n]$ ، پاسخ سیستم عبارتست از :

خطی — TI

$$y[n] \stackrel{\text{خطی}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n] \stackrel{TI}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Convolution Sum — رابطهٔ جمع کانولوشن

$y[n]$ در رابطهٔ فوق را حاصل جمع کانولوشن بین دو سیگنال زمان گسستهٔ $x[n]$ و $h[n]$

می‌نامیم و می‌نویسیم :
$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

نکتهٔ مهم : در یک سیستم LTI ، پاسخ ضربهٔ واحد سیستم یعنی $h[n]$ همهٔ اطلاعات سیستم را دارد.

توجه: در رابطهٔ جمع کانولوشن $y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$ ،

$h[-k]$ معکوس شدهٔ زمانی پاسخ ضربه در محور زمان k است و $h[n-k]$ شیفت یافته آن

است که برای $n>0$ به راست و برای $n<0$ به چپ منتقل می‌گردد و برای n های

مختلف با محاسبهٔ حاصل جمع حاصلضرب های $x[k]$ در $h[n-k]$ ، مقدار $y[n]$

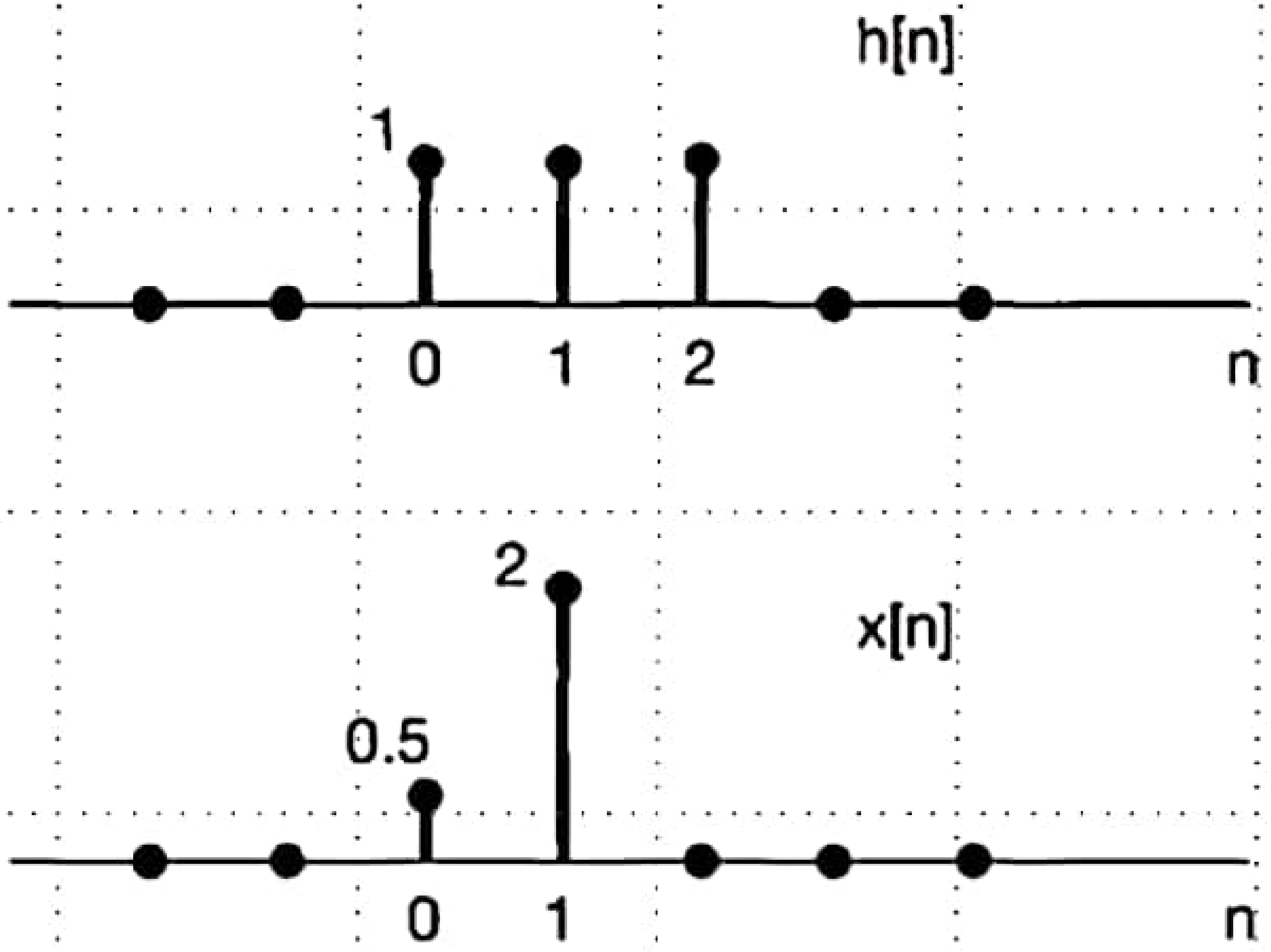
محاسبه می‌گردد.

یادآوری:

$x[n+N]$:
- اگر $N>0 \Rightarrow$ N واحد انتقال به چپ
- اگر $N<0 \Rightarrow$ $|N|$ " " راست

$x[-n+N]$:
- اگر $N>0 \Rightarrow$ N " " راست
- اگر $N<0 \Rightarrow$ $|N|$ " " چپ

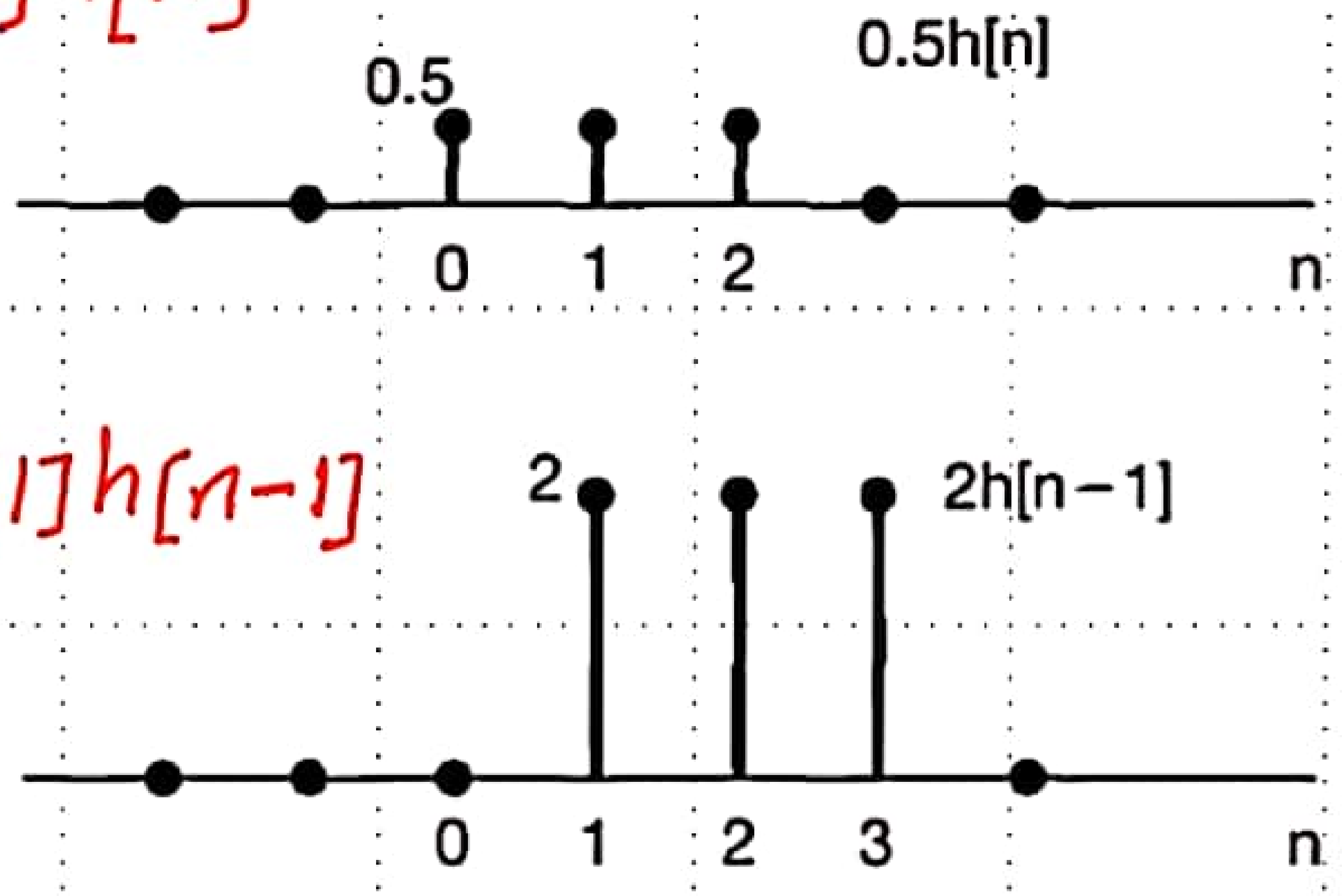
مثال ۱)



(a)

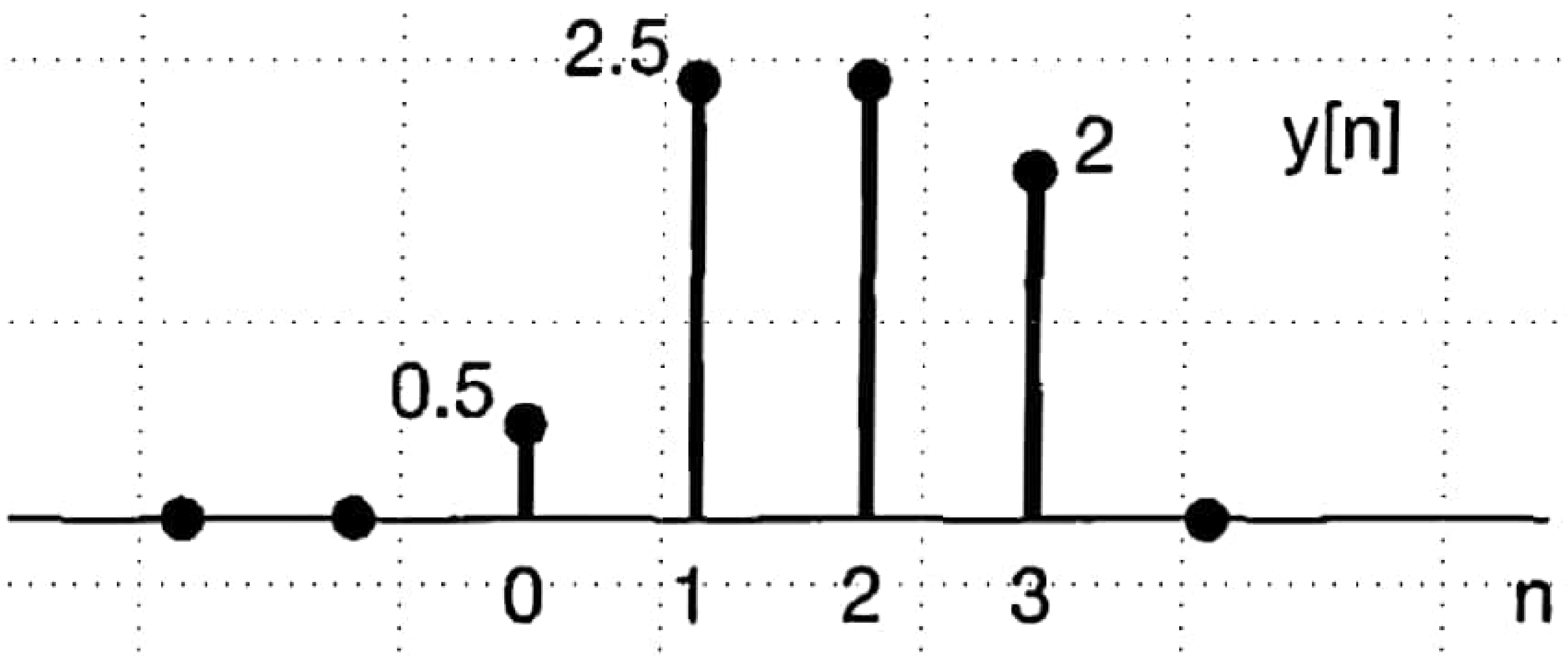
$x[0]h[n]$

$x[1]h[n-1]$



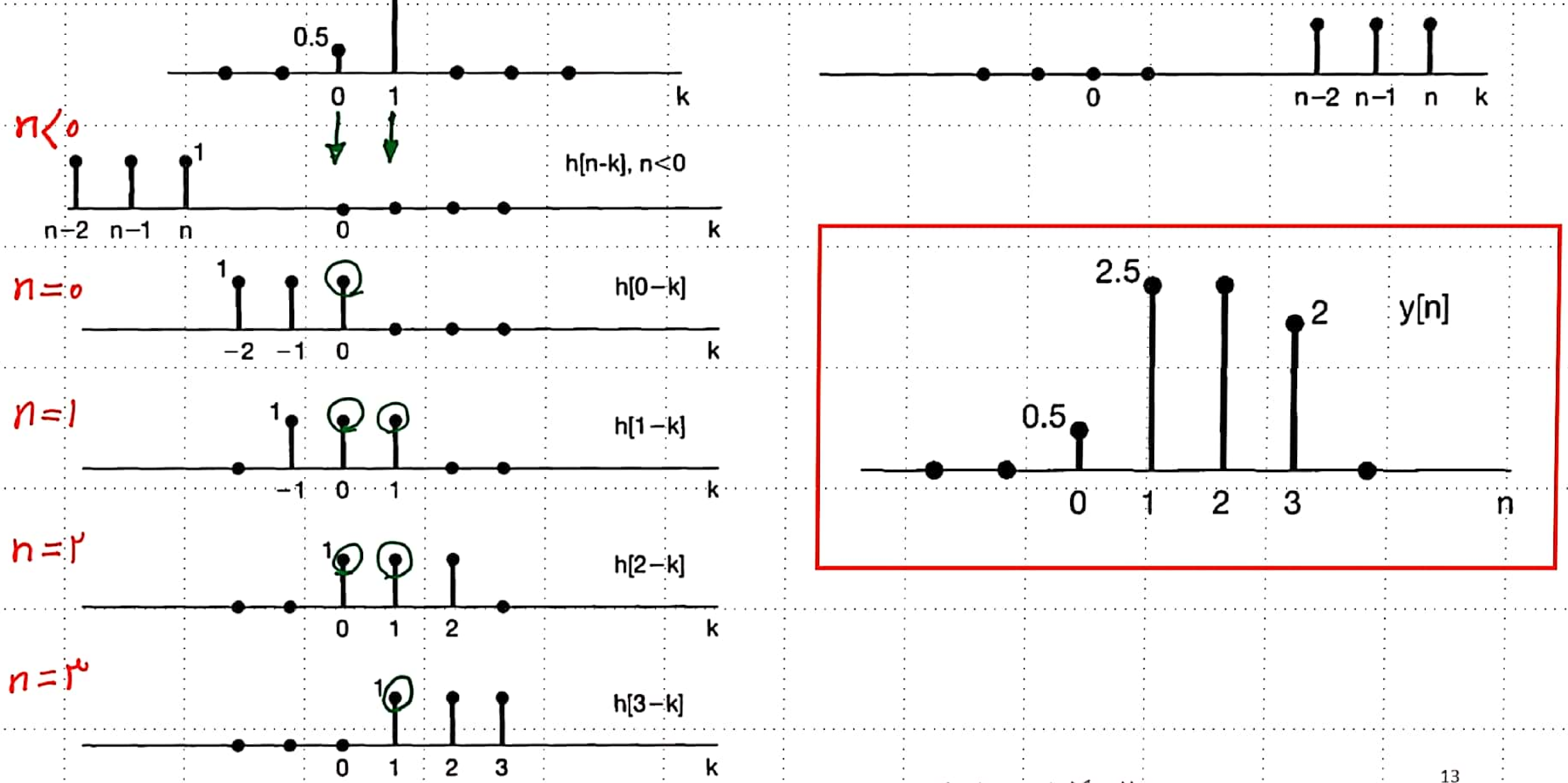
(b)

$$y[n] = x[0]h[n-0] + x[1]h[n-1] = 0.5h[n] + 2h[n-1].$$



(c)

توجیه ترسیمی مثال ۱



مثال ۲)

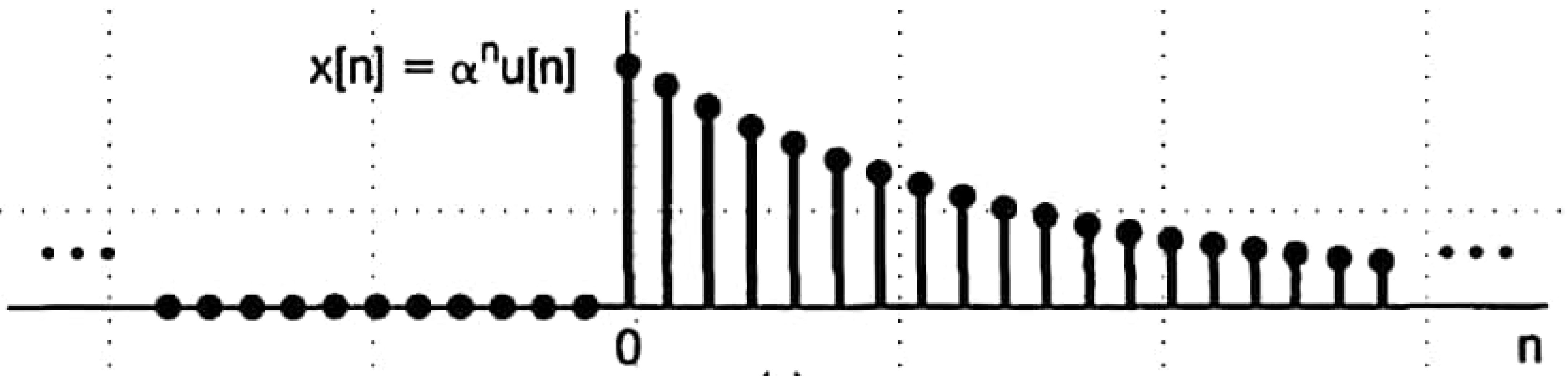
Consider an input $x[n]$ and a unit impulse response $h[n]$ given by

$$x[n] = \alpha^n u[n],$$
$$h[n] = u[n],$$

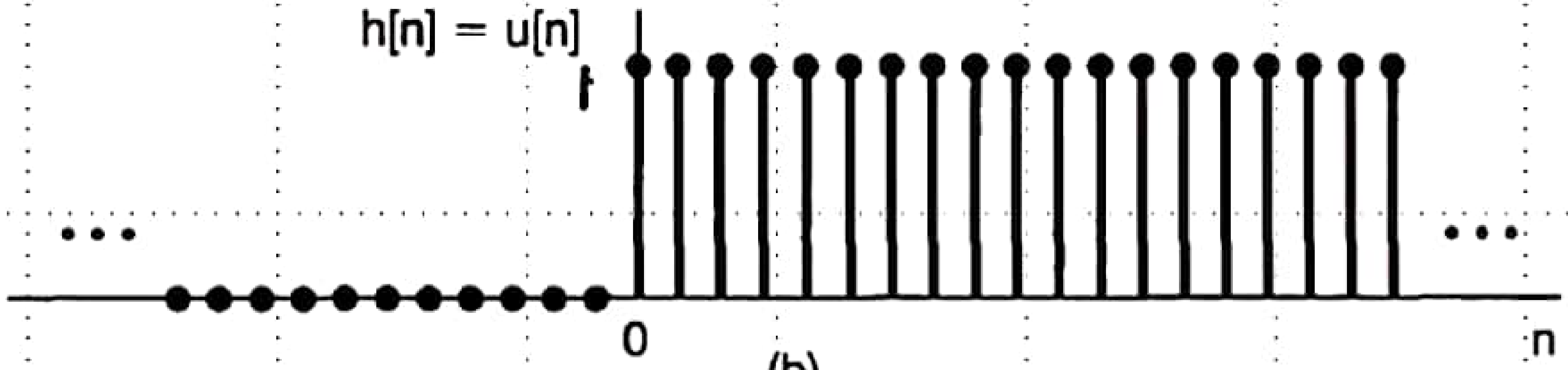
$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = ?$$

with $0 < \alpha < 1$. These signals are illustrated in Figure 2.5. Also, to help us in visualizing and calculating the convolution of the signals, in Figure 2.6 we have depicted the signal $x[k]$ followed by $h[-k]$, $h[-1-k]$, and $h[1-k]$ (that is, $h[n-k]$ for $n = 0, -1$, and $+1$) and, finally, $h[n-k]$ for an arbitrary positive value of n and an arbitrary negative value of n. From this figure, we note that for $n < 0$, there is no overlap between the nonzero points in $x[k]$ and $h[n-k]$. Thus, for $n < 0$, $x[k]h[n-k] = 0$ for all values of k, and hence, from eq. (2.6), we see that $y[n] = 0$, $n < 0$. For $n \geq 0$,

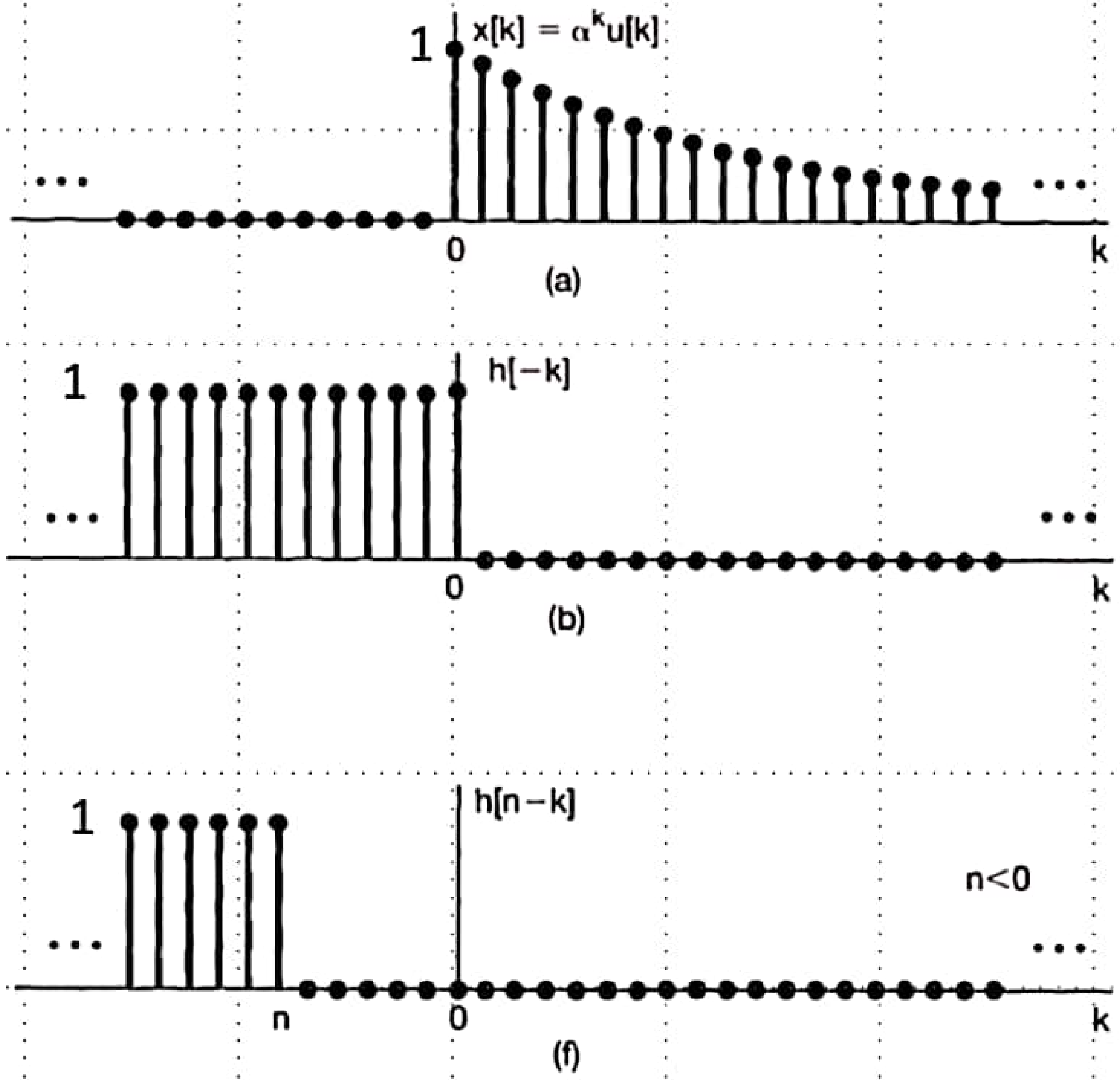
$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^k, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

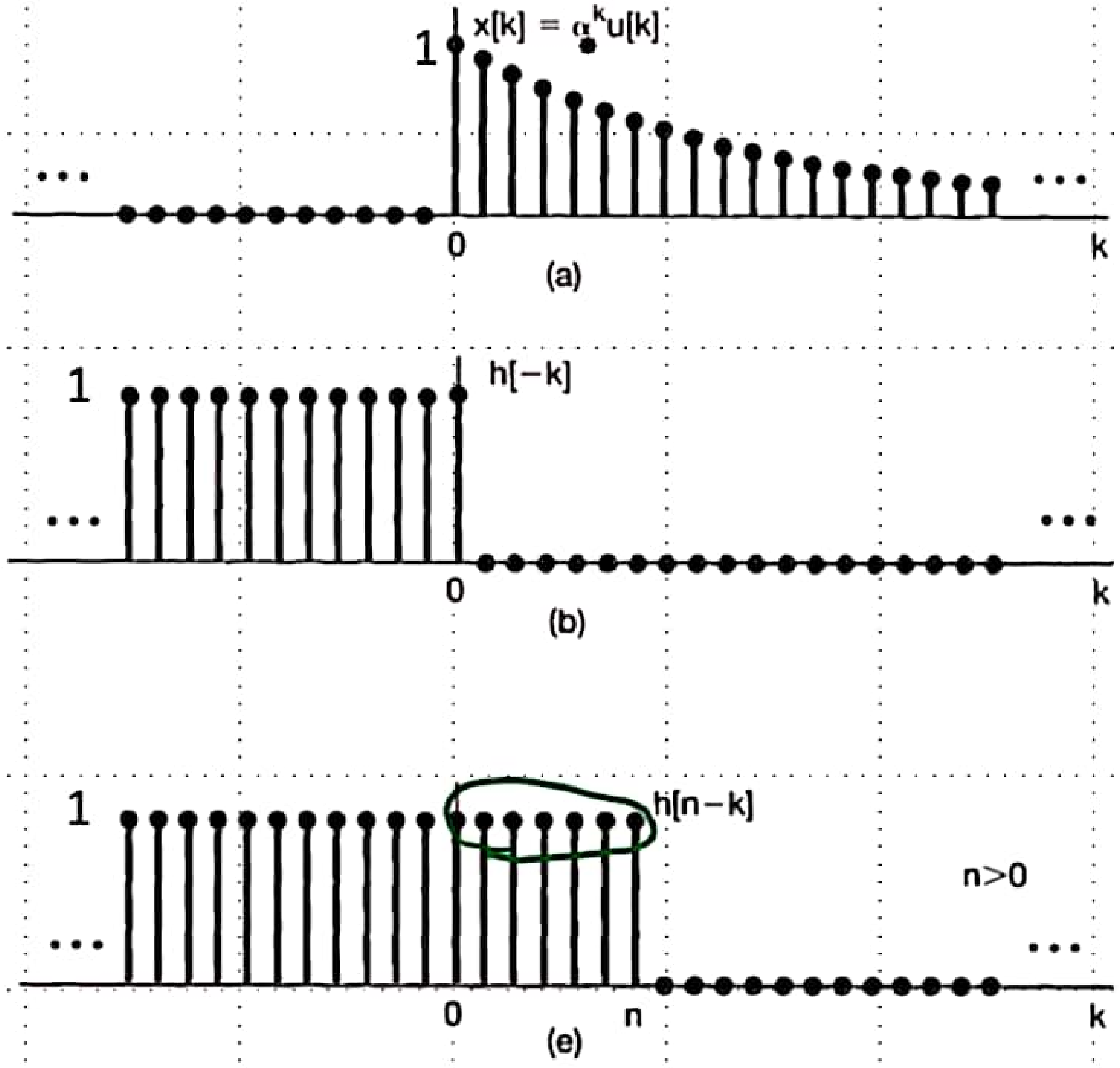


(a)



(b)





$x[k]h[n-k] = 0 \quad \forall n<0$

$x[k]h[n-k] \neq 0 \quad \forall n \geqslant 0$

$\Rightarrow y[n] = 0 \quad , \quad \forall n<0$

Thus, for $n \geq 0$,

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \qquad \text{for } n \geq 0.$$

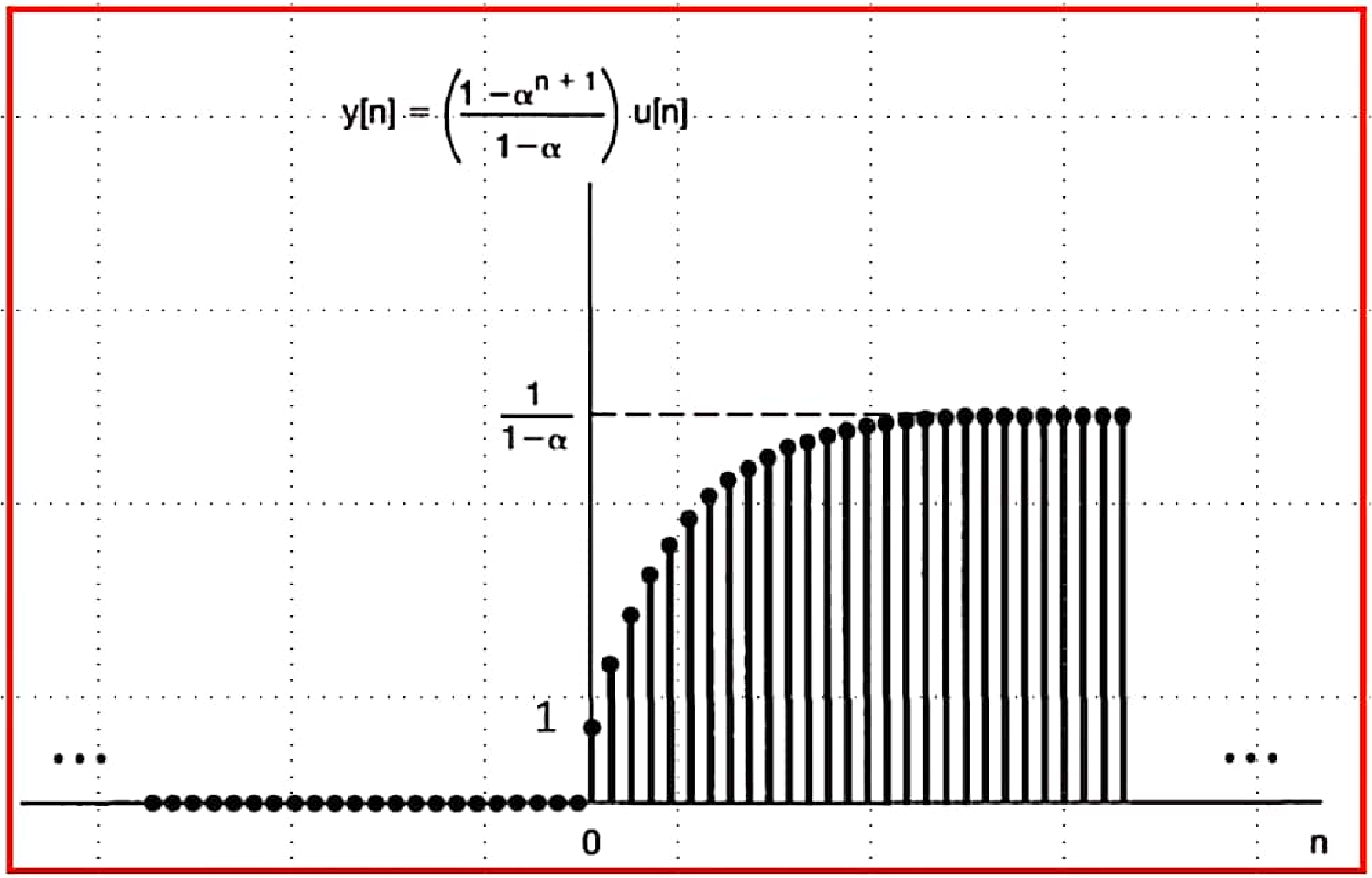
مجموع $n+1$ جمله اول یک تصاعد هندسی
با قدر نسبت α و جمله اول برابر ۱ .

Thus, for all n,

$$y[n] = \left(\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\right)u[n].$$

یادآوری: $a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^n$

$$= a_1 \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$



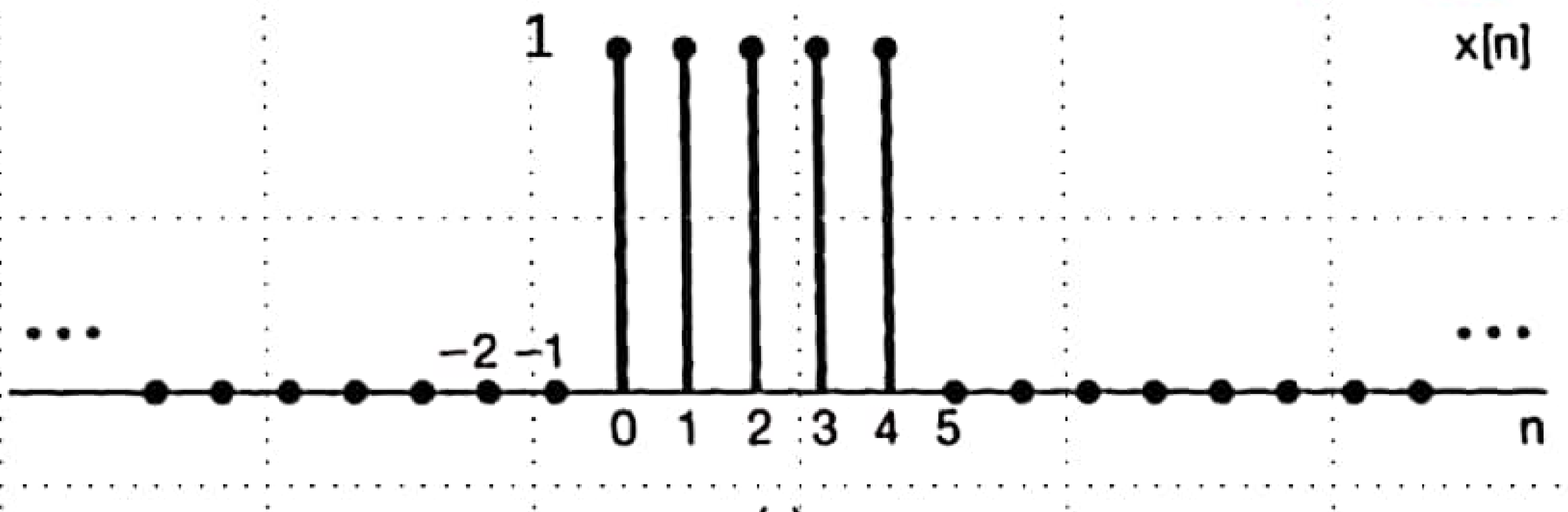
مثال ۳)

As a further example, consider the two sequences

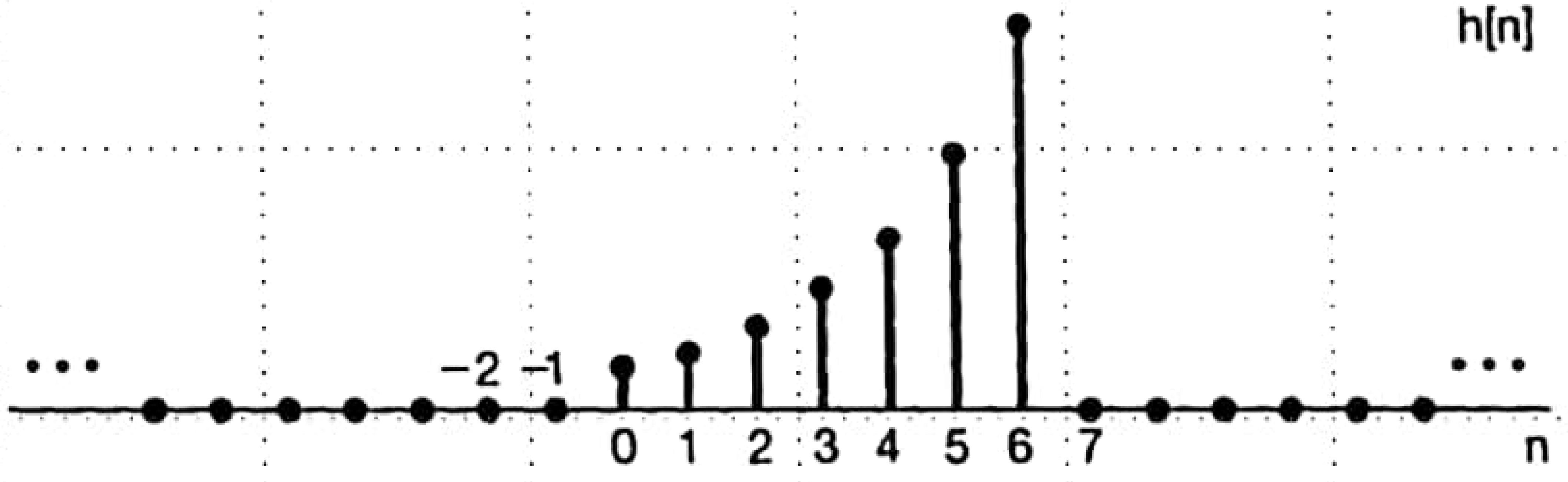
$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 4 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{and}$$

$$h[n] = \begin{cases} \alpha^n, & 0 \le n \le 6 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

for a positive value of $\alpha > 1$.



