$a_n = a_1 (r)^{n-1}$ اگه ! هندسی ← مثل فرمول حسابان ۱۲ دنباله هندسی * محاسبات عددی *

Subject: $r = \frac{a_2}{a_1}$ = قدر نسبت → $S_n = a_1 \frac{(1-r^n)}{1-r}$ Year: Month: Day:

۱) خطاها ۲) ریشه‌یابی ۳) درون‌یابی و تقریب (اصلاحی ...)

انسانی ۰ ماشینی ۸ — کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین اعداد در سیستم $F_p(\beta, m, e_{min}, e_{max})$

$x_{min} = (0/\underbrace{10 \ldots 0}_{m-1 \text{ صفر}})_\beta \times \beta^{e_{min}} = \beta^{-1} \times \beta^{e_{min}} = \boxed{\beta^{e_{min}-1}}$ (ضابع خطا)

شامل محاسبه ماشینی → برنامه‌نویسی در ماشین → ماشین اَشو می‌شه → مدل ریاضی → مشاهده پدیده فیزیکی

نتایج — اعداد گنگ ۶ اعدادی که در سیستم اعشاری ۱۶ رقم دارند

فصل ۶ (ماشین فقط از اعداد را می‌تواند ذخیره کند)

برای ذخیره اعداد صحیح

عالت ماشینی ← اعداد حقیقی را ماشین ذخیره می‌کند؟

حالت مبنای ۲

int c; — ۴ بایت برای مبنای ۲ دارند — تقسیم در حالت مبنای ۲ انجام می‌شه

unsigned int c; → حالت unsigned mode — ذخیره اعداد صحیح مثبت

float c; — اعداد اعشاری و صحیح — double c;

floating point سیستم — ذخیره صحیح و اعشاری — ① float c; ② double c; ③ long double c; — سیستم floating point

$\frac{\beta^{-1}(1-\beta^{-m})}{\beta-1} = \frac{1-\beta^{-m}}{\beta-1}$

اعداد صحیح و اعشاری تولید حالت ذخیره کنیم حتی نزدیک‌ترین عدد (کرد)

$(0/11)_2 = 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

ها / فقط عدد صحیح ۲

β^{-1} و قدر نسبت β^{-1} — جمله اول — انواعی از اعداد حقیقی در سیستم ممیز شناور

مجموع دنباله هندسی → $S_n = \beta^{-1} \frac{(1-(\beta^{-1})^m)}{1-\beta^{-1}} (\beta)$ — ماننسی حقیقی یک عدد حقیقی در مبنای بتا ماشینی — ها — e

$m \in \mathbb{R}$ — علامت عدد — $m = (0/d_1 d_2 d_3 \ldots d_m d_{m+1} \ldots)_\beta \times \beta^e$

(β) — مبنای ۲ و ۶ — با نرمال‌سازی — $d_1 \neq 0$ → شرط نرمال‌سازی — مانتیس و ...

$(\beta-1) \sum_{i=1}^{m} \beta^{-i} + \beta^{e_{max}}$ — بعد اعشار

$0/1 \times 10^{1} = 0/01 \times 10^{2}$ — صفر — $\beta \to$ Base, $e \to$ exponential

$(\beta-1) \times (\beta)^{-1} + (\beta-1) \times (\beta)^{-2} + (\beta-1) \times (\beta)^{-3} + \ldots + \beta^{-m} \cdot (\beta-1)$

ماشین می‌تواند به تعداد رقم مانتیس را صورت ذخیره کند

$x_{max} = (0/\underbrace{(\beta-1)(\beta-1)(\beta-1) \ldots (\beta-1)}_{m})_\beta \times \beta^{e_{max}} = (1-\beta^{-m}) \cdot \beta^{e_{max}}$

Year: Month: Day :

Subject:

سیستم ممیز شناور یک سیستم نرمال است

سیستم ممیز شناور e

در این سیستم e ، m رقم برای ذخیره‌ی مانتیس ، e در تعداد گرهها ملحوظ ، همچنین نما که آن را با نماد e نشان دادیم به بازه‌ی e_{max} و e_{min} محدود می‌شود. بعلاوه یک مبنای دلخواه نشر در تعداد گرهها ملحوظ . چنین سیستمی را با نماد

زیر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی

$$FP(\beta, m, e_{min}, e_{max}) = \pm (0/d_1 d_2 \ldots d_m) \times \beta^e_\beta$$

مبنا ، m ارقام مانتیس ، کران پایینی نما ، کران بالای نما

دارند

$e \in Z$ ، $e_{min} \leq e \leq e_{max}$

$d_1 \neq 0$ ، $d_i \in \{0, \ldots\}$ و بیس

$\beta = 16$

نمایش علمی نرمال شده => $(0/23) \times 10^2$ مبنا 10

مثال: در یک دستگاه ممیز شناور ، اعداد به صورت

$$\pm\, 0/d_1 d_2 d_3 \times 2^e$$

$m = 3$ ، e ، 2

با $1 \leq e \leq 3$ نمایش داده می‌شوند

(مانتیس) $m = 3$

اعداد قابل نمایش در این سیستم را بنویسید.

$FP(2, 3, 1, 3)$

مبنای 2 ، کران پایین ، کران بالا

این سیستم چه مقدار از اعداد حقیقی را می‌تواند بخواند؟

$\boxed{1 \leq e \leq 3}$

اول اعداد مثبت قابل نمایش در این سیستم را بدست می‌آوریم

کوچکترین عدد مثبت در این نمایش

$d_1 \neq 0$

$(0/100)_2 \times 2^1 =$ $\boxed{(1)_2 = 2^0 = 1}$ → کوچکترین

کوچکترین عدد قابل نمایش

با 3 رقم مانتیس کوچکترین عددی که می‌توانیم به مقدار 0/100 اضافه کرد

$(0/100 + 0/001)_2 \times 2^1 = (0/101)_2 \times 2^1 = (1/01)_2 =$

$1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = \boxed{1/25}$

نمایش عدد بعدی قابل نمایش با 3 رقم مانتیس

توی محور ... اعداد می‌توانند منفی باشند

0 1 1/25 1/5 1/75 2 2/5 ... قرینه اعداد منفی -1 -1/5 -2

$\boxed{+0/001}$ می‌شود

بزرگترین در همه مانتیس

کوچکترین عدد قابل نمایش در این سیستم

$(0/101 + 0/001)_2 \times 2^1 = (0/110)_2 \times 2^1 = \boxed{(1/10)_2} =$

$$\begin{array}{r} 0/101 \\ +\ 0/001 \\ \hline 0/110 \end{array}$$

$1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2}$ $\boxed{1/5}$

عدد سوم می‌شود $\boxed{1/5}$

Pixel Notebook

Scanned by CamScanner

$FP(2,3,1,3)$ → می‌تواند از $+7$ تا -7 را نمایش بدهد

Subject: بزرگترین عدد

بزرگترین عدد قابل نمایش در مبنای ۲ ← $n_{max} = (0/111)_2 \times 2^{3} = (111)_2 =$ مثبت

$1\times2^2+1\times2^1+1\times2^0 = \boxed{7}$

در مبنای ۱۰ . تعداد اعداد قابل نمایش با e ۲۴

?

اعدادی که بین فاصله اعداد در سیستم های اعشاری — سیستم برای ذخیره اعداد

کوچکترین عدد صحیح = قرینه بزرگترین عدد صحیح

$FP = \pm \{1, 1.25, 1.5, 1.75, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 5, 6, 7\}$

$e=1$ $e=2$ $e=3$

مانتیس B را ۲ در نظر می‌گیریم m

نقاط مساوی الفاصله نیستند. اعدادی که نمایش e بیشتر دارند، فاصله بیشتری دارند

فاصله ۰٫۲۵   فاصله = ۰٫۵   فاصله ۱

با افزایش e ← فاصله بین اعداد بیشتر می‌شود.

تعداد اعداد قابل نمایش در سیستم $FP(B, m, e_{min}, e_{max})$

$e_{min} \le e \le e_{max}$

$\boxed{e \in Z}$

تعداد حالت‌ها برای نمایش $= \boxed{e_{max} - e_{min} + 1}$

$(0/d_1d_2 \ldots d_m)_B \times B^{e}$

$\boxed{d_2 \rightarrow B \text{ حالت}}$

$\boxed{d_1 \neq 0} \rightarrow \boxed{B-1}$ حالت می‌تواند بگیرد

$2 \times (B-1) \times B \times \ldots \times B =$

برای مثبت و منفی

تعداد کل اعداد تولیدی برای سیستم ← $2\times(B-1)\times(B)^{m-1} \times (e_{max} - e_{min} + 1)$

$B=2 \rightarrow 2\times(1)\times(2)^{3-1}\times(3-1+1) = 24$ تا عدد

$m=3$

فاصله بین اعداد

اگر $m \in FP(B, m, e_{min}, e_{max})$ آنگاه m یک عدد ماشینی گفته می‌شود

در غیر این صورت m را یک عدد غیر ماشینی می‌نامیم.

$m \in FP \Rightarrow m = (0/d_1d_2 \ldots d_m)_B \times B^{e}$

عدد ماشینی که بلافاصله بعد از m قرار می‌گیرد را با نماد m^{+} نمایش می‌دهیم.

$x^+ = (0/d_1d_2 \ldots d_m + \underbrace{0/00\ldots}_{m-1 \text{ تا}}1) \times \beta^e$ — فاصله هر ۲ عدد ماشین متوالی

$x^+ - x = (\underbrace{0/00\ldots0}_{m-1 \text{ بار}}1) \times \beta^e = \beta^{-m} \times \beta^e = \boxed{\beta^{e-m}}$

فاصله یک عدد ماشین با عدد ماشین بعدی

فاصله به e ها وابسته است.

$\boxed{\text{e ها بزرگتر} \rightarrow \text{فاصله بیشتر}}$

تمرین ۹ – نسبی در یک دستگاه ممیز شناور که در آن اعداد به صورت $0/d_1d_2d_3d_4 \times 10^e$ با $-7 \le e \le 8$ ذخیره می‌شوند،
فاصله بین عدد 10000 و عدد قبل ماشینی بعد از آن چه مقدار است؟

تعداد ارقام مانتیس

~~الف) 65~~ ب) 0/1 ج) 0/01 د) 0/001

$\boxed{m=4}$

ماشین‌ها: $FP(10, 4, -7, 8)$

ماشین نرمال نزدیک عدد 10: $(0/1000)_{10} \times 10^6$ — $\boxed{10^4}$

$FP(\beta, m, e_{min}, e_{max})$ IEEE-754

$\boxed{\text{session 2}}$

$\beta^{e-m} = $ فاصله بین ۲ عدد ماشین $= 10^{5-4} = 10$

	β	m	e_{min}	e_{max}
single precision	2	23+1	-126	+127
double precision	2	52+1	-1022	+1023

از ۷ به بعد سرریز

$[-x_{max}, +x_{max}]$ ناحیه نرمال

$x_{min} = 1$ $x_{max} = 7$

$FP(2, 3, -1, 3)$

سرریز

$\boxed{\text{زیر سرریز}}$ ناحیه $[-x_{min}, x_{min}]$

-7 -6 -5 -4 -3 -2.5 -2 -1.75 -1.5 -1.25 -1 0 1 1.25 1.5 1.75 2 2.5 3 4 5 6 7

ناحیه زیر سرریز $(-1, 1)$

از راند (گرد) کردن استفاده می‌کنیم — round

عدد ماشینی قبلی را x^- می‌گیریم
عدد ماشینی بعدی را x^+

ناحیه نرمال

فرض کنید می‌خواهیم عدد $x \in \mathbb{R}$ را در سیستم FP ذخیره کنیم

$x \rightarrow x \in FP$ عدد ماشینی $\xrightarrow{\text{این عدد بدون هیچ تغییری}}$ در ماشین ذخیره می‌شود

بین ۲ تا عدد ماشینی قرار می‌گیرد

$x \rightarrow x \notin FP$ عدد غیر ماشینی → ① در ناحیه نرمال است →

② در ناحیه سرریز است → ④ قابل ذخیره نیست

از گرد کردن استفاده می‌کنیم.