(a)

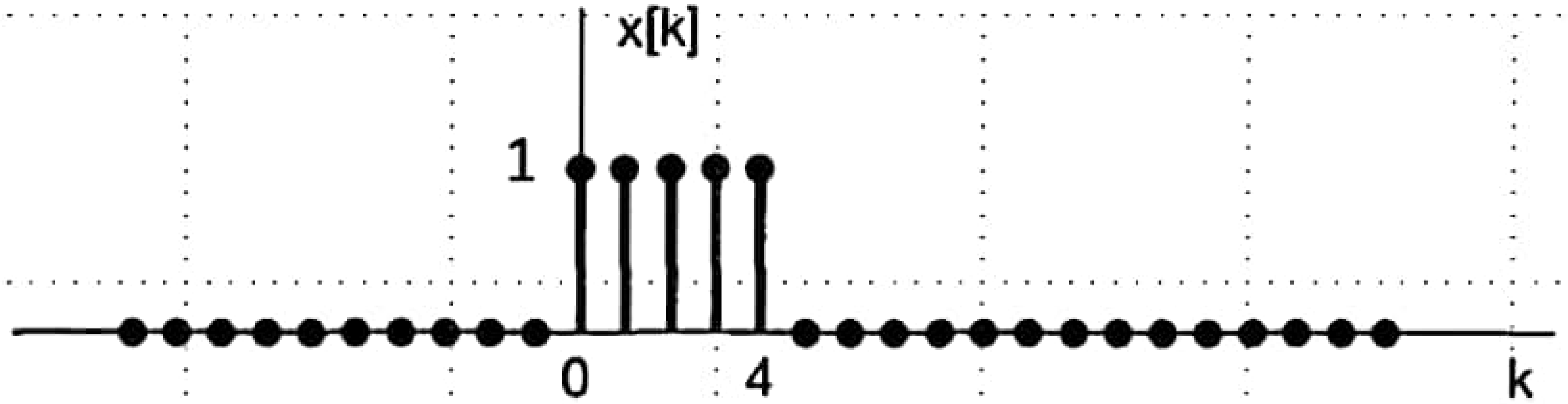


(b)

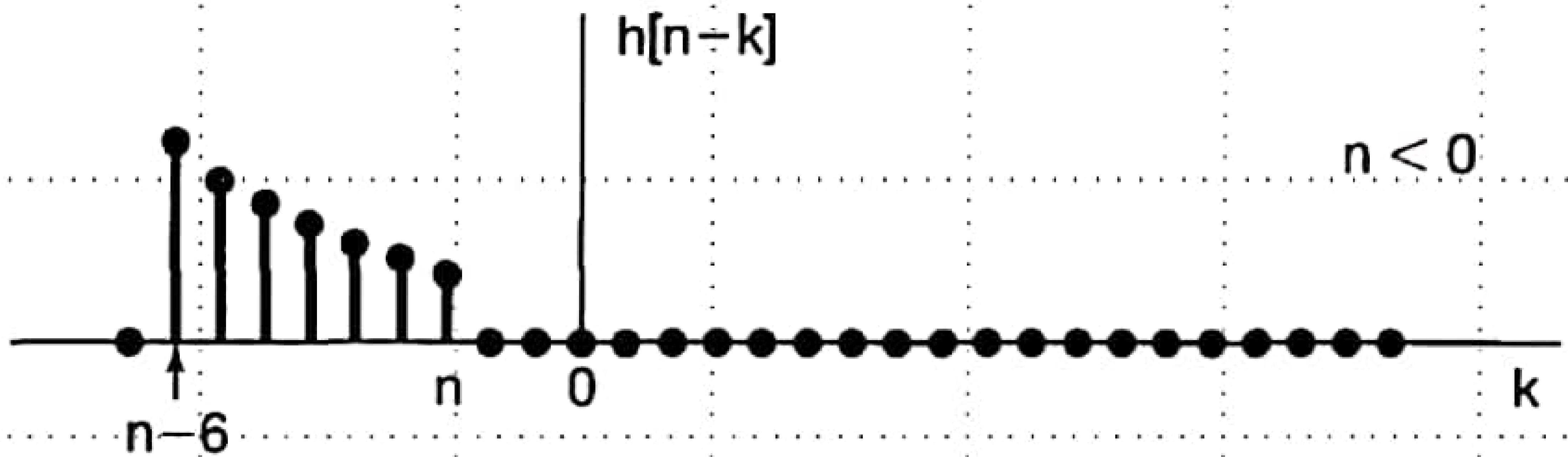
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

با توجه به پهنای ۵ نقطه‌ای $x[n]$ و ۷ نقطه‌ای $h[n]$ حالات مختلفی قابل بررسی هستند.

Interval 1. For $n < 0$, there is no overlap between the nonzero portions of $x[k]$ and $h[n-k]$, and consequently, $y[n] = 0$.



(a)



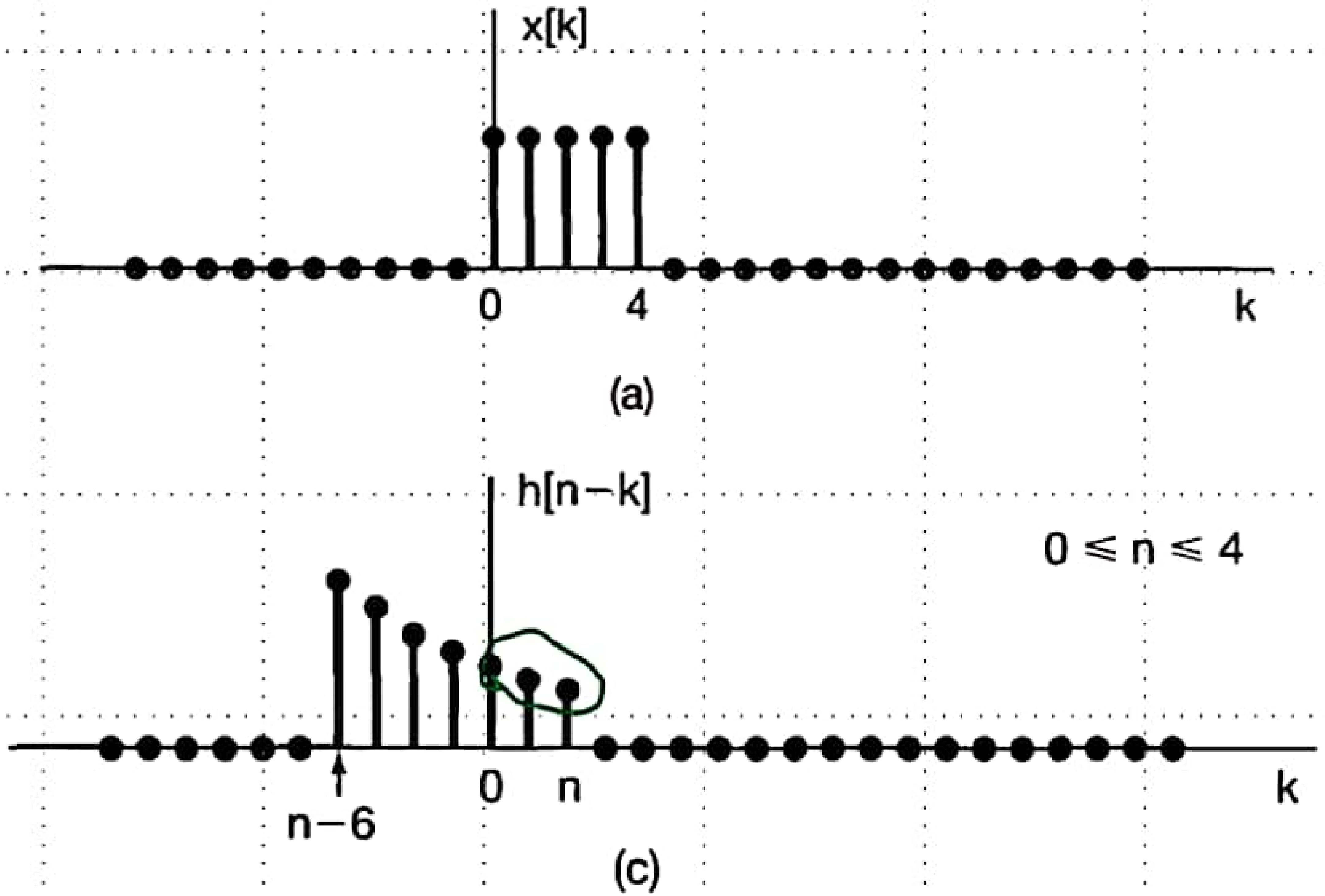
(b)

برای مقادیر $n<0$ هیچ گونه همپوشانی غیر صفری بین $x[K]$ و $h[n-K]$ وجود ندارد، لذا:

$$\forall n<0 : y[n]=0$$

Interval 2. For $0 \le n \le 4$,

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & 0 \le k \le n \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$



Thus, in this interval,

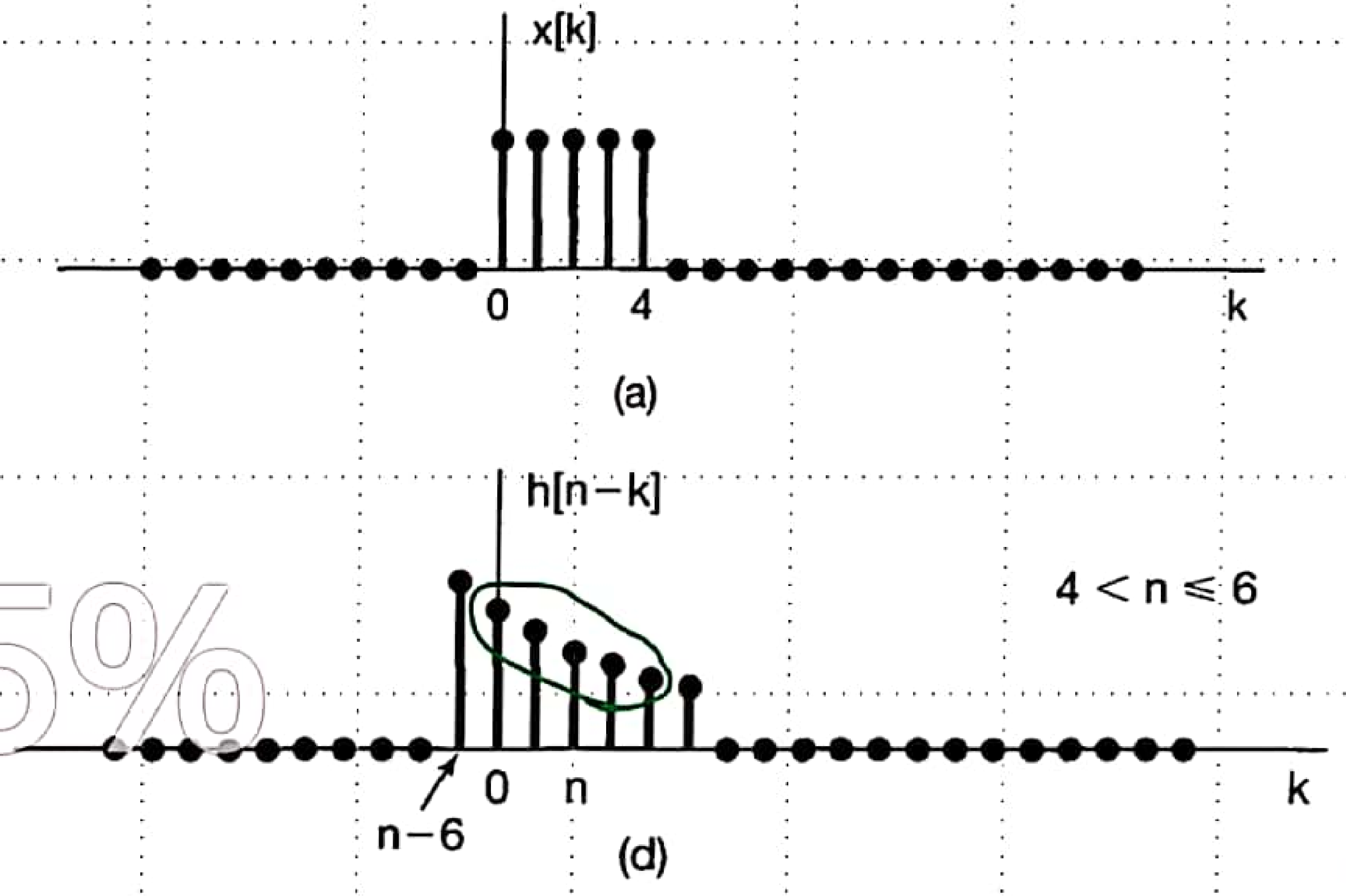
$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k}.$$

$r = n - k,$: تغییر متغیر

$$y[n] = \sum_{r=0}^{n} \alpha^{r} = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}.$$

Interval 3. For $n > 4$ but $n - 6 \leq 0$ (i.e., $4 < n \leq 6$),

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & 0 \leq k \leq 4 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

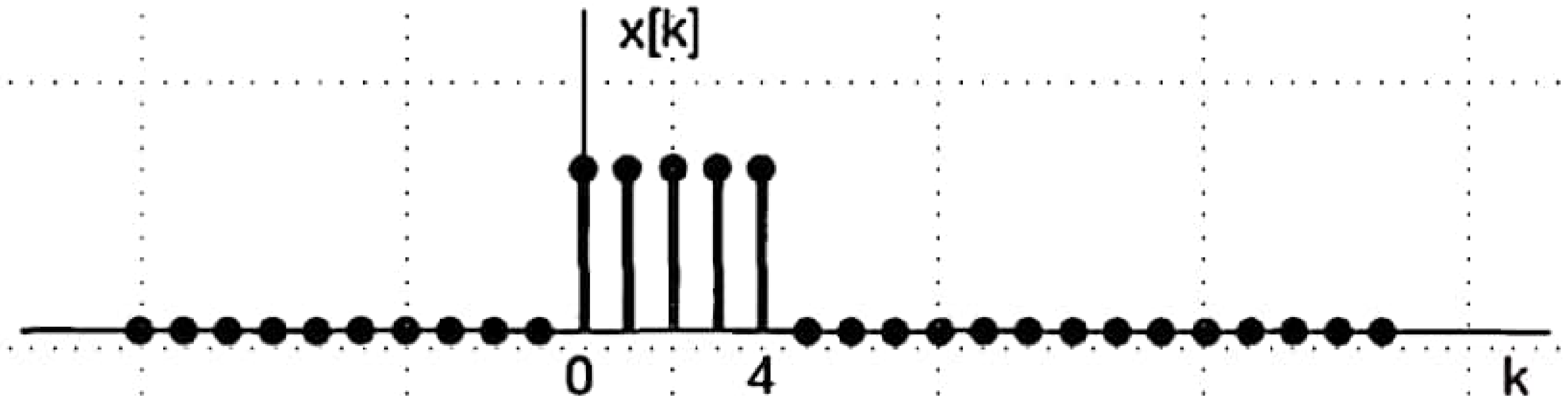


Thus, in this interval,

$$y[n] = \sum_{k=0}^{4} \alpha^{n-k}.$$

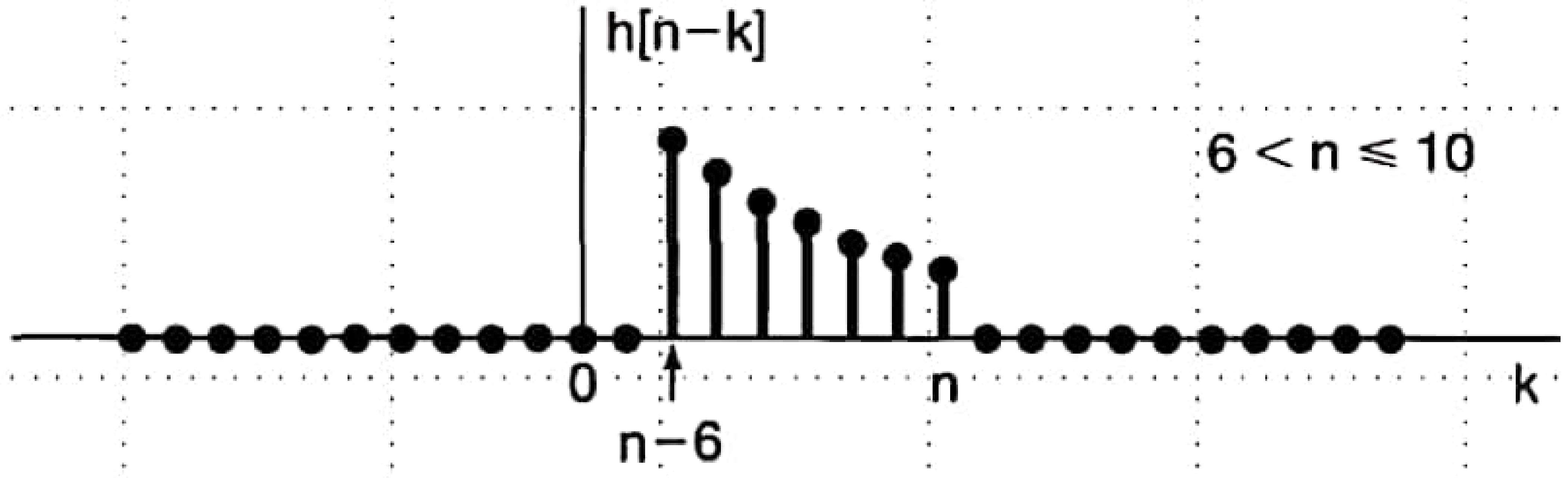
$$y[n] = \alpha^n \sum_{k=0}^{4} (\alpha^{-1})^k = \alpha^n \frac{1 - (\alpha^{-1})^5}{1 - \alpha^{-1}} = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}.$$

Interval 4. For $n > 6$ but $n - 6 \le 4$ (i.e., for $6 < n \le 10$),



$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & (n-6) \le k \le 4 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases},$$

so that



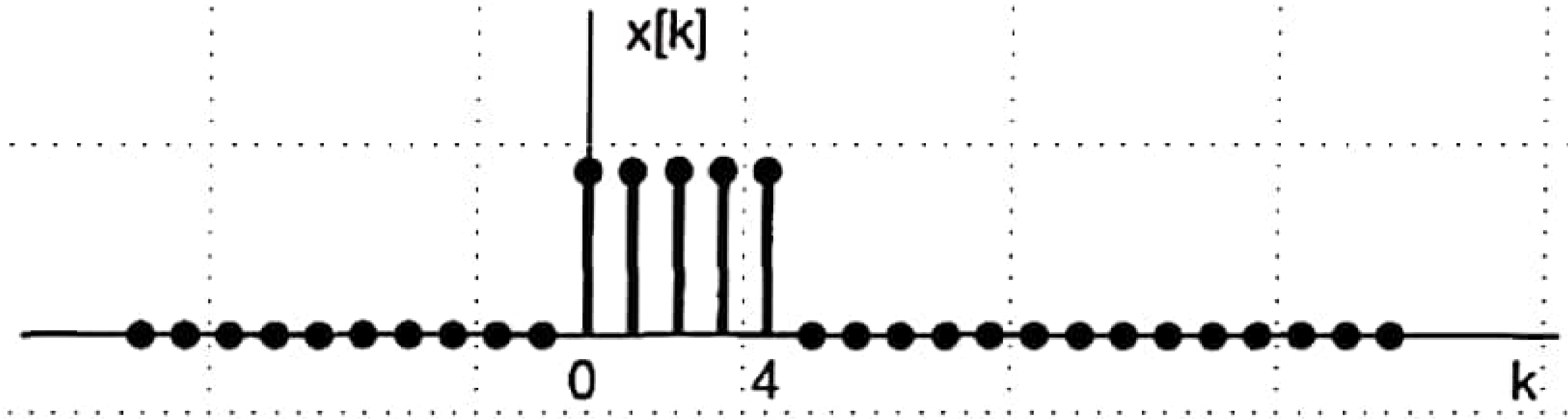
$$y[n] = \sum_{k=n-6}^{4} \alpha^{n-k}.$$

Letting $r = k - n + 6$, we obtain   تغییر متغیر:

$$y[n] = \sum_{r=0}^{10-n} \alpha^{6-r} = \alpha^6 \sum_{r=0}^{10-n} (\alpha^{-1})^r = \alpha^6 \frac{1-\alpha^{n-11}}{1-\alpha^{-1}} = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^7}{1-\alpha}.$$

Interval 5. For $n - 6 > 4$, or equivalently, $n > 10$, there is no overlap between the nonzero portions of $x[k]$ and $h[n-k]$, and hence,

$$y[n] = 0.$$

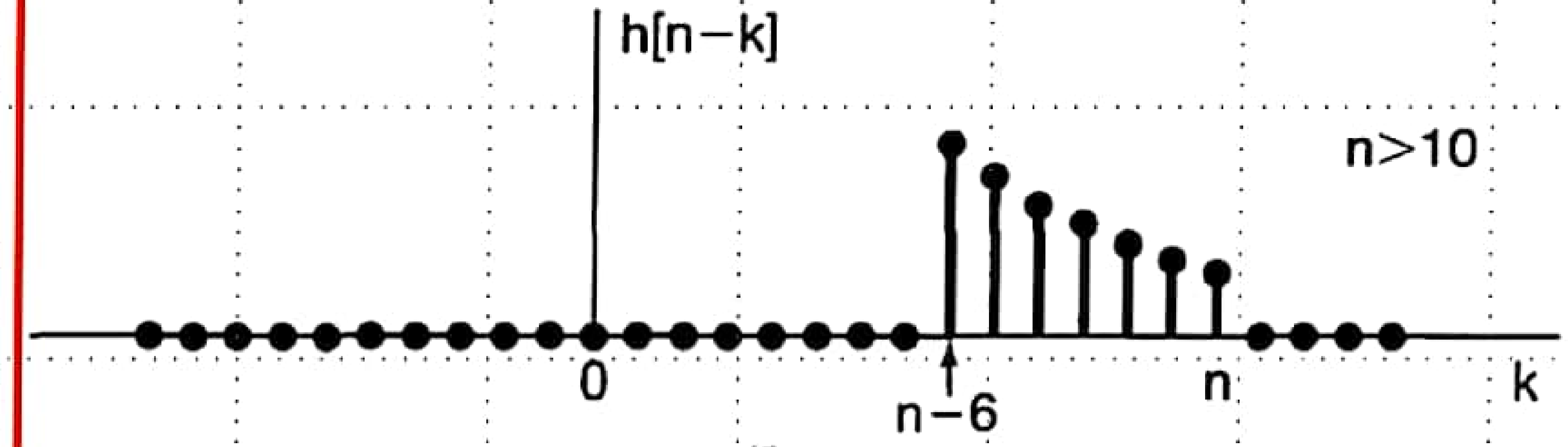


(a)

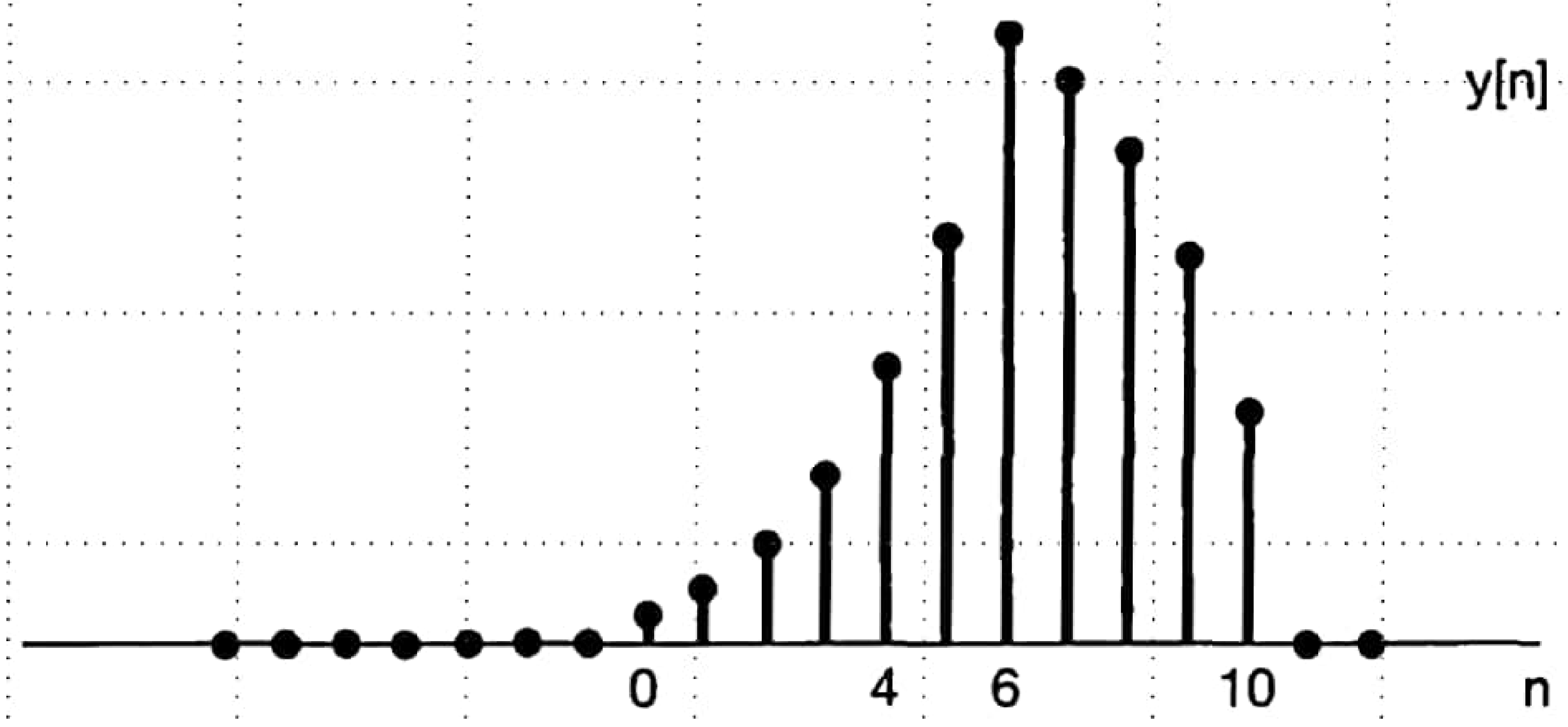
Summarizing, then, we obtain

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \dfrac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}, & 0 \le n \le 4 \\ \dfrac{\alpha^{n-4}-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}, & 4 < n \le 6 \\ \dfrac{\alpha^{n-4}-\alpha^{7}}{1-\alpha}, & 6 < n \le 10 \\ 0, & 10 < n \end{cases},$$

which is pictured in Figure 2.10.



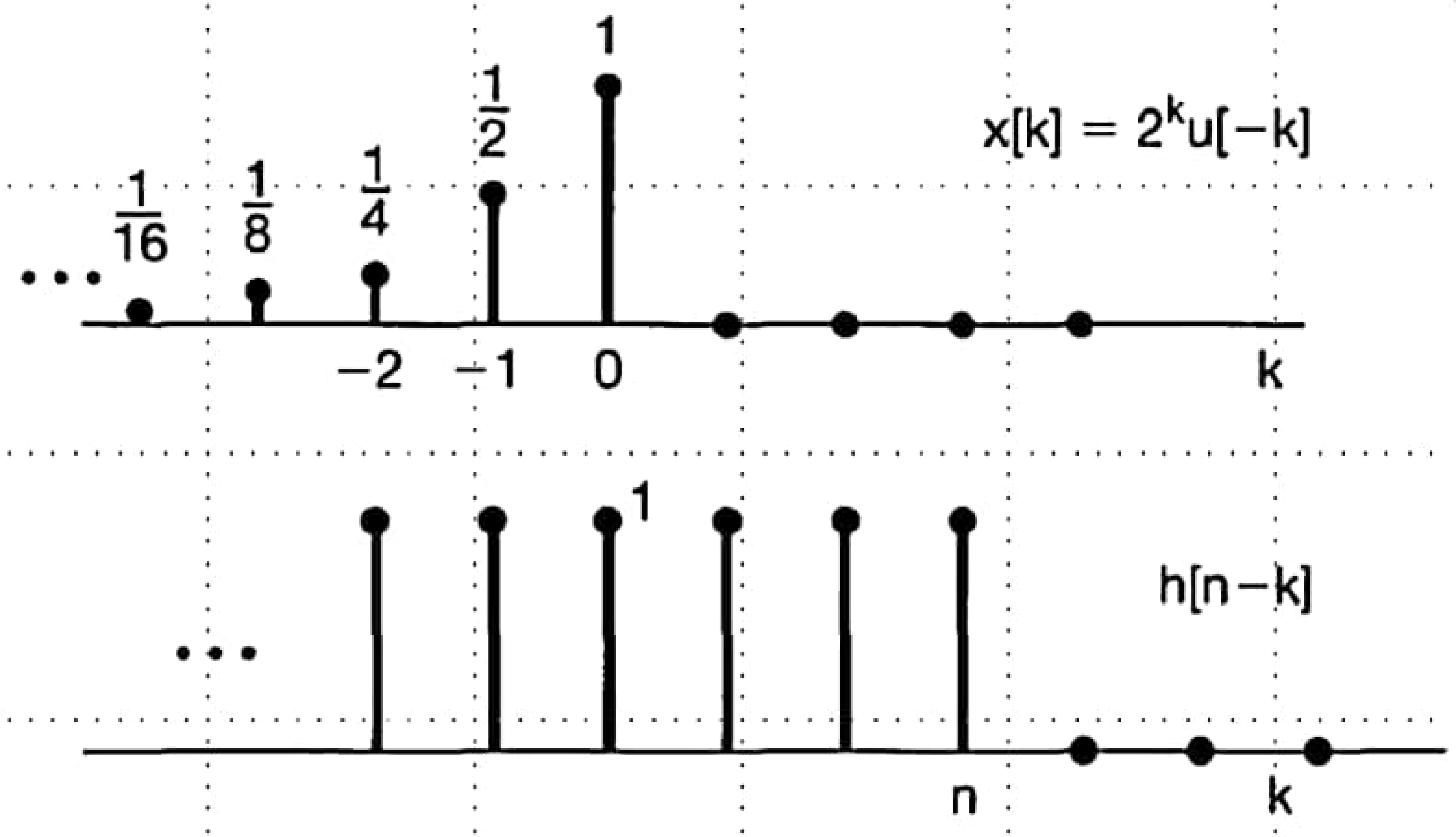
(f)


y[n]
0
4
6
10
n

مثال ۵ (

Consider an LTI system with input $x[n]$ and unit impulse response $h[n]$ specified as follows:

$$x[n] = 2^n u[-n],$$
$$h[n] = u[n].$$



(a)

When $n \geq 0$, $x[k]h[n-k]$ has nonzero samples in the interval $k \leq 0$.

It follows that, for $n \geq 0$,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{0} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{0} 2^k.$$

To evaluate the infinite sum we may use the *infinite sum formula*,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}, \quad 0 < |\alpha| < 1. \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=-\infty}^{0} 2^k = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^r = \frac{1}{1-(1/2)} = 2.$$

Thus, $y[n]$ takes on a constant value of 2 for $n \geq 0$.

When $n < 0$, $x[k]h[n-k]$ has nonzero samples for $k \le n$. It follows that, for $n < 0$,

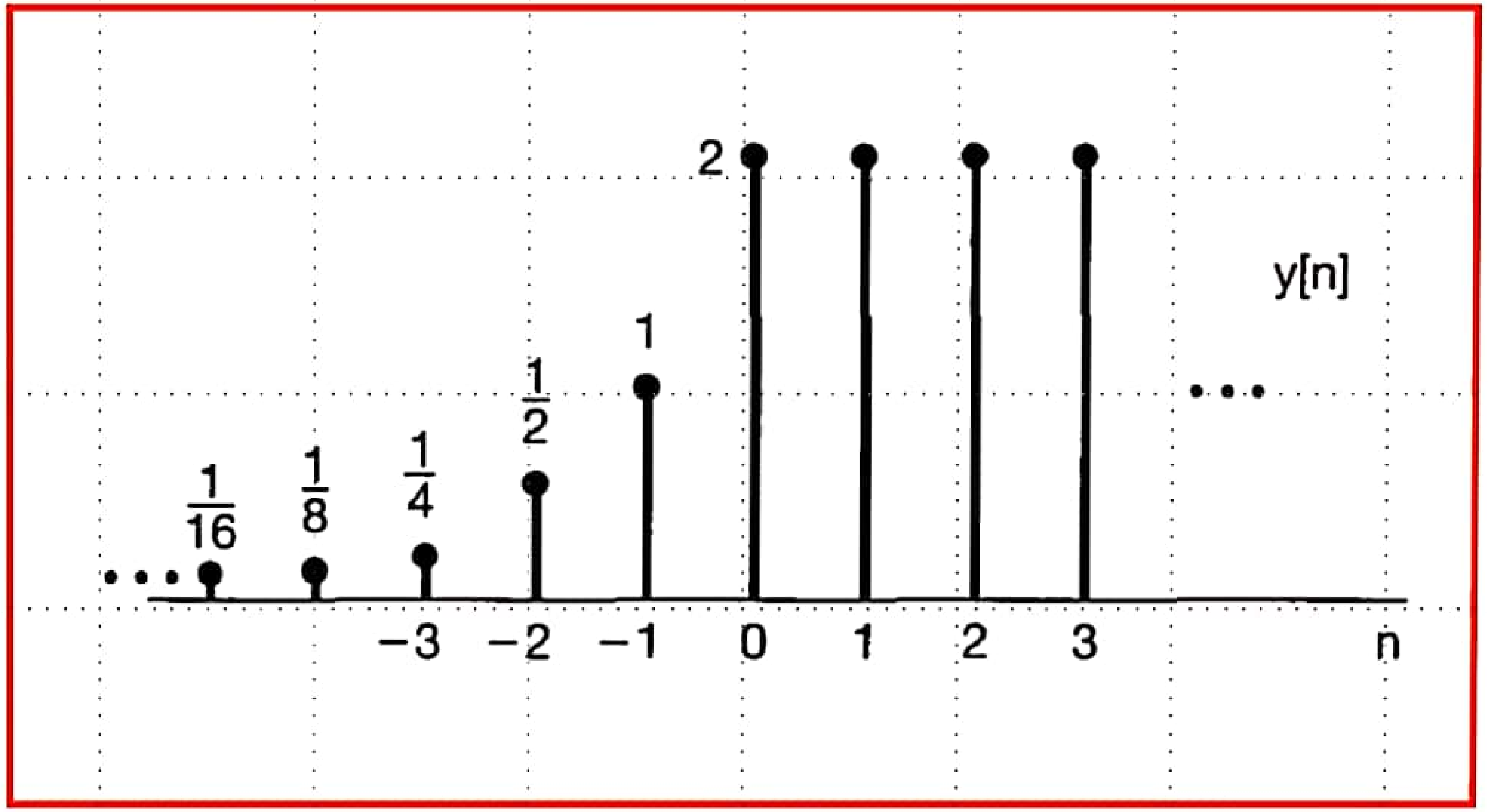
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} 2^k.$$

$m = -k$

$$\Rightarrow y[n] = \sum_{m=-n}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} = 2^{n+1}$$



بسم الله الرّحمن الرّحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده برق و کامپیوتر

تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مدرس: مسعود عمومی

جلسه هشتم _ بخش 2.2 کتاب

با سلام خدمت دانشجویان محترم

سیستم‌های خطّی و تغییرناپذیر با زمان (LTI) زمان‌پیوسته و انتگرال کانولوشن

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\;T\;} \longrightarrow y(t)$$

خطّی :
$$T\left\{\sum_{k=1}^{N} \alpha_k x_k(t)\right\} = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k y_k(t)$$

تغییرناپذیر با زمان :
$$T\{x(t-t_0)\} = T\{Z_{t_0}\{x(t)\}\}$$
$$= Z_{t_0}\{T\{x(t)\}\}$$
$$= y(t-t_0)$$