Pixel Notebook

گرد کردن ← ① برش ② گرد کردن

Subject: Year: Month: Day:

نکته ۴ صفر در برش

۳- برش: فرض کنید عدد حقیقی $x \in \mathbb{R}$ دارای مانتیس نرمال شده در مبنای β به صورت زیر باشد

۴- گرد کردن به نزدیکترین

$$x = (0.d_1 d_2 \ldots d_m d_{m+1} \ldots) \times \beta^e$$

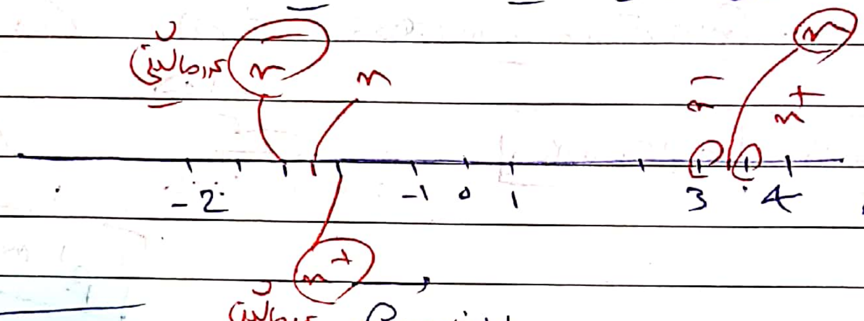
$d_1 \neq 0$

آنگاه نمایش برشی x را با $fl(x)$ در β نشان می‌دهیم.

به تعداد رقم‌های مانتیس اضافه‌ها را برش می‌دهیم و دور می‌اندازیم

$$fl(x) = (0.d_1 d_2 \ldots d_m)_\beta \times \beta^e$$

به سمت صفر گرد کن و به اولین عدد ماشینی که رسیدیم متوقف می‌شویم و به جای $x \in \mathbb{R}$ آن عدد را ذخیره می‌کنیم



$$fl(x) = x^-$$

اولین عدد ماشینی که به سمت صفر می‌رویم

$$fl(x) = x^+$$

گرد کردن به نزدیکترین

وسط دو تا عدد ماشینی که اطراف x قرار گرفته را پیدا می‌کنیم و x^* می‌نامیم

اگر x کمتر از x^* بود به x^- گرد می‌کنیم

بیشتر از x^* بود به x^+

فرض $x>0$

β مبنای نرمال شده

$$x = (0.d_1 d_2 \ldots d_m \ldots) \times \beta^e$$

$$x^- = (0.d_1 d_2 \ldots d_m) \times \beta^e$$

$$x^+ = (0.d_1 d_2 \ldots d_m + \underbrace{0.00\ldots0}_{m-1\ \text{بار}}1) \times \beta^e$$

$$x^* = (0.d_1 d_2 \ldots d_m + \tfrac{1}{2}\, \underbrace{0.00\ldots0}_{m-1\ \text{بار}}1) \times \beta^e$$

آنگاه نمایش گرد کردن را با $\tilde{fl}(x)$ نشان می‌دهیم

$$\tilde{fl}(x) = \begin{cases} x^+ & x > x^* \\ x^- & x < x^* \\ x^- \text{ یا } x^+ & x = x^* \end{cases}$$

(این حالت به ندرت اتفاق می‌افتد)

$\boxed{\text{گرد}}$ فرض کنید $x^- < x < x^+$, $x = x^*$

$\boxed{\text{حل عددی ۹، ۱۱، ۱۲}}$

Subject: Year: Month: Day:

۱) گرد کردن معمولی : اگر $\delta \geq 0$ باشد آنگاه $fl(x) = x^+$

اگر $\delta < 0$ باشد ← $fl(x) = x^-$ گرد می‌کنیم به عدد ماشینی قبلی گرد می‌کنیم

۲) گرد کردن به زوج : اگر رقم $\boxed{m \text{ ام}}$ (آخرین رقم مانتیس) زوج باشد از $\boxed{\text{قبلی}}$ استفاده می‌کنیم. (به یک صفر می‌رسیم)

اگر m ام فرد باشد ← از گرد کردن معمولی استفاده می‌کنیم.

این که در نصف حالات به x^+ گرد کنیم و در نصف حالت‌های دیگر به x^- گرد کنیم.

(اپسیلون ماشین) (eps) به فاصله‌ی کوچک‌ترین عدد قابل نمایش بعدی ۱ اپسیلون ماشین می‌گویند.

$\boxed{\beta^{1-m}}$

در سیستم $FP(2,3,-1,3)$ → $\boxed{eps = 0.25}$

$-1 \quad 0 \quad 1 \quad \underbrace{\quad}_{} 1.25$; 0.25

1

2

انواع روش‌های سنجش خطا ۱) خطای مطلق ۲) خطای نسبی ۳) تعداد ارقام با معنای درست

Subject: Year: Month: Day:

خطای مطلق

$\Delta x = |x - \hat{x}|$ — فرض کنید $\hat{x}$ تقریبی از x باشد آنگاه: ۱) خطای مطلق

$$\delta x = \frac{|x-\hat{x}|}{|x|}$$ ۲) خطای نسبی

خطای نسبی ← [illegible] — تعریف [illegible] — هم مقدار خطا را [illegible]

اشکال این خطاها به صورت زیر قابل محاسبه نیستند.

در اغلب موارد محاسبه Δx و δx امکان‌پذیر نیست و باید کران بالا برای این خطاها پیدا کنیم.

مثال: $x = \pi$, $x^* = 3.14$ → $\pi - 3.14$ → $\Delta x = |\pi - 3.14|$

خطای [illegible] محاسبه کرد — یک عدد [illegible] مقایسه

حداکثر خطا چقدره؟

پیدا کردن یک کران بالا برای این خطا ← به جای π [illegible] ←

$\Delta x = |\pi - 3.14| \le |3.15 - 3.14| = \boxed{0.01}$

$3.14 \quad \pi \quad 3.15$

پس اگر بخواهیم یک کران بالا برای خطای Δx باشد آنگاه با استفاده از آن کران یک کران بالا برای خطای $\boxed{\delta x}$ نیز پیدا کرد

$\Delta x \le b_x$

در مبنای β: $(0.1)_\beta = 1 \times \beta^{-1} = \boxed{\beta^{-1}}$

از طرفی $\delta x = \frac{|x-\hat{x}|}{|x|} \le \frac{b_x}{|x|}$, $\Delta x = |x - \hat{x}| \ge |x| - |\hat{x}|$

ثابت کنید $\frac{|x - fl(x)|}{|x|} \le \frac{\beta^{e-m}}{\beta^{e}(0.d_1 \dots d_m)} \le \frac{\beta^{-m}}{0.d_1 \dots d_m} \le \frac{\beta^{-m}}{\beta^{-1}} = \boxed{\beta^{1-m}} = \boxed{eps}$

→ $b_x \ge |x| - |\hat{x}|$ → $|\hat{x}| \ge |x| - b_x$

کوچکترین عدد مخرج ← که باید کسر را بزرگ کند $0.d_1 \dots d_m \ge (0.1)_\beta$ (خطای مطلق برشی)

حداکثر خطا ۲ فاصله بین ۲

$x^- \quad x \quad x^+$

در قالب ممیز شناور [illegible] ۰٫۱۲۵ که در ماشین

β^{e-m} فاصله بین ۲ عدد

فاصله بین کوچکترین عدد بزرگتر از ۱ با ۱ یعنی eps

$$\boxed{|x - fl(x)| \le \beta^{e-m}}$$ در برش

$eps = \beta^{1-m}$

در سیستم $FP(2,3,-1,3)$

$\beta^{e-m} \Rightarrow e = 1, m = 3 \rightarrow 2^{1-3} = \frac{1}{4} = 0.25$ حداکثر خطا

در گرد کردن ← وسط بازه را پیدا می‌کنیم، حداکثر خطا $\frac{1}{2}$ طول بازه ←

$|x - \tilde{fl}(x)| \le \frac{1}{2}\beta^{e-m}$ → ماشین گرد می‌کند

$\frac{|x - fl(x)|}{|x|} \le eps$

جای برش از [illegible] چون خطای کمتری دارد.

تمرین: کران بالا برای خطای نسبی برش و گرد کردن

$\frac{|x - \tilde{fl}(x)|}{|x|} \le \frac{1}{2} eps = \frac{1}{2}\beta^{1-m}$

③ تعداد ارقام با معنای درست

* تعداد ارقام با معنا و فرض کنید

$x \in \mathbb{R} \longrightarrow x$ را در نمایش نرمال شده ای بنویسیم

Subject: Year: Month: Day:

نمایش علمی نرمال شده

$x \quad \beta=10 \rightarrow x = 0.d_1 d_2 \ldots \underbrace{d_m d_{m+1}} \times 10^{e}$

تعداد ارقامی که توی مانتیس ظاهر می‌شوند را تعداد ارقام با معنا می‌گیریم

$x=\pi \qquad \hat{x} = ۳٫۱۴ \rightarrow \hat{x} = 0.314 \times 10^{1}$

۳ رقم با معنا

$\hat{x}_2 = 3.1400$

$\hat{x}_2 = 0.31400 \times 10^{1}$

5 رقم با معنا

تعداد ارقام با معنا دلیل بر بدون تقریب نیست

significant

فرمهای rD و rS

digital

منظور از rD نمایش عدد $x \in \mathbb{R}$ تا r رقم اعشار است.

منظور از rS نمایش عدد $x \in \mathbb{R}$ تا r رقم با معنا است.

$x = ۲۸٫۶۴۶۲ \qquad \bar{x}(3D) \longrightarrow \boxed{۲۸٫۶۴۶}$

عدد x را تا ۳ رقم اعشار در نظر بگیر ~~برش بده~~ برش بده

$\tilde{x}(3D) \boxed{= ۲۸٫۶۴۶}$

x را تا ۳ رقم اعشار گرد کن → رقم ۴ام توی ذهنی (d_4) را نگاه کن

اگر $d_4 \geq ۵ \rightarrow d_3 = d_3 + 1$

اگر $d_4 < ۵ \rightarrow d_3 = d_3$

اگر $x = ۲۸٫۶۴۶۴$ ← $\tilde{x} = ۲۸٫۶۴۶$

اگر $x = ۲۸٫۶۴۶۵$ ، $x = ۲۸٫۶۴۶۶$ ← $\tilde{x} = ۲۸٫۶۴۷$

$\tilde{x}(۴D)$

یادآوری: تعداد ارقام با معنای درست e بزرگترین عدد صحیح k که در نابرابری زیر صدق کند

$|x - fl(x)| \le 0.5 \times \beta^{e-m}$

Subject: Year: Month: Day:

$\frac{|x-\hat{x}|}{|x|} \le 5\times 10^{-k}$

خطای نسبی

قضیه: اگر $\hat{x}$ گرد شده‌ی x تا m رقم با معنا باشد آنگاه $\hat{x}$ دارای حداقل m رقم با معنای درست است.

(این m یعنی مانتیس گرد)

اثبات: فرض کنید

m = تعداد ارقام با معنا

$x = 0.d_1d_2\ldots d_m\ldots \times 10^e$

$(0.d_1d_2\ldots d_m)\times 10^e$ مانتیس نرمال $\Rightarrow \boxed{d_1 \neq 0}$

$$\frac{|x-\hat{x}|}{|x|} \le \frac{0.5\times 10^{e-m}}{0.d_1d_2\ldots d_m\ldots \times 10^e} = \frac{0.5\times 10^{-m}}{0.d_1d_2\ldots d_m\ldots}$$

0.1 کمترین مقدار مخرج

باید خطای نسبی بنویسی

$$\le \frac{0.5\times 10^{-m}}{0.1} = 0.5\times 10^{-m+1} = \boxed{5\times 10^{-m}}$$

ex1 تقریبی از $\sqrt{3}$ ارائه کنید که خطای نسبی آن از 10^{-4} بیشتر نشود.

* ضریبی که خواستیم باید این تعداد ارقام با معنا

حل: فرض کنید $\hat{x}$ تقریبی از $\sqrt{3}$ باشد

$$\frac{|\sqrt{3}-\hat{x}|}{\sqrt{3}} \le 5\times 10^{-5} < 10^{-4}$$

طبق قضیه قبل کافی است $\hat{x}$ گرد شده $\sqrt{3}$ تا 5 رقم با معنای درست باشد

$\sqrt{3} \simeq 1.7320508075 \longrightarrow \sqrt{3} \simeq 0.17320508075 \times 10$

$\sqrt{3} = 1.7321 \longrightarrow \boxed{\hat{x} = 1.7321}$

1 2 3 4 5 6

وسطی آخر هم

با معنا را شماره می‌کنیم ، $d_6 = 5$ به d_5 یکی اضافه می‌کنیم

ex2 فرض کنید $\hat{x}$ تقریبی از x باشد با n رقم با معنای درست آنگاه

$\hat{y} = 10^t \hat{x}$ تقریبی از $y = 10^t x$ با n رقم با معنای درست است.

* t یک عدد صحیح است *

$\boxed{\sqrt{3} \simeq 1.7321}$ *

حل

$\frac{|x-\hat{x}|}{|x|} \le 5\times 10^{-n} \longrightarrow$

طبق فرض مسئله

$$\frac{|y-\hat{y}|}{|y|} = \frac{|10^t x - 10^t \hat{x}|}{|10^t x|} =$$

$$\frac{\cancel{10^t}\,|x-\hat{x}|}{\cancel{10^t}\,|x|} = \frac{|x-\hat{x}|}{|x|} \le 5\times 10^{-n}$$

طبق * ← پس تقریب دوم هم n رقم با معنای درست دارد.

انتشار خطا در فرمول ها

وقتی تقریب توی جاهای مختلف نشون داده بشه → ممکنه اند result نهایی خیلی تغییر کنه. به دلیل اند تقریب توی فرمول

Subject: Year: Month: Day:

ورودی در عمل ۰ خطا دارد. $a^2bc \longrightarrow \hat{a}^2bc$

(۲) سطح تقریب فرمول ها — اگه $\hat{a}$ تقریبی از a باشه

فرض کنید می خواهیم تابع $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ را محاسبه کنیم. ورودی های x_1 تا x_n ۰ همواره دارای خطا هستند. فرض کنید این خطاها برابر با

$$\underbrace{\Delta x_1}_{\text{خطای } x_1} = x_1 - \underbrace{\hat{x}_1}_{\text{تقریبی از } x_1} \quad , \ldots , \quad \Delta x_n = x_n - \hat{x}_n$$

بنابراین در عمل به جای محاسبه ی $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ۰ مقدار $\underbrace{f(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)}_{\hat{z}}$ محاسبه می شود.

مثل حجم کره → $\frac{4}{3}\pi R^3$ → عدد π توی خودش داره. → نمیتوانیم مقدار π را دقیق وارد کنیم با خطای $\boxed{3.14}$ حساب می کنیم.

اگه مقدار واقعی تابع f را با z نشون بدیم و

$$\hat{z} = f(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$$

آنگاه با استفاده از بسط تیلور توابع چند متغیره، می توان دید

خطای مطلق

$$|\Delta z| = |z - \hat{z}| \simeq \left| \Delta x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \Delta x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_{\hat{x}} \quad *$$

$$\frac{|\Delta z|}{|z|} = \frac{\left| \Delta x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \Delta x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)_{\hat{x}} \Big|}{|f(x_1, x_2, \ldots, x_n)|} \quad **$$

خطای نسبی ... پارامترهای تقریبی ورودی

فرمول های ** و * دارای ۲ کاربرد هستند.

کاربرد اول ۰ محاسبات مستقیم:

در این حالت خطای پارامترهای ورودی به ما داده می شود و خطا برای Δz یا δz از ما خواسته می شود. (کران بالای)

کاربرد معکوس: در این حالت از ما خواسته می شود که فرمول مورد نظر را باید با دقت مشخص ۰ محاسبه کنیم. در این حالت مساله ۰ یافتن یک کران بالای خطا ۰ برای پارامترهای ورودی است.

مثال: یک استوانه به شعاع قاعده $r = \frac{4}{3}$ و $h = \sqrt{2}$ در نظر بگیرید. اگر شعاع ۰ ارتفاع و عدد π را با دقت ϵD وارد محاسبات کنیم ۰ حجم این استوانه با چه دقتی محاسبه می شود؟

(روش مستقیم → خطای ورودی ها ۰ ϵD → با ۴ رقم اعشار ۰ ورودی ها را وارد محاسبه می کنیم)

همه را گرد کردیم وقتی ϵD را می گیم چون مشخص نکردیم با برش نشدیم یا گرد کردن ←

با گرد کردن فرض می داریم

اول باید تابع f را تعریف کنیم ← تابعی از ازای π، شعاع و ارتفاع

$f(\pi, r, h)$ یا $f(p, r, h) = pr^2h$

۴ رقم اعشار — ϵD ۴ ← $\boxed{3.1416}$

$r = ۱.۰۳۳۳۳ \to (\hat{r})$ $\quad$ $h = ۱.۰٤۱٤۹ \to (\hat{h})$

تا ۴ رقم اعشار تعریف زدیم $\quad$ تا ۴ رقم اعشار

Subject: $\quad$ Year: $\quad$ Month: $\quad$ Day: ( ) $\quad$ page :( )

$\boxed{\hat{p} = ۳.۱۴۱۶}$ $\quad$ $\boxed{f(p,r,h) = pr^2h}$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = r^2h \qquad \frac{\partial f}{\partial r} = 2prh \qquad \frac{\partial f}{\partial h} = pr^2$$

با مقدار دادن این کمیت ها در فرمول * داریم e برای عبارتی $f(p,r,h)$ ، $\boxed{f(\hat{p},\hat{r},\hat{h})}$ را حساب میکنیم

$$|z-\hat{z}| = |f(p,r,h) - f(\hat{p},\hat{r},\hat{h})|$$

$$\simeq |(\Delta p\, r^2h + \Delta r\, 2prh + \Delta h\, pr^2)_{(\hat{p},\hat{r},\hat{h})}|$$

* در این نقطه باید حساب کنیم *

اگر $\hat{h}$ تقریبی از h با ۴ رقم اعشار باشد $\quad$ $\Delta h = |h - \hat{h}| \leq 0.5 \times 10^{-4}$

$$\boxed{\Delta p, \Delta r, \Delta h \leq 0.5 \times 10^{-4}}$$

$$= |(\Delta p\, \hat{r}^2\hat{h} + \Delta r\, 2\hat{p}\hat{r}\hat{h} + \Delta h\, \hat{p}\hat{r}^2)|$$

به جای Δp ، $\Delta r, \Delta h$ کران بالایشان یعنی 0.5×10^{-4} را میگذاریم و از اشتراکشان فاکتور میگیریم

$$\leq (\hat{r}^2\hat{h} + 2\hat{p}\hat{r}\hat{h} + \hat{p}\hat{r}^2) \times 0.5 \times 10^{-4}$$

حساب کنیم $= ۱۹.۹۸$

اگر ورودی ها با ۴ رقم اعشار داده شوند خطای مطلق از 10^{-3} بیشتر نمیشود

$$|z - \hat{z}| \leq 20 \times 0.5 \times 10^{-4} = \boxed{10^{-3}} \text{ خطای مطلق}$$

چون می خواهیم کران بالا بدهیم ، ۱۹.۹۸ را به جای ۲۰ میگذاریم

$\boxed{ex}$ فرض کنید $z = f(a,b,c) = ab^2c^3$ و خطای نسبی تقریب های a و b و c از ۰.۰۱ بیشتر نمیباشد. بیشترین خطای نسبی قابل انتظار برای z چقدر است؟

از فرمول $\boxed{**}$ استفاده میکنیم چون خطای نسبی را خواسته

$$\frac{\partial f}{\partial a} = b^2c^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial b} = 2abc^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial c} = 3ab^2c^2$$

با مقدار دادن این کمیت ها در $\boxed{**}$ ، e

$\delta a, \delta b, \delta c \leq 0.01$ خطای نسبی a, b, c

۲۶

page :(   )

$$\delta z = \frac{\Delta z}{|z|} \simeq \frac{\left|\left(\Delta a \frac{\delta f}{\delta a} + \Delta b \frac{\delta f}{\delta b} + \Delta c \frac{\delta f}{\delta c}\right)\right|}{|ab^2c^3|} \quad (\hat a , \hat b , \hat c)$$

Subject:
Year :   Month :   Day :   ( )

تو این نقطه حساب می‌کنیم.

$$= \frac{|\Delta a b^2 c^3 + \Delta b\, 2abc^3 + \Delta c\, 3ab^2c^2|}{|ab^2c^3|} =$$

طبق مسئله که $\delta c , \delta b , \delta a \le 0/01$

پس $\frac{|\Delta a|}{|a|} + 2\frac{|\Delta b|}{|b|} + 3\frac{|\Delta c|}{|c|} = \boxed{\delta a + 2\delta b + 3\delta c}$

خطای نسبی a

$0/01 + 0/02 + 0/03 \le \boxed{0/06}$

خطای ورودی ۱ درصد میدیم و خطای خروجی ۶ درصد میدیم ← اوکیه ۳ عدد معقول خوبه

ex (از نوع معکوس) اگر $x = \sqrt5$ و $y = \frac{\pi}{6}$ را با چه دقتی در نظر بگیریم که مقدار $6x^2(\ln x + \sin 2y)$ با دقت $\boxed{25}$ کامل ثابت "رقم" باشد یعنی

$\boxed{|x - \hat x| \le 0/5 \times 10^{-2}}$ دقت ۲۵ ★★★

حل ۶

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 12x(\ln x + \sin 2y) \qquad \frac{\delta f}{\delta y} = 12x^2 \cos 2y$$