نکتهٔ اساسی: نمایش هر سیگنال زمان‌پیوستهٔ دلخواه بر حسب سیگنال‌های ضربهٔ واحد

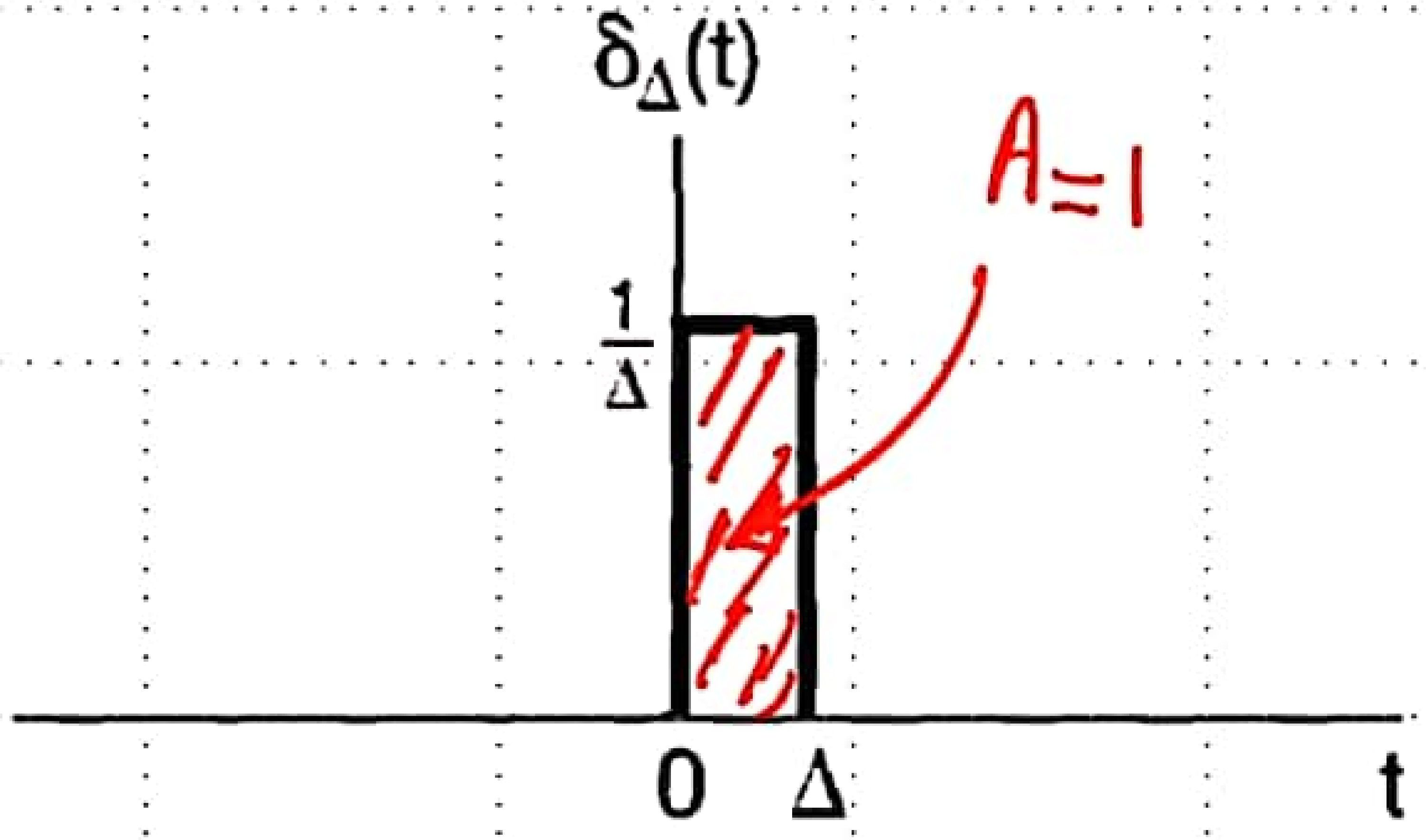
با توجه به تعریف ضربهٔ واحد ایده‌آل به صورت حدّ پالس‌های واحد ایده‌آل ($\delta_\Delta(t)$) در شرایط $\Delta \to 0$ و همچنین ویژگی غربالی سیگنال ضربهٔ واحد ایده‌آل ، می‌توان برای هر سیگنال دلخواه $x(t)$ نوشت :

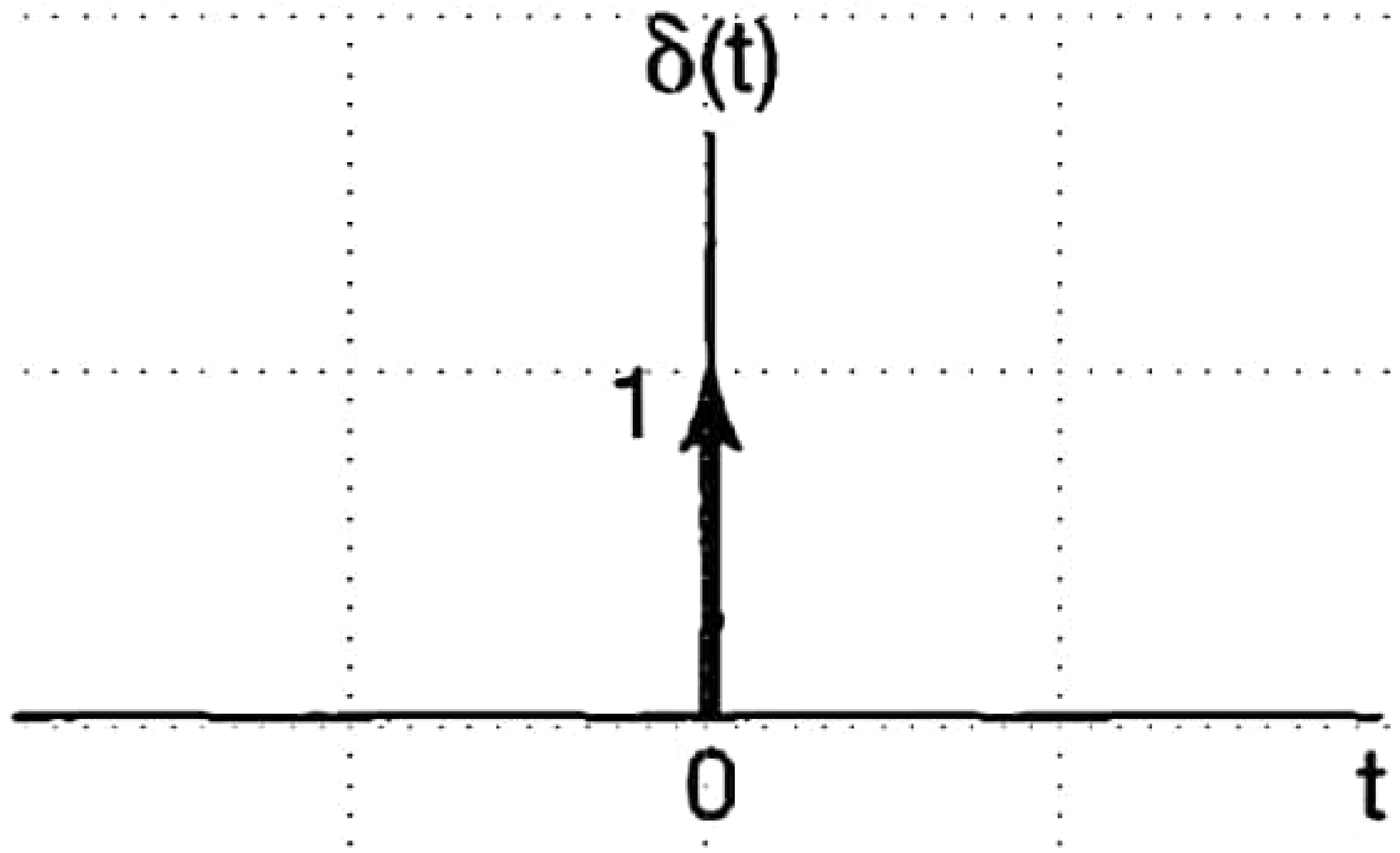
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau$$

اثبات اوّل : $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)\, d\tau = 1 \Rightarrow \forall t: \ x(t)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)\, d\tau = x(t)$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau)\, d\tau = x(t) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau = x(t)$$

اثبات دوم (شهودی):

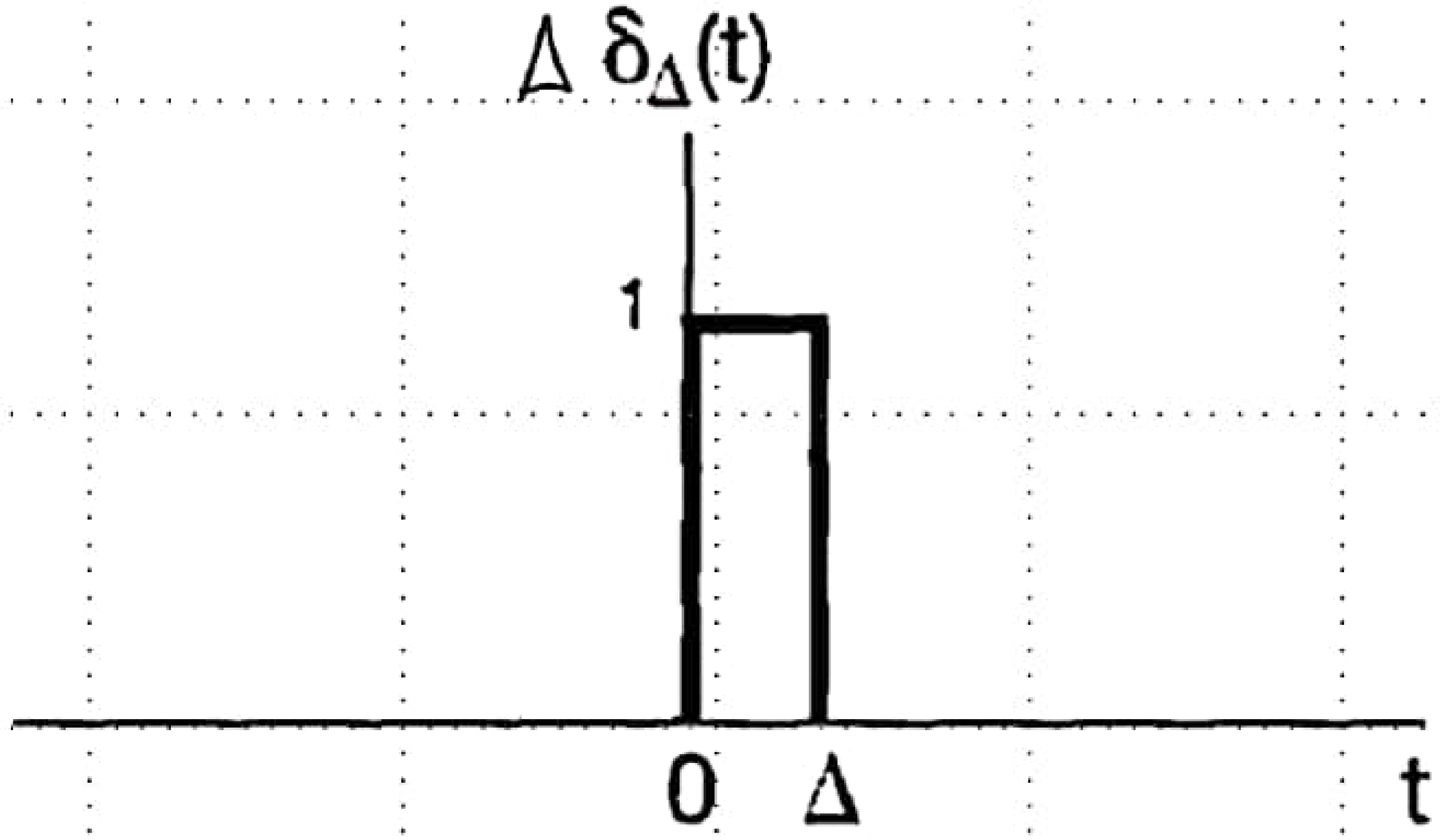




$$\underset{\Delta\to 0}{\text{حد}}\ \delta_\Delta(t) = \delta(t)$$

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & , \; 0<t<\Delta \\ 0 & , \; oth. \end{cases}$$

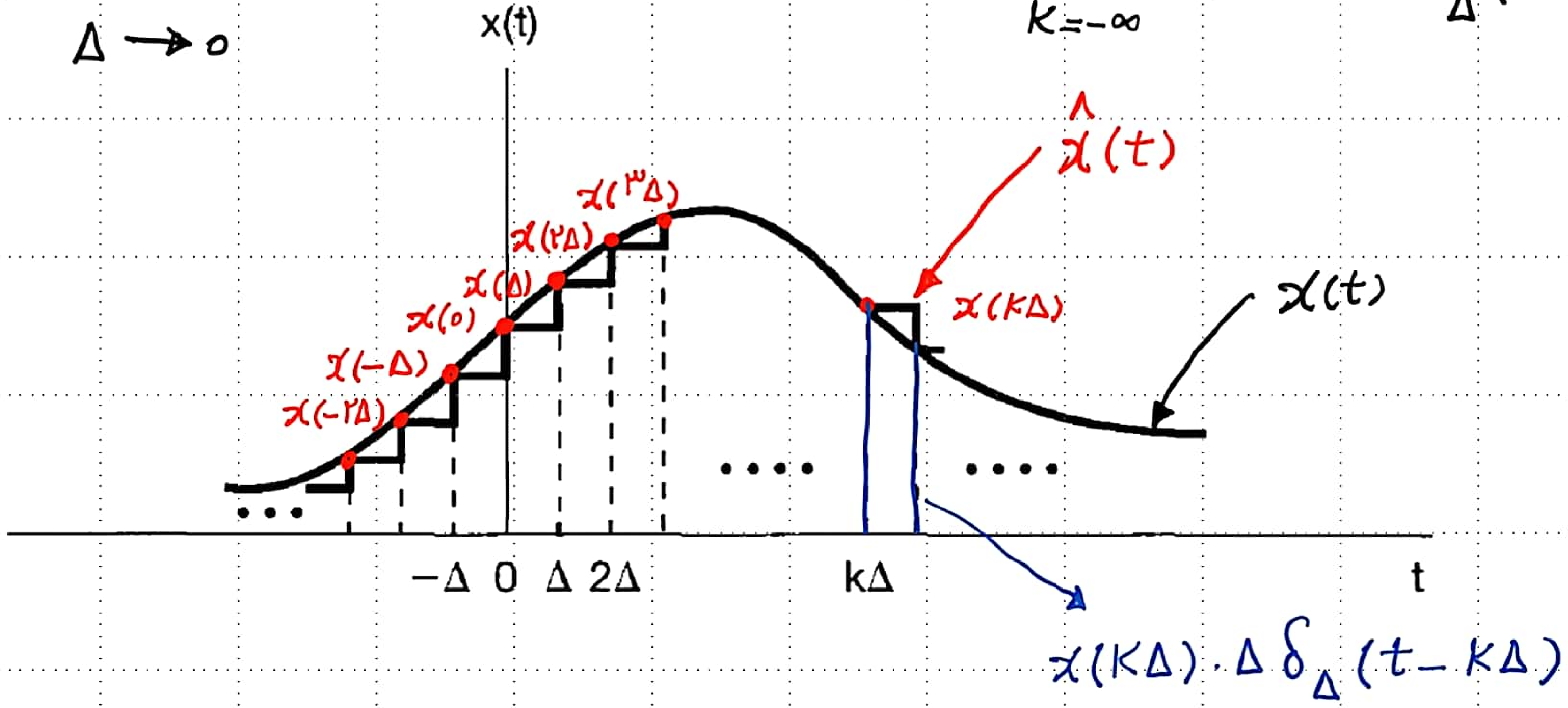
$$\Rightarrow \Delta\,\delta_\Delta(t) = \begin{cases} 1 & , \; 0<t<\Delta \\ 0 & , \; oth. \end{cases}$$



تقریب پلکانی یک سیگنال دلخواه $x(t)$ برحسب پالس های مختلف

$$x(t) = \underset{\Delta \to 0}{\text{حدّ}}\ \hat{x}(t)$$

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\cdot\Delta\,\delta_{\Delta}(t-k\Delta)$$



$$\Rightarrow \quad x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \hat{x}(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \cdot \Delta\, \delta_{\Delta}(t-k\Delta)$$

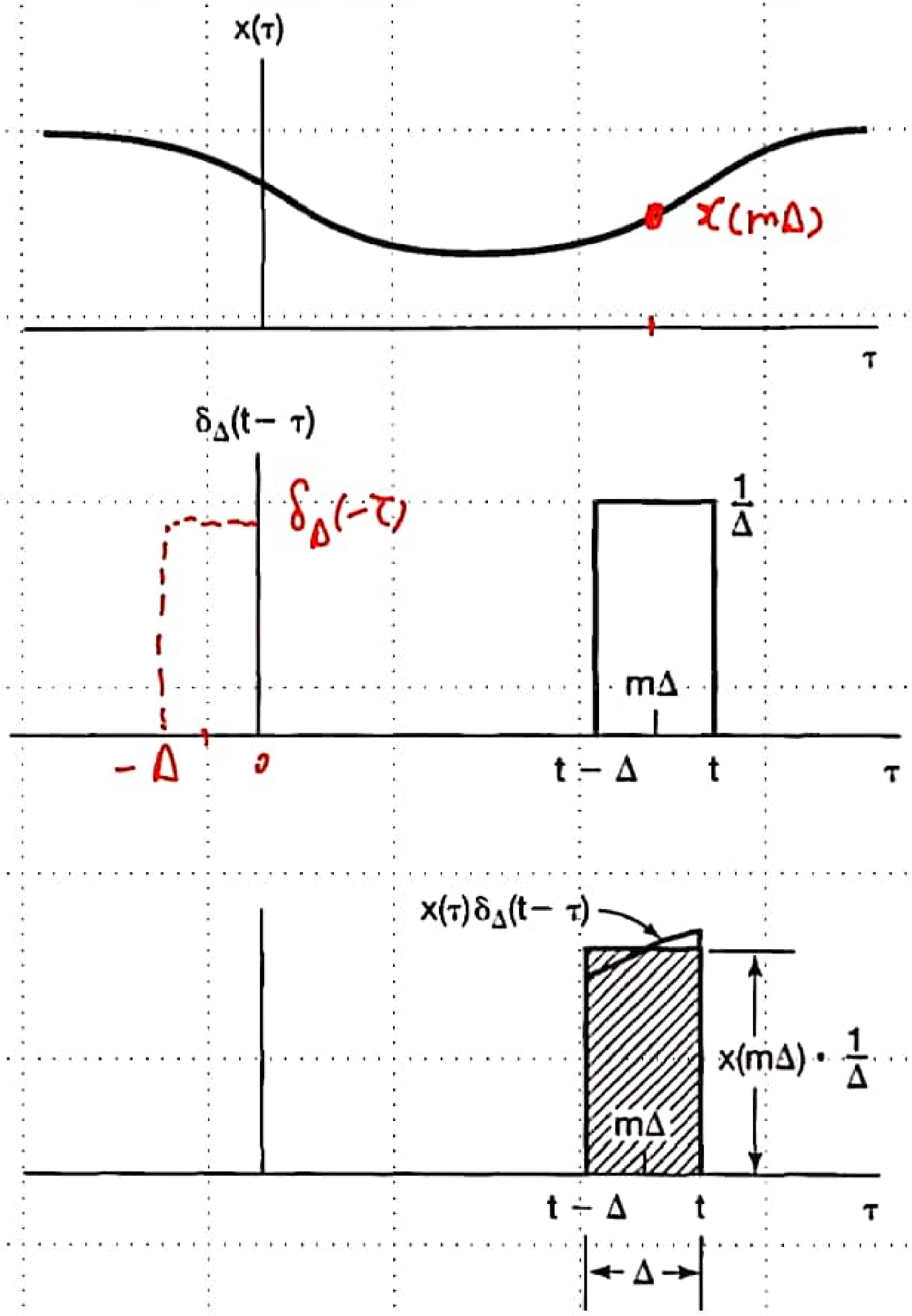
در شرایط حدی $\Delta \to 0$ ، رابطهٔ مجموع نامتناهی فوق به یک رابطهٔ انتگرالی تبدیل می‌گردد.

با توجه به تعریف حدی $\delta(t)$ برحسب $\delta_{\Delta}(t)$ در شرایط $\Delta \to 0$ ، خواهیم داشت:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau \qquad , \ \forall t$$

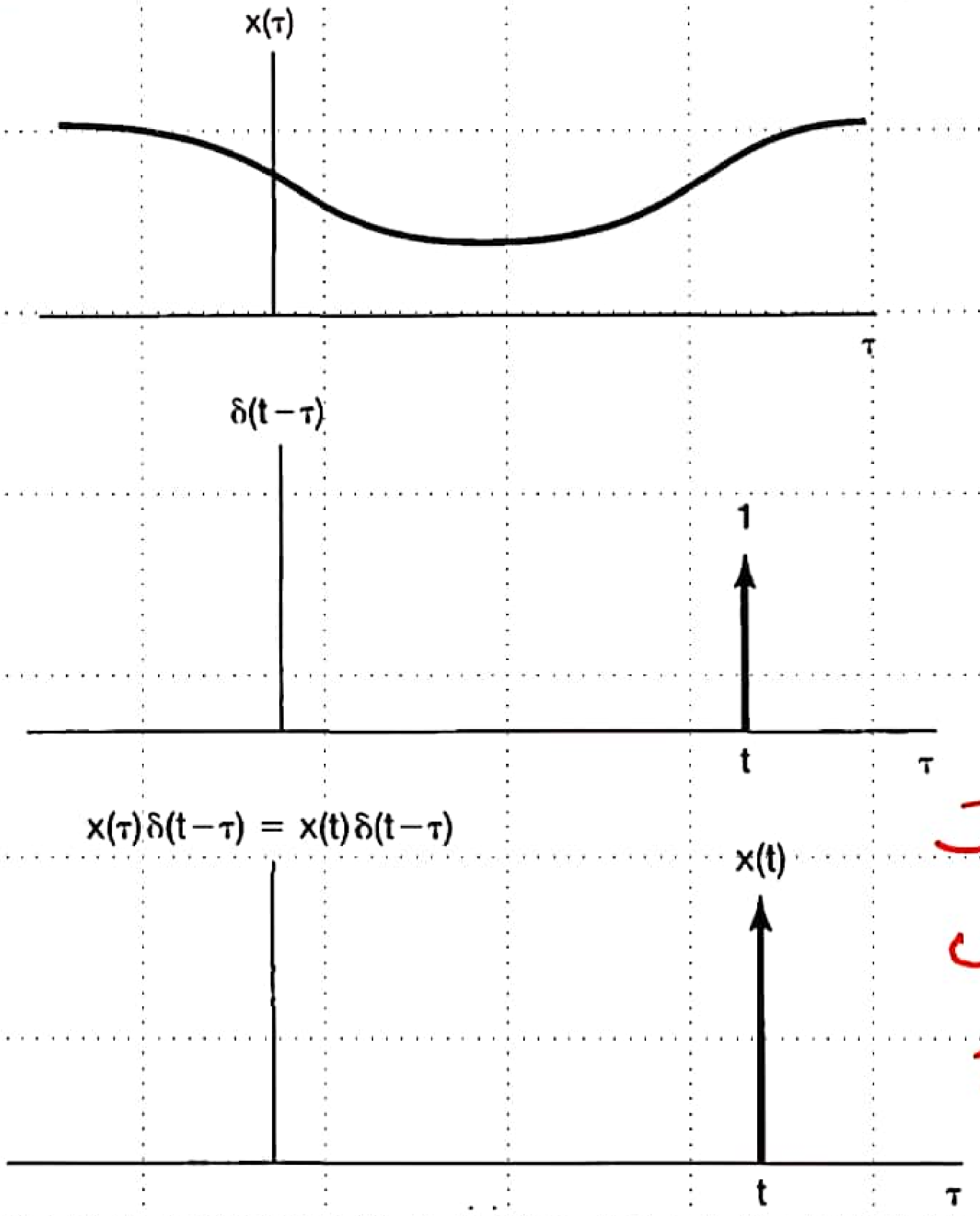
درحقیقت برای هر t معلوم، $x(t)$ همان حد سطح زیر تابع $x(\tau)\, \delta_{\Delta}(t-\tau)$

در شرایط $\Delta \to 0$ ، یعنی $x(\tau)\, \delta(t-\tau)$ است.



حد
$\Delta \to 0$

حد
$\Delta \to 0$



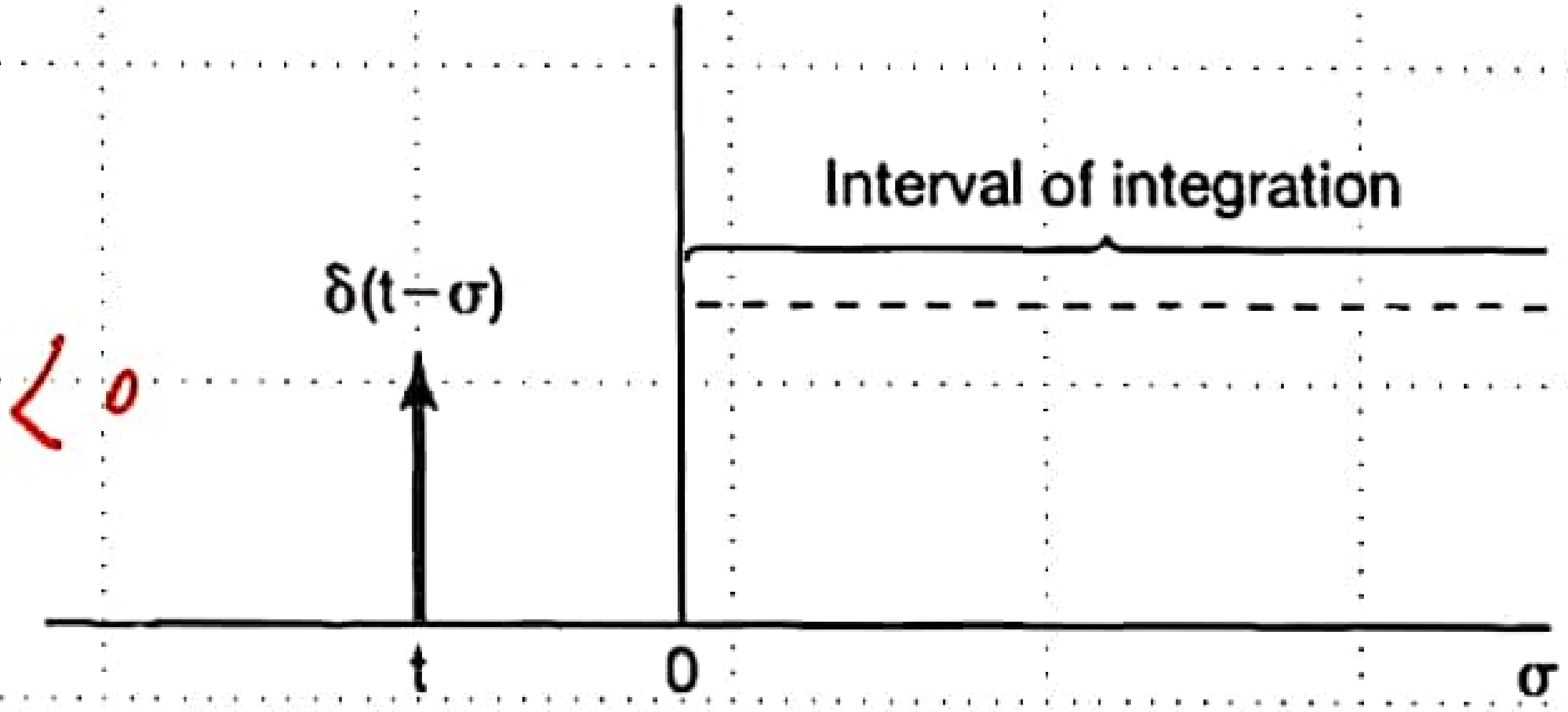
خاصیت
غربالی
ضربه

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\sigma)\,\delta(t-\sigma)\,d\sigma$$

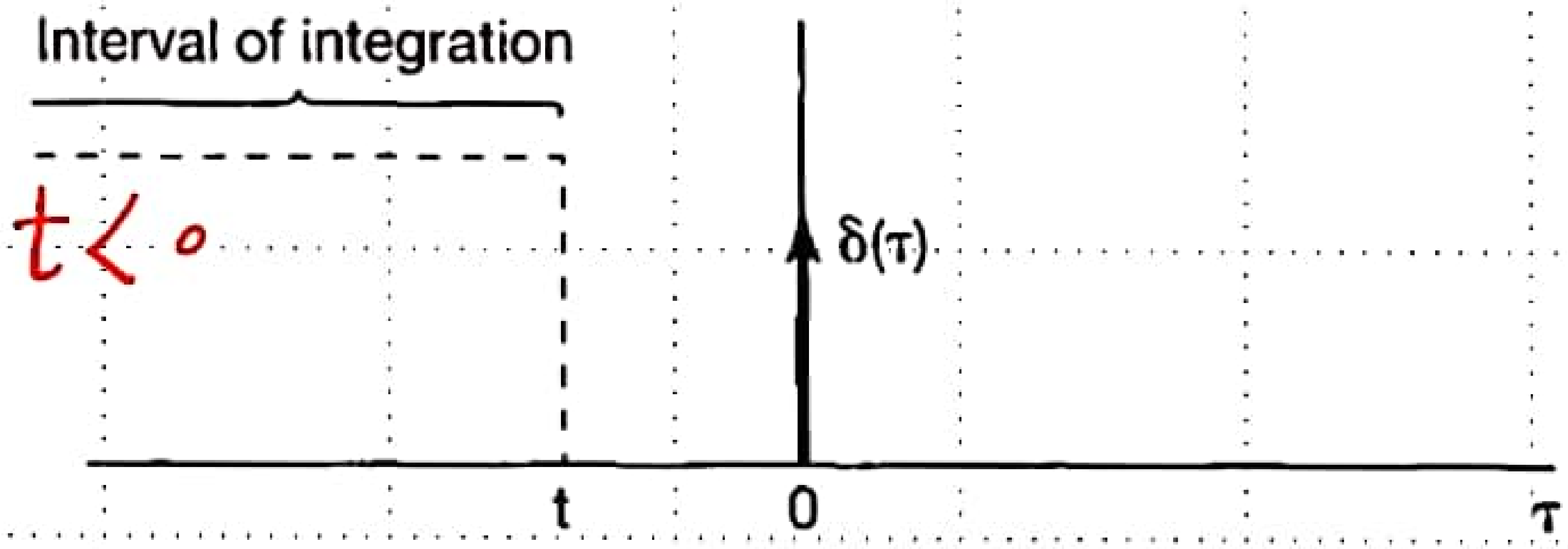
مثال خاص : $x(t) = u(t)$

$$\Rightarrow \quad u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\sigma)\,\delta(t-\sigma)\,d\sigma = \int_{0}^{\infty} \delta(\underbrace{t-\sigma}_{\tau})\,d\sigma = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau$$

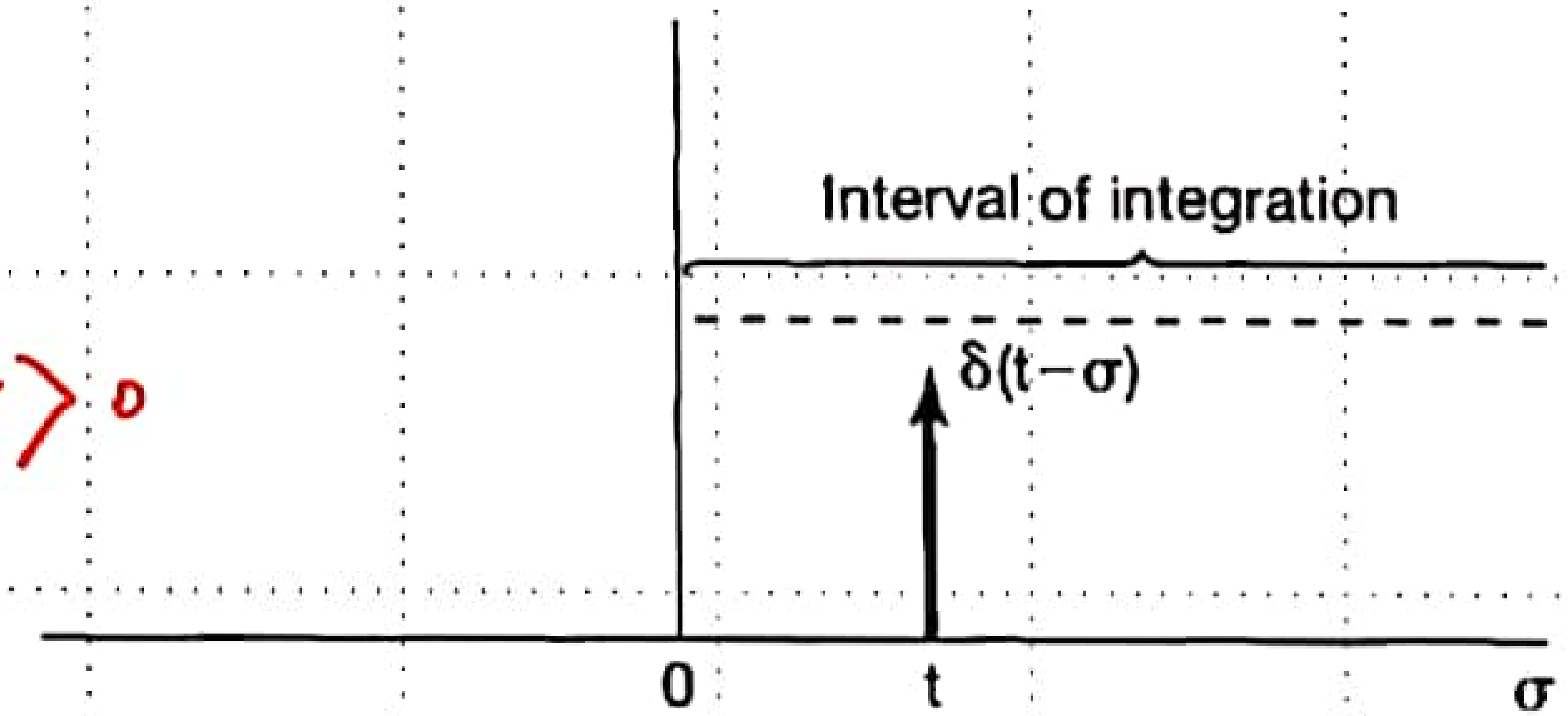
$t<0$



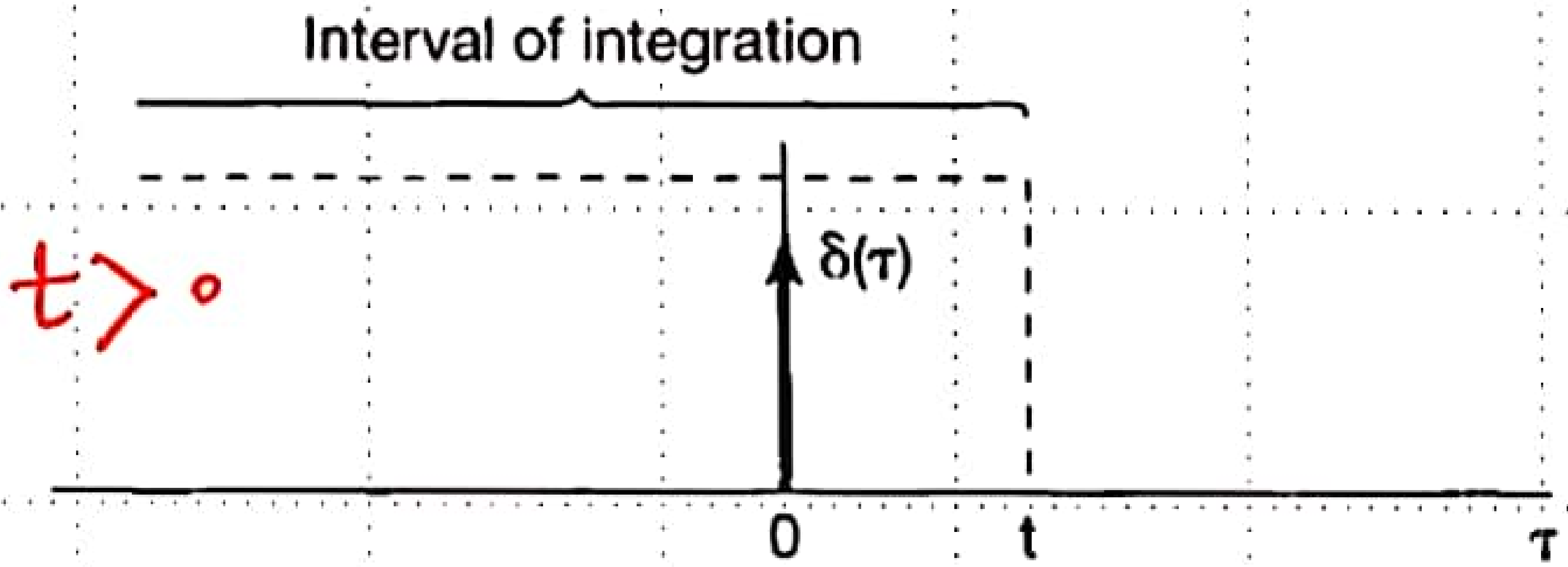
$t<0$



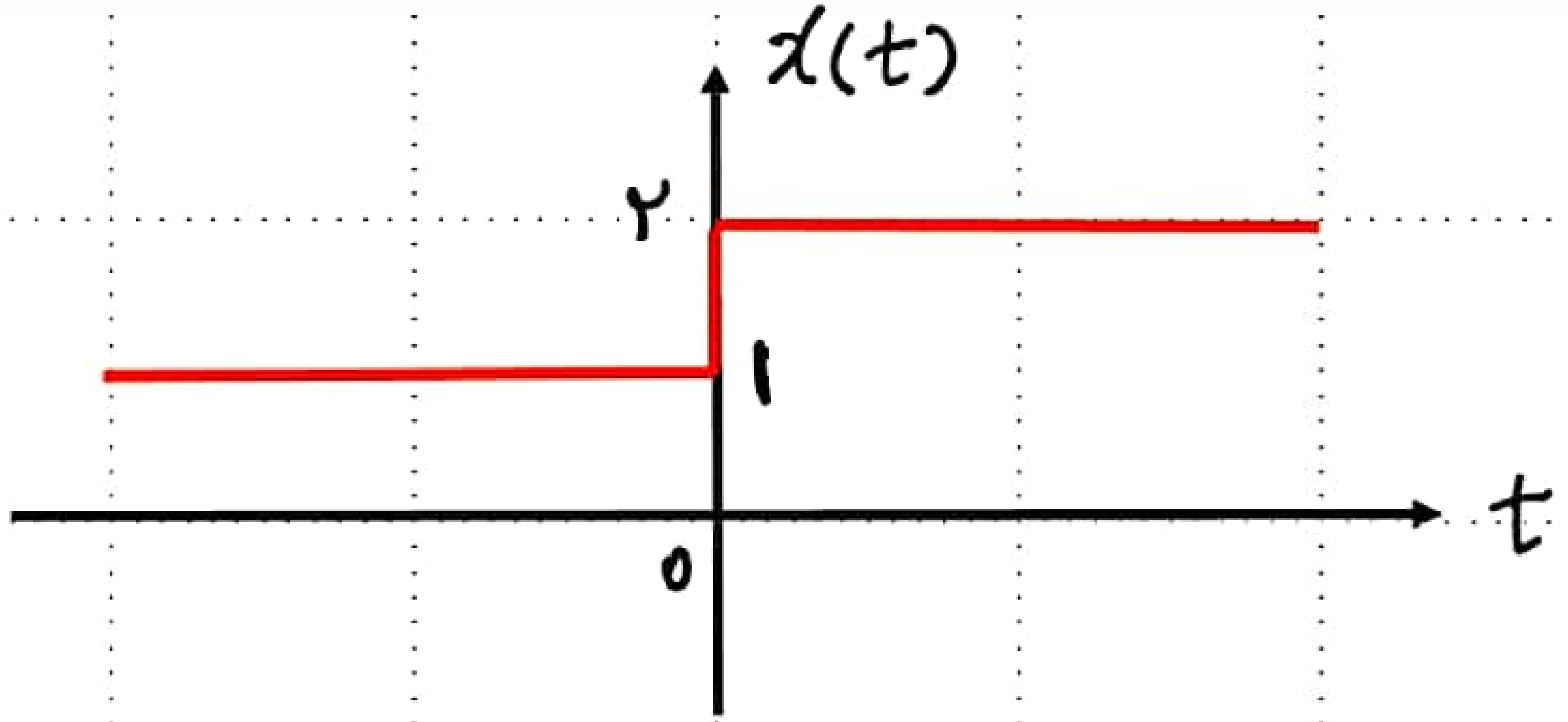
$t>0$



$t>0$



مثال)



$$x(t)=\begin{cases}1 & , \; t<0\\ 2 & , \; t>0\end{cases}$$

$$= u(-t)+2u(t)$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{0}(1)\cdot\delta(\underbrace{t-\tau}_{\lambda})\,d\tau+\int_{0}^{\infty}(2)\cdot\delta(\underbrace{t-\tau}_{\lambda})\,d\tau$$

$$=\underbrace{\int_{t}^{\infty}\delta(\lambda)\,d\lambda}_{u(-t)}+\underbrace{2\int_{-\infty}^{t}\delta(\lambda)\,d\lambda}_{2u(t)}=u(-t)+2u(t)$$

$$u(-t)=\int_{-\infty}^{-t}\delta(\tau)\,d\tau=\int_{t}^{\infty}\delta(\lambda)\,d\lambda=\begin{cases}0 & , \; t>0\\ 1 & , \; t<0\end{cases}$$