از جا Δx_1 و Δx_2 و ... Δx_n توی فرمول $\boxed{**}$ جوالک ← مزن کنم

فرض کنیم $\hat x = 2.2$ و $\hat y = 0.3$ ← با یه تقریبی

$$|\Delta x\, 12(\ln x + \sin 2y) + \Delta y\, 12x^2 \cos 2y| \le 0/5 \times 10^{-2}$$

$\ln(2/2) = 0/78 \qquad \sin(0/6) = 0/01 \qquad (\hat x , \hat y)$

$\cos(0/6) = 0/99$

$\Delta x = x - \hat x \rightarrow$ $\longleftarrow$ $\hat x$ و Δx ها مجهول اند

جای گذاری کنیم Δx و Δy را از اینجا با

$12 \times (0/79)$ دنبال Δx هستیم

فرضیه محاسبه کنیم. $56/95y - 1$

$$= |\Delta x \times 48.9 + 4709\,\Delta y| \le 0.5 \times 10^{-2}$$

$\Delta x \le 0/5 \times 10^{-4}$

$\Delta y \le 0/5 \times 10^{-4}$

پس جواب از اینجا نامعادله برابر اند با

PAYCO

از 0.5×10^{-1} شروع می کنیم جای Δx و Δy می گذاریم ← هرکدوم توی معادله صدق کرد
کافی الف x و y را با دقت (۴۵) ۶ وارد محاسبات کنیم

Subject: page :( )
Year : Month : Day :

$\Delta x = 0.5\times10^{-1}$ → توی نامساوی بگذاریم

$\Delta y = 0.5\times10^{-1}$ ببینیم کدام صدق می کنه ترتیبی را

از 0.5×10^{-1} ← 0.5×10^{-2} را امتحان می کنیم و

$\boxed{\text{خطای اعمال ریاضی}}$

$x \pm y$ $\sqrt{2} + \pi$

$x\times y$ خطا چه تاثیری در عملیات جمع داره ؟

$\frac{x}{y}$ خطای مطلق و خطای مطلق

① $\Delta(x+y) \le \Delta x + \Delta y$ و $\delta(x+y) \le \frac{|x|}{|x+y|}\delta x + \frac{|y|}{|x+y|}\delta y$

خطای مطلق جمع خطای نسبی

$\delta(x+y) \le \max\{\delta x, \delta y\}$

خطای نسبی تفاضل کران بالای [illegible]

② $\Delta(x-y) \le \Delta x + \Delta y$ و $\delta(x-y) \le \frac{|x|}{|x-y|}\delta x + \frac{|y|}{|x-y|}\delta y$

خطای مطلق تفاضل کران بالای ؟

③ $\Delta(xy) \le |x|\Delta y + |y|\Delta x$ کران بالای [illegible] و $\delta(xy) \le \delta x + \delta y$

④ $\Delta\left(\frac{x}{y}\right) \le \frac{|y|\Delta x + |x|\Delta y}{y^2}$ و $\delta\left(\frac{x}{y}\right) \le \delta x + \delta y$

نکته

تذکر ۱: بنابه کران بالای (*) از تفاضل ۲ عدد هم علامت نزدیک به هم باید اجتناب کرد

بنابه کران بالای (**) از ضرب اعداد بزرگ در اعدادی که دارای قدرمطلق نزدیک به صفر هستند باید اجتناب کرد

فرض کنیم ماشین حساب تا ۶ رقم اعشار می‌تواند نگه دارد ←

۰٫۵۵۶۷۸۹|۲ → ماشین حساب نمی‌تواند

− ۰٫۵۵۶۷۸۹|۱ اعداف این ۲ تا رو دریافت کنه

۰٫۰۰۰۰۰ ماشین حساب ← اشتباه می‌دهد

PAYCO

۱۳

Scanned by CamScanner

گاهی اوقات با استفاده از فرمول‌های جبری می‌توان از تفاضل ۲ کسر نزدیک به هم اجتناب کنیم

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ یا $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$

برای a, b های نزدیک به هم

$\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}$

برای x های نزدیک به صفر

ex: یک راه حل مناسب برای محاسبه‌ی $g(x)$ ارائه کنید

$$g(x) = x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} - 1\right)$$

اگر x بزرگ باشد (خیلی بزرگ) ← حاصل عبارت بالا به سمت صفر می‌رود ← فقط خطای زیاد ← از اتحاد استفاده می‌کنیم

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

اگر $a = \sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}$, $b=1$ →

$$(a-b) = \frac{1+\frac{1}{x}-1}{\sqrt[3]{(1+\frac{1}{x})^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{(1+\frac{1}{x})^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+1} \Rightarrow g(x) = x\left(\frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{\sqrt[3]{(1+\frac{1}{x})^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+1} \Rightarrow$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(1+\frac{1}{x})^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+1}$$

تقریب توابع تک متغیره به کمک بسط تیلور

فرض کنید تابع f، n بار مشتق‌پذیر پیوسته باشد یعنی $f \in C^n$ و مشتق مرتبه‌ی $(n+1)$ام تابع f موجود باشد ← بسط تیلور با باقی‌مانده‌ی تابع f حول x_0 به صورت زیر نوشته می‌شود

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$x < \xi < x_0$$

باقی‌مانده یا جمله‌ی خطا

اگر بسط بالا را حول نقطه‌ی صفر ($x_0 = 0$) بنویسیم ← بسط تیلور به بسط مک‌لورن تبدیل می‌شود

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}}{(n+1)!}$$

بسط تیلور یا مک لورن را بدون استفاده از باقی مانده به کار گیریم ← به بسط اجازه داده

بسط تیلور یا مک لورن بدون باقی مانده می گویند.

Subject:

Year. Month. Date.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

باقی مانده — بسط تیلور بدون باقی

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + f''(0)\frac{(x^2)}{2} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{(x)^n}{n!}$$

بسط مک لورن بدون باقی مانده

ex بسط مک لورن توابع e^x, $\sin x$, $\cos x$ را در حالت بدون باقی مانده بدست آورید.

$$f(x) = e^x$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$$

$$\rightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \boxed{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}}$$

$$f'(x) = \cos x \quad f''(x) = -\sin x$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos x \quad f^{(4)}(x) = \sin x$$

$$f(x) = \sin x$$

$$\sin x = 0 + x + 0 + (-1)\frac{x^3}{3!} + 0 + \cdots = \boxed{\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f^{(3)}\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\cos x \longrightarrow \cos'(x) = -\sin x \longrightarrow -\cos x \longrightarrow \sin x$$

$$= 1 + 0 + \left(-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\boxed{\cos x = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(x)^{2i}}{(2i)!}}$$

AZADEH

ex1 به کمک بسط مک‌لورن تابع $f(x)=e^x$ مقدار $\boxed{e^{\frac{\pi}{10}}}$ را با دقت 2D محاسبه کنید.

Subject: Year. Month. Date.

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{\frac{\pi}{10}} = 1 + \frac{\pi}{10} + \left(\frac{\pi}{10}\right)^2 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{\pi}{10}\right)^3 \times \frac{1}{3!} + \dots + \boxed{\left(\frac{\pi}{10}\right)^n \times \frac{1}{n!}}$$

$$|x - \hat{x}| \le 0.5 \times 10^{-2}$$

$$\left| \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^n}{n!} \right| \le 0.5 \times 10^{-2} \to n = 4$$

0.005

$e^{\frac{\pi}{10}}$ با دقت 2D، 5 جمله اول از بسط مک‌لورن کفایت می‌کند.

اگر $n=1 \to \frac{\pi}{10} = 0.314 > \cancel{0.5 \times 10^{-2}}$

$n=2 \to \frac{(0.31)^2}{2}$ $\cancel{4.8\ 0.5 \times 10^{-2}}$ > 0.005

0.0480×10^{-1}

$n=3 \to \frac{(0.31)^3}{6} = \frac{0.029}{6} = 4.83 \times 10^{-3} =$

0.483×10^{-2}

تابع $\cos x$ را به ازای مقادیر $|x|<\frac{\pi}{2}$ با دقت 5D محاسبه کنید.

$$\cos x = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \to \frac{(-1)^n (x)^{2n}}{(2n)!} \le \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!} \le$$

0.5×10^{-5}

باید کوچکترین n ای را پیدا کنیم که در نامساوی صدق کند.

$$\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!} \le 0.5 \times 10^{-5}$$

$n = 4 \to$

$\frac{\pi}{2} \simeq 1.57$

$$\frac{(1.57)^8}{8!} = \frac{36.91}{40320} \simeq 9.15 \times 10^{-4}$$

$n=6$ پس برای محاسبه $\cos x$ برای $|x|<\frac{\pi}{2}$ باید ۷ جمله اول از بسط مک‌لورن را استفاده کنیم.

$n = 5 \to$

$$\frac{(1.57)^{10}}{10!} = \frac{90.99}{10!} \simeq 2.50 \times 10^{-5}$$

جواب $n = 6 \to$

$$\frac{(1.57)^{12}}{12!} \simeq \frac{225.65}{12!} \simeq 4.71 \times 10^{-7}$$

کامل کنید

چند جمله از بسط مکلورن تابع $f(x)=e^{-\frac{x}{2}}$ نیاز است تا $f(\ln 2)$ با دقت 10^{-4} محاسبه شود؟

Subject:

Year. Month. Date.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ فصل ۲ : ریشه یابی در این فصل به یافتن یک ریشه برای یک تابع

اقدام می‌کنیم. این کار را در دو مرحله انجام می‌دهیم

مرحله ۱ : پیدا کردن یک بازه‌ی تقریبی برای ریشه

مرحله ۲ : فراهم یک روش تکراری برای یافتن ریشه با یک دقت مطلوب

برای مرحله ۱ روش‌های زیر به کار گرفته می‌شوند :

۱) رسم تابع ۲) استفاده از قضیه‌ی بولزانو و محاسبه‌ی مقادیر تابع در نقاط مختلف

قضیه‌ی بولزانو

اگر تابع f روی $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)f(b)<0$ باشد، آنگاه :

$\exists\, c \in [a,b]$ s.t. $f(c)=0$

به علاوه اگر f روی بازه‌ی $[a,b]$ اکیداً صعودی یا نزولی باشد آنگاه f روی بازه‌ی $[a,b]$ ریشه‌ی یکتا دارد.

فرض کنید $f(x)=x^{5}-x^{2}-1$. می‌توان دید که $f(-10)<0$ و $f(10)>0$

پس طبق قضیه بولزانو : $\exists\, c \in [-10,10]$ s.t.

$f(c)=0$

AZADEH

Subject: Year. Month. Date.

حال با فاصله بازه‌ی تقریبی [-۱۰,۱۰] را مرور دهیم — برای این کار [-۱۰,۱۰] را ۱۰ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و مقادیر تابع f را روی نقاط زیر بازه‌ای محاسبه می‌کنیم

x	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10
$f(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

طبق قضیه بولزانو $\exists c \in (0,2)$ s.t. $f(c)=0$

پس از یافتن یک بازه‌ی اولیه مثل $[a,b]$ که ریشه‌ی تابع در آن قرار دارد، با استفاده از فرمول روش‌های تکراری، به محاسبه‌ی دقیق ریشه‌ی تابع می‌پردازیم.

روش‌های تکراری

این روش‌ها با استفاده از یک حدس اولیه کار خود را شروع می‌کنند سپس توسط یک فرمول تکراری، دنباله‌ای از اعداد را می‌سازند مثل $\{x_n\}$ که امیدواریم این دنباله از اعداد به یک ریشه از تابع f همگرا شود.

نمادهای O و o: دنباله‌های $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ و $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ را در نظر بگیرید.

می‌نویسیم $x_n = O(y_n)$ اگر $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x_n|}{|y_n|} = r \in \mathbb{R}$

و می‌نویسیم $x_n = o(y_n)$ اگر $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x_n|}{|y_n|} = 0$

فرض می‌شود که $x_n, y_n \to 0$

$$x_n = \frac{n+1}{n^2}, \quad \alpha_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\alpha_n} = \frac{\frac{n+1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1+\cancel{\frac{1}{n}} = 1$$

$$\boxed{x_n = O(\alpha_n)}$$

$$y_n = \frac{n+1}{n^3}, \quad \beta_n = \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{\beta_n} = \frac{\frac{n+1}{n^3}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n} = 1 \to y_n = O(\beta_n)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{\alpha_n} = \frac{\frac{n+1}{n^3}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = 0 \rightarrow \boxed{y_n = o(x_n)}$$

Subject: Year. Month. Date.

تذکر ۵: فرض کنید $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنباله باشند به طوری که $y_n \neq 0$

به ازای هر $n \in N$ و $C \geq$ و $\left|\frac{x_n}{y_n}\right| \leq C$ که C یک ثابت مثبت است می‌توان نوشت

$$\boxed{x_n = O(y_n)}$$

Scanned by CamScanner

فرض کنید $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ دو دنباله باشند به طوری که $y_n \neq 0$ به ازای هر $n \in N$ و $c>0$ ، $\left|\frac{x_n}{y_n}\right| < c$ که c یک ثابت مثبت است ← به عنوان نماد O

$x_n = O(y_n)$

(مرتبه همگرایی)

فرض کنید دنباله $\{x_n\}$ به x همگرا باشد و برای هر $n \in N$ داشته باشیم $x_n \neq x$ ، آنگاه گوییم دنباله $\{x_n\}$ دارای مرتبه خطی است اگر ،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x|}{|x_n - x|} = c$$

به طوری که $c \in (0,1)$ یک ثابت مثبت است.

در این حالت c ، به نرخ همگرایی موسوم است.

اگر $c=0$ باشد ، همگرایی را ابرخطی نامیده و اگر $c=1$ ، همگرایی را زیرخطی می‌نامیم.

اگر اعداد مثبت c و $p>1$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x|}{|x_n - x|^p} = c$$

آنگاه مرتبه همگرایی دنباله برابر p است. برای $p=2$ ، همگرایی مربعی و برای $p=3$ ، همگرایی را مکعبی می‌نامیم.

$\boxed{ex}$ نشان دهید مرتبه همگرایی دنباله $\frac{1}{2^n}$ به صفر خطی است. بعلاوه همگرایی دنباله $\frac{1}{n+1}$ به صفر زیرخطی است.

حل : چون $\frac{1}{2^n} \to 0$ وقتی $\boxed{n\to\infty}$ پس $\boxed{x=0}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n \times 2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$$ همگرایی زیرخطی

تمرین B نشان دهید مرتبه‌ی همگرایی دنباله‌ی $x_n = \frac{1}{(2)^{2^n}}$ مربع است.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = c \quad \text{که } (c, p>0 , p=2)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{(2)^{2^{n+1}}} - 0\right|}{\left|\frac{1}{2^{2^n}} - 0\right|^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2^n \cdot 2}}{2^{2^{n+1}}}$$

معیارهای توقف: فرض کنید برای یافتن ریشه‌ی α از تابع f، یک الگوریتم تکراری طراحی کرده‌ایم. شرایطی که از آن برای توقف الگوریتم یا دنباله‌ی $\{x_n\}$ استفاده می‌کنیم، شرایط توقف می‌گویند.

این شرایط عبارت است از: ε فاصله‌ی دنباله از ریشه، ε به اندازه‌ی کافی کوچک

1) $|x_n - \alpha| < \varepsilon$

2) $|f(x_n)| < \varepsilon$

اندازه‌ی f در x_n به مقدار کافی کوچک باشد

3) تشخیص در دنباله، فاصله‌ی تشخیص فاصله‌ی دو تکرار متوالی در $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ فاصله‌ی دو عضو متوالی

4) $\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n|} < \varepsilon$

5) یک کران بالا بیابیم برای تعداد تکرارها

روش‌های عددی (تکراری) برای یافتن ریشه‌ی α از تابع f:

۱) روش اول

1) روش دوبخشی (تنصیف) 2) روش نابجایی 3) روش نیوتن 4) روش وتری

(روش دوبخشی) فرض کنید برای تابع f بازه‌ی $[a,b]$ که شامل ریشه‌ی α برای تابع f باشد از قضیه‌ها و ابزارهایی که قبلاً معرفی شدند (اعم از قضیه بولتزانو، انتگرال تابع) بدست آمد

Subject: ۳۸
Year : Month : Day : ( )
page :( )

۲) دوبخشی: با استفاده از قضیه بولزانو در هر مرحله طول بازه ی $[a,b]$ را نصف می کند و دنباله ی را تولید می کند. ثابت می شود که دنباله ی تولید شده ی $x_1, x_2, \dots$ به ریشه ی f که همان α است همگرا شود.

(الگوریتم روش دوبخشی)

ورودی: تابع f به همراه بازه ی $[a,b]$ به طوری که $f(a).f(b)<0$

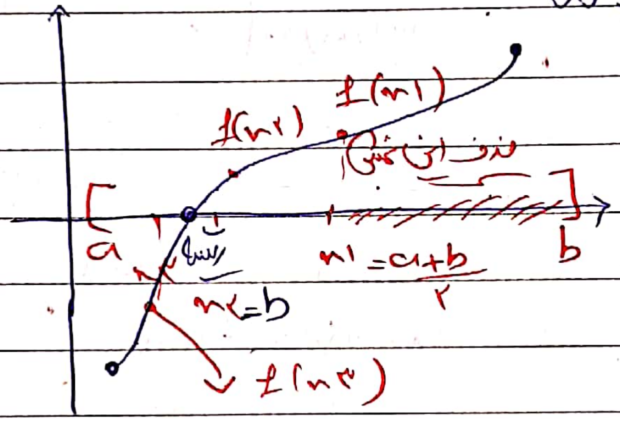
قضیه بولزانو میگه یه ریشه داریم ☺

گام اول: قرار دهید $x=\frac{a+b}{2}$

گام دوم: اگر شرط توقف برقرار بود متوقف شو و x را به عنوان خروجی چاپ کن.

گام سوم: اگر $f(a)f(x)<0$ باشد قرار بده $\boxed{b=x}$ در غیر این صورت قرار بده $\boxed{a=x}$ و به گام اول برو.

در هر مرحله طول بازه نصف میشه

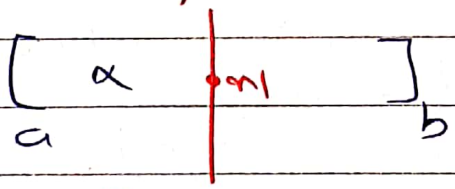


قضیه: اگر f روی بازه ی $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(b).f(a)<0$ ← دنباله ی تولید شده توسط روش دوبخشی به ریشه ی f یعنی α همگرا بوده و

$$|x_n-\alpha| \le \frac{b-a}{2^n}$$

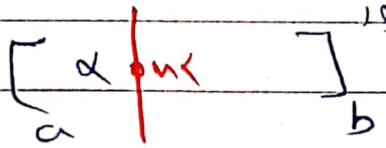
فاصله تا ریشه

$|x_1-\alpha| \le$ ~~نصف بازه~~ $\frac{b-a}{2}$



بازه نصف شد

اگر $n=2$ شود



$|x_2-\alpha| \le \frac{b-a}{4}$

چرا این فاصله حالا؟

مثال: معادله ی $f(x)=x^3+4x^2-10=0$ در بازه ی $[1,2]$ دارای ریشه ای است. الف) (ح.ج)

① $f(1)$ و $f(2)$ را حساب می کنیم.

$f(1)=-5$

$f(2)=14$ → طبق بولزانو $\exists\, \alpha\in[1,2] \quad f(\alpha)=0$

$f'(x) = 3x^2 + 4x > 0 \longrightarrow \forall x \in [1,2]$

پس تابع f روی بازه‌ی $[1,2]$ اکیداً صعودی است

ریشه‌ی واحد دارد.

حال برای یافتن ریشه‌ی $\alpha \in [1,2]$، چند تکرار روش از روش دوبخشی را دنبال می‌کنیم.

n	a_n (اول بازه)	b_n (آخر بازه)	x_n (وسط بازه)	$f(x_n)$
1	1	2	1.5	1.375
2	1	1.5	1.25	-1.79
3	1.25	1.5	1.375	0.16211

$f(x_n)f(a_n)<0$ ← a_n شد

در غیر اینصورت b_n جای x_n

$f(x_n)f(b_n)<0$

$b_n = 1.5$

b_n ثابت می‌ماند، a_n جای x_n، 1.25 می‌شود

کدوم منفی می‌شه؟

$f(x_n)f(a_n)$

$f(x_n)f(b_n)$

دنبال حاصل منفی است.

چند تکرار از روش دوبخشی لازم است تا ریشه‌ی واحد تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ با دقت $3D$ حاصل شود.

فاصله‌ی x_n از α کوچکتر از 0.5×10^{-3} باشد

حل:

$|x_n - \alpha| \le \frac{b-a}{2^n} \le 0.5\times10^{-3} \longrightarrow$ از طرفین $\log$ در مبنای ۲ می‌گیریم

$\frac{b-a}{2^n} \le 0.5\times10^{-3} \rightarrow 2^n \ge \frac{b-a}{0.5\times10^{-3}} \rightarrow$

$\log_2 2^n \ge \log_2 \frac{b-a}{0.5\times10^{-3}} \rightarrow \boxed{n \ge \log_2 \frac{b-a}{0.5\times10^{-3}}}$

به ازای کوچکترین n بدست میاد!!

روش تکرار ساده: فرض کنید تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ دارای یک ریشه مانند α است.
(در واقع قصد داریم معادله‌ی $f(x)=0$ را روی بازه‌ی $[a,b]$ حل کنیم.)

Subject: Year: Month: Day: page:( )

در روش تکرار ساده، معادله‌ی $f(x)=0$ به صورت $x=g(x)$ بازنویسی می‌شود. سپس
از بازنویسی معادله‌ی * دنباله‌ی تکراری $x_n=g(x_{n-1})$ حاصل می‌شود که
جمله‌ی نخست این دنباله یعنی x_0 به عنوان یک حدس اولیه در نظر گرفته می‌شود.
دنباله‌ی بازگشتی

هر جمله تولید جمله‌ی بیشتر را تعیین می‌کند → $x_1=g(x_0)$

تذکر: از معادله‌ی $f(x)=0$ به طرق متفاوتی می‌توان معادله‌ی $x=g(x)$ را استخراج کرد.
به عبارت دیگر تابع $g(x)$ لزوماً یکتا نیست.
به عنوان مثال

$$f(x)=\cos x - x = 0 \Rightarrow x = \underbrace{\cos x}_{g(x)} \Rightarrow x = g_1(x)$$

$$x = \underbrace{2x-\cos x}_{g_2(x)} \rightarrow \boxed{x=g_2(x)}$$

حال سوالی که مطرح است آن است که کدام یک از توابع $g(x)$ بهتر است.
اصلاً همه‌ی مسائل به نتیجه برای تولید دنباله‌ی ($x_n=g(x_{n-1})$)

$$\boxed{x_n=g(x_{n-1})} \; *$$

و این مسائل را در ۳ فاز بحث می‌کنیم.