انتگرال کانولوشن (Convolution Integral)

$$x(t) \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow y(t)$$

فرض کنیم T عملکرد یک سیستم خطّی را نشان دهد. پاسخ این سیستم به ورودی دلخواه $x(t)$ چگونه است؟

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \hat{x}(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \cdot \Delta\, \delta_\Delta(t-k\Delta)$$

با تعریفِ:

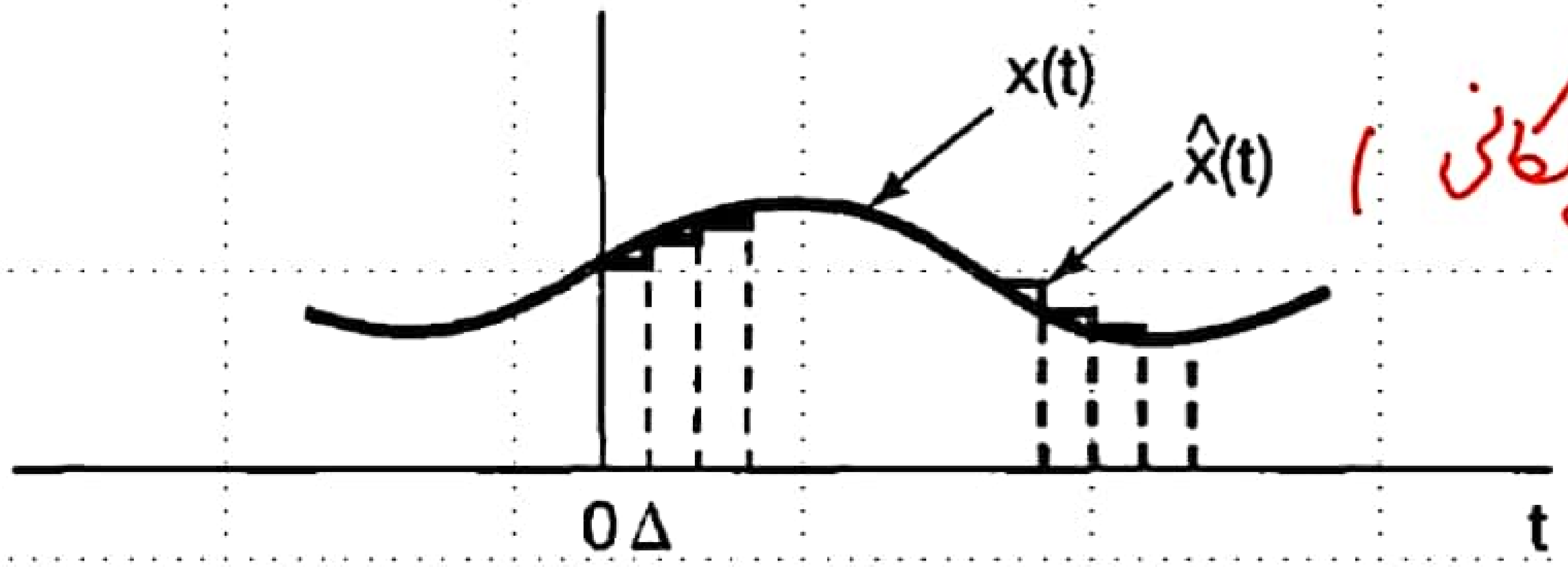
$$\hat{y}(t) = T\{\hat{x}(t)\} \quad \text{و} \quad \hat{h}_{k\Delta}(t) = T\{\delta_\Delta(t-k\Delta)\}$$

خطی بودن T $\Rightarrow$

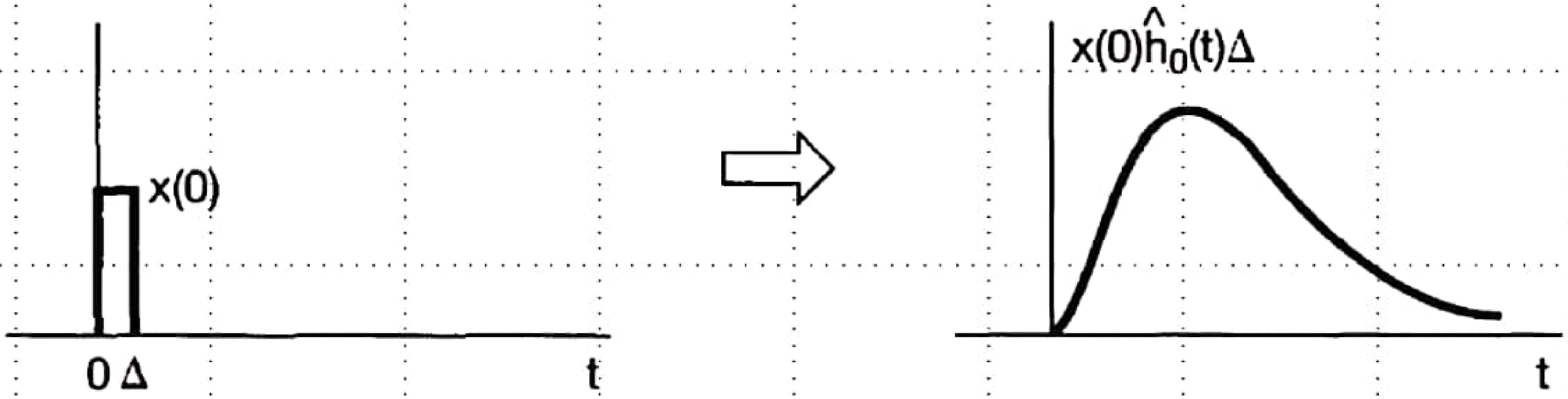
$$\hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \cdot \Delta\, \hat{h}_{k\Delta}(t)$$

$$\Rightarrow y(t) = \lim_{\Delta \to 0} \hat{y}(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \cdot \Delta \hat{h}_{k\Delta}(t)$$

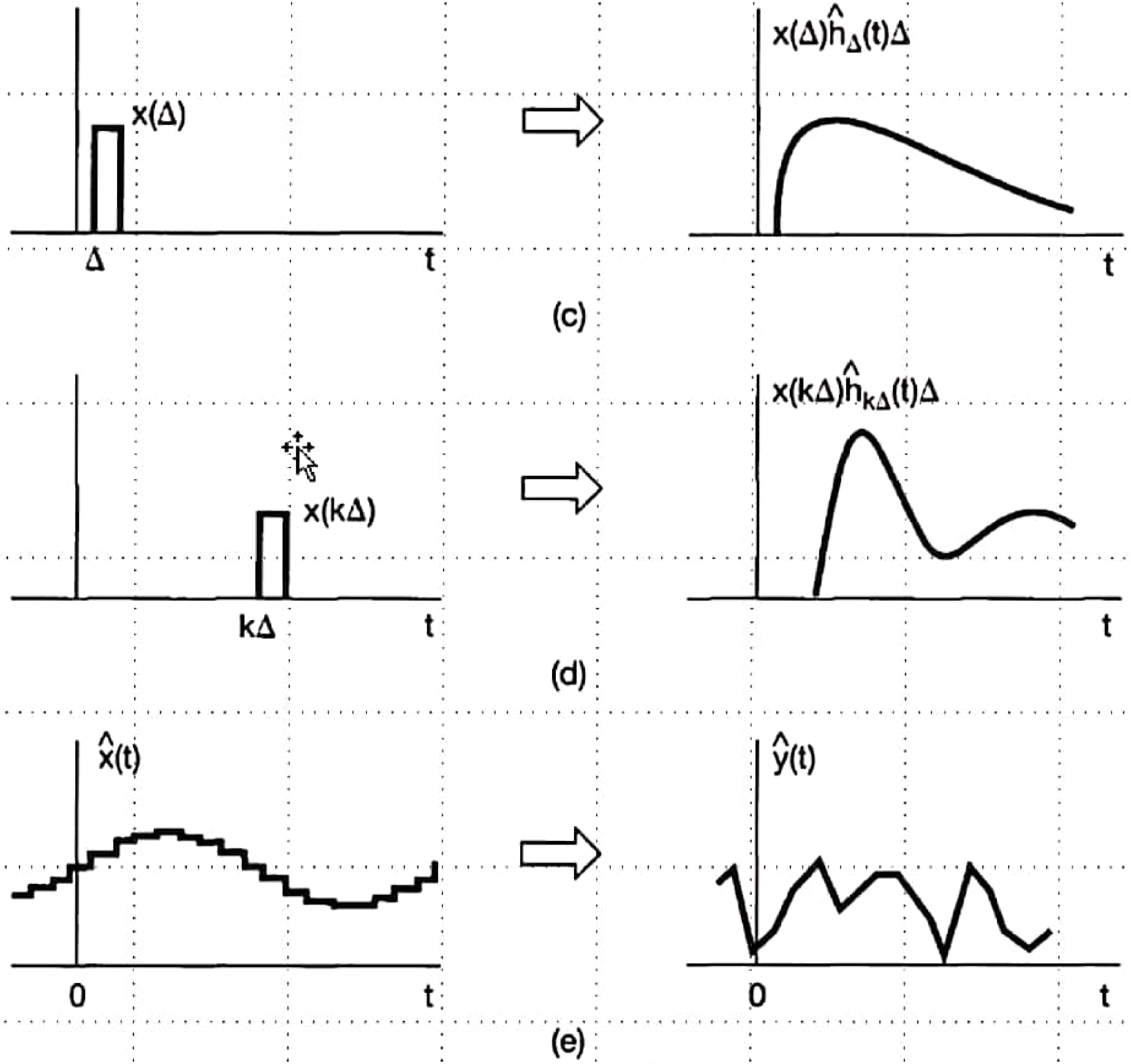
(تقریب پلکانی)



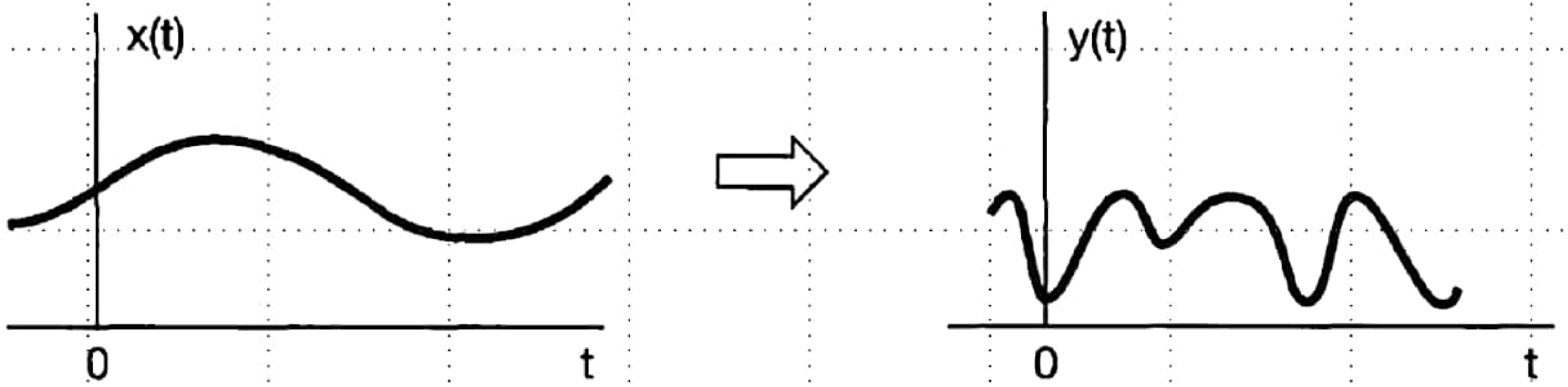
(a)



(b)



$x(\Delta)$
Δ
t
$x(\Delta)\hat{h}_{\Delta}(t)\Delta$
t
(c)
$x(k\Delta)$
$k\Delta$
t
$x(k\Delta)\hat{h}_{k\Delta}(t)\Delta$
t
(d)
$\hat{x}(t)$
0
t
$\hat{y}(t)$
0
t
(e)



(f)

$$y(t) = \lim_{\Delta \to 0} \hat{y}(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \cdot \Delta \, \hat{h}_{k\Delta}(t)$$

$$\Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h_\tau(t) d\tau$$

خروجی همان جمع آثار پاسخ سیستم به ورودی های ضربهٔ $\delta(t-\tau)$ برای مقادیر مختلف τ است.

$$h_\tau(t) = \lim_{\Delta \to 0} \hat{h}_{k\Delta}(t) = \lim_{\Delta \to 0} T\{\delta_\Delta(t-k\Delta)\} = T\{\delta(t-\tau)\}$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau \xrightarrow{\text{سیستم CT خطی}} y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h_\tau(t)\,d\tau$$

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-k] \xrightarrow{\text{سیستم DT خطی}} y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h_k[n]$$

حال فرض کنیم این سیستم علاوه بر خطی بودن، تغییرناپذیر با زمان نیز باشد، به عبارت دیگر

T معرف یک سیستم LTI باشد. در این صورت داریم:

$$h_\tau(t)=T\{\delta(t-\tau)\}=h_0(t-\tau)=h(t-\tau)$$

که در آن $h(t)=h_0(t)=T\{\delta(t)\}$ ، پاسخ سیستم به ورودی ضربه واحد واقع

در لحظهٔ $t=0$ یا همان پاسخ ضربهٔ سیستم (Impulse Response) است.

بنابراین فقط با معلوم بودن پاسخ سیستم LTI به ورودی ضربهٔ واحد، یعنی $h(t)$

برای هر ورودی دلخواه $x(t)$ ، پاسخ سیستم عبارتست از:

$$y(t) \overset{\text{خطی}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_{\tau}(t)\,d\tau \overset{TI}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

Convolution Integral رابطهٔ انتگرال کانولوشن

$y(t)$ در رابطهٔ فوق را حاصل انتگرال کانولوشن بین دو سیگنال زمان پیوستهٔ $x(t)$ و $h(t)$

می‌نامیم و می‌نویسیم:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

نکتهٔ مهم: در یک سیستم LTI ، پاسخ ضربهٔ واحد سیستم یعنی $h(t)$ همه اطلاعات سیستم را دارد.

توجه: در رابطهٔ انتگرال کانولوشن $y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$ ،
$h(-\tau)$ منعکوس شدهٔ زمانی پاسخ ضربه در محور زمان τ است و $h(t-\tau)$ شیفت یافته آن
است که برای $t>0$ به راست و برای $t<0$ به چپ منتقل می گردد و برای t های
مختلف با محاسبهٔ انتگرال (سطح زیر منحنی) حاصل ضرب $x(\tau)$ در $h(t-\tau)$ ، مقدار $y(t)$
محاسبه می گردد.

یادآوری:

$x(t+T)$:
- اگر $T>0 \Rightarrow$ انتقال به چپ T ثانیه
- اگر $T<0 \Rightarrow$ راست 〃 〃 $|T|$

$x(-t+T)$:
- اگر $T>0 \Rightarrow$ راست 〃 〃 T
- اگر $T<0 \Rightarrow$ چپ 〃 〃 $|T|$

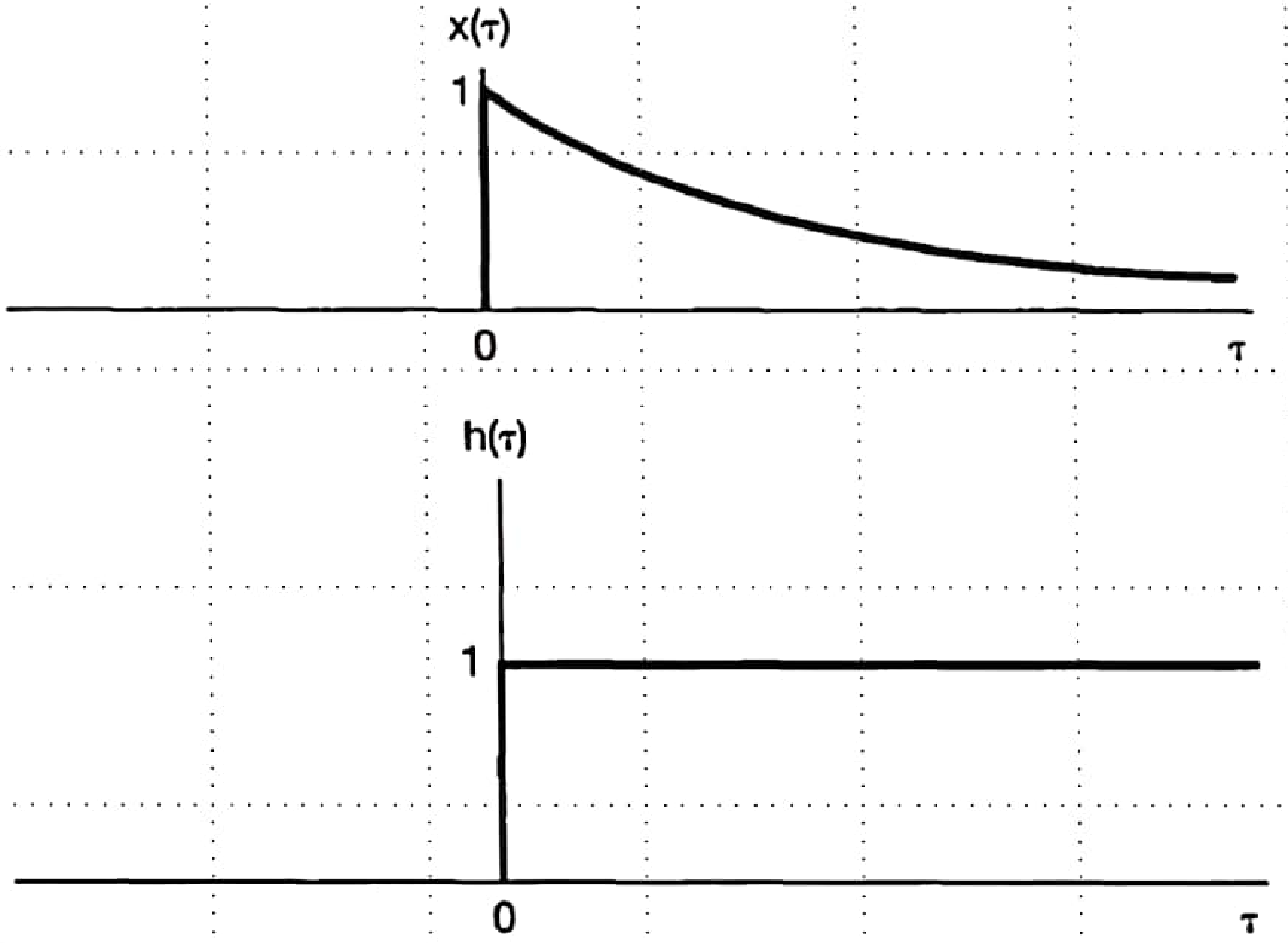
مثال ۱)

Let $x(t)$ be the input to an LTI system with unit impulse response $h(t)$, where

$$x(t) = e^{-at}u(t), \qquad a > 0$$

and

$$h(t) = u(t).$$

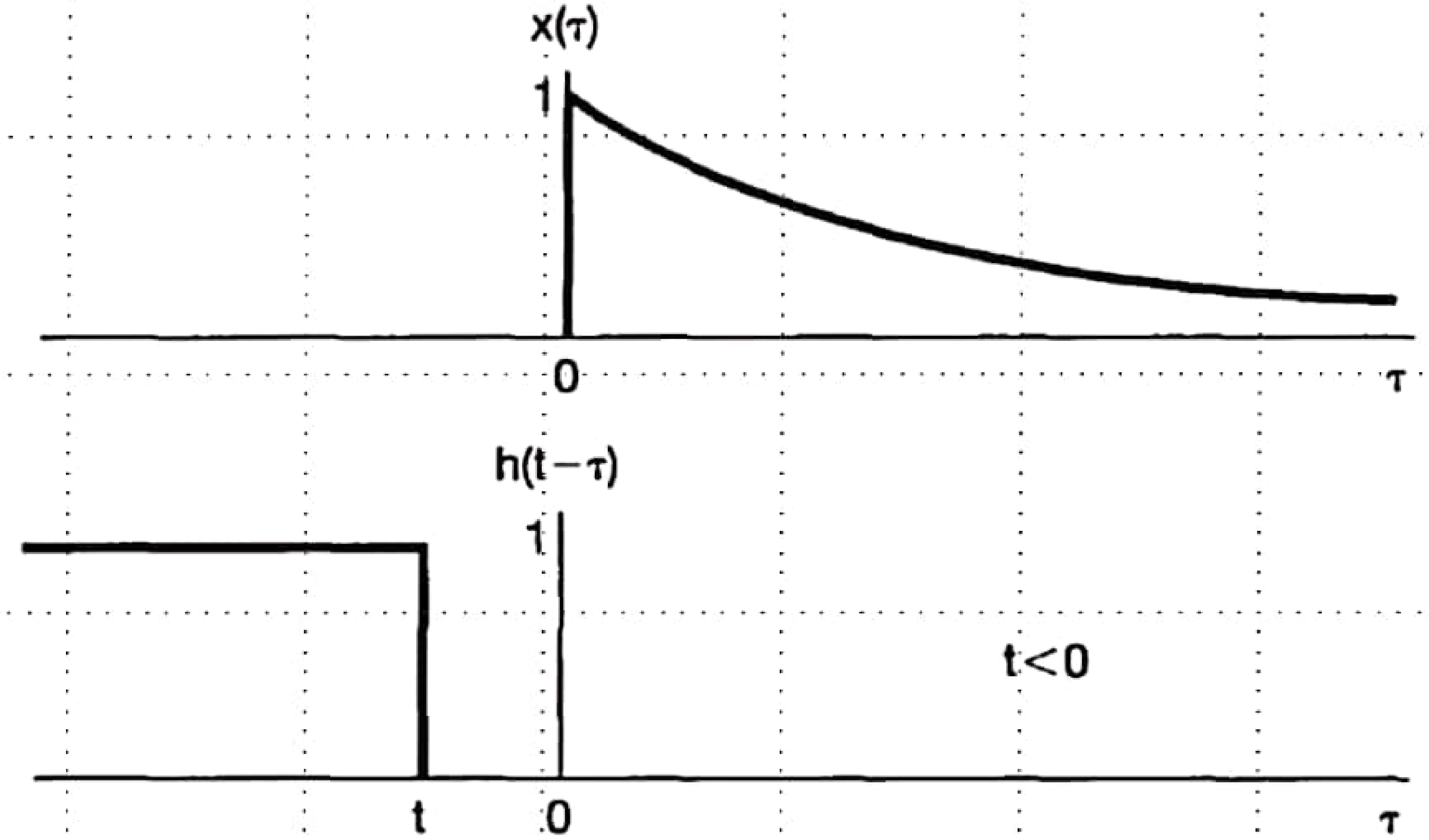


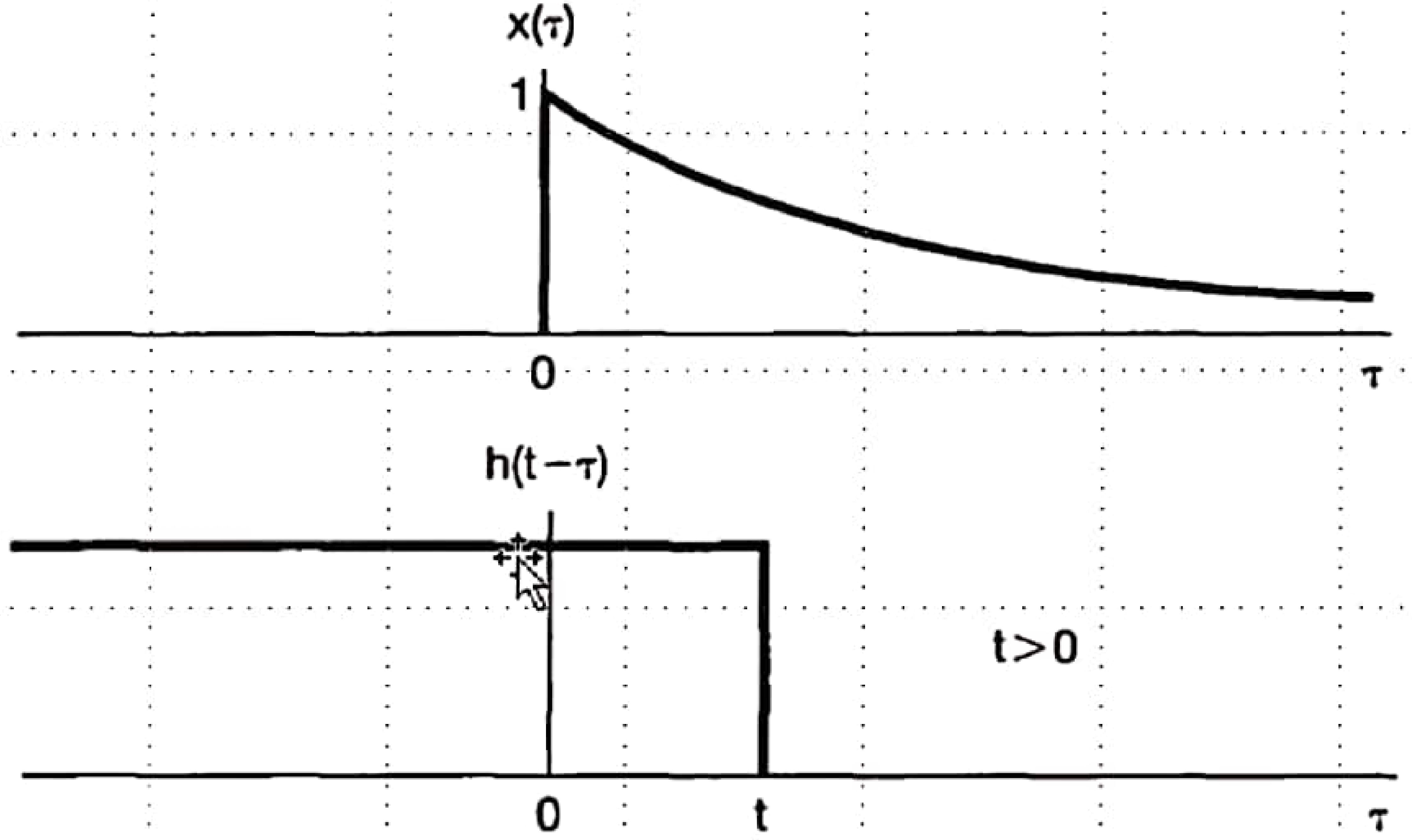
$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

برای مقادیر $t<0$ ، $h(t-\tau)$ و $x(\tau)$ هیچ ناحیهٔ هم‌پوشانی غیرصفری ندارند، در نتیجه:

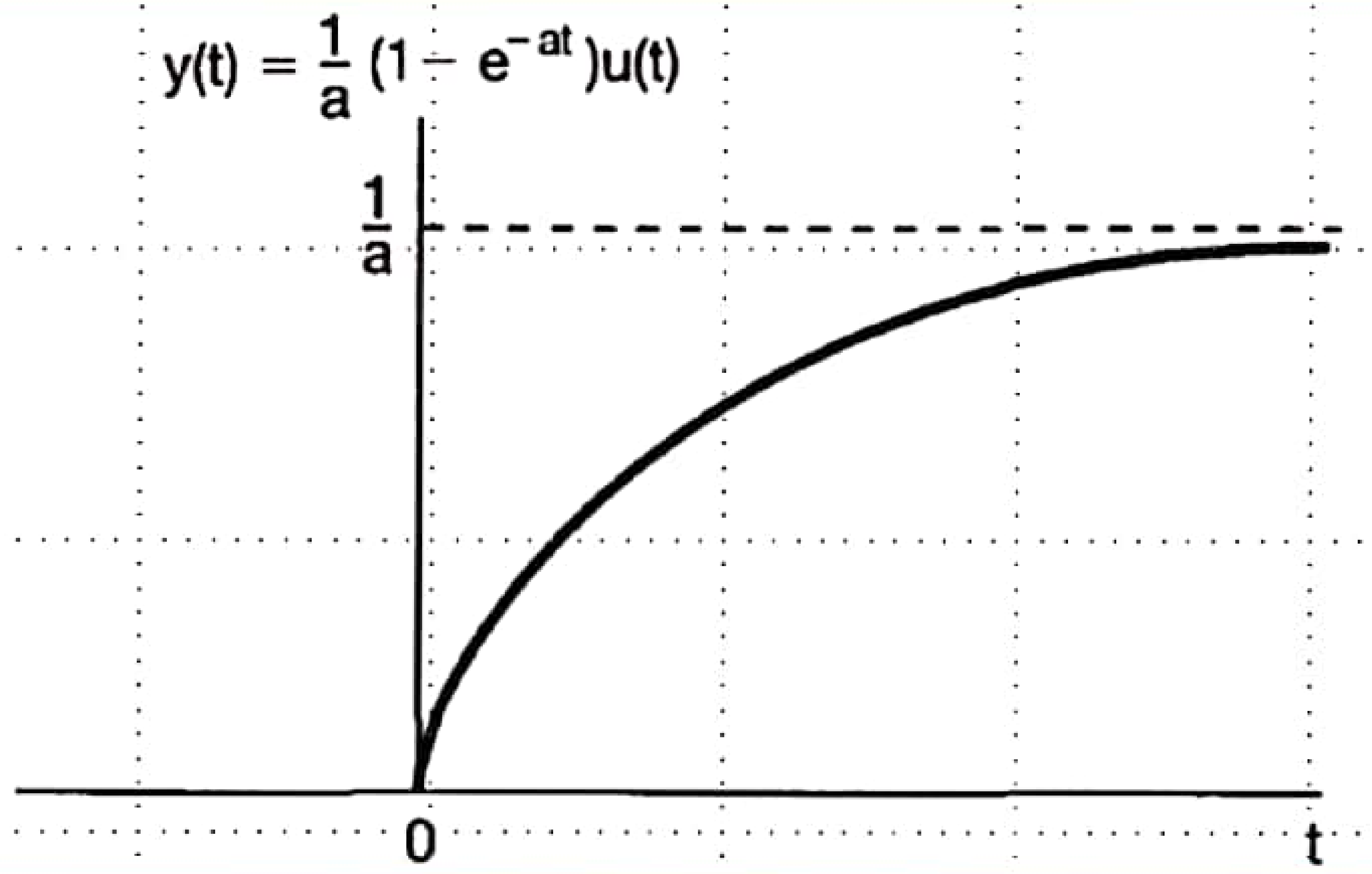
$$x(\tau)h(t-\tau) = 0 \;, \forall t<0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = 0 \;, \forall t<0$$





$$\text{for } t > 0: \quad y(t) = \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = -\frac{1}{a} e^{-a\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{a}(1 - e^{-at}).$$

$$\text{Thus, for all } t, y(t) \text{ is} \quad y(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t),$$

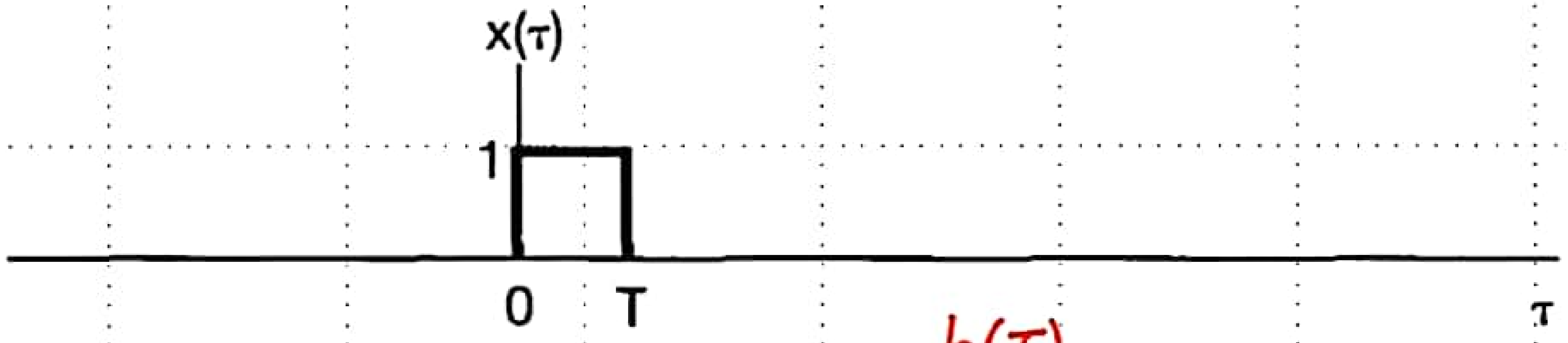


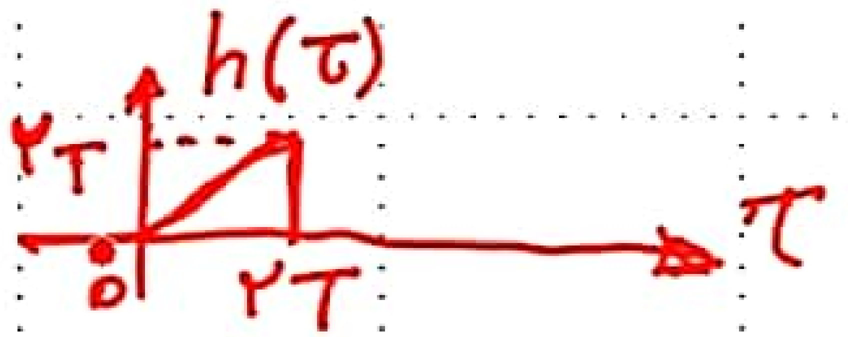
مثال ۲)

Consider the convolution of the following two signals:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases},$$