(قضیه نقطه ثابت)

فرض کنید ① تابع g روی $[a,b]$ پیوسته باشد.

② تابع g بازه‌ی $[a,b]$ را به داخل $[a,b]$ تصویر کند.

$$g: \underbrace{[a,b]}_{\text{دامنه}} \rightarrow \underbrace{[a,b]}_{\text{برد}}$$

* برد تابع داخل $[a,b]$ باشد.

③ تابع g روی بازه‌ی باز (a,b) مشتق‌پذیر باشد و قدرمطلق مشتق آن کوچکتر مساوی
یک باشد → $|g'(x)| \le k < 1$

اگر این ۳ فرض برقرار باشد ← دنباله‌ی برای هر $x \in [a,b]$
تولیدشده توسط روش تکرار ساده (در فرمول *)
به ازای هر حدس اولیه x_0 به ریشه‌ی α از تابع همگرا می‌شود. معادله‌ی

$$|x_n-\alpha| \le \frac{k^n}{1-k}|x_1-x_0|$$

نتیجه ۶ اگر شرایط قضیه نقطه ثابت برقرار باشند آنگاه

$$|x_n - \alpha| \le c^n \max\{x_0 - a,\ b - x_0\} \quad \boxed{\square}$$

هر جا کمک کند

پس کران بالای (□) نتیجه ۶ فوق که هرچقدر کران کوچکتر — فاصله x_n به α کمتر

باشد، نقطه x_0 به نقطه ثابت α نزدیکتر باشد، همگرایی روش تکراری ساده سریعتر خواهد [تقریبا مثل ...]

بود و هرچقدر c به یک نزدیکتر باشد، همگرایی روش تکراری ساده کندتر

خواهد بود.

مثال ۶ تابع $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ را روی بازه‌ی $I = [-1, -0.5]$

در نظر بگیرید. نشان دهید روش تکراری $x_n = x_{n-1} - \frac{1}{4} f(x_{n-1})$

به ازای هر حدس اولیه $x_0 \in I$ به صفر تابع درون بازه همگراست.

این $g(x_{n-1})$ است

$$\boxed{x_n = g(x_{n-1})}$$

$$\boxed{g(x) = x - \frac{1}{4} f(x)}$$

$$g(x) = x - \frac{1}{4} f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + x - \frac{1}{4}$$

حالا باید ۳ فاصله مطرح شده در قضیه نقطه ثابت را برای تابع $g(x)$ بررسی کنیم

به وضوح g روی I پیوسته است.

بعد g باید توی بازه‌ی $[-1, -0.5]$ باشد

$$g'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$$

ریشه‌های $g'(x)$ برابر هستند با

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{19}}{3} \simeq \boxed{-1.12}$$

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{19}}{3} \simeq \boxed{1.78}$$

$$\boxed{I \subseteq [x_1, x_2]}$$

از این رو $g'(x)$ روی بازه‌ی

پس $g'(x) > 0$ روی بازه‌ی I

g روی I صعودی است.

$$\boxed{g(-1) \le g(x) \le g(-0.5)}$$

$$-\frac{3}{4} \le g(x) \le -\frac{29}{48} \qquad g(x) \subseteq [-1, -0.5]$$

بازه

پس g، I را داخل خودش می‌برد. که نشان می‌دهد فاصله دوم نیز برقرار است.

خاصیت سوم را بررسی می کنیم ، می توان نوشت

$g'(x) = -\frac{1}{2}(x-\frac{1}{3})^2+\frac{19}{18}$

$-1 < x < -0/5 \Rightarrow -\frac{4}{3} < x-\frac{1}{3} < -\frac{5}{6} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}$

$\frac{25}{36} < (x-\frac{1}{3})^2 < \frac{16}{9} \to \frac{1}{6} < \underbrace{-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{3})^2+\frac{19}{18}}_{g'(x)} < \frac{17}{24}$

$|g'(x)| < \frac{17}{24} < 1 \to \boxed{L=\frac{17}{24}}$

پس خاصیت سوم برقرار است ✓

$\boxed{\text{session 6}}$

$\boxed{ex}$ تقریبی از ریشه‌ی تابع $f(x)=2x-\ln x-4$ را در بازه‌ی $[2,3]$ با دقت ٤٥
به کمک روش تکرار ساده بیابید.

$f(x)=2x-\ln x-4=0 \to x = \underbrace{2+\frac{\ln x}{2}}_{g(x)}$

برای $g(x)$ و g باید خواص زیر برقرار باشند

① g در بازه‌ی $[2,3]$ پیوسته باشد

② $g \in [a,b] \to [a,b]$

③ $|g'(x)| \le L < 1$

برای بررسی خاصیت دوم g را مشتق می‌گیریم که $x\in[2,3]$ و $g'(x)=\frac{1}{2x} \leftarrow$

$g'(x)>0$ برای هر $x\in[2,3]$ پس g روی $[2,3]$ تابعی صعودی است و داریم

$g(2) \le g(x) \le g(3)$

$g(2) = 2+\frac{1}{2}\ln 2 > 2$
$g(3) = 2+\frac{1}{2}\ln 3 < 3$
$\Rightarrow \boxed{2 < g(x) < 3}$

$g \in [2,3] \to [2,3]$

★ سالم برای بدست آوردن کران بالای فقط مفید است ★

برای بررسی خاصیت سوم g را مشتق می‌گیریم که $g'(x)=\frac{1}{2x} \Leftarrow$

پس تابع $g''(x)<0$ برای $x\in[2,3]$ و $g''(x)=-\frac{1}{2x^2}$

هر $x\in[2,3] \Leftarrow$ نتیجه می‌گیریم تابع $g'(x)$ روی بازه‌ی $[2,3]$ نزولی است.

$g'(3) < g'(x) < g'(2)$ اکیداً نزولی است.

$L=\frac{1}{4}$

$g'(3)=\frac{1}{6}$, $g'(2)=\frac{1}{4} \to \frac{1}{6} < g'(x) < \frac{1}{4} \Rightarrow |g'(x)| \le \frac{1}{4} < 1$

27

پس تابع $g(x)$ و g در فرضیات نقطه ثابت صدق کرده و ← دنباله‌ای که از فرمول تکراری $x_{n-1} = g(x_n)$

تولید می‌شود به ازای هر حدس اولیه $x_0 \in [2,3]$ به

Subject: Month: Day: ( ) page:( )

به یک ریشه از f همگرا است.

برای تعیین ریشه با دقت 10^{-4} ابتدا تعداد تکرارهای لازم را از کران بالای خطای زیر بدست می‌آوریم.

$$|x_n - \alpha| \le \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|$$

مقدار x_1 از دنباله تولید کرده

اگر مقدار اولیه $x_0 = 2/5$ انتخاب شود

پس $[2,3]$ و هر کدام دلخواه می‌توان انتخاب کرد

$x_1 = g(x_0)$ $\qquad \boxed{x_n = g(x_{n-1})}$

$$x_1 = g(x_0) = 2 + \frac{1}{2}\ln 2/5 = \boxed{2/4581}$$

$$|x_n - \alpha| \le \frac{(\frac{1}{4})^n}{\frac{3}{4}}|2/4581 - 2/5| \le 0/5 \times 10^{-4}$$

توی ماشین حساب مقادیر n مختلف را تست کنیم تا کوچکترین n که رابطه را برقرار کند این نابرابری به ازای $n \ge 6$ برقرار می‌شود.

کمترین n	رابطه برقرار
$n=3$	باید حدس اولیه

نکته: (مرتبه همگرایی روش تکراری)

اگر $\{x_n\}_{n\ge1}$ دنباله‌ای باشد که توسط روش تکراری ساده تولید شده باشد یعنی $x_n = g(x_{n-1})$ ، $n \ge 1$ و این دنباله به ریشه f یعنی α همگرا باشد و $g'(\alpha) = g''(\alpha) = \dots = g^{(p-1)}(\alpha) = 0$ و تابع مخالف $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$

مشتق اول و دوم در α تا $p-1$ ام صفر می‌شود — مشتق مرتبه p ام g در α

آنگاه مرتبه همگرایی روش تکراری برابر با p است.

اگر در مشتق p ام صفر نشد مرتبه همگرایی p می‌شه

ex: فرض کنید $x_{n+1} = \dfrac{x_n(x_n^2+3a)}{3x_n^2+a}$ ، $n \ge 0$

که در آن $a>0$ عدد ثابت است.

حدود دنباله و مرتبه همگرایی دنباله به هر یک از حدود را مشخص کنید.

حل ۶) فرض کنید $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ آنگاه با گرفتن حد از دو طرف دنباله * به دست می‌آوریم.

Subject:
Year : Month : Day : ( ) page :( )

چون x_{n+1} هم به α میل می‌کند $\Rightarrow \alpha = \dfrac{\alpha(\alpha^2+3a)}{3\alpha^2+a}$

$x_n \sim \alpha$ میل می‌کند

$\alpha^3 + 3a\alpha = 3\alpha^3 + a\alpha \Rightarrow \boxed{2\alpha^3 - 2a\alpha = 0}$

$2\alpha(\alpha^2 - a) = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = \pm\sqrt{a} \end{cases}$

حد یک دنباله یکتاست ولی چرا اینجا حد ۰ و $\pm\sqrt{a}$ نقطه ثابت‌اند

به دلیل حدس اولیه‌های مختلف ← دنباله‌های متفاوتی ایجاد می‌شه که به جواب‌ها (حدهای) متفاوتی همگرا می‌شود.

از دنباله‌ی * نتیجه می‌شود که $g(x) = \dfrac{x(x^2+3a)}{3x^2+a}$

مشتق مرتبه اول $g'(x) = \dfrac{3x^4 - 6ax^2 + 3a^2}{(3x^2+a)^2}$ ، $g'(0) = \dfrac{3a^2}{a^2} = \boxed{3 \neq 0}$

$g''(x) = \dfrac{48ax(x^2-a)}{(3x^2+a)^3}$

مشتق مرتبه سوم $g'''(x) = \dfrac{48a(-9x^4+18ax^2-a^2)}{(3x^2+a)^4}$

بنابراین $g'(0) \neq 0$ ، پس مرتبه همگرایی برابر ۱ است

اولین مرتبه همگرایی که مشتق مخالف صفر است

پس مرتبه همگرایی دنباله‌ی x_n به صفر برابر با یک است و برابر مرتبه همگرایی می‌شه که همگرایی خطی

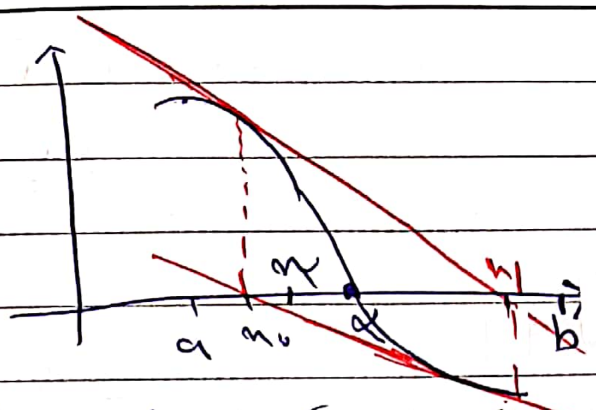
$g'(\pm\sqrt{a}) = g''(\pm\sqrt{a}) = 0 \neq g'''(\pm\sqrt{a})$