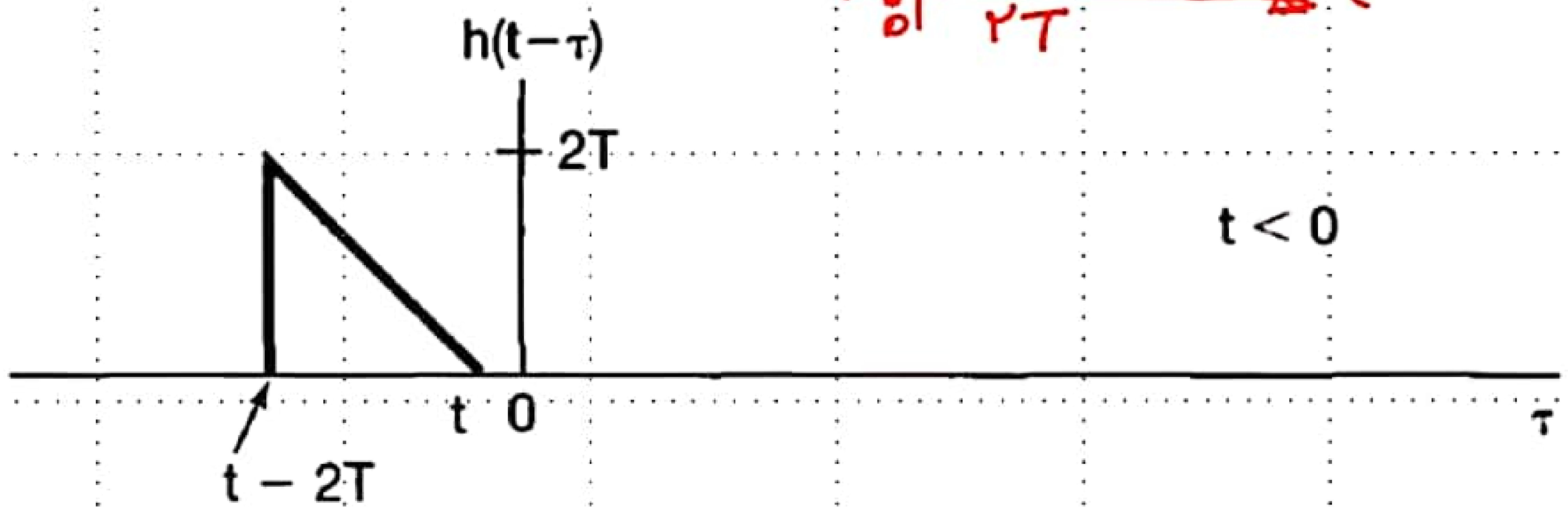
$$h(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 2T \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$





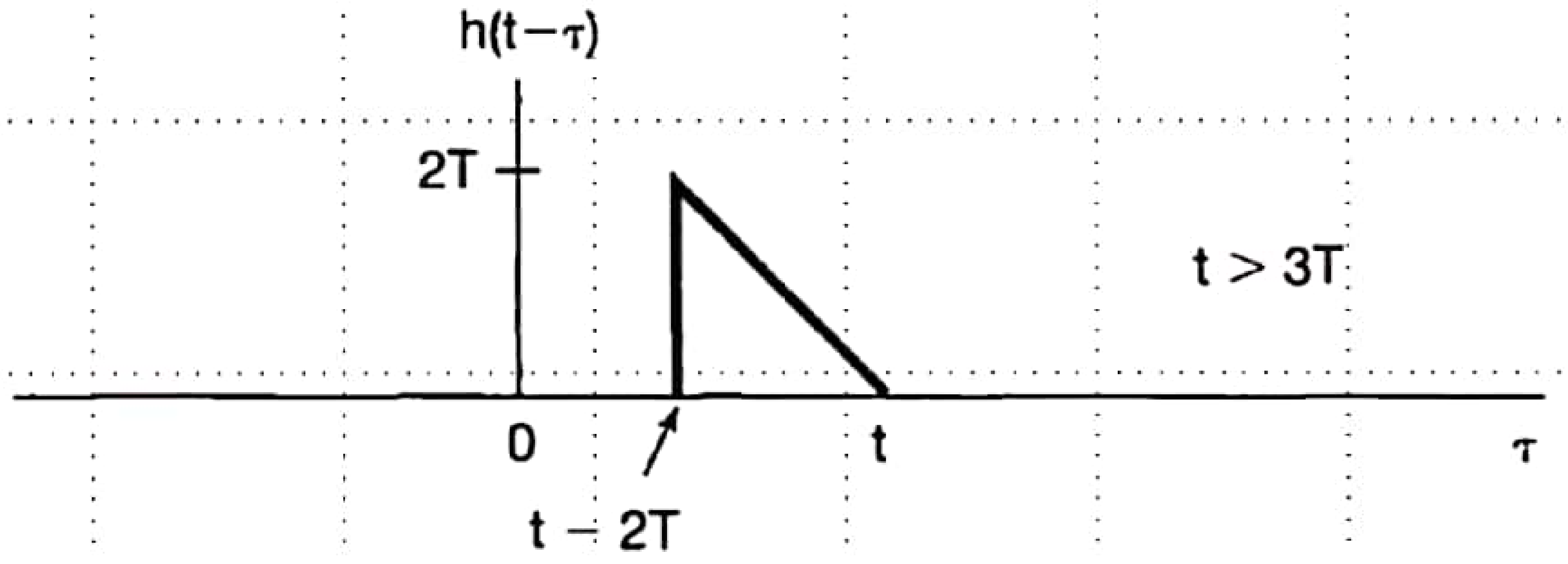
۱) برای دو حالت $t<0$ و $t \geq 3T$

$x(\tau)$ و $h(t-\tau)$ همپوشانی ندارند



در نتیجه $x(\tau)h(t-\tau)=0$

$$\Rightarrow y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau=0$$



۲) برای حالت $0 < t < T$

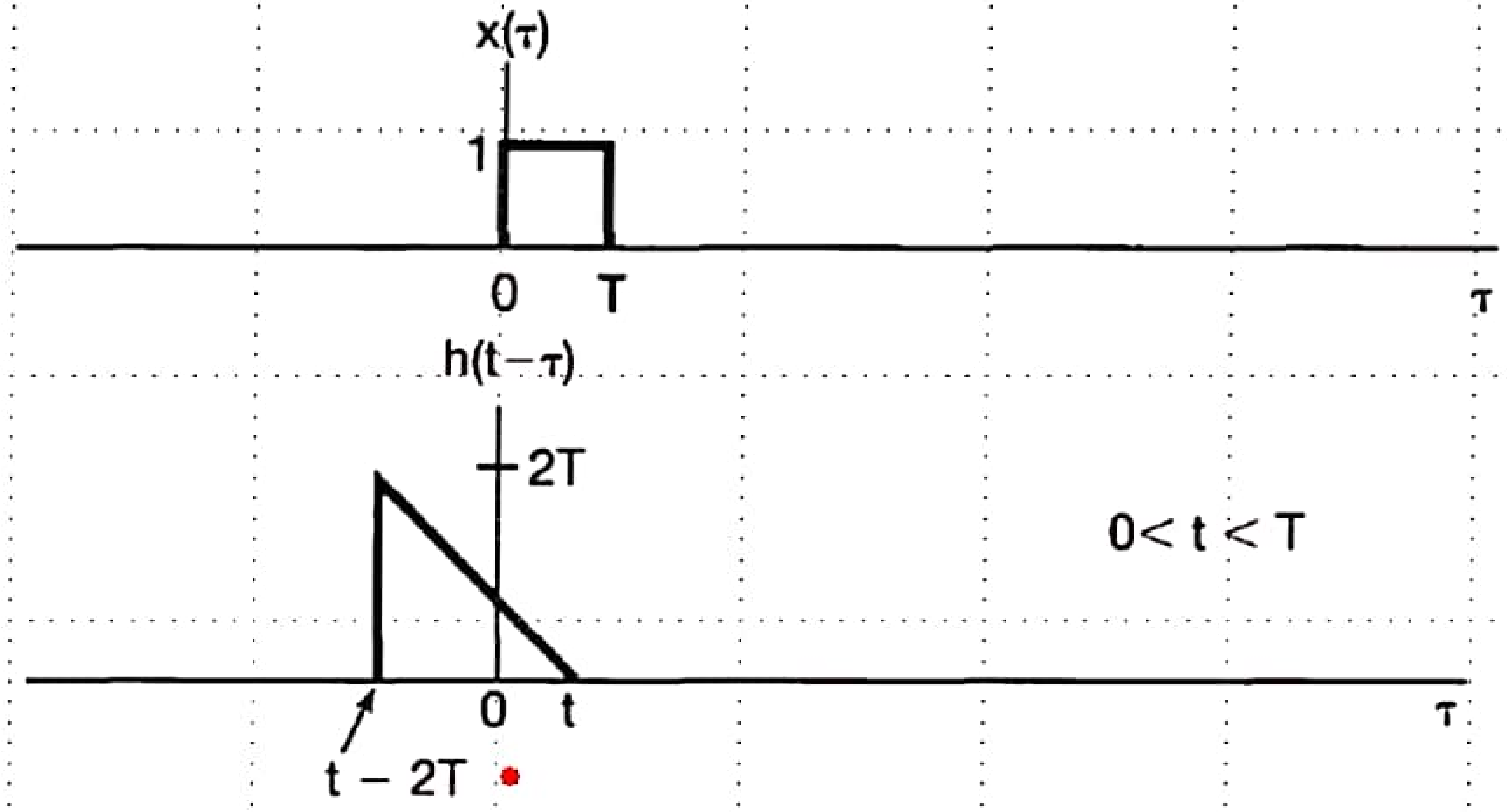
$$x(\tau)h(t-\tau) = (1)(t-\tau)$$

$$y(t) = \int_0^t (t-\tau)\,d\tau$$

$$= \left(t\tau - \frac{1}{2}\tau^2\right)\Big|_{\tau=0}^{t}$$

$$= t^2 - \frac{1}{2}t^2$$

$$= \frac{1}{2}t^2$$



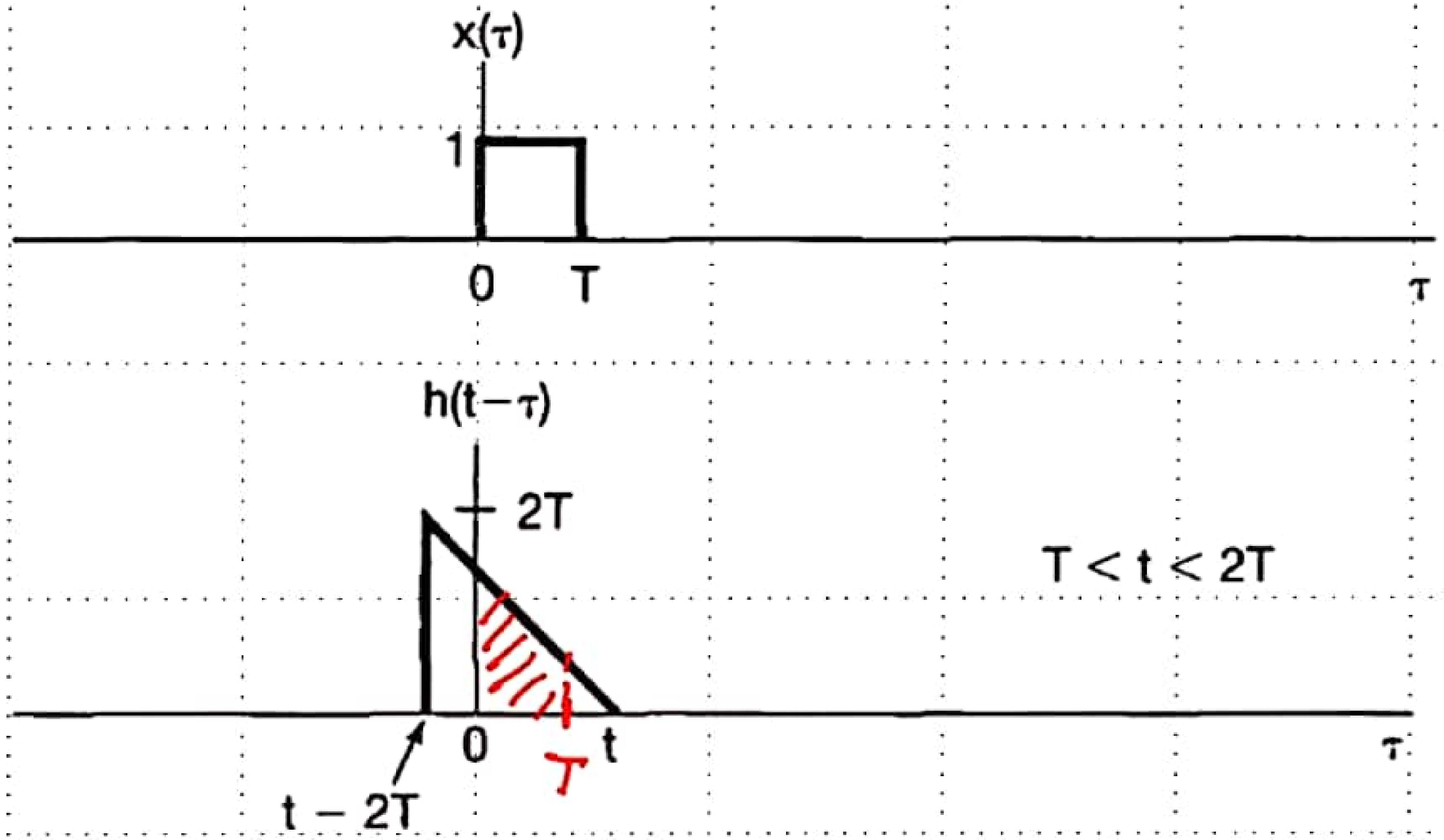
۳) برای حالت $T \leqslant t \leqslant 2T$

$$y(t) = \int_0^T x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \int_0^T (t-\tau)\,d\tau$$

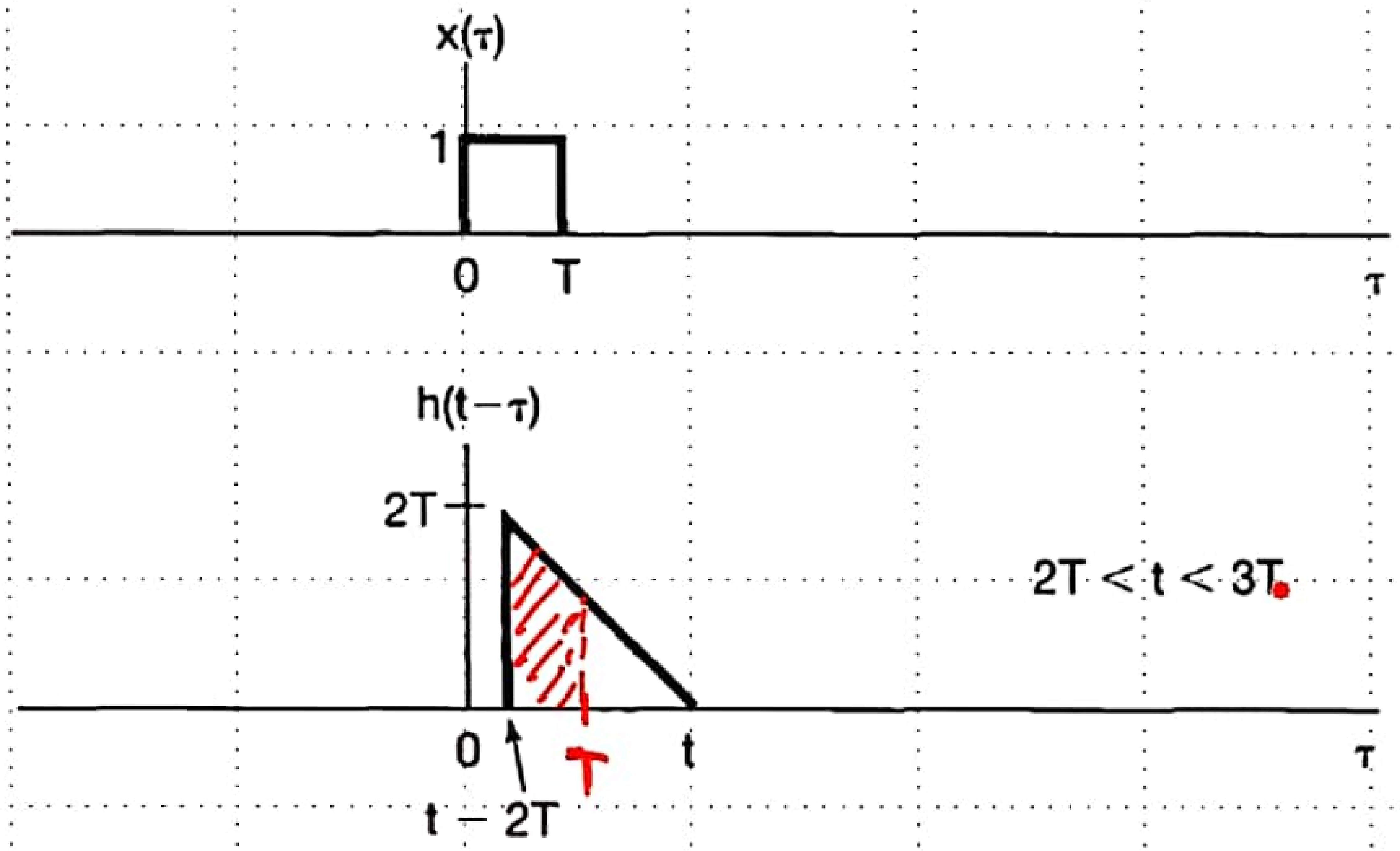
$$= \left(t\tau - \frac{1}{2}\tau^2\right)\Big|_{\tau=0}^{T}$$

$$= Tt - \frac{1}{2}T^2$$



۴) برای حالت $2T \leq t \leq 3T$

$$y(t) = \int_{t-2T}^{T} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$



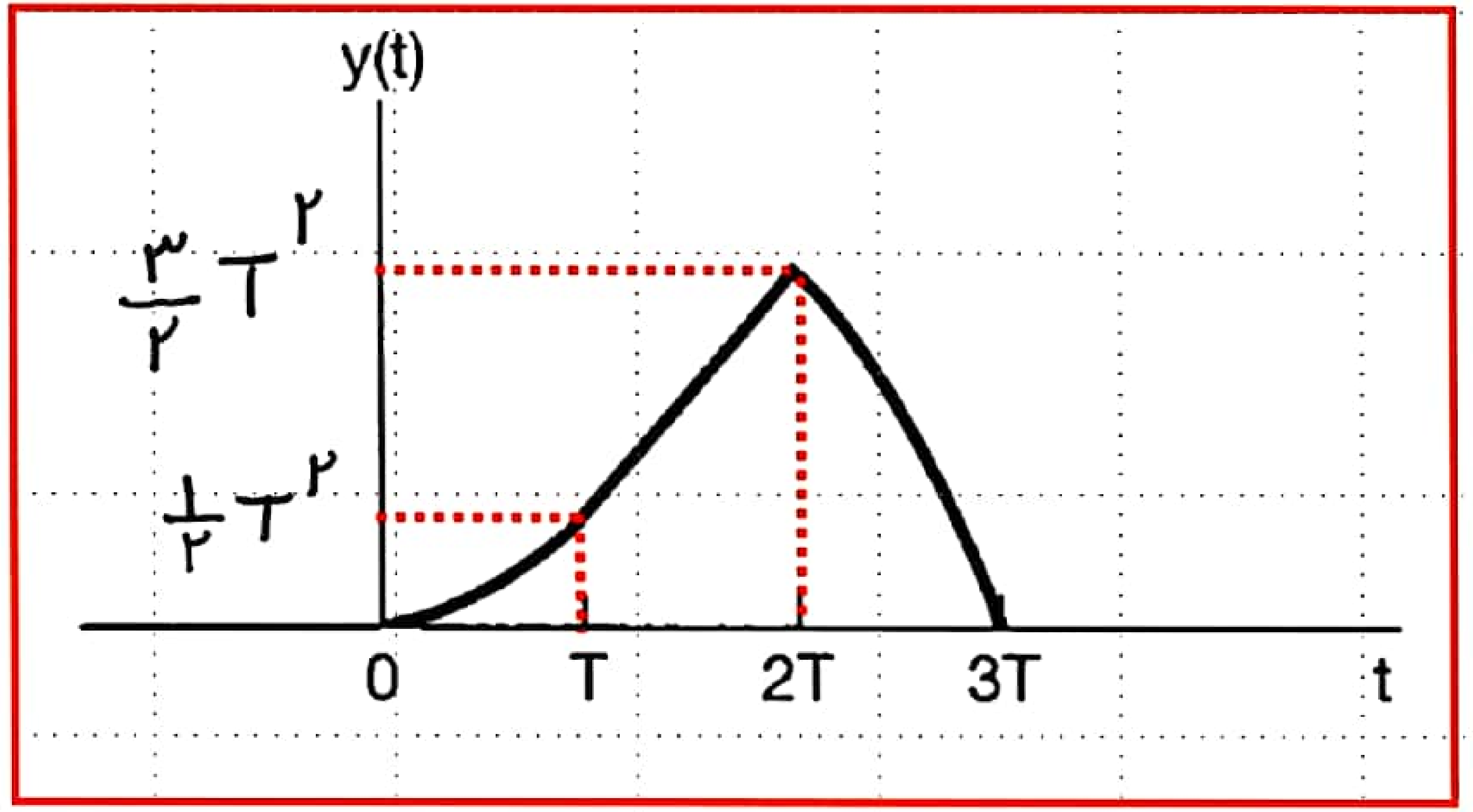
$$= \int_{t-2T}^{T} (t-\tau)\, d\tau$$

$$= \left(t\tau - \frac{1}{2}\tau^2\right)\Big|_{\tau = t-2T}^{T} = \left(Tt - \frac{1}{2}T^2\right) - \left[t(t-2T) - \frac{1}{2}(t-2T)^2\right]$$

$$= Tt - \frac{1}{2}T^2 - t^2 + 2Tt + \frac{1}{2}t^2 + 2T^2 - 2Tt$$

$$= -\frac{1}{2}t^2 + Tt + \frac{3}{2}T^2$$

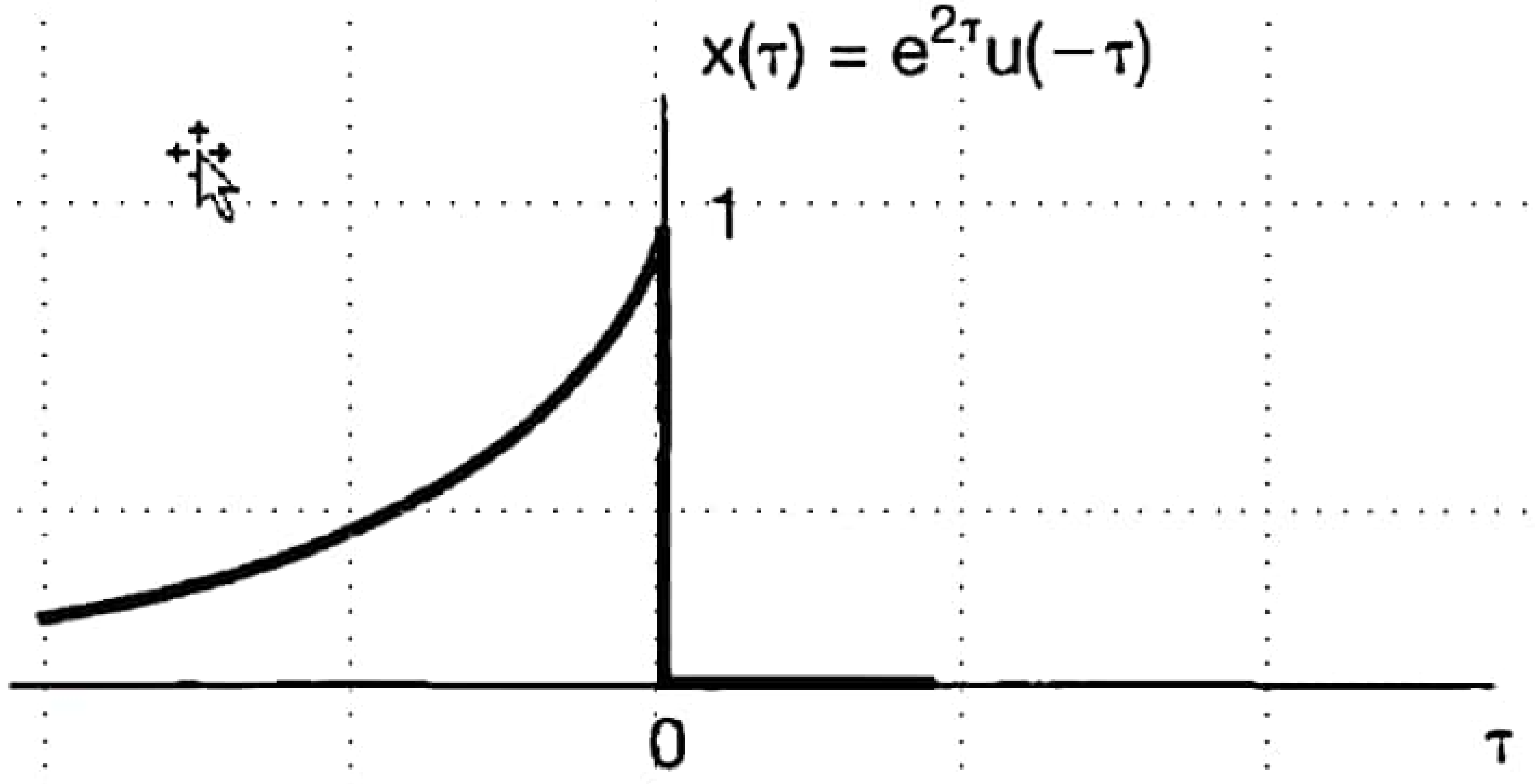
$$y(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \\ \frac{1}{2}t^2, & 0 \leqslant t \leqslant T \\ Tt - \frac{1}{2}T^2, & T \leqslant t \leqslant 2T \\ -\frac{1}{2}t^2 + Tt + \frac{3}{2}T^2, & 2T \leqslant t \leqslant 3T \\ 0, & 3T \leqslant t \end{cases}$$



مثال ۳)

Let $y(t)$ denote the convolution of the following two signals:

$$x(t) = e^{2t}u(-t), \qquad h(t) = u(t-3).$$

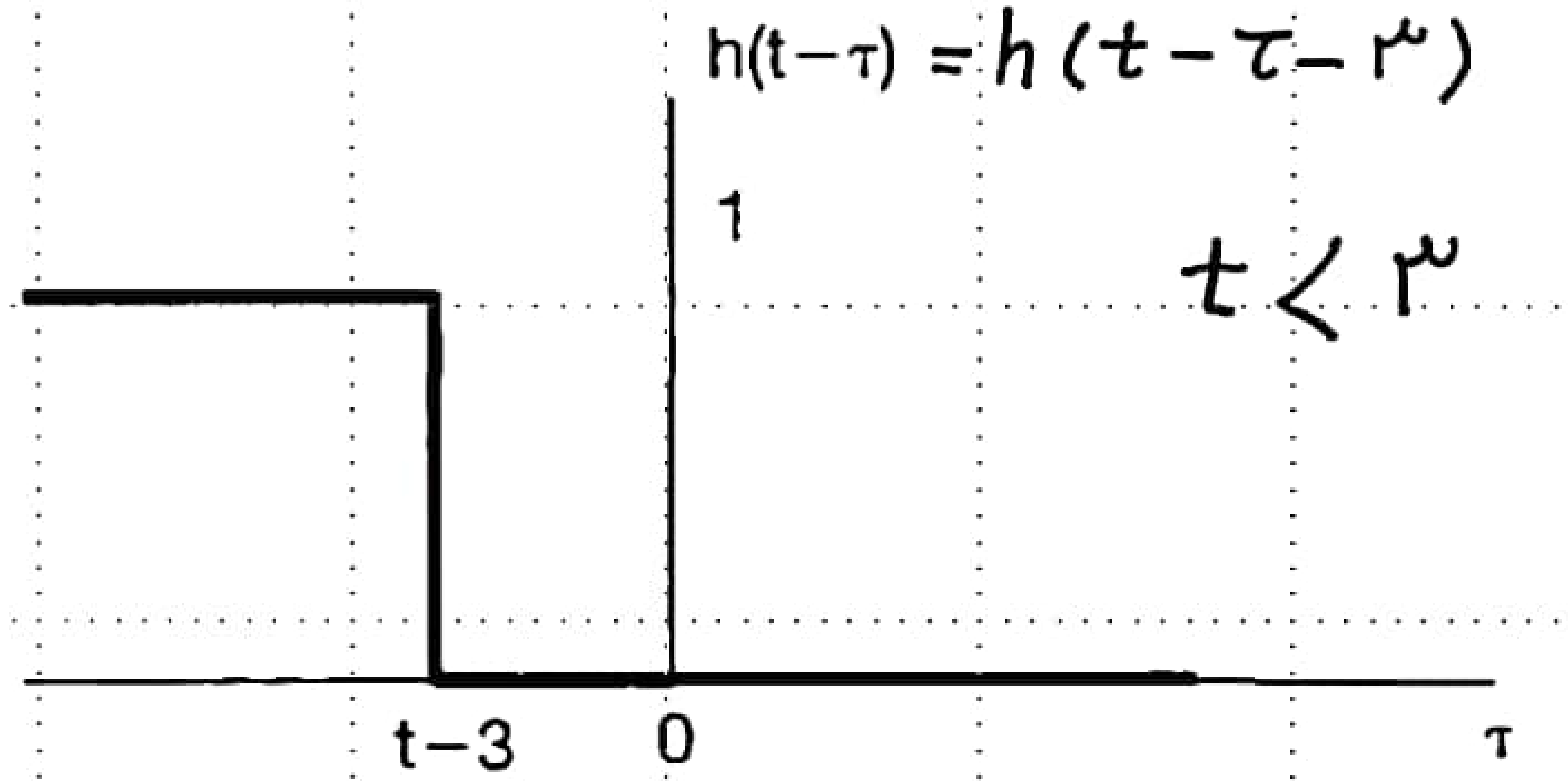


۱) برای حالت $t-۳<۰$ یا $t<۳$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t-۳} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{t-۳} (e^{۲\tau})\,d\tau = \frac{۱}{۲}e^{۲\tau}\Big|_{\tau=-\infty}^{t-۳}$$

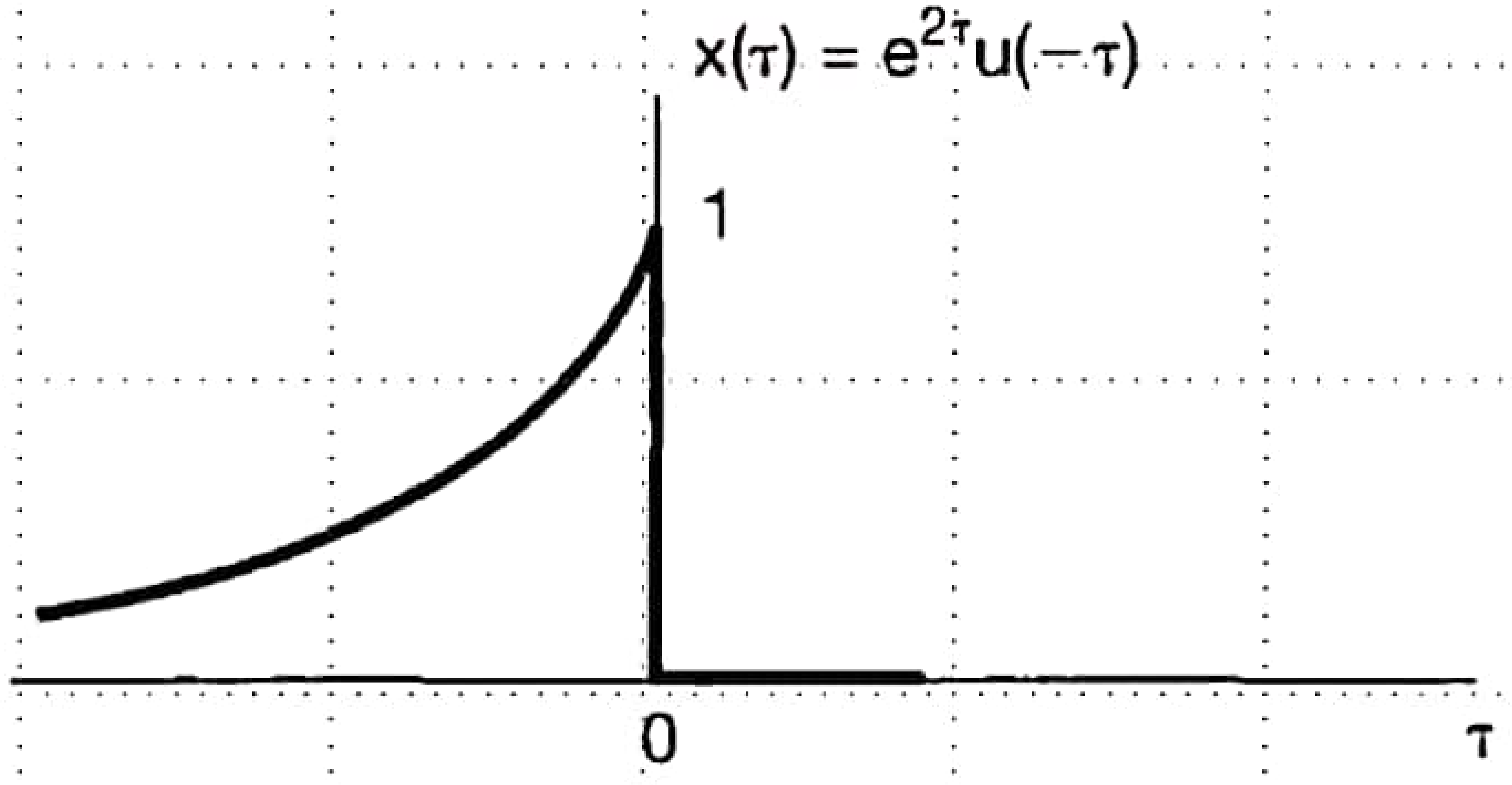
$$= \frac{۱}{۲}e^{۲t-۶}$$

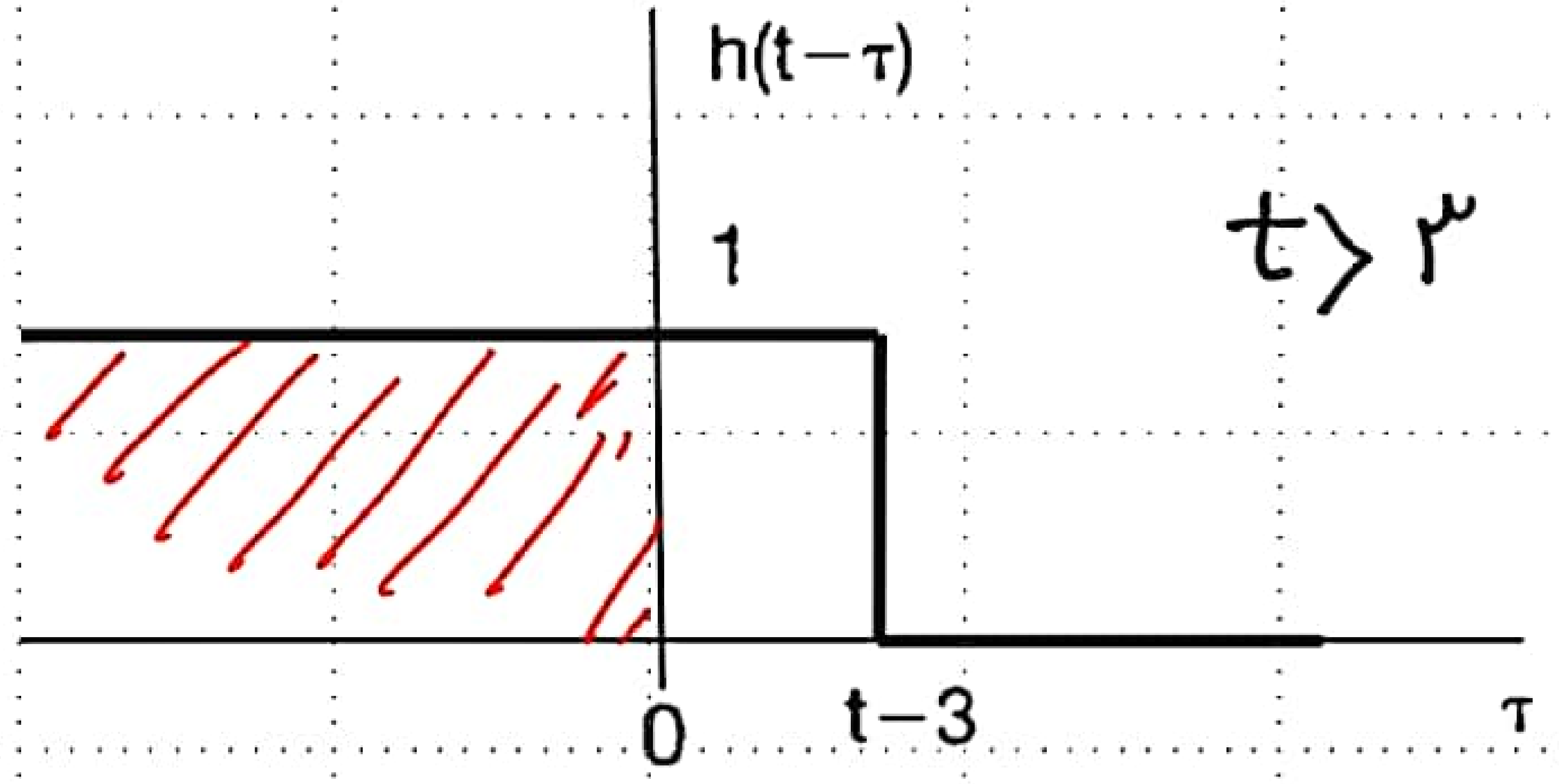


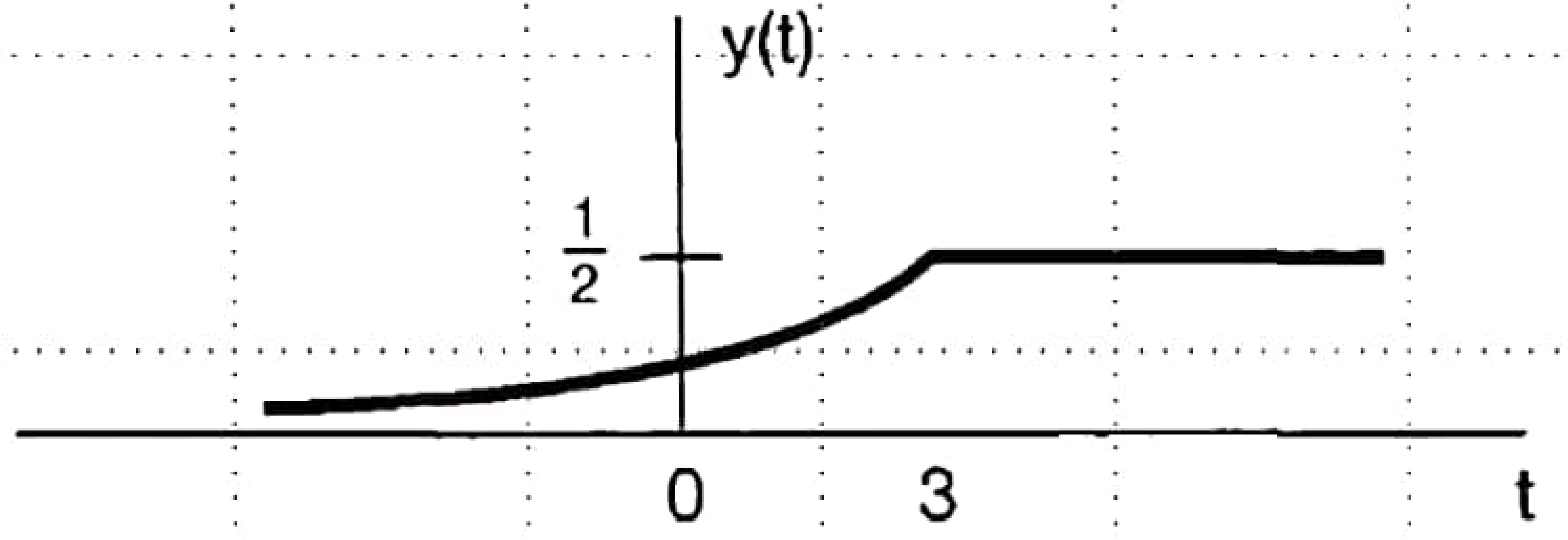
۲) برای حالت $t-3 \geq 0$ یا $t \geq 3$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{0} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{0} e^{2\tau}\,d\tau=\frac{1}{2}e^{2\tau}\Big|_{\tau=-\infty}^{0}=\frac{1}{2}$$