مرتبه همگرایی ۳ است — مرتبه همگرایی حاصل — مرتبه همگرایی حاصل است

پس مرتبه همگرایی دنباله‌ی x_n به $\pm\sqrt{a}$ از مرتبه ۳ است — همگرایی مکعبی — مرتبه همگرایی مکعب است

روش نیوتن

یک تابع داریم که دنبال ریشه ای هستیم در بازه ی $[a,b]$ این بار می خواهیم ریشه های آن را پیدا کنیم. تابع خطی هستند



x_0 حدس اولیه از ریشه

استفاده از خط مماس؛ جای این تابع داریم می کنیم ــ خط هایی به معادله ی زیر

$$L_0(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

روش نیوتن به ازای حدس اولیه از ریشه ی α از f، خط هایی مماس بر تابع f را در نقطه ی x_0، در نظر می گیرد و این خط هایی دارای معادله ی زیر اند.

$$L_0(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

پس روش نیوتن یک حدس جدید را با برابر صفر قرار دادن ریشه ی خط هایی را تولید می کند یعنی

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$\boxed{\text{تذکر}}$ روش نیوتن، حالت خاصی از روش تکرار ساده است که در آن

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

طرح تکراری برای روش نیوتن

$$\boxed{x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}}$$

$\boxed{ex}$ فرض کنید می خواهیم ریشه ی تابع $\boxed{f(x) = \cos x - x}$ را محاسبه کنیم

از روش تکرار ساده با همگرایی

$g(x) = \cos x$ دنباله ی زیر تولید می شود

$$x_n = g(x_{n-1}) \Rightarrow x_n = \cos(x_{n-1})$$

با روش نیوتن، دنباله ی تکراری زیر تولید می شود

$$x_n = x_{n-1} - \frac{\cos(x_{n-1}) - x_{n-1}}{-\sin(x_{n-1}) - 1}$$

تعریف: α را یک ریشه ی ساده ی تابع f می نامیم هرگاه

$$f(\alpha) = 0 \ , \ f'(\alpha) \neq 0$$

قضیه: فرض کنید $f \in C^2[a,b]$ (یعنی تابع f در مشتقات مرتبه ی اول و دوم آن پیوسته باشند) و α ریشه ی ساده ی f باشد در این صورت $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که به ازای هر حدس اولیه $x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$،

تکرار خطی به ریشه همگرا می شود.

دنباله‌ی حاصل شده از روش نیوتن به ریشه‌ی f یعنی α همگرا است.

Subject: ضعف روش است — $x_0 \in (\alpha-\delta, \alpha+\delta)$ — page :( )

Year : Month : Day : ( )

باید حدس اولیه به اندازه‌ی کافی به ریشه نزدیک باشد

تذکر: طبق این قضیه، برای تعیین همگرایی روش نیوتن، حدس اولیه باید به اندازه‌ی کافی به ریشه‌ی f یعنی α نزدیک باشد که در عمل یافتن چنین حدس اولیه‌ای کار ساده‌ای نیست ← یافتن حدس اولیه یک نقطه‌ی ضعف از روش نیوتن است

قضیه: اگر $f\in C^2[a,b]$ باشد و α ریشه‌ی ساده‌ی f باشد ← مرتبه‌ی همگرایی روش نیوتن به α، حداقل برابر با ۲ است.

اثبات: طبق تذکر می‌دانیم که روش نیوتن حالت خاصی از روش تکرار ساده است با

$$\boxed{g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}} \qquad g'(x)=\frac{f''(x)\,f(x)}{(f'(x))^2} \Longrightarrow f(\alpha)=0$$

پس $\boxed{g'(\alpha)=0}$ ، α مشتق مرتبه‌ی اول g را صفر می‌کند.

$$g''(x)=\frac{[f'''(x)\,f(x)+f'(x)\,f''(x)]\,(f'(x))^2-2f''(x)f(x)\,(f'(x)\,f(x))}{(f'(x))^4}$$

چون $f(\alpha)=0$ →

$$g''(\alpha)=\frac{f'(\alpha)\,f''(\alpha)\,(f'(\alpha))^2}{(f'(\alpha))^4}=\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

پس $g''(\alpha)$ لزوماً برابر صفر نیست. ممکن است صفر بشود یا صفر نشود

$g'(\alpha)=0\neq g''(\alpha)$

پس در حالتی که $g''(\alpha)\neq 0$ باشد مرتبه‌ی همگرایی روش برابر ۲ است. در حالتی که $g''(\alpha)=0$ باشد، مرتبه‌ی همگرایی از ۲ بزرگتر است.

تمرین: نشان دهید مرتبه‌ی همگرایی روش نیوتن برای یافتن ریشه‌ی $\alpha=0$ از تابع $f(x)=\sin x$، دقیقاً برابر ۳ است.

$$g(x)=x-\frac{\sin x}{\cos x}$$

راهنمایی: x

$$\boxed{\begin{array}{l} g'(0)=0 \\ g''(0)=0 \\ g'''(0)=0 \end{array}}$$

PAYCO

روش نیوتن ← مثال: می‌خواهیم برای یک $a>0$ مقدار $\sqrt[m]{a}$ را با روش نیوتن محاسبه کنیم.

page :( )

Subject:
Year : Month : Day : ( )

حل: می‌دانیم که $\sqrt[m]{a}$ ریشه‌ی تابع $f(x)=x^m-a$ است. پس برای تعیین مقدار $\sqrt[m]{a}$ کافی است که ریشه‌ی f را محاسبه کنیم. اگر برای محاسبه‌ی ریشه‌ی f از روش نیوتن استفاده کنیم آنگاه جمله‌ی عمومی این دنباله به صورت زیر بدست می‌آید:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^m - a}{m\, x_{n-1}^{m-1}} = \frac{(m-1)\, x_{n-1}^m + a}{m\, x_{n-1}^{m-1}}$$

پس اگر بخواهیم تقریبی از عدد گنگ $\sqrt{2}$ را به روش نیوتن بدست آوریم کافی است که در این مثال قرار دهیم $a=2$ و $m=2$، در این حالت جمله‌ی عمومی x به صورت زیر خواهد درآمد:

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{2} + \frac{1}{x_n}$$

PAYCO

۱۴۰۲/8/15

موضوع: تاریخ: / /

ex1) با استفاده از روش نیوتن، یک فرمول تکراری برای محاسبه وارون عدد a بدست آورید. به کمک آن تقریبی برای عدد $\frac{1}{3}$ تعیین کنید.

$$\frac{1}{x} - a = 0 \longrightarrow \boxed{x = \frac{1}{a}}$$

حل: همانطور که می‌دانیم صفرهای تابع $f(x) = \frac{1}{x} - a$ برابر $\frac{1}{a}$ است. بنابراین فرمول تکراری روش نیوتن برای یافتن ریشه تابع f به صورت

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\frac{1}{x_n} - a}{-\frac{1}{x_n^2}} = x_n(2 - ax_n)$$

بنابراین برای یافتن تقریبی از عدد $\frac{1}{3}$، کافی است در فرمول تکراری بدست آمده، قرار دهیم $a=3$ که نتیجه می‌دهد:

$$x_{n+1} = x_n(2 - 3x_n)$$

تعریف: α را صفر مرتبه $m > 1$ تابع f می‌نامیم هرگاه:

$f(\alpha)=0$

$f'(\alpha)=0$

$f^{(2)}(\alpha)=0$

$\vdots$

$f^{(m)}(\alpha) \neq 0$

اگر α، صفر مرتبه m تابع f باشد آن گاه می‌توان نوشت:

$$f(x) = (x-\alpha)^m h(x)$$

قضیه: اگر α صفر مرتبه m تابع f باشد آنگاه مرتبه همگرایی روش نیوتن برابر ۱ بوده و نرخ همگرایی آن برابر $1-\frac{1}{m}$ خواهد بود.

نکته: در حالتی که α، ریشه ساده تابع f نیست، آنگاه درجه همگرایی روش نیوتن پایین بوده → از روش نیوتن اصلاح شده (تعمیم یافته) استفاده خواهیم کرد.

قضیه: فرض کنید α، ریشه‌ی مرتبه m تابع f باشد آنگاه روش نیوتن اصلاح شده که دارای فرم کلی زیر است:

موضوع:

تاریخ: / /

روش نیوتن اصلاح شده

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

فقط m اضافه شد

دارای مرتبه همگرایی حداقل ۲ است.

اگر ریشه مرتبه ۲ است ← $m=2$

مثال) $\boxed{\alpha=0}$ ریشه‌ی مرتبه‌ی ۴ تابع $f(x)=2\cos x-2+x^2$ است زیرا:

$f(0)=2-2+0=\boxed{0}$

$f'(x)=-2\sin x+2x \rightarrow f'(0)=-2\times 0+0=\boxed{0}$

$f''(x)=-2\cos x+2 \rightarrow f''(0)=0$

$f'''(x)=2\sin x \rightarrow f^{(3)}(0)=0$

$f^{(4)}(x)=2\cos x \rightarrow \boxed{f^{(4)}(0)\neq 0}$

پس روش نیوتن معمولی دارای مرتبه همگرایی یک می‌باشد اما روش نیوتن اصلاح شده که فرم کلی آن برای تابع $f(x)$ به صورت زیر است:

$$x_{n+1}=x_n-4\frac{2\cos x_n-2+x_n^2}{-2\sin x_n+2x_n}$$

دارای مرتبه همگرایی حداقل ۲ است.

برای بهبود روش نیوتن در حالتی که α ریشه‌ی چندگانه‌ی f باشد، روش دیگری نیز وجود دارد که در قضیه بعدی بیان می‌شود.

اگر α، ریشه‌ی m گانه‌ی تابع f باشد، آنگاه α، صفر ساده‌ی تابع $f^{(m-1)}(x)$ است و

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f^{(m-1)}(x_n)}{f^{(m)}(x_n)}$$

به ریشه‌ی α از f با مرتبه همگرایی حداقل ۲ همگرا خواهد بود.

۱۳ ـ مشاهده کردیم ۰ = α صفر مرتبهٔ چهارم تابع $f(x) = 2\cos x - 2 + x^2$ الف

مرضرخ: تاریخ: / /

پس ۰ = α ، صفر اول (f(x)) الف ۰، ا، فرض α ، α ریشه‌ی $f^{(4)}(x)$

نیز می‌باشد پس طرح نیوتنی

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f^{(3)}(x_n)}{f^{(4)}(x_n)} = x_n - \frac{2\sin(x_n)}{2\cos(x_n)}$$

$$\boxed{x_n - \tan(x_n)}$$

دارای مرتبه همگرایی حداقل ۲ به ریشه‌ی ۰ = α برای تابع f الف.

مشکلات روش نیوتن

۱ ـ حدس اولیه ۰ باید به اندازه‌ی کافی به ریشه تابع f یعنی α نزدیک باشد از آنجا که در مسائل واقعی α مجهول الف ، یافتن حدس اولیه کار راحتی نیست.

۲ ـ اگر در طرح تکراری این روش یعنی $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ مشتق تابع در یکی از تکرارها صفر شود ادامه‌ی روش با شکست مواجه می‌شود. همچنین در بسیاری از مسائل محاسبه‌ی مشتق ممکن الف دشوار شود.