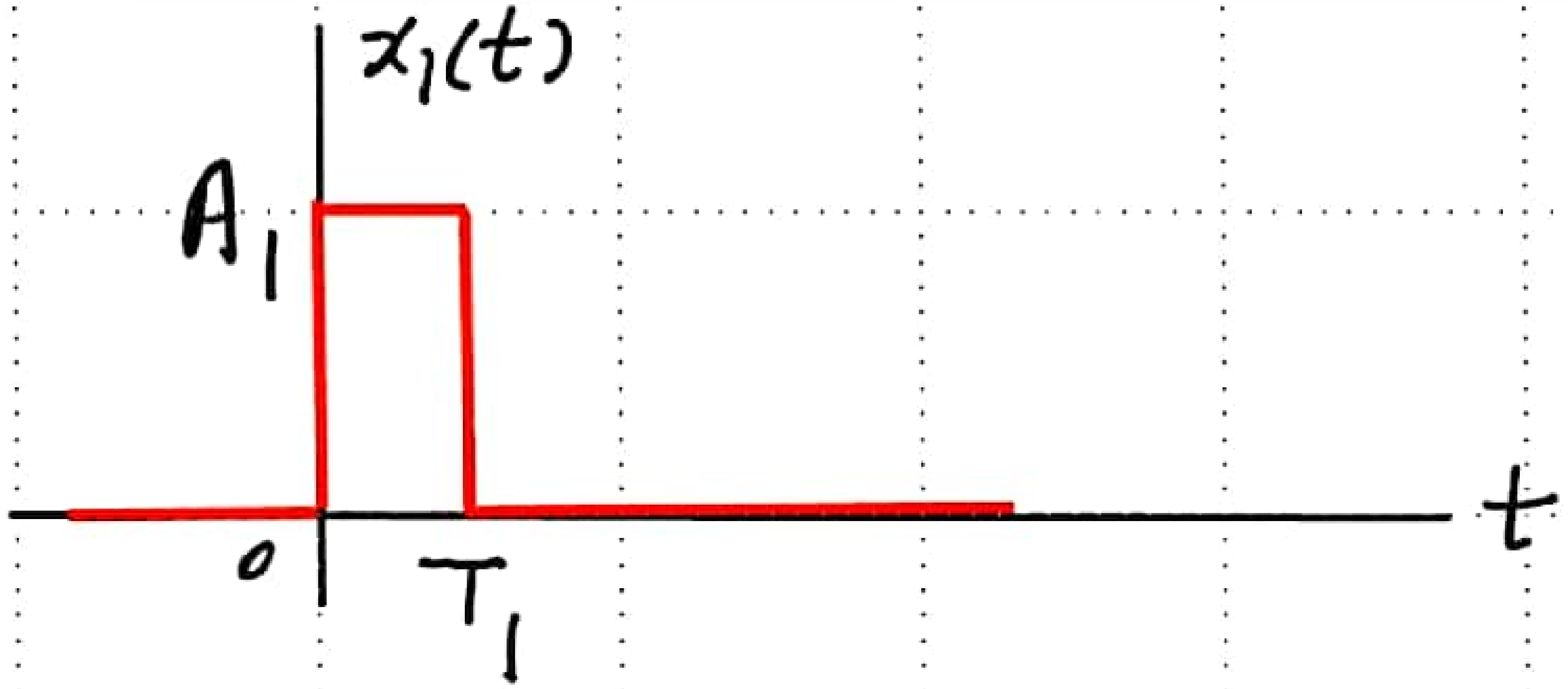


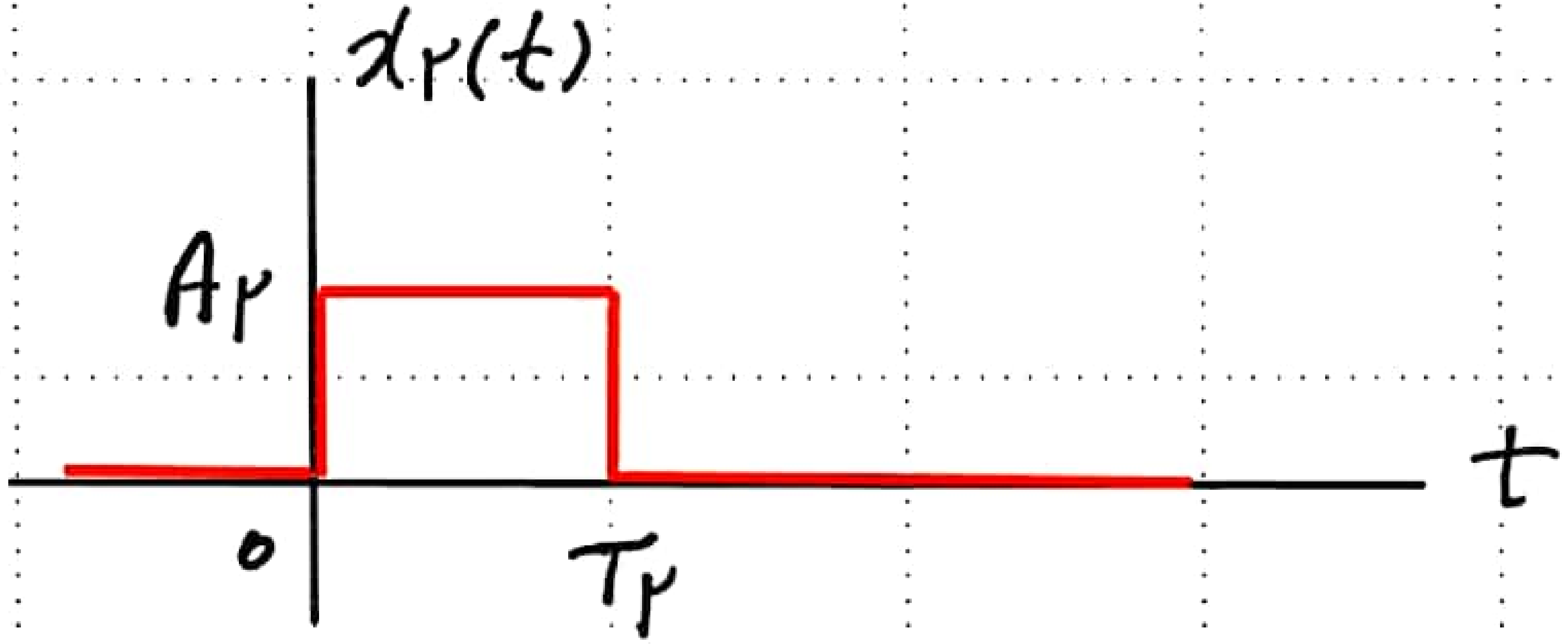
مثال ۴)

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t)$$

محاسبهٔ کانولوشن دو پالس مستطیلی با پهنا و دامنهٔ متفاوت.

(فرض: $T_1 < T_2$)





$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau$$

۱) برای دو حالت $t \leq 0$ و

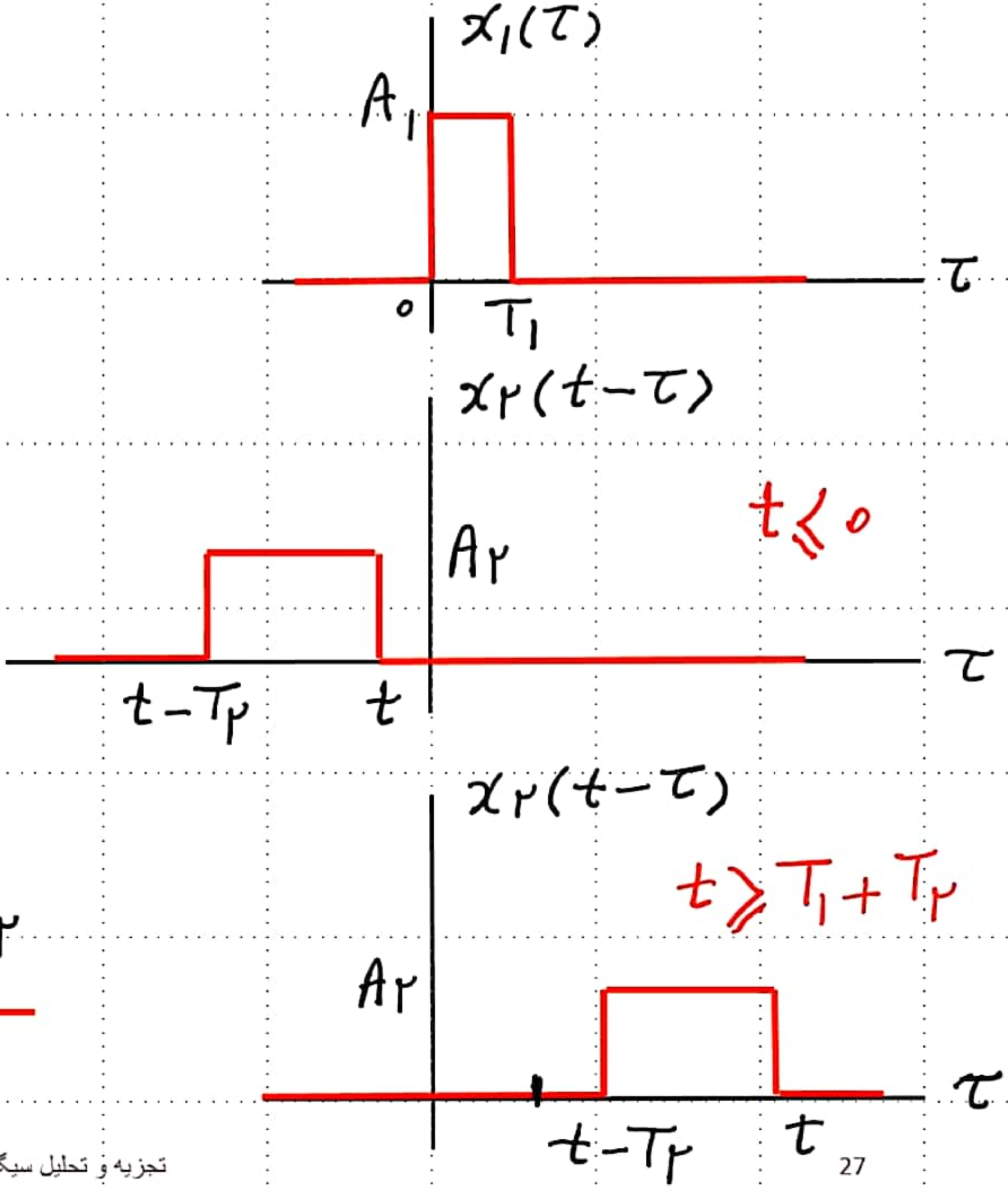
$t - T_2 \geq T_1$ (یا $t > T_1 + T_2$)

هیچ ناحیهٔ همپوشانی غیرصفری بین

$x_1(\tau)$ و $x_2(t-\tau)$ وجود ندارد

در نتیجه:

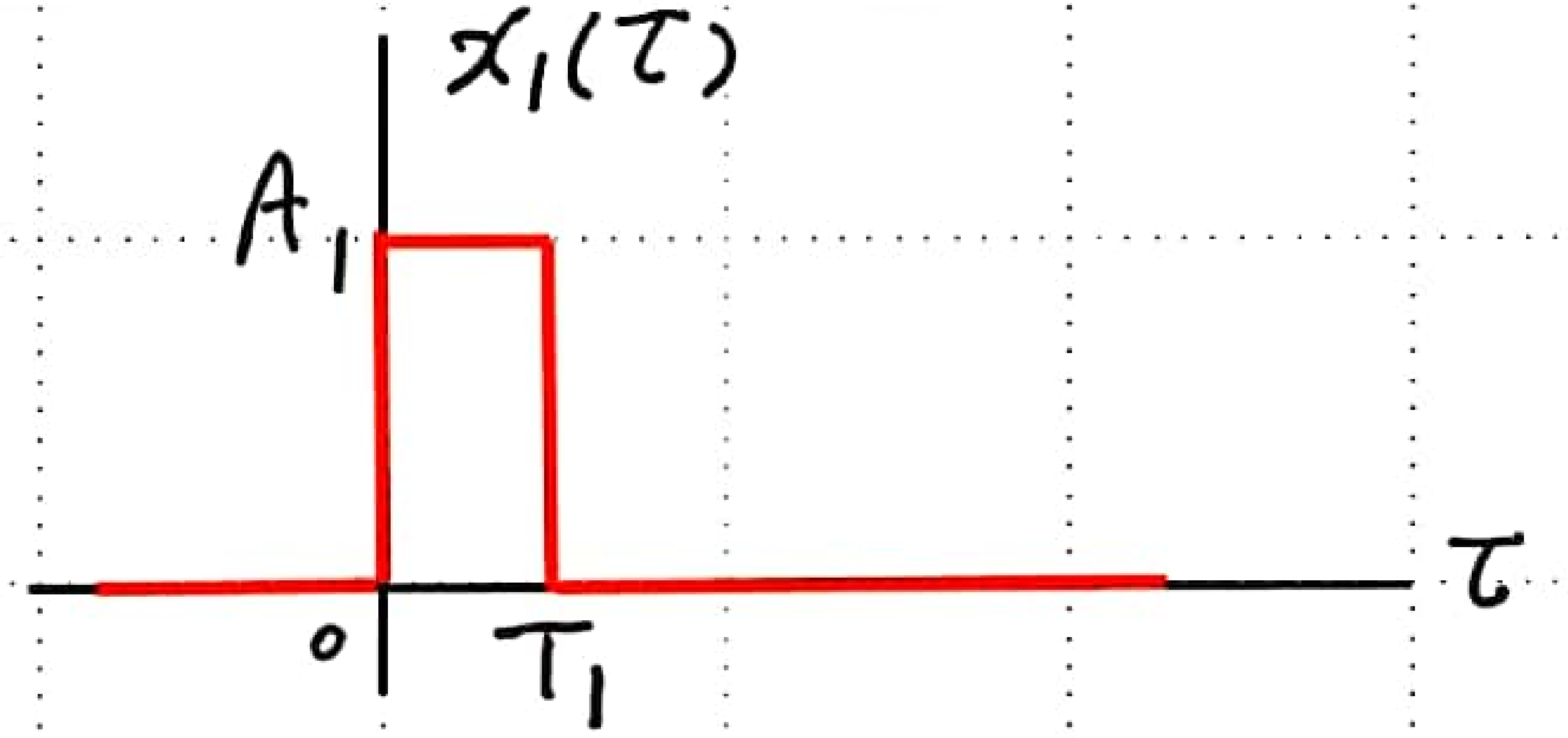
$$y(t) = 0 \quad \forall t \leq 0 \quad \text{یا} \quad \forall t \geq T_1 + T_2$$

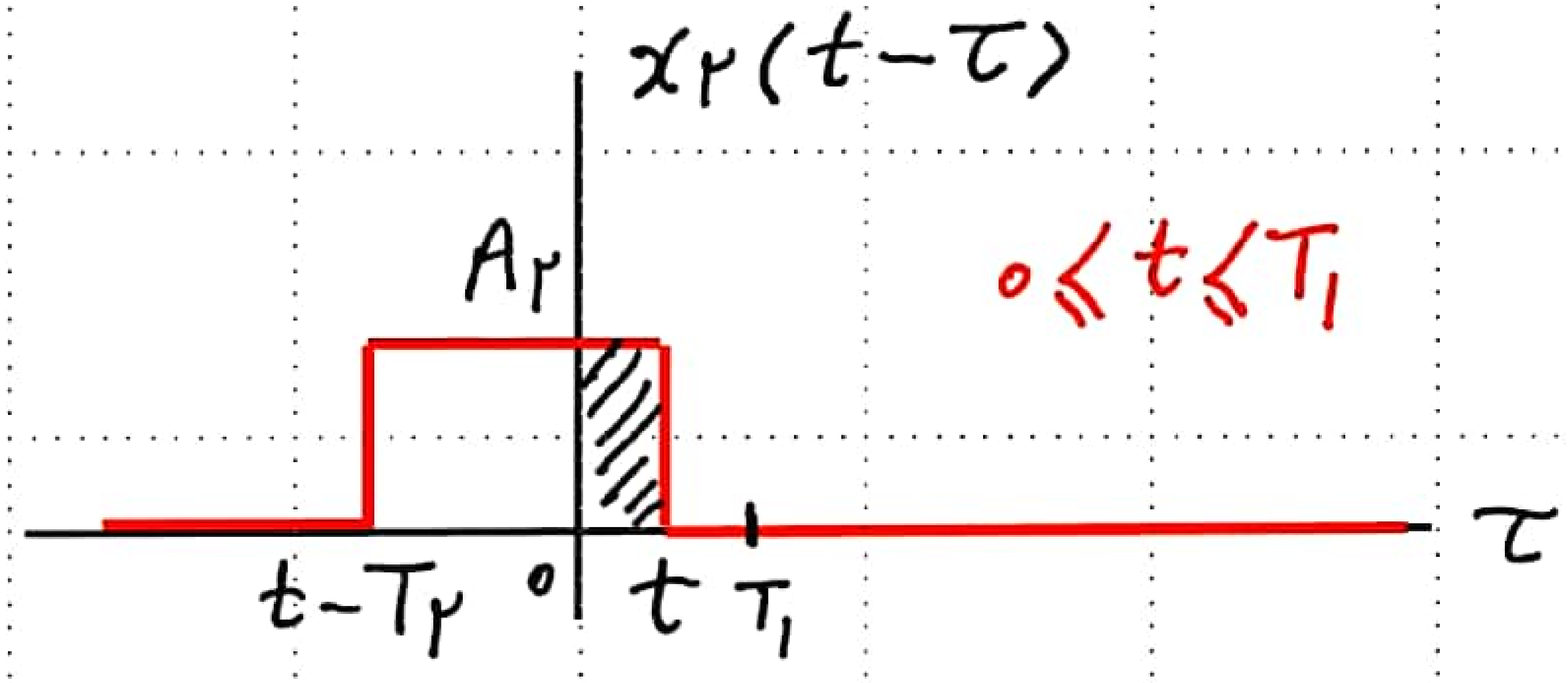


۲) برای حالت $0 \leq t \leq T_1$

$$y(t) = \int_0^t x_1(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^t A_1 A_2\, d\tau = A_1 A_2\, t$$



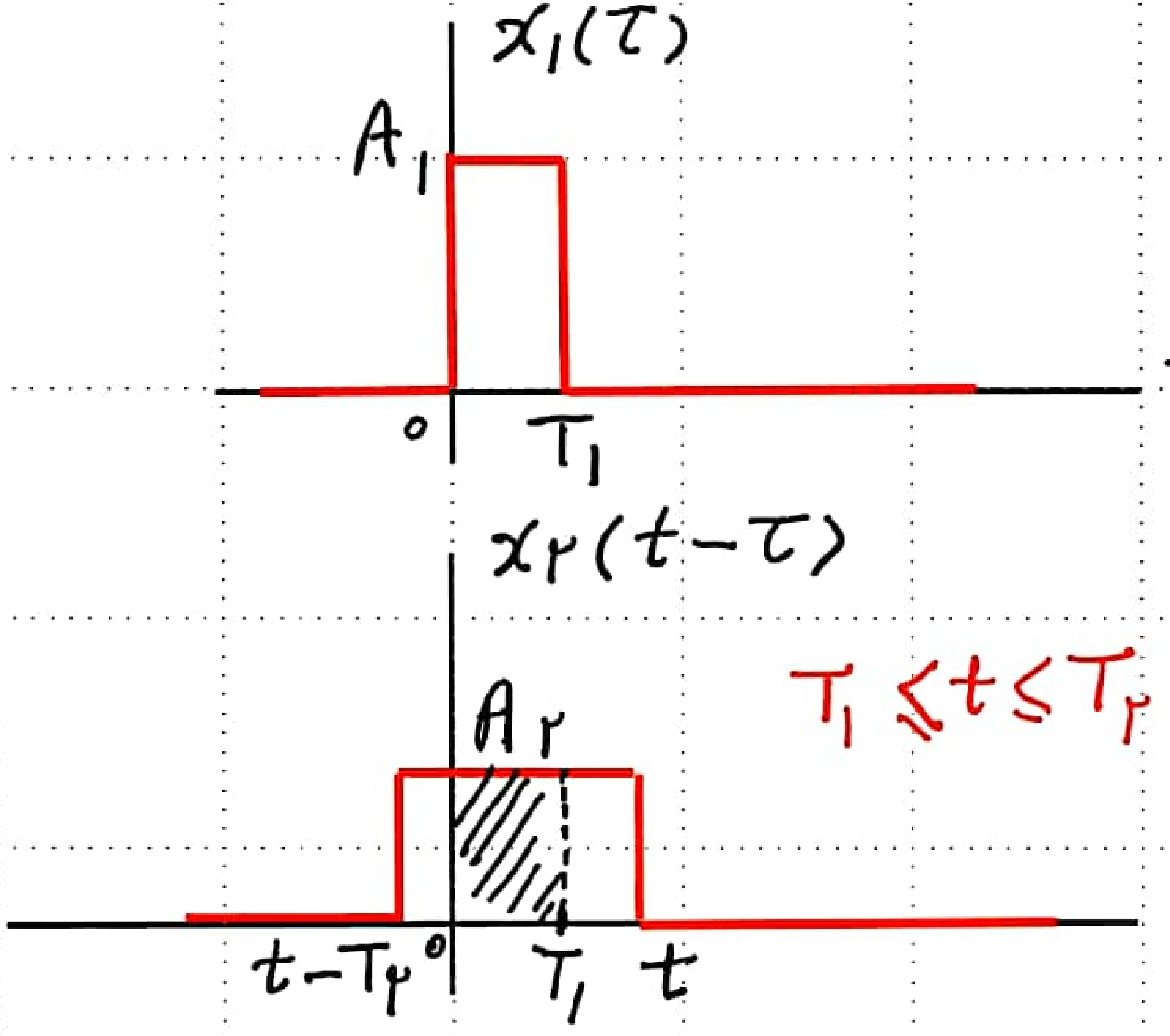


۳) برای حالت $t \geq T_1$ و $t - T_2 \leq 0$

یعنی: $T_1 \leq t \leq T_2$

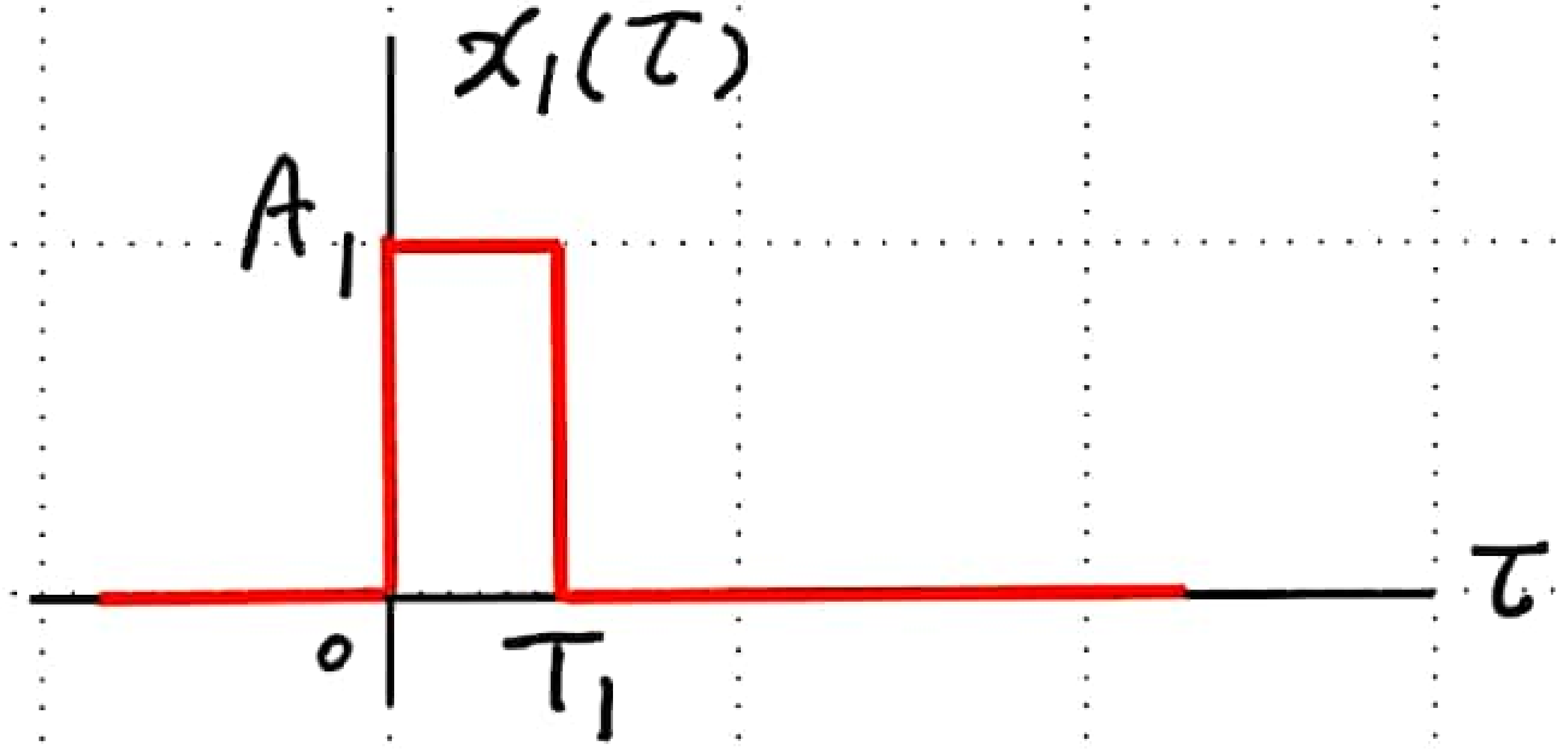
$$y(t) = \int_0^{T_1} A_1 A_2 \, d\tau = A_1 A_2 \tau \Big|_0^{T_1}$$

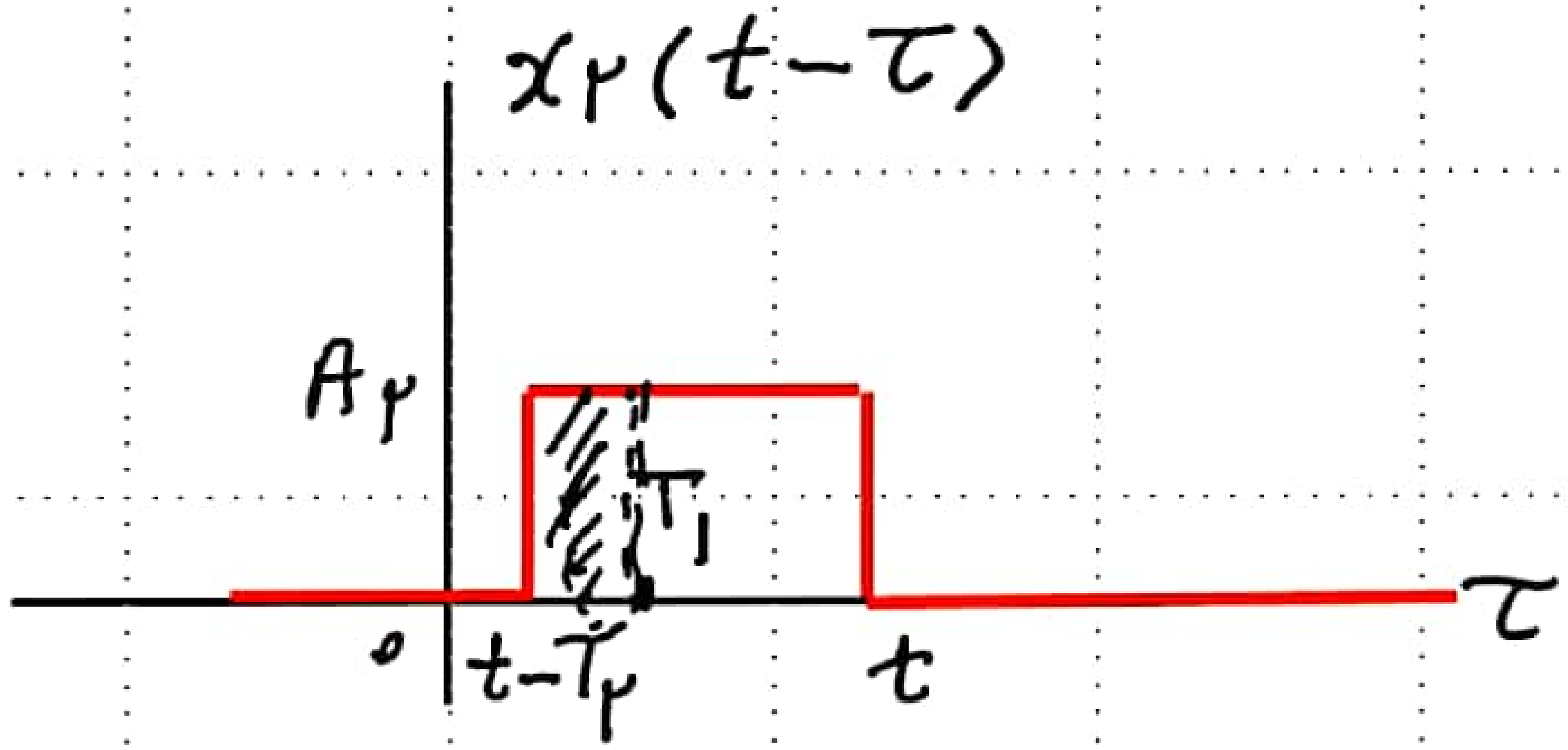
$$\Rightarrow \quad y(t) = A_1 A_2 . T_1$$



۴) برای حالت $0 \leqslant t - T_2 \leqslant T_1$

$T_2 \leqslant t \leqslant T_1 + T_2$



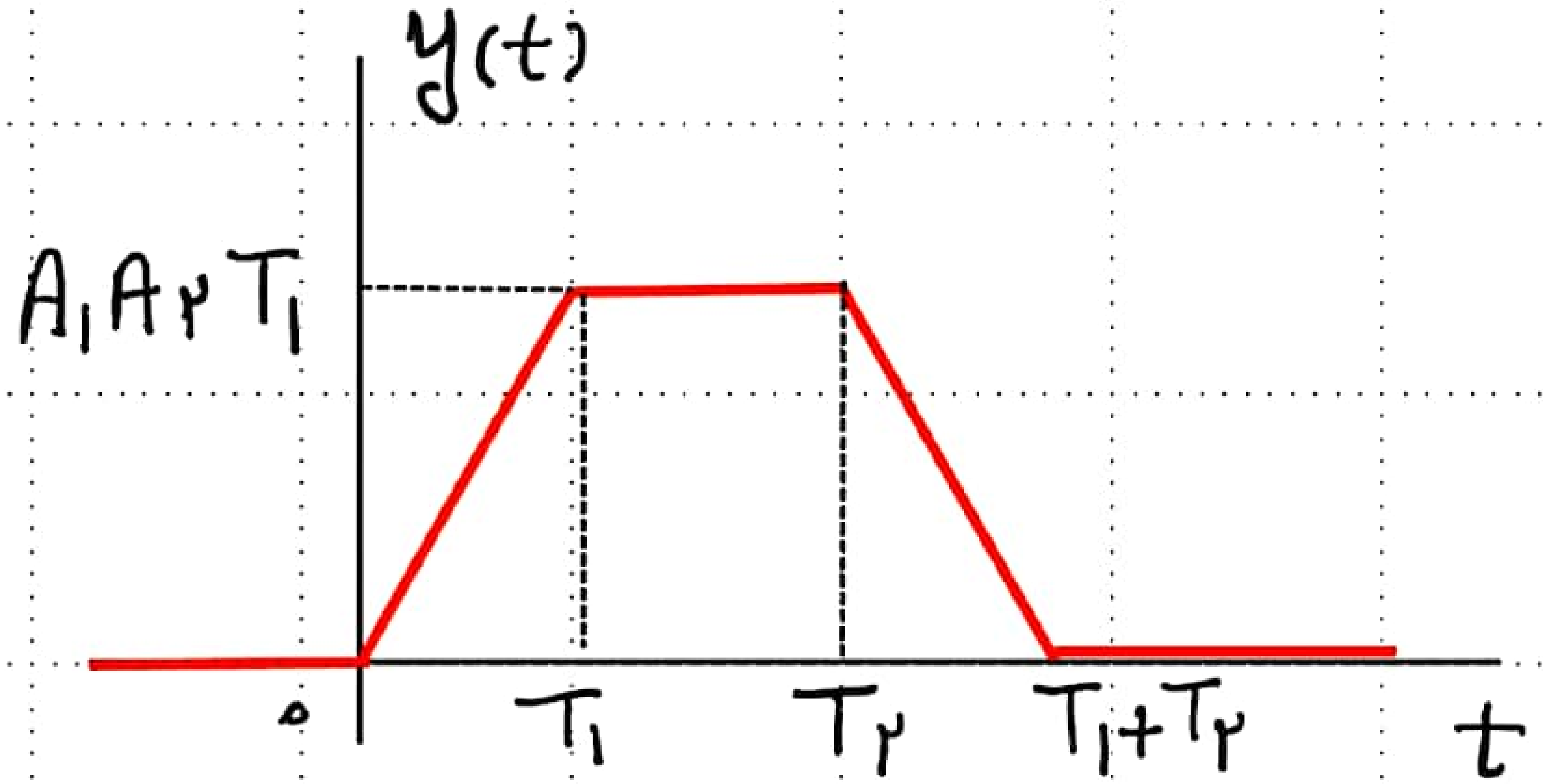


$$y(t) = \int_{t-T_2}^{T_1} A_1 A_2 \, d\tau = A_1 A_2 \tau \Big|_{t-T_2}^{T_1}$$

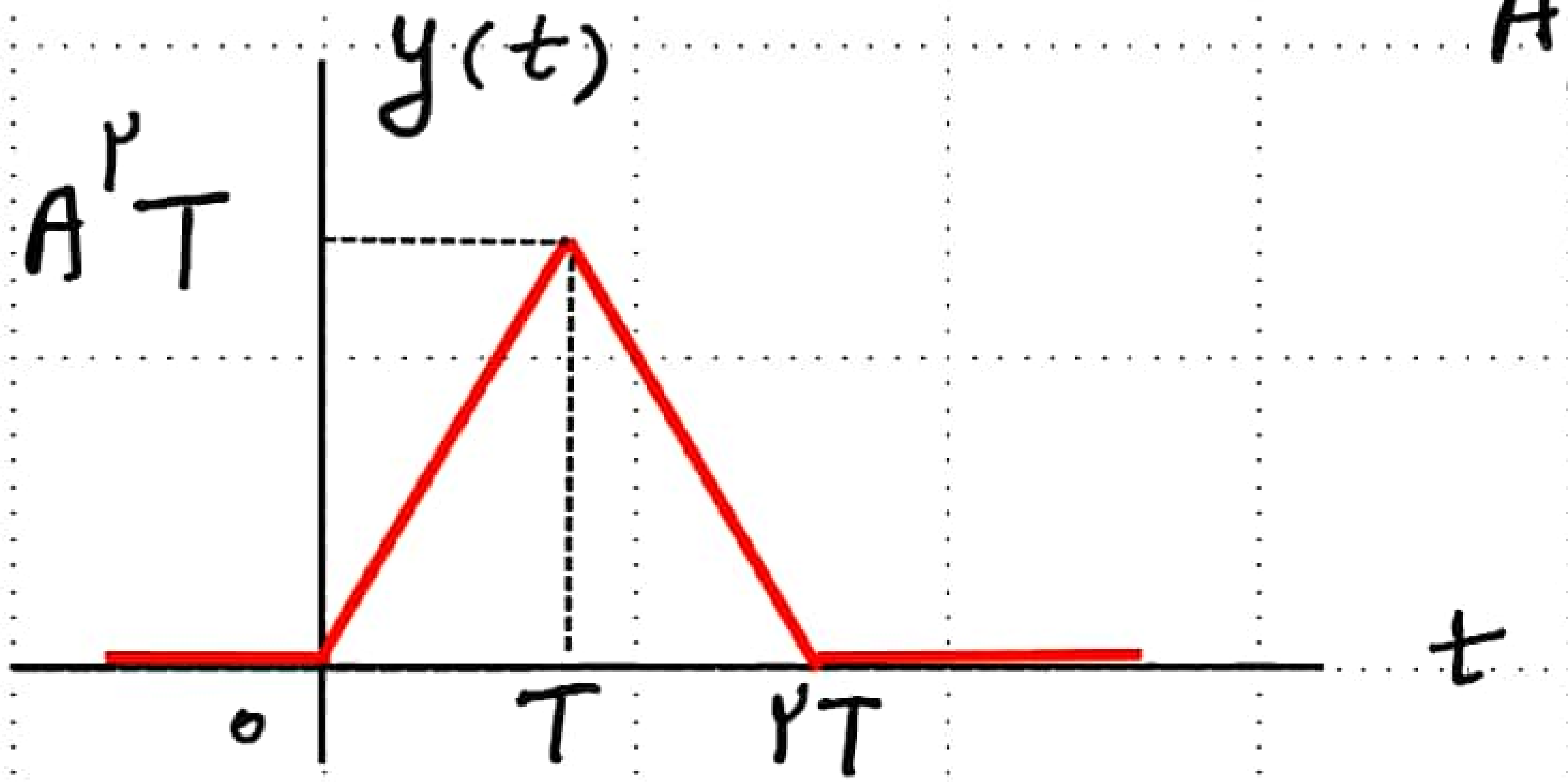
$$= A_1 A_2 \left(T_1 - t + T_2 \right)$$

$$\Rightarrow y(t) = A_1 A_2 \left(T_1 + T_2 - t \right)$$

$$
y(t)=\begin{cases} 0 & ، \quad t\leq 0 \\ A_1A_2t & ، \quad 0\leq t\leq T_1 \\ A_1A_2T_1 & ، \quad T_1\leq t\leq T_2 \\ A_1A_2(T_1+T_2-t) & ، \quad T_2\leq t\leq T_1+T_2 \\ 0 & ، \quad t\geq T_1+T_2 \end{cases}
$$



حالت خاص : $T_1=T_2=T$ و $A_1=A_2=A$



بسم الله الرّحمن الرّحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده برق و کامپیوتر

تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مدرس: مسعود عمومی

جلسه نهم _ بخش 2.3 کتاب

با سلام خدمت دانشجویان محترم

خواص سیستم‌های خطّی و تغییرناپذیر با زمان (LTI)

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] \qquad\qquad x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

convolution sum
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

convolution integral
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

نکتهٔ بسیار مهم: تمام خواص رفتاری سیستم‌های LTI را می‌توان کاملاً از روی پاسخ ضربه (Impulse Response) آنها تعیین نمود.

مثال) پاسخ ضربه واحد در یک سیستم LTI، خروجی آن سیستم را برای هر ورودی تعیین، بطور یکتا تعیین می کند (رابطهٔ کانولوشن). اما در یک سیستم غیر LTI این گونه نیست.

Consider a discrete-time system with unit impulse response $h[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

$= \delta[n] + \delta[n-1]$

LTI systems ➡ $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$ ➡ $y[n] = x[n] + x[n-1].$

example of nonlinear systems with the same response ➡

$$y[n] = (x[n] + x[n-1])^2,$$
$$y[n] = \max(x[n], x[n-1]).$$

در این دو سیستم غیرخطی که همان پاسخ ضربهٔ $h[n]$ فوق را دارند نمی توان رابطهٔ ورودی - خروجی را از روی پاسخ ضربه تعیین کرد.

نتیجه: همه خواص سیستم‌های LTI ریشه در رابطهٔ کانولوشن بین ورودی و پاسخ ضربه دارند.

برخی خواص مهم کانولوشن

خاصیت ۱: جابجایی The Commutative Property

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k],$$

اثبات:

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n-r]h[r] = h[n] * x[n].$$

$r = n - k$ or, equivalently, $k = n - r$,

در حالت CT:

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\lambda)h(\lambda)\,d\lambda = h(t) * x(t)$$

$$\lambda = t - \tau \Rightarrow \tau = t - \lambda$$

$$d\tau = -d\lambda$$

The Distributive Property خاصیت ۲: توزیع‌پذیری (پخشی)

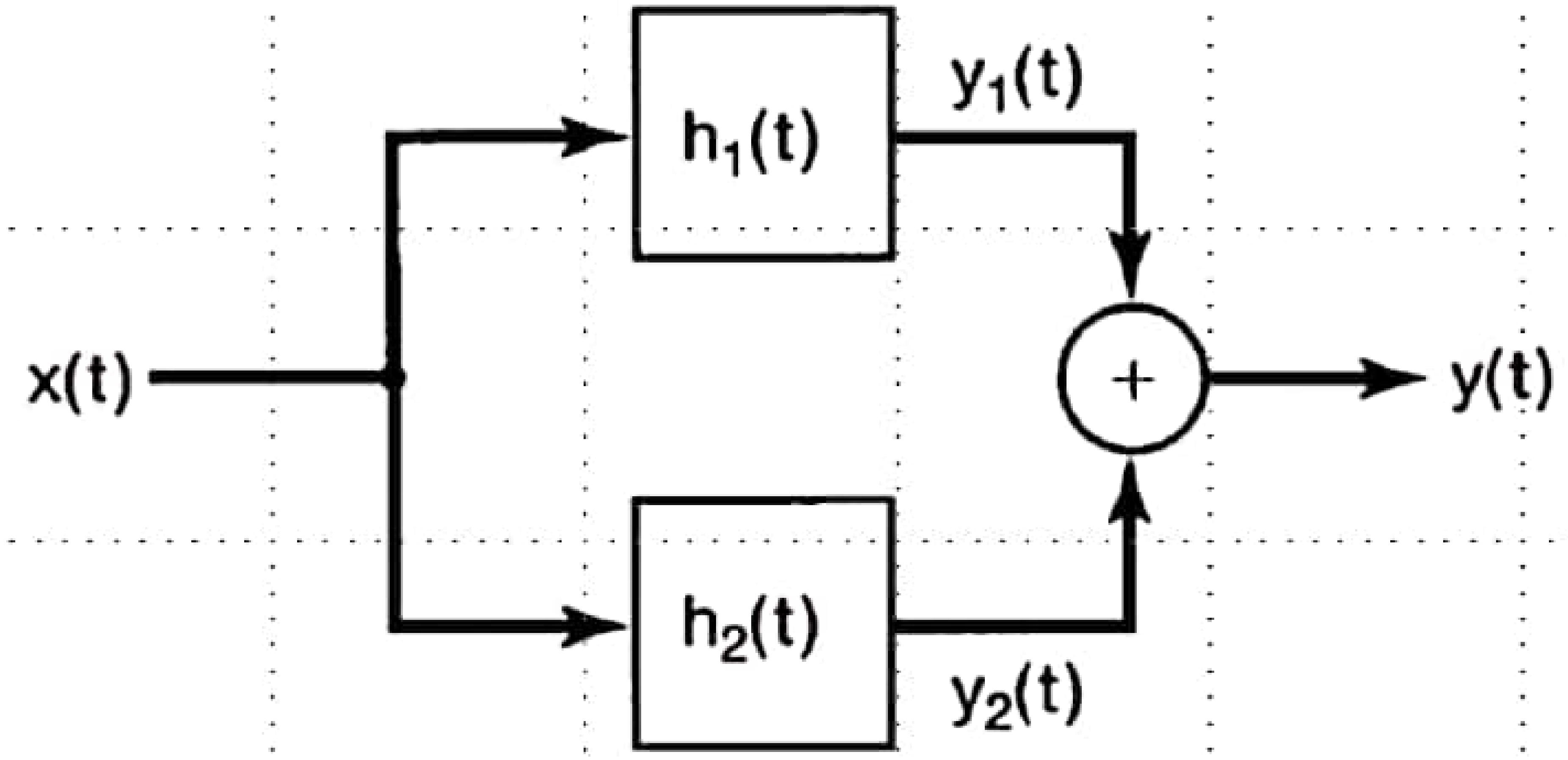
Specifically, convolution distributes over addition, so that in discrete time

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n],$$

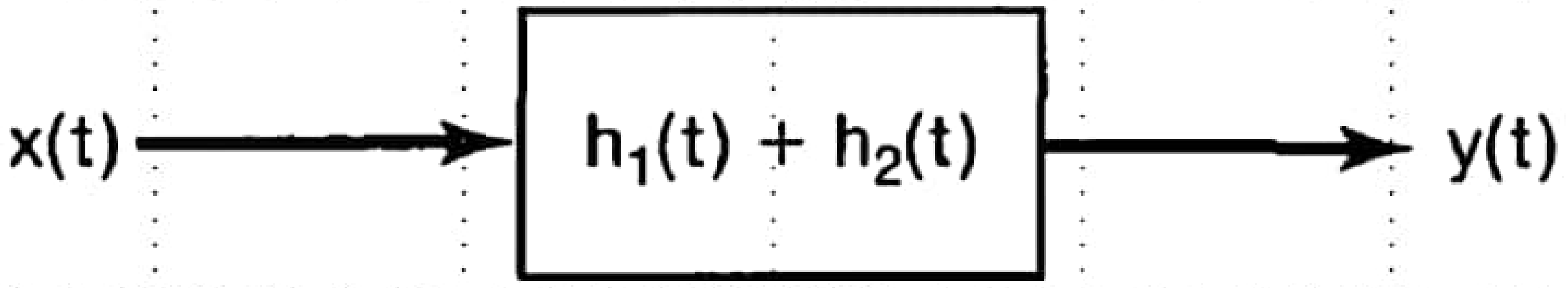
and in continuous time

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t).$$

اثبات بسیار ساده و مستقیماً از تعریف



(a)



(b)

به طور مشابه برای سیستم های DT برقرار است.

تعمیم خاصیت پخشی کانولوشن روی جمع:

$$x(t)*[h_1(t)+h_2(t)+\cdots+h_N(t)]=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)+\cdots+x(t)*h_N(t)$$

به عبارت دیگر حاصل اتصال موازی N سیستم LTI با پاسخ ضربه های $h_1(t)$، ...، $h_N(t)$ معادل با یک سیستم LTI با پاسخ ضربهٔ $h(t)=\sum_{k=1}^{N}h_k(t)$ است. (نتیجه شده عیناً برای سیستم های DT برقرار است.)

نکته: با توجه به دو خاصیت جابجایی و پخشی در کانولوشن داریم:

$$[x_1(t)+x_2(t)]*h(t)=x_1(t)*h(t)+x_2(t)*h(t)$$

(همان جمع پذیری سیستم های خطی)

The Associative Property خاصیت ۳: شرکت‌پذیری

Another important and useful property of convolution is that it is *associative*.

That is, in discrete time

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n],$$

اثبات با استفاده از تعریف به عنوان تمرین

and in continuous time

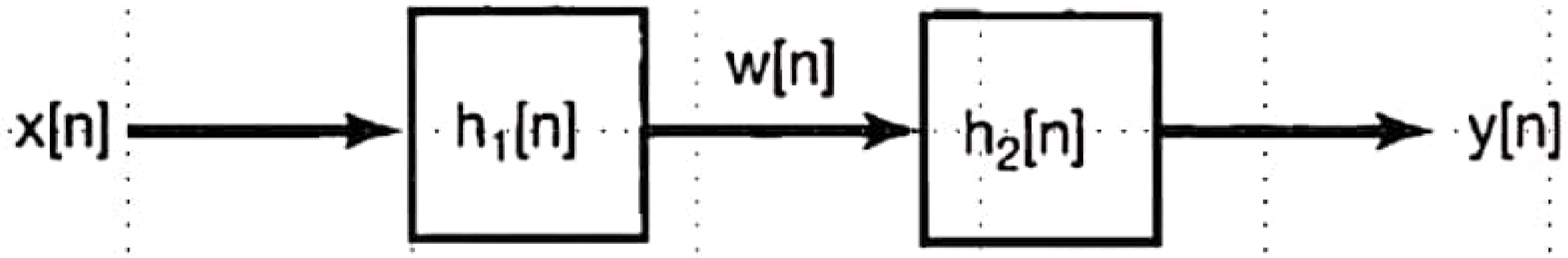
$$x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t).$$

As a consequence of the associative property, the expressions

$$y[n] = x[n] * h_1[n] * h_2[n] \quad \text{and} \quad y(t) = x(t) * h_1(t) * h_2(t)$$

are unambiguous.

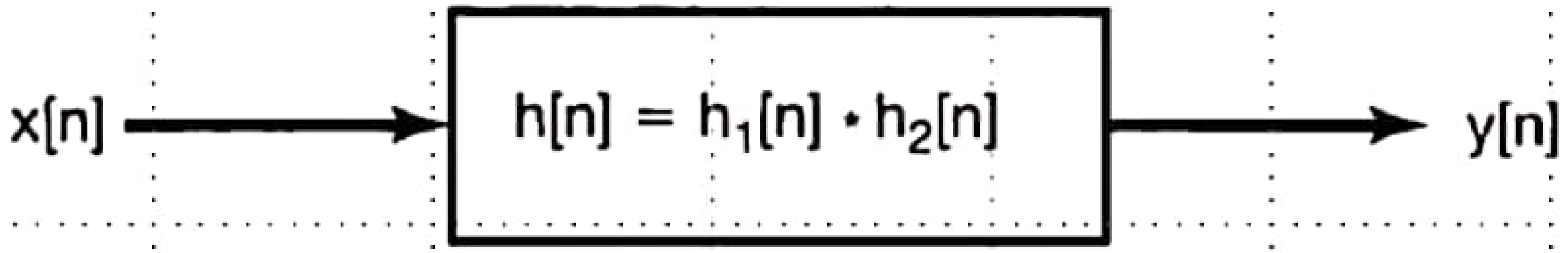
نکته: با توجه به شرکت‌پذیری، در عمل کانولوشن بین چند سیگنال ترتیب اجرای عمل کانولوشن مهم نیست.



(a)

$$y[n] = w[n] * h_2[n] = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n].$$

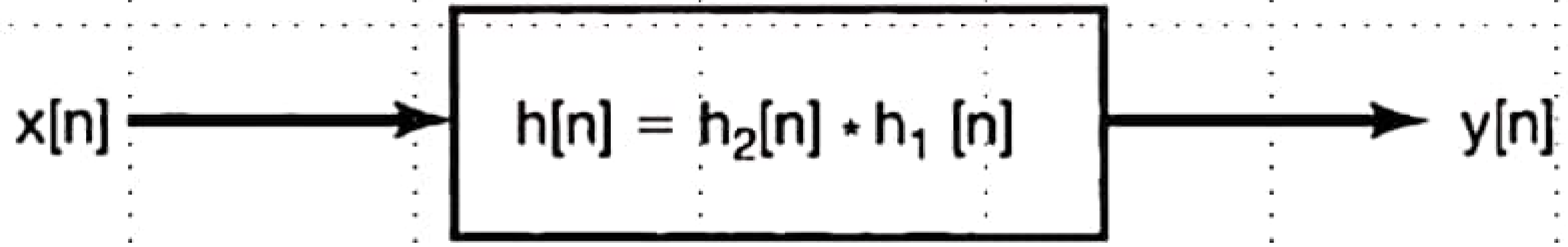
تعبیر مهم سیستمی خاصیت شرکت پذیری در کانولوشن



(b)

$$y[n] = x[n] * h[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n]).$$

در اتصال سری دو (یا چند) سیستم LTI :

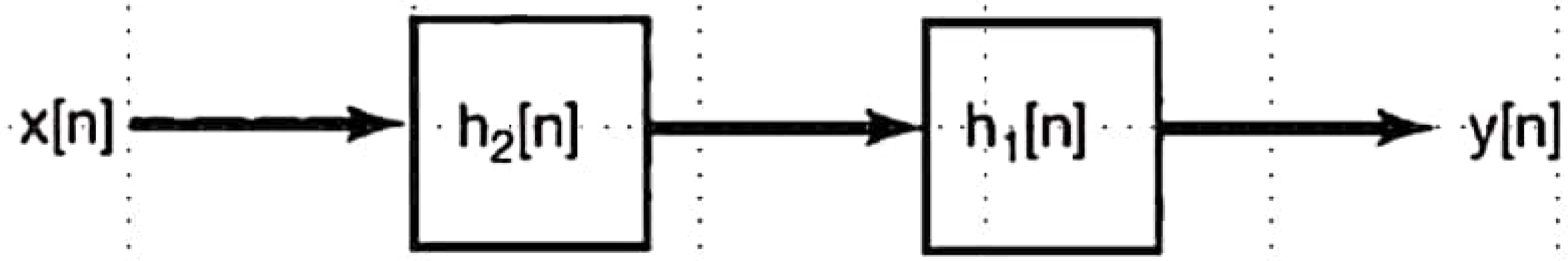


(c)

اولاً : ترتیب قرار گرفتن سیستم ها اهمیتی ندارد.

ثانیاً : کل اتصال معادل یک سیستم LTI است

که پاسخ ضربهٔ آن حاصل کانولوشن بین پاسخ های ضربه سیستم های سری شده با هم است.



(d)

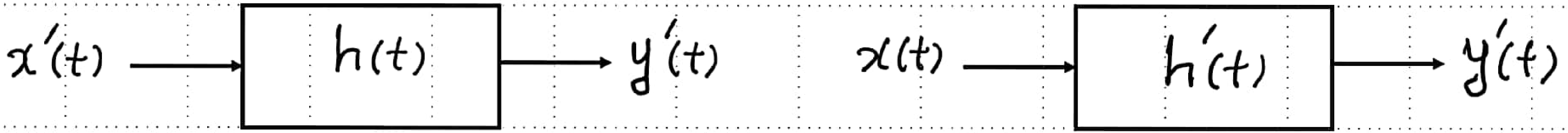
خاصیت ۴: مشتق کانولوشن پیوسته و تفاضل کانولوشن گسسته

در حالت پیوسته، مشتق کانولوشن دو سیگنال برابر است با مشتق یکی کانولوشن با دیگری.

$$y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow y'(t) = x'(t) * h(t) = x(t) * h'(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) h(\tau)\, d\tau \Rightarrow y'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x'(t-\tau) h(\tau)\, d\tau = x'(t) * h(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) x(\tau)\, d\tau \Rightarrow y'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h'(t-\tau) x(\tau)\, d\tau = h'(t) * x(t)$$



در حالت زمان گسسته، تفاضل مرتبه اول کانولوشن دو سیگنال برابر است با تفاضل مرتبه اول یکی کانولوشن با دیگری.

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

$$y[n] - y[n-1] = x[n] * (h[n] - h[n-1])$$

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

$$y[n] - y[n-1] = (x[n] - x[n-1]) * h[n]$$

خاصیت ۵: سطح زیر منحنی در کانولوشن پیوسته و مجموع نمونه‌ها در کانولوشن گسسته

در حالت پیوسته:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

$$A_y = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\,dt \quad , \quad A_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt \quad , \quad A_h = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \underline{A_y = A_x \cdot A_h}$$

سطح زیر منحنی کانولوشن دو سیگنال برابر با حاصل ضرب سطح زیر منحنی آن دو است.

$$A_y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\,dt\right]}_{A_h} d\tau$$

$$= A_h \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,d\tau}_{A_x} = A_h \cdot A_x$$

در حالت گسسته:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

$$A_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \quad , \quad A_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \quad , \quad A_h = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]$$

$$\Rightarrow A_y = A_x \cdot A_h$$ مجموع نمونه‌های کانولوشن دو دنباله برابر با حاصل‌ضرب مجموع نمونه‌های آن دو است.

$$A_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \underbrace{\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-k] \right)}_{A_h}$$

$$= A_h \cdot \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]}_{A_x} = A_h \cdot A_x$$

خاصیت ۶: عضو خنثی در عمل کانولوشن

سیگنال ضربه واحد عضو خنثای عمل کانولوشن است یعنی کانولوشن هر سیگنالی با ضربهٔ واحد خود آن سیگنال خواهد شد.

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

$$x[n] * \delta[n] = x[n]$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau = x(t) * \delta(t)$$

$$x[n] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} x[K]\delta[n-K] = x[n] * \delta[n]$$

به بیان دیگر، ضربهٔ واحد، پاسخ ضربهٔ سیستم همانی (عینی) است.

$$y(t) = T\{x(t)\} = x(t) \quad \Rightarrow \quad h(t) = T\{\delta(t)\} = \delta(t)$$

بیان خواص سیستم‌های LTI بر اساس پاسخ ضربهٔ آنها

۱) سیستم‌های LTI حافظه‌دار و بدون حافظه

شرط لازم و کافی برای بدون حافظه (لحظه‌ای) بودن یک سیستم LTI آن است که پاسخ ضربهٔ آن به شکل تابع ضربه باشد، یعنی :

$h(t) = K\delta(t)$ یا $h[n] = K\delta[n]$

اثبات : در حالت گسسته

فرض : $h[n] = A\delta[n]$

$$\Rightarrow y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = A\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

$$= A\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[n-k] = A x[n]\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-k] = A x[n]$$

$\Rightarrow y[n] = A\,x[n] \Rightarrow$ سیستم بدون حافظه است.

کفایت شرط اثبات شد.

فرض: سیستم بدون حافظه است

$$\Rightarrow y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

$$= x[n]h[0] + \underbrace{\sum_{k \neq n} x[k]h[n-k]}_{=0}$$

(سیستم بدون حافظه)

$$\Rightarrow h[n] = 0 \quad \forall n \neq 0$$

$$\Rightarrow h[n] = A\delta[n]$$

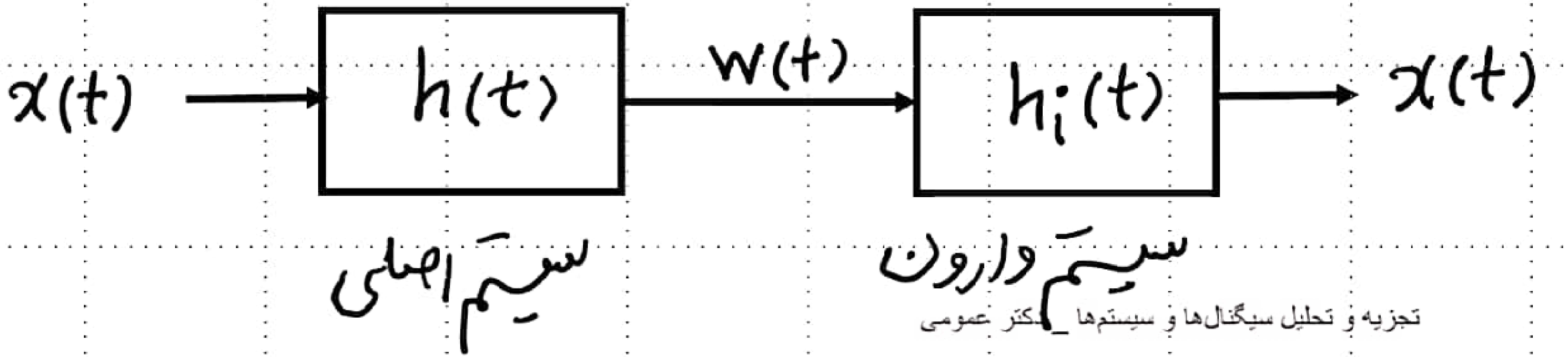
یعنی پاسخ ضربه حتماً به شکل ضربه است.

لزوم شرط اثبات شد.

۲) وارون‌پذیری در سیستم‌های LTI

با توجه به تعریف وارون پذیری یک سیستم، اتصال سری یک سیستم وارون پذیر با سیستم وارون آن یک سیستم همانی است. پس شرط وارون پذیری یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ آن است که سیستم LTI دیگری با پاسخ ضربه $h_i(t)$ پیدا شود به طوری که:

$$h(t) * h_i(t) = \delta(t)$$



مثال:

$$h(t) = \delta(t - t_0) \Rightarrow h_i(t) = \delta(t + t_0)$$

$$\delta(t - t_0) * \delta(t + t_0) = \delta(t)$$

$$h[n] = 2\delta[n+3] \Rightarrow h_i[n] = \frac{1}{2}\delta[n-3]$$

$$x(t) \longrightarrow \underset{h(t)}{\boxed{\text{انتگرال‌گیر}}} \xrightarrow{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau} \underset{h_i(t)}{\boxed{\text{مشتق‌گیر}}} \longrightarrow x(t)$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau = u(t) \qquad h_i(t) = \frac{d}{dt}\delta(t) = \delta'(t)$$

$$u(t) * \delta'(t) = \frac{d}{dt}\left[u(t) * \delta(t)\right] = \frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)$$

$x[n] \longrightarrow$ [تفاضل مرتبه اول] $\xrightarrow{x[n]-x[n-1]}$ [انباره] $\longrightarrow x[n]$

$h[n]$ $h_i[n]$

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

$$h_i[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$

$$h[n] * h_i[n] = \left(\delta[n] - \delta[n-1]\right) * h_i[n]$$

$$= \delta[n] * \left(h_i[n] - h_i[n-1]\right) = h_i[n] - h_i[n-1]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] - \sum_{k=-\infty}^{n-1} \delta[k] = \delta[n]$$

۳) علّی بودن در سیستم‌های LTI

در یک سیستم علّی، خروجی مستقل از آینده ورودی است و فقط به حال و گذشتهٔ آن بستگی دارد.

به عبارت دیگر اگر ورودی‌های مختلف تا لحظهٔ t_0 $t \leq t_0$ با هم برابر باشند، خروجی‌های نظیرشان

هم تا لحظهٔ t_0 $t \leq t_0$ با هم برابرند. در یک سیستم LTI زمان پیوسته:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau=\underbrace{\int_{-\infty}^{0}x(t-\tau)h(\tau)d\tau}_{\text{آینده ورودی}}+\underbrace{\int_{0}^{\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau}_{\text{حال و گذشته ورودی}}$$

شرط لازم و کافی علّی بودن: $\int_{-\infty}^{0}x(t-\tau)h(\tau)d\tau=0 \Rightarrow \underline{h(t)=0\ ,\ \forall t<0}$

در یک سیستم LTI زمان گسسته:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[n-k]h[k]$$

$$=\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1}x[n-k]h[k]}_{\text{آینده ورودی}}+\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}x[n-k]h[k]}_{\text{حال و گذشته ورودی}}$$

شرط لازم و کافی علّی بودن: $\sum_{k=-\infty}^{-1}x[n-k]h[k]=0 \Rightarrow \underline{h[n]=0 \ , \ \forall n<0}$

اصطلاحاً گفته می‌شود که شرط لازم و کافی علّی بودن سیستم‌های LTI، علّی بودن پاسخ ضربه آنهاست.

۴) پایداری در سیستم‌های LTI

با توجه به تعریف سیستمهای پایدار (BIBO)

اگر $|x(t)| \leq M < \infty \Rightarrow |y(t)| \leq N < \infty$

شرط لازم و کافی پایداری (BIBO) در سیستمهای LTI عبارتست از:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$$

اثبات کفایت شرط: فرض کنیم $|x(t)| \leq M < \infty$

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t-\tau)| |h(\tau)| d\tau$$

$$\leq M \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau$$

برای آن که $|y(t)| \leqslant N < \infty$ کافی است که : $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau \leqslant N_1 < \infty$.

اثبات لزوم شرط : کافی است که فرض کنیم $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \infty$ و یک ورودی محدود

مثال بزنیم که خروجی نامحدود تولید کند و درنتیجه سیستم ناپایدار باشد .

$$x(t) = \underbrace{Sgn\,[h(-t)]}_{\text{تابع علامت}} = \begin{cases} 1 & \text{، اگر } h(-t) > 0 \\ -1 & \text{، اگر } h(-t) < 0 \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} sgn\,[h(-\tau)]\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} sgn\,[h(-\tau)]\, h(-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(-\tau)| d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \infty$$

$\Rightarrow$ سیستم پایدار نیست

مثال) سیستم تأخیردهنده زمانی پایدار است. $y(t) = x(t-t_0)$

$$\Rightarrow h(t) = \delta(t-t_0) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\delta(t-t_0)|dt = 1 < \infty$$

سیستم انتگرال‌گیر (و همچنین انباره) ناپایدار است.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \Rightarrow h(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|dt = \int_{0}^{\infty} dt = \infty \Rightarrow$$ ناپایدار است.

۵) پاسخ پلّهٔ واحد در سیستم‌های LTI

پاسخ هر سیستم به ورودی پلّه واحد را پاسخ پلّه آن می‌نامیم.

$$s(t) = T\{u(t)\} \quad , \quad s[n] = T\{u[n]\}$$

در سیستمهای LTI :

$$s(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)h(\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau \Rightarrow$$

پاسخ پلّه سیستم انتگرال پاسخ ضربهٔ آن است.

$$\Rightarrow h(t) = \frac{d}{dt} s(t) \Rightarrow$$

پاسخ ضربهٔ سیستم مشتق پاسخ پلّهٔ آن است.

در حالت گسسته:

$$s[n] = u[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[n-k]h[k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \Rightarrow$$ پاسخ پلهٔ سیستم مجموع (تجمّعی) پاسخ ضربهٔ آن است.

$$\Rightarrow h[n] = s[n] - s[n-1] \Rightarrow$$ پاسخ ضربهٔ سیستم، تفاضل مرتبهٔ اول پاسخ پلهٔ آن است.

بسم الله الرّحمن الرّحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده برق و کامپیوتر

تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مدرس: مسعود عمومی

جلسه دهم _ بخش‌های 2.4 و 2.5 کتاب

با سلام خدمت دانشجویان محترم

سیستم‌های LTI توصیف‌شده با معادلات دیفرانسیل خطی با ضرائب ثابت

An extremely important class of continuous-time systems is that for which the input and output are related through a *linear constant-coefficient differential equation.*

سیستم توصیف شده توسط معادله دیفرانسیل خطی با ضرائب ثابت

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\mathbf{T}} \longrightarrow y(t)$$

A general *N*th-order linear constant-coefficient differential equation is given by

فرم کلی معادله‌ی دیفرانسیل خطی با ضرائب ثابت و از مرتبه N

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}. \qquad (1)$$

The order refers to the highest derivative of the output $y(t)$ appearing in the equation.

In the case when $N = 0$,

رابطهٔ صریح خروجی برحسب ورودی
به شرط مرتبهٔ صفر معادله

$$y(t) = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}. \qquad (2)$$

In this case, $y(t)$ is an explicit function of the input $x(t)$ and its derivatives.

For $N \geq 1$, eq. (1) specifies the output implicitly in terms of the input.

The solution $y(t)$ consists of two parts—a particular solution to eq. (1) plus a solution to the homogeneous differential equation

$y_p(t)$ پاسخ خاص

معادله دیفرانسیل همگن

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0. \qquad (3)$$

$y_h(t)$ پاسخ طبیعی

The solutions to this equation are referred to as the *natural responses* of the system.

the condition of initial rest شرایط آرامش اولیه در $t = t_0$

if $x(t) = 0$ for $t \leq t_0$, we assume that $y(t) = 0$ for $t \leq t_0$,

and therefore, the response for $t > t_0$ can be calculated from the differential equation **(1)** with the initial conditions

$$y(t_0) = \frac{dy(t_0)}{dt} = \ldots = \frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt^{N-1}} = 0. \qquad \textbf{(4)}$$

Under the condition of initial rest, the system described by eq. **(1)** is causal and LTI.

معادلهٔ دیفرانسیل خطی با ضرائب ثابت از مرتبهٔ N ، تحت شرایط اولیهٔ صفر (آرامش اولیه) یک سیستم زمان پیوستهٔ LTI و علّی را توصیف می‌کند.

مثال) سیستم توصیف شده توسط معادله دیفرانسیل $y'(t)+3y(t)=x(t)$ را در نظر می گیریم.

اگر $x(t)=0$ & $y(0)\neq 0 \Rightarrow y(t)\neq 0 \Rightarrow$ سیستم خطی نیست

✓ نشان می دهیم که شرط لازم و کافی برای خطی بودن این سیستم آن است که $y(0)=0$

$$\begin{cases} y_1'(t)+3y_1(t)=x_1(t) \\ y_1(0)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2'(t)+3y_2(t)=x_2(t) \\ y_2(0)=0 \end{cases}$$

$$y(t)=T\{a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\} \Rightarrow \begin{cases} y'(t)+3y(t)=a_1x_1(t)+a_2x_2(t) \\ y(0)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 y_1'(t) + 3a_1 y_1(t) = a_1 x_1(t) \\ a_1 y_1(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2 y_2'(t) + 3a_2 y_2(t) = a_2 x_2(t) \\ a_2 y_2(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}\left[a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)\right] + 3a_1\left[y_1(t) + y_2(t)\right] = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \\ a_1 y_1(0) + a_2 y_2(0) = 0 \end{cases}$$

با توجه به یکتا بودن پاسخ معادلات دیفرانسیل نتیجه می‌گیریم که :

$$y(t) = T\{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\} = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

یعنی سیستم خطی است.

✓ اثبات تغییرناپذیری با زمان :

$$T\{Z_{t_0}\{x(t)\}\} = T\{x(t-t_0)\} = S(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S'(t) + ۳S(t) = x(t-t_0) \\ S(0) = 0 \end{cases} \quad (۱)$$

$$Z_{t_0}\{T\{x(t)\}\} = Z_{t_0}\{y(t)\} = y(t-t_0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y'(t-t_0) + ۳y(t-t_0) = x(t-t_0) \\ y(-t_0) = 0 \end{cases} \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow y(t-t_0) = S(t) = T\{x(t-t_0)\}$$

$\Rightarrow$ سیستم TI است.

بررسی علّی بودن سیستم:

$$\begin{cases} y'(t) + 3y(t) = x(t) \quad , \quad t \geq t_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

شرط لازم و کافی علّی بودن آن است که اگر ورودی $x(t)$ برای $t \leq t_0$ صفر باشد، $y(t)$ هم برای $t \leq t_0$ صفر باشد.

اگر $x(t) = f(t)u(t-t_0) \Rightarrow y(t) = g(t)u(t-t_0)$

تنها در صورتی که سیستم در حالت آرامش اولیه باشد یعنی $y(t_0) = 0$ سیستم علّی خواهد بود.

مثال)

$$y'(t) + ۳y(t) = x(t) = Ae^{۲t}u(t) \quad , \quad y(0) = 0$$

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$$y_h(t) = Ke^{st} \Rightarrow (s+۳)Ke^{st} = 0 \Rightarrow \underbrace{s = -۳}$$

$$y_p(t) = Be^{۲t} \, , \, t>0 \Rightarrow (۲B + ۳B)e^{۲t} = Ae^{۲t} \Rightarrow \underbrace{B = \frac{A}{۵}}$$

$$y(t) = Ke^{-۳t} + \frac{A}{۵}e^{۲t} \, , \, t>0 \quad , \quad y(t) = 0 \, , \, t<0$$

$$y(0) = K + \frac{A}{۵} = 0 \Rightarrow \underbrace{K = -\frac{A}{۵}}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{A}{۵}(e^{۲t} - e^{-۳t})u(t)$$

سیستم‌های LTI توصیف‌شده با معادلات تفاضلی خطی با ضرائب ثابت

Correspondingly, an important class of discrete-time systems is that for which the input and output are related through a *linear constant-coefficient difference equation.*

سیستم توصیف شده توسط معادلات تفاضلی خطی با ضرائب ثابت.

$$x[n] \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow y[n]$$

A general Nth-order linear constant-coefficient difference equation is given by

فرم کلی معادله تفاضلی خطی با ضرائب ثابت و از مرتبه N

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]. \qquad (5)$$

Specifically, the solution $y[n]$ can be written as the sum of a particular solution to eq. (5)

$y_p[n]$ پاسخ خاص

and a solution to the homogeneous equation

معادلهٔ تفاضلی همگن

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0. \qquad (6)$$

پاسخ طبیعی

$y_h[n]$

The solutions to this homogeneous equation are often referred to as the natural responses of the system described by eq. **(5)** which can be rearranged in the form

فرم دیگر معادلهٔ تفاضلی
مرتبهٔ N

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right\}. \qquad (7)$$

In the special case when $N = 0$, eq. **(5)** reduces to

رابطهٔ صریح خروجی برحسب
ورودی به شرط مرتبهٔ صفر معادله
(معادلهٔ غیر برگشتی)

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M}\left(\frac{b_k}{a_0}\right)x[n-k]. \qquad (8)$$

Here, $y[n]$ is an explicit function of the present and previous values of the input. For this reason, eq. **(8)** is often called a *nonrecursive equation,* since we do not recursively

معادلهٔ غیربرگشتی

use previously computed values of the output to compute the present value of the output.

معادلهٔ برگشتی

An equation of the form of eq. **(5)** or eq. **(7)** is called a *recursive equation,* since it specifies a recursive procedure for determining the output in terms of the input and previous outputs. From this, we can immediately see the need for auxiliary conditions.

شرایط کمکی (اولیه)

In order to calculate $y[n]$, we need to know $y[n-1], \ldots, y[n-N]$. Therefore, if we are given the input for all n and a set of auxiliary conditions such as $y[-N], y[-N+1], \ldots, y[-1]$, eq. **(7)** can be solved for successive values of $y[n]$.

N شرط کمکی برای تعیین $y[0]$ در معادلهٔ برگشتی

While there are many possible choices for auxiliary conditions, leading to different input-output relationships, we will focus for the most part on the condition of initial rest—i.e., if $x[n] =$

شرایط آرامش اولیه

0 for $n < n_0$, then $y[n] = 0$ for $n < n_0$ as well. With initial rest, the system described by eq. **(5)** is LTI and causal.

معادلهٔ تفاضلی خطی با ضرایب ثابت از مرتبهٔ N ، تحت شرایط اولیهٔ صفر (آرامش اولیه) یک سیستم زمان گسستهٔ LTI و علّی را توصیف می‌کند

معادلات غیربرگشتی و سیستمهای با پاسخ ضربهٔ محدود (FIR)

In the special case when $N = 0$, eq. (7) reduces to $y[n] = \sum_{k=0}^{M} \left(\frac{b_k}{a_0}\right) x[n-k]$.

اگر $x[n] = \delta[n] \Rightarrow y[n] = T\{\delta[n]\} = h[n]$

$$= \frac{b_0}{a_0}\delta[n] + \frac{b_1}{a_0}\delta[n-1] + \cdots + \frac{b_M}{a_0}\delta[n-M]$$

$$\Rightarrow \quad h[n] = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0}, & 0 \le n \le M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

$\Rightarrow$ طول پاسخ ضربه محدود است

و سیستم را FIR می‌نامیم.

(Finite Impulse Response)

معادلات برگشتی و سیستمهای با پاسخ ضربهٔ نامحدود (IIR)

In fact, if $N \geq 1$ in eq. **(7)** so that the difference equation is recursive, it is usually the case that the LTI system corresponding to this equation together with the condition of initial rest will have an impulse response of infinite duration. Such systems are commonly referred to as *infinite impulse response (IIR) systems*.

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right\}.$$

با فرض $x[n] = \delta[n]$ و شرایط اولیهٔ $y[-1] = y[-2] = \cdots = y[-N] = 0$

(حالت آرامش اولیه سیستم)، $y[n] = h[n]$ دارای طول نامحدود است و

سیستم را IIR می‌نامیم. (Infinite Impulse Response)

مثال)

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] \quad \text{و} \quad y[-1] = 0$$

اگر

$$x[n] = \delta[n] \Rightarrow y[n] = T\{\delta[n]\} = h[n] = ?$$

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1]$$

$$\begin{cases} y[0] = x[0] + \frac{1}{2}y[-1] = 1 \\ y[1] = \underbrace{\cancel{x[1]}}_{0} + \frac{1}{2}y[0] = \frac{1}{2} \\ y[2] = \underbrace{\cancel{x[2]}}_{0} + \frac{1}{2}y[1] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ \vdots \\ y[k] = \underbrace{\cancel{x[k]}}_{0} + \frac{1}{2}y[k-1] = \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{cases}$$

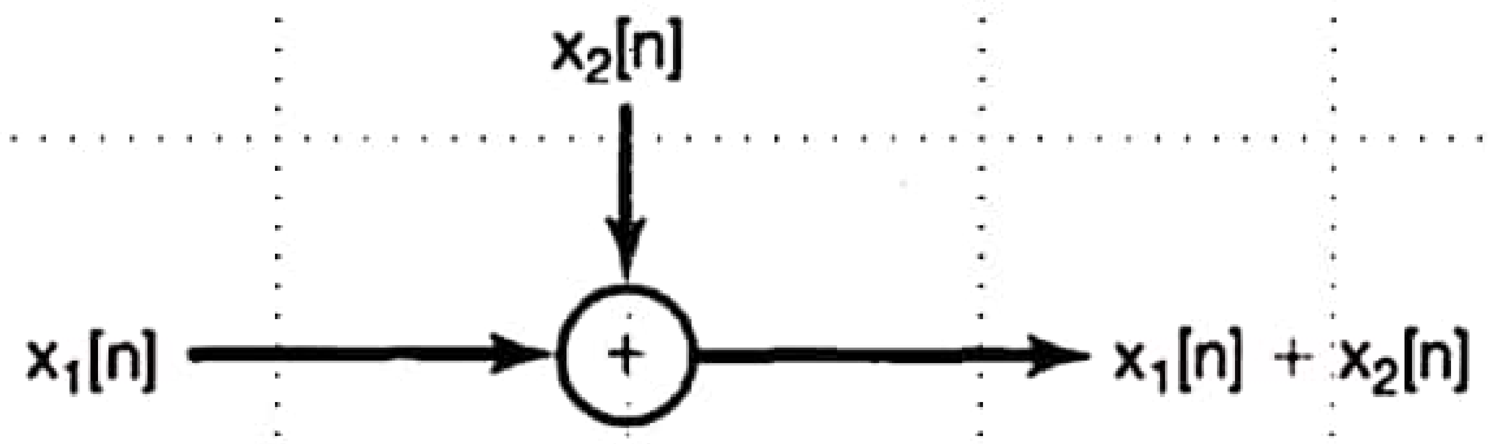
$$\Rightarrow h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

نمایش بلوک دیاگرامی سیستمهای مرتبهٔ اول توصیف شده توسط معادلات دیفرانسیل یا تفاضلی

مرتبهٔ اول $(N=1)$

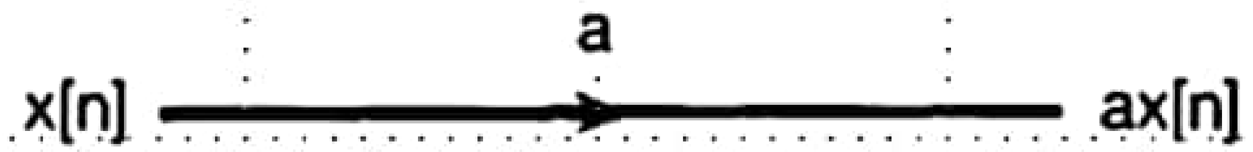
$$y[n] + ay[n-1] = bx[n]. \Longrightarrow y[n] = -ay[n-1] + bx[n].$$

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t). \Longrightarrow y(t) = -\frac{1}{a}\frac{dy(t)}{dt} + \frac{b}{a}x(t).$$



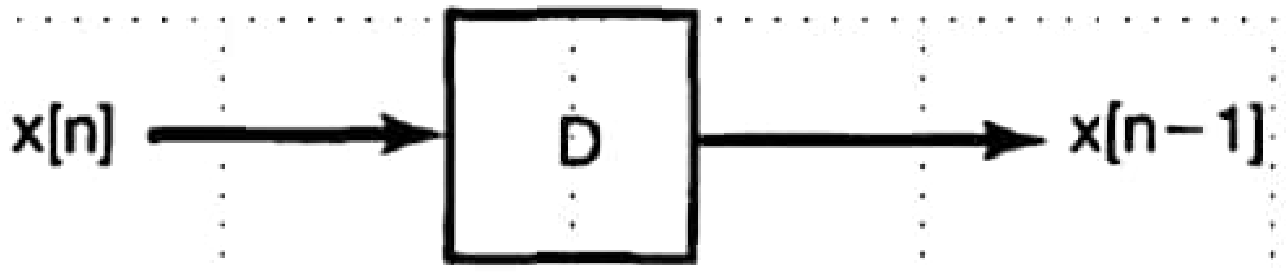
(a)

جمع کننده



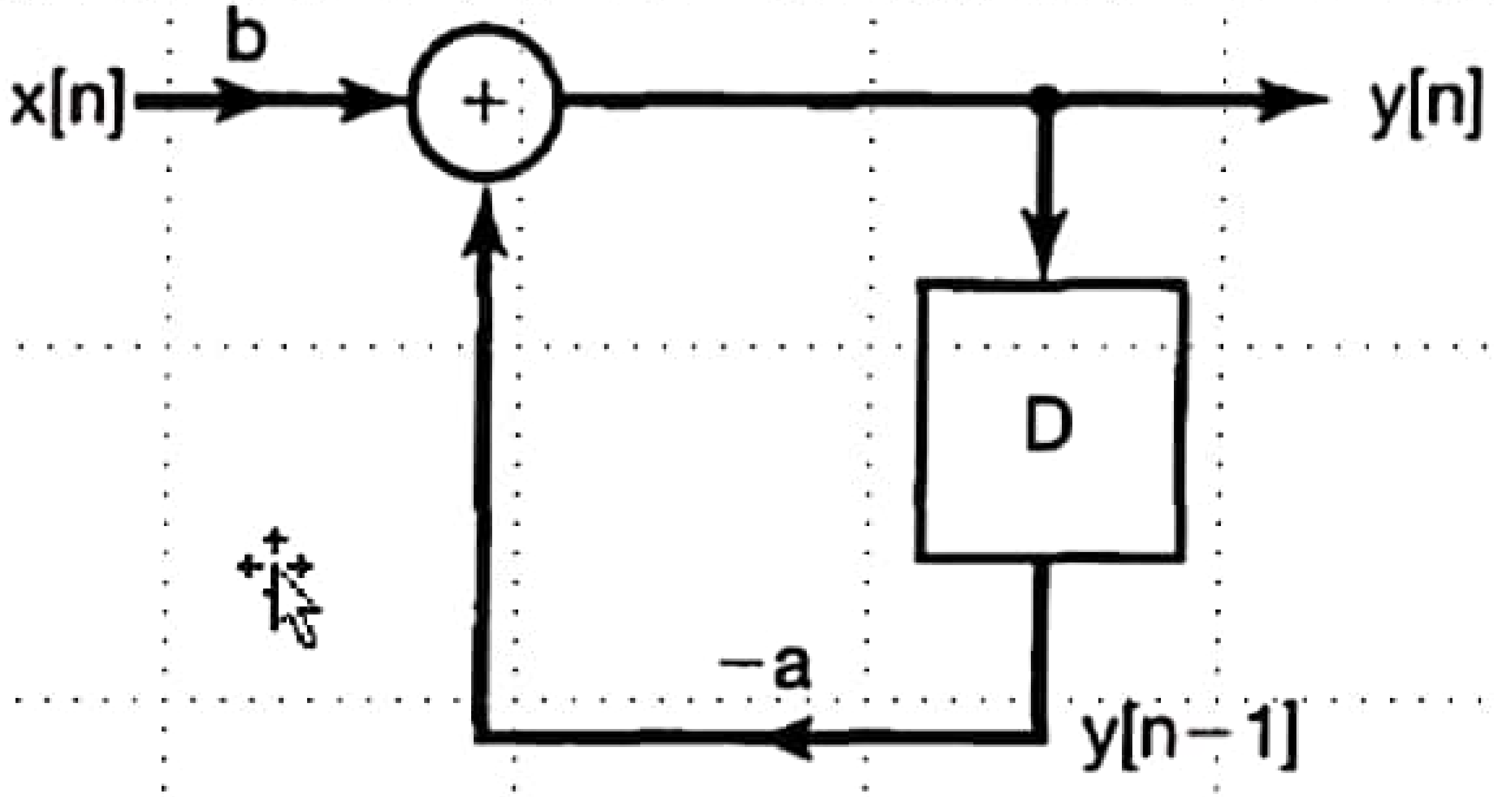
(b)

ضرب کننده در مقدار ثابت



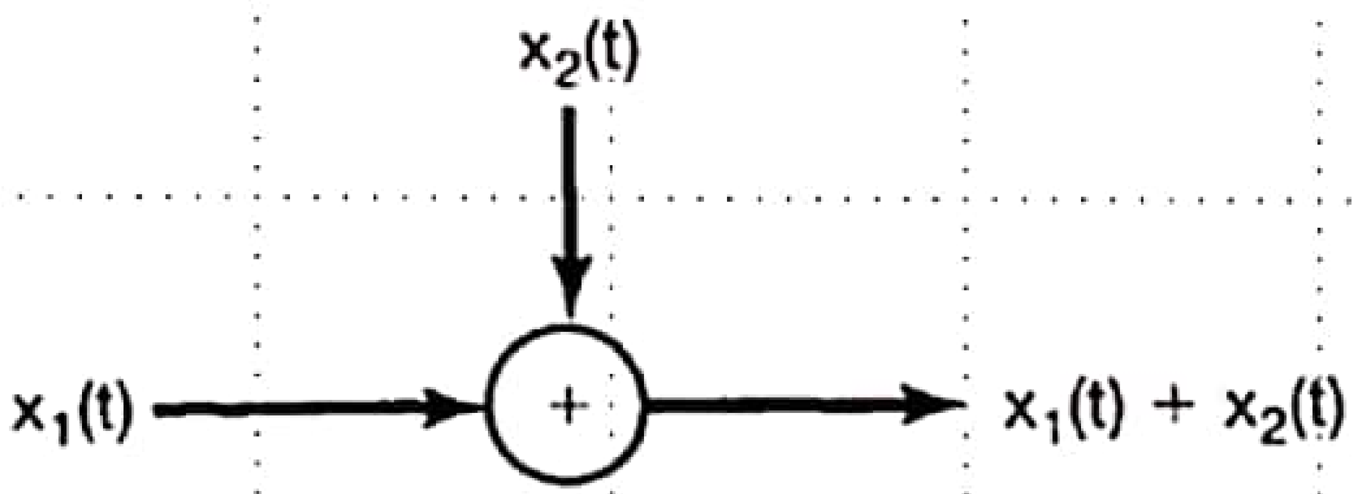
(c)

تأخیر دهنده یک واحدی



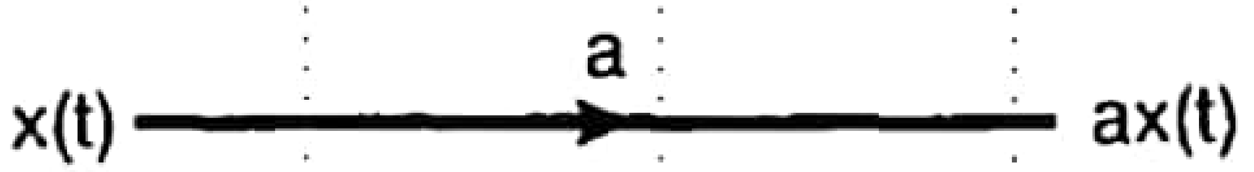
نمایش بلوک دیاگرامی سیستم علّی مرتبهٔ اول توصیف شده با معادلهٔ تفاضلی

$$y[n] = -ay[n-1] + bx[n].$$



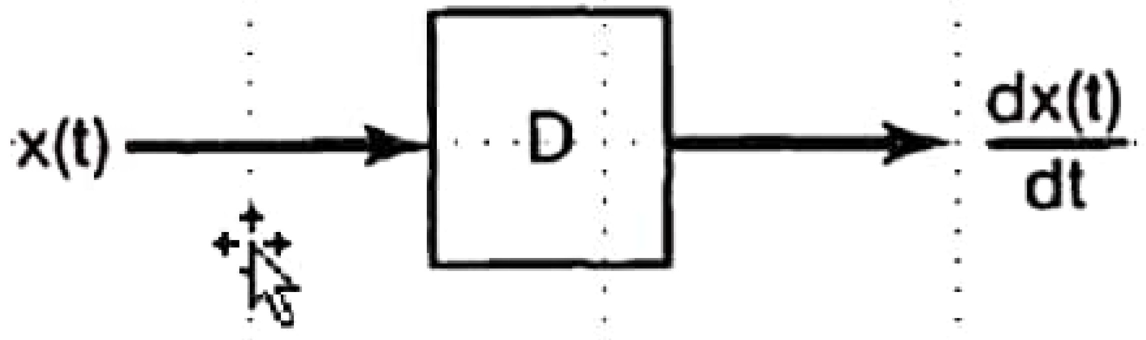
(a)

جمع کننده



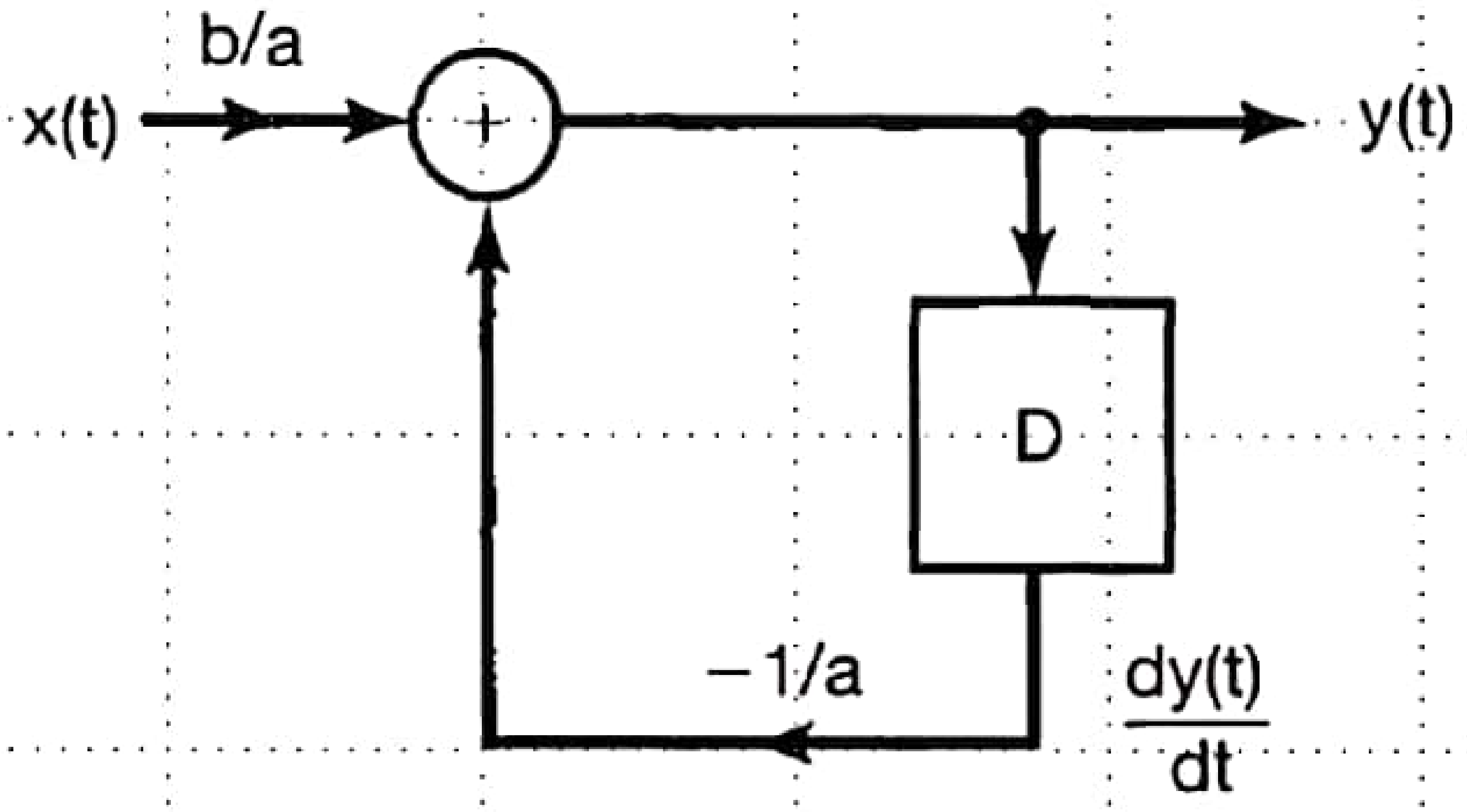
(b)

ضرب کننده در مقدار ثابت



(c)

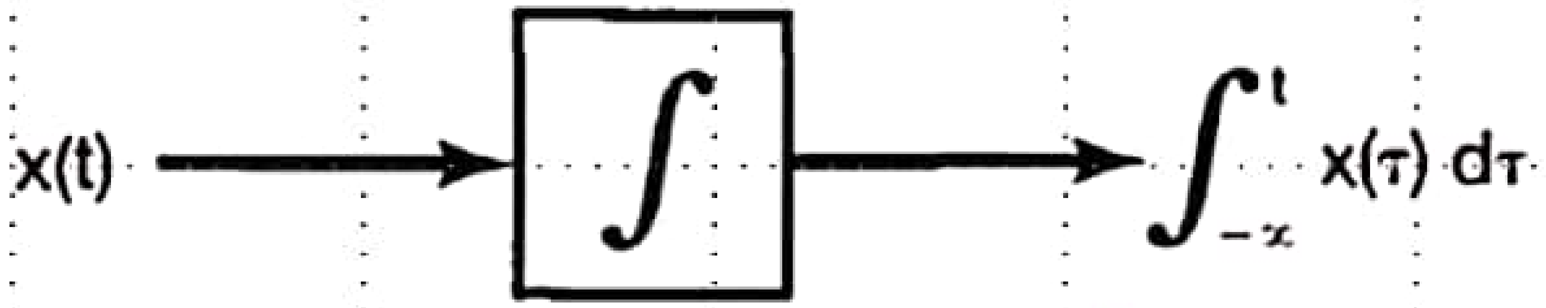
مشتق گیر مرتبه اول



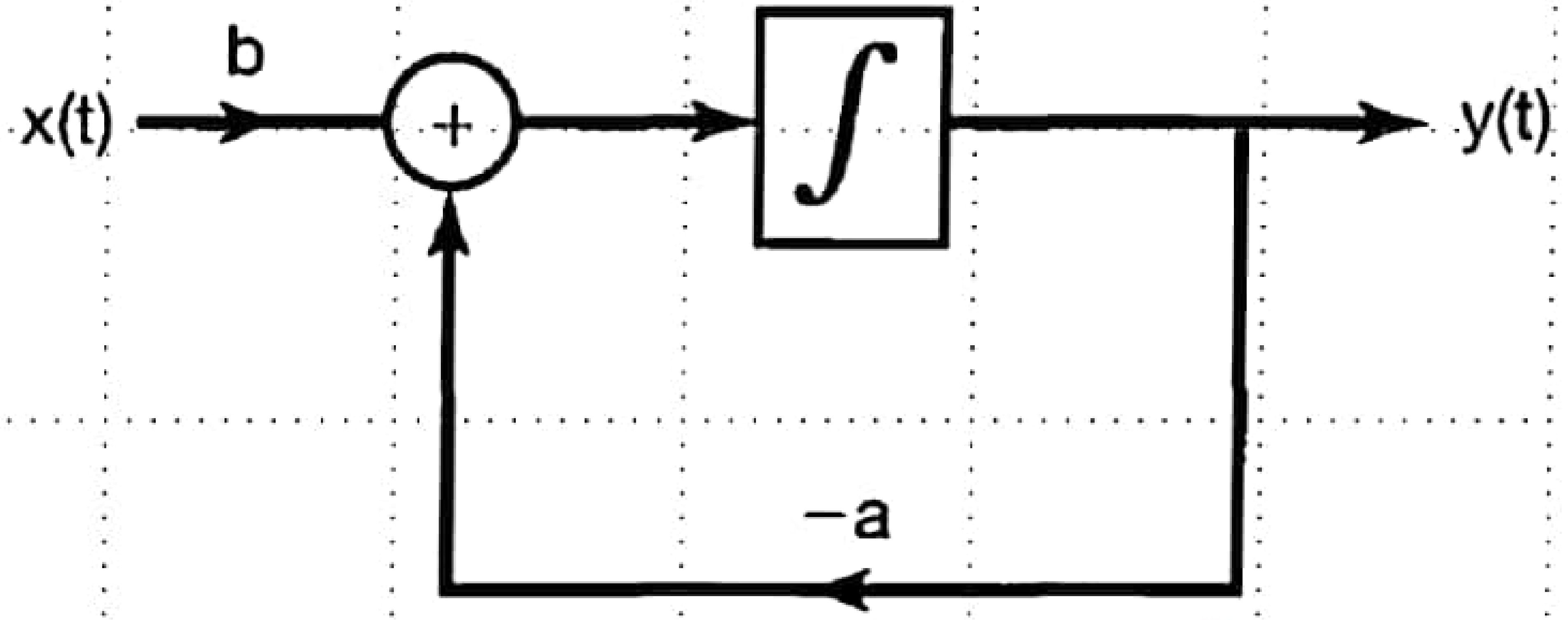
نمایش بلوک دیاگرامی سیستم علّی مرتبه اول
توصیف شده با معادلهٔ دیفرانسیل

$$y(t) = -\frac{1}{a}\frac{dy(t)}{dt} + \frac{b}{a}x(t).$$

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t). \quad \Longrightarrow \quad y(t) = \int_{-\infty}^{t} [bx(\tau) - ay(\tau)]\, d\tau.$$



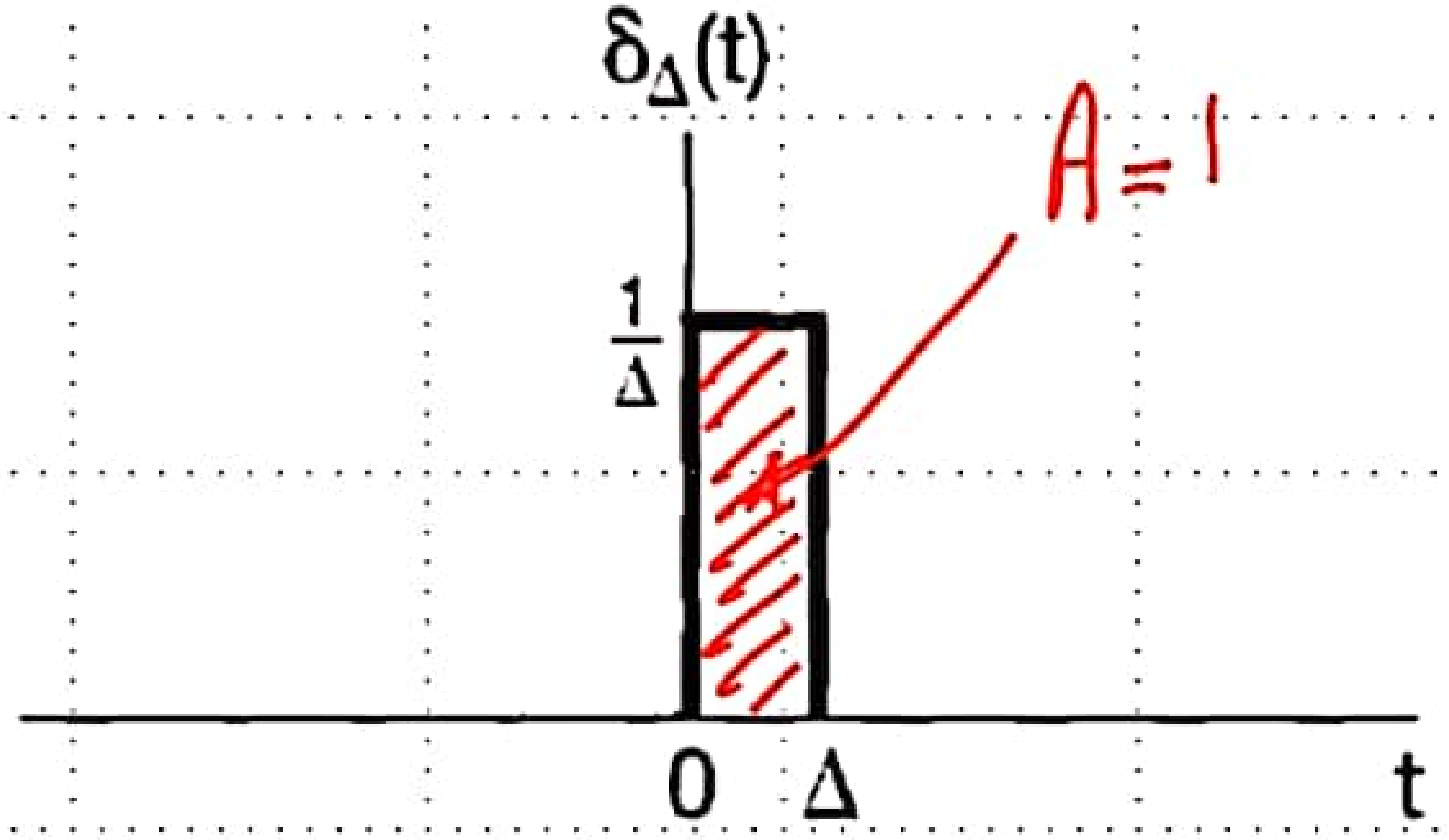
انتگرال گیر مرتبهٔ اول



نمایش بلوک دیاگرامی سیستم علّی مرتبهٔ اول
با استفاده از انتگرال گیر

SINGULARITY FUNCTIONS توابع ویژه (منفرد)

تابع ضربهٔ واحد به همراه مشتق مراتب مختلف و نیز انتگرال مراتب مختلف آن را خانوادهٔ توابع ویژه یا منفرد می نامیم.



اولاً: $\delta(t)$ عضو خنثای عمل کانولوشن و پاسخ ضربهٔ سیستم عینی است. یعنی:

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

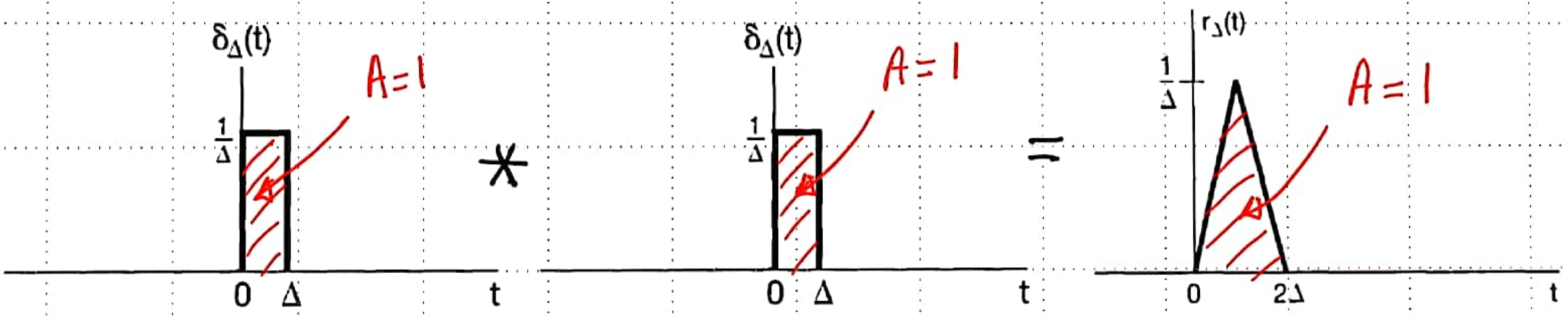
ثانیاً:

$$\delta(t) = \underset{\Delta \to 0}{\text{حد}} \ \delta_{\Delta}(t)$$

پالس های متعددی وجود دارند که در حدّ دارای خواص تابع ضربه هستند. هر نوع پالسی که در شرایطی که عرض آن به سمت صفر میل می کند، مساحت آن همواره ۱ بماند، دارای خواص تابع ضربه است.

مثال) تعریف ضربه واحد از روی پالس مثلثی

$$\delta_\Delta(t) * \delta_\Delta(t) = r_\Delta(t)$$



$$\Rightarrow \lim_{\Delta \to 0} [\delta_\Delta(t) * \delta_\Delta(t)] = \lim_{\Delta \to 0} r_\Delta(t)$$

حدّ [ ] = حدّ

$$\Rightarrow \delta(t) * \delta(t) = \delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} r_\Delta(t)$$

نکته: با توجه به رابطهٔ $x(t) = x(t) * \delta(t)$ می‌توان خواص ضربه را اثبات کرد.

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\delta(\tau)\, d\tau$$

اگر $x(t) = 1 \,,\ \forall t \Rightarrow 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\, d\tau \Rightarrow$ اثبات سطح واحد زیر تابع ضربه واحد

Scanned by CamScanner

اگر $x(t) = f(-t) = f(-t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau - t)\delta(\tau)\, d\tau$

$t = 0 \Rightarrow f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(\tau)\, d\tau$

از طرف دیگر : $1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\, d\tau \Rightarrow f(0) = f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(0)\,\delta(\tau)\, d\tau$

$\Rightarrow f(\tau)\delta(\tau) = f(0)\delta(\tau)$ ✓ اثبات خاصیت غربالی ضربه واحد

مشتقات ضربه : تعریف می کنیم : $u_0(t) \triangleq \delta(t)$

$u_k(t) = \frac{d^k}{dt^k} u_0(t) = \frac{d^k}{dt^k}\delta(t) \quad , \quad k > 0$

طبق این تعریف، $u_1(t)$ پاسخ ضربهٔ سیستم مشتق گیر مرتبهٔ اول و ... و

$u_k(t)$ پاسخ ضربهٔ سیستم مشتق گیر مرتبهٔ k ام است. در نتیجه:

$$u_1(t) * x(t) = \delta'(t) * x(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$

$$u_2(t) * x(t) = u_1(t) * x'(t) = \frac{d^2}{dx^2} x(t)$$

$$\vdots$$

$$u_k(t) * x(t) = u_1(t) * x^{(k-1)}(t) = \frac{d^k}{dt^k} x(t) \quad , \quad k>0$$

$$\Rightarrow \quad u_k(t) = \underbrace{u_1(t) * u_1(t) * \cdots * u_1(t)}_{k \text{ مرتبه}} =$$

پاسخ ضربه اتصال سری k سیستم مشتق گیر مرتبه اول

روشن است که:

$$u_k(t) = u_1(t) * u_{k-1}(t)$$

$$u_{k_1+k_2}(t) = u_{k_1}(t) * u_{k_2}(t) \qquad k_1, k_2 > 0$$

نکته: سیگنال $u_1(t) = \delta'(t)$ را به نام دوبلت واحد (Unit Doublet) می‌نامیم.

✓ سطح زیر منحنی تابع دوبلت واحد صفر است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_1(t)\,dt = 0$$

اثبات: اگر $x(t) = 1$ آنگاه $x'(t) = 0$

$$x'(t) = x(t) * u_1(t) \Rightarrow 0 = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)u_1(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau)\,d\tau$$

خاصیت دیگر دوبلت واحد:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)u_1(t)\,dt = -x'(0)$$

اثبات:

$$x(-t) * u_1(t) = \frac{d}{dt} x(-t) = -x'(t)$$

از طرف دیگر

$$x(-t) * u_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau - t)u_1(\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow -x'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau - t)u_1(\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow \quad -x'(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)u_1(\tau)\,d\tau \quad ✓$$

انتگرال های ضربه: تعریف می کنیم:

$$u_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} u_0(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = u(t) \quad (\text{پله واحد})$$

پله واحد $u(t) = u_{-1}(t)$، انتگرال مرتبه اول ضربه واحد $\delta(t) = u_0(t)$ است.

$$u_{-2}(t) = \int_{-\infty}^{t} u_{-1}(\tau)\, d\tau = \begin{cases} 0 & , \ t<0 \\ \int_0^t d\tau = t & , \ t>0 \end{cases} = t\,u(t) = r(t)$$

تابع $r(t) = t\,u(t) = u_{-2}(t)$ انتگرال مرتبه اول پله واحد است و به نام تابع شیب واحد (Unit Ramp) نامیده می شود.

$$u_{-3}(t)=\int_{-\infty}^{t}u_{-2}(\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{t}\tau u(\tau)\,d\tau=\begin{cases}0 & ,\ t<0\\ \int_{0}^{t}\tau\,d\tau=\frac{1}{2}t^{2} & ,\ t>0\end{cases}$$

$$=\frac{1}{2}t^{2}u(t)$$

به طور کلی: $\quad u_{-k}(t)=\dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}u(t)\quad$ و $\quad k>0$

در واقع $u_{-k}(t)$ پاسخ ضربه سیستم انتگرال گیر مرتبه k ام است.

$$u_{-k}(t)\xleftarrow{\int}\cdots\xleftarrow{\int}u_{-2}(t)\xleftarrow{\int}u_{-1}(t)\xleftarrow{\int}\delta(t)=u_{0}(t)\xrightarrow{D}u_{1}(t)\xrightarrow{D}\cdots\xrightarrow{D}u_{k}(t)$$

شیب واحد $r(t)$ — پله واحد $u(t)$ — ضربه واحد — دوبلت واحد $\delta'(t)$

Scanned by CamScanner

رابطهٔ کلی : $k_1, k_2 > 0$ $\quad u_{-(k_1+k_2)}(t) = u_{-k_1}(t) * u_{-k_2}(t)$

نتیجه‌گیری :

$$u_k(t) = \begin{cases} \text{پاسخ ضربهٔ مشتق‌گیر از مرتبهٔ } k \text{ام} & , \; k>0 \\ u_0(t) = \delta(t) \quad \text{(پاسخ ضربهٔ سیستم عینی)} & , \; k=0 \\ \text{پاسخ ضربهٔ انتگرال‌گیر از مرتبهٔ } k \text{ام} & , \; k<0 \end{cases}$$

$$u_{k_1}(t) * u_{k_2}(t) = u_{k_1+k_2}(t) \quad , \quad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$