روش وتری: این روش برای رفع اشکالات روش نیوتن مطرح شد. به این صورت که برای اجتناب از محاسبه‌ی مشتق در طرح تکراری نیوتن ($f'(x_n)$) را با فرمول زیر تقریب زده می‌شود.

$$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

با جایگذاری این تقریب در طرح تکراری نیوتن خواهیم داشت:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

ثابت می‌شود که روش وتری که همگرا باشد، مرتبه همگرایی آن برابر $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ الف.

خطای نسبی درصد کمتر از ۰/۰۵

موضوع: تاریخ: / /

مسئله‌ی درون یابی: نقاط $(x_0,f_0),\dots,(x_n,f_n)$ به عنوان نقاط گره فرض کنید.

مسئله این است که تابع $p(x)$ را چنان پیدا کنیم که از نقاط گره‌ای عبور کند.
توابع مختلفی را می‌توان یافت که از این دسته از نقاط عبور می‌کنند، مانند توابع مثلثاتی، توابع چندجمله‌ای، توابع نمایی و توابع کسری. اما در این فصل ما به دنبال تابع از نوع چندجمله‌ای هستیم که از نقاط گره‌ای عبور کند.
این مسئله، درون یابی به کمک چندجمله‌ای‌ها گفته می‌شود.

تعریف (چندجمله‌ای درون یاب):
نقاط گره‌ای
$(x_0,f_0),(x_1,f_1),\dots,(x_n,f_n)$ *
را در نظر بگیرید. چندجمله‌ای $p(x)$ را چندجمله‌ای درون یاب نقاط * می‌نامیم هرگاه
$p(x_0)=f_0,\ p(x_1)=f_1,\ \dots,\ p(x_n)=f_n$

$p(x_i)=f_i,\quad i=1,\dots,n$

برای یافتن چندجمله‌ای درون یاب نقاط گره‌ای * سه روش مطرح می‌شود:
(۱) روش مستقیم (۲) روش لاگرانژ (۳) روش تفاضلات تقسیم شده

(۱) روش مستقیم: می‌دانیم چندجمله‌ای $p_n(x)$ که از درجه‌ی n است، شکل کلی آن به صورت زیر است:

$$p_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$$

از آنجا که تابع $p_n(x)$ باید از نقاط گره‌ای عبور کند باید داشته باشیم:

$$p_n(x_0)=a_0+a_1x_0+\dots+a_nx_0^n=f_0$$
$$p_n(x_1)=a_0+a_1x_1+\dots+a_nx_1^n=f_1 \qquad (*)$$
$$\vdots$$
$$p_n(x_n)=a_0+a_1x_n+\dots+a_nx_n^n=f_n$$

دستگاه معادلات خطی * را می‌توان به صورت $A\alpha=F$ نوشت که در آن

$$A=\begin{bmatrix}1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n\\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n\end{bmatrix},\quad \alpha=\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}f_0\\ f_1\\ \vdots\\ f_n\end{bmatrix}$$

در دستگاه معادلات فوق ($A\alpha=F$) ، ماتریس A که به ماتریس واندرموند معروف است

تاریخ: / /

موضوع:

وارون پذیر بوده در نتیجه دستگاه $A\alpha=F$ دارای جواب منحصر به فرد است.

می باشد. با حل این دستگاه ضرایب مجهول $a_0, a_1, \ldots, a_n$ بدست می آیند و در نتیجه چندجمله‌ای درون‌یاب $P_n(x)$ مشخص می‌شود.

تذکر: تعیین چندجمله‌ای درون‌یاب توسط حل دستگاه $A\alpha=F$ روش کارای نیست زیرا ماتریس A یک ماتریس پر بوده (درایه‌های غیر صفر آن در صورت وجود کم هستند) و حل این دستگاه هزینه‌ی محاسباتی نسبتاً بالایی دارد.

(2) روش لاگرانژ: نقاط گرهای (x_0, f_0)، (x_1, f_1)، ...، (x_n, f_n) را در نظر بگیرید و برای هر $j = 0, 1, \ldots, n$ فرض کنید: $L_j(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد و تعریف می‌دهیم:

$$L_j(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

بیانگر حاصل ضرب

آنگاه می‌توان نشان داد که چندجمله‌ای $P_n(x)$ که با فرمول

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j \, L_j(x)$$

داده می‌شود، چندجمله‌ای درون‌یاب نقاط گرهای (*) است.

به چندجمله‌ای‌های $L_j(x)$، چندجمله‌ای‌های پایه‌ی لاگرانژ گفته می‌شود.

از تعریف این چندجمله‌ای‌ها روشن است که

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

(ex) چندجمله‌ای درون‌یاب نقاط گرهای

	$n=0$	$n=1$	$n=2$
x_i	-1	0	2
f_i	1	1	7

را به روش لاگرانژ مشخص کنید.

حل: واضح است که $n=2$، بنابراین باید چندجمله‌ای‌های لاگرانژ $L_0(x)$، $L_1(x)$ و $L_2(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$L_0(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq 0}}^{2} \frac{x - x_k}{x_0 - x_k} =$$

$$= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{x(x-2)}{-1\times(-3)} = \boxed{\frac{x^2-2x}{3}}$$

تاریخ:

$$L_1(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq 1}}^{2} \frac{x-x_k}{x_1-x_k} = \frac{(x-\cancel{x_0})(x-\cancel{x_2})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \boxed{\frac{-x^2+x+2}{2}}$$

$$L_2(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq 2}}^{2} \frac{x-x_k}{x_2-x_k} = \frac{(x-\cancel{x_0})(x-\cancel{x_1})}{(\cancel{x_2-x_0})(\cancel{x_2-x_1})} = \boxed{\frac{x^2+x}{6}}$$

پس چندجمله‌ای درونیاب به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\rightarrow P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j \cdot L_j(x)$$

$$P_n(x) = \cancel{f_0}\, L_0(x) + \cancel{f_1}\, L_1(x) + f_2\, L_2(x) =$$

$$1\times\left(\frac{x^2-2x}{3}\right) + 1\times\left(\frac{-x^2+x+2}{2}\right) + 7\times\left(\frac{x^2+x}{6}\right)$$

$$= \boxed{x^2+x+1}$$

۱۴۰۱/۸/۲۲

موضوع: ________ تاریخ: / /

مثال ۳ چند جمله‌ای درون‌یاب مربوط به داده‌های جدول زیر را با روش لاگرانژ تعیین کنید.

حل ۵ فرم جزوه

x_i	-1	0	1	2
f_i	1	1	3	7

تمرین ۵ نشان دهید

$$L_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

ضرایب لاگرانژ

حل ۵

$i=j$ و $\quad L_j(x_j) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \dfrac{x_j - x_k}{x_j - x_k} = 1$

$i \neq j \quad L_j(x_i) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \dfrac{x_i - x_k}{x_j - x_k}$

در حاصل ضرب فوق جمله‌ی $k=i$ برابر است با

$$\frac{x_i - x_i}{x_j - x_i} = 0 \Rightarrow L_j(x_i) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x_i - x_k}{x_j - x_k} = 0$$

تمرین ۶ سی ۶ اگر $x_0 = -1$ و $x_1 = 0$ و $x_2 = -2$ و $x_3 = -3$

مقدار $[L_3(x_3)]^2 - 4L_0(x_1) + 3L_2(x_2)]$

را می‌یابیم. حل ۵ با توجه به تمرین قبل

$L_3(x_2) = 0$ و $L_0(x_1) = 0$ و $L_2(x_2) = 1$

پس حاصل عبارت فوق برابر $\boxed{3}$ است.

Scanned by CamScanner

تفاضلات تقسیم شده‌ی نیوتن

مرور درس: فرض کنید (x_0, f_0) و (x_1, f_1) و ... (x_n, f_n) نقاط گره‌های مفروض باشند.

متناظر با این نقاط، تفاضل تقسیم شده‌ی نیوتن مرتبه‌ی اول را با نماد $f[x_i, x_{i+1}]$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$$

به همین ترتیب تفاضل تقسیم شده‌ی نیوتن مرتبه‌ی دوم را با نماد $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

جمله‌ی اول از کروشه دوم شروع می‌شود تا آخر

از جمله‌ی اول تا جمله‌ی یکی مانده به آخر

به صورت مشابه تفاضل مرتبه‌ی j ام به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+j}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}$$

بنابراین تفاضلات تقسیم شده‌ی نیوتن به صورت بازگشتی نتیجه می‌شوند. سپس برای محاسبه‌ی آن‌ها از جدولی تحت عنوان جدول تفاضلات تقسیم شده‌ی نیوتن استفاده می‌شود.

برای حالت $n=3$ (چهار نقطه گره‌ای) این جدول به صورت زیر است:

x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_0	f_0			
		$f[x_0, x_1]$		
			$f[x_0, x_1, x_2]$	
x_1	f_1			$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
		$f[x_1, x_2]$		
x_2	f_2		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		
x_3	f_3			

۲- هرگاه نقاط گره‌ای (x_0, f_0) و (x_1, f_1)، ... و (x_n, f_n) مفروض هستند چندجمله‌ای درون‌یاب نیوتن که به صورت زیر تعریف می‌شود

موضوع: تاریخ: / /

چندجمله‌ای درون‌یاب نیوتن با تفاضل تقسیم شده مرتبه اول (درجه n)

$$P_n(x) = f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

نقاط گره‌ای مفروض را درون‌یابی می‌کند.

درجه این چندجمله‌ای n

ex چندجمله‌ای درون‌یاب مربوط به جدول زیر را با روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن بدست آورید.

	$n=0$	$n=1$	$n=2$
x_i	-1	0	2
f_i	1	1	7

می‌دانیم چندجمله‌ای درون‌یاب نیوتن به فرم زیر تعریف می‌شود

$$P_n(x) = f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

جدول تفاضلات را تشکیل می‌دهیم.

x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_0, x_1, x_2]$
-1	1		
		$\frac{1-1}{0-(-1)} = 0$	
0	1		$\frac{3-0}{2-(-1)} = 1$
		$\frac{7-1}{2-0} = 3$	
2	7		

پس چندجمله‌ای درون‌یاب به صورت زیر است

$$P_n(x) = 1 + 0 \times (x - x_0) + 1 \times (x - x_0)(x - x_1) =$$

$$1 + 0 + 1 \times (x+1)x = \boxed{x^2 + x + 1}$$

یکی از اشکالات اساسی روش لاگرانژ این است که اگر به نقاط گره‌ای یک نقطه‌ی جدید اضافه شود که تمام محاسبات را باید از ابتدا آغاز کرد.

اما در روش نیوتن تفاضلی که یک نقطه‌ی گره‌ای جدید به مسئله اضافه شود به راحتی میتوان
تفاضلات تقسیم شده را به روزرسانی کرد و از محاسبات قبلی بهره برد.
نیوتن

همچنین در روش لاگرانژ درجه‌ی چندجمله‌ای درون‌یاب زمانی مشخص می‌شود که تمام محاسبات پایان یافته باشد.

اما در روش نیوتن با تشکیل جدول درجه‌ی چندجمله‌ای درون‌یاب مشخص می‌شود.

۳ تا اشکال داره

اگر مقدار ستون $f[x_0,x_1,x_2]$ توی جدول صفر بشه می‌فهمیم که درجه‌ی چندجمله‌ای ۲ نیست.

اشکال دیگر روش لاگرانژ حجم محاسبات بالای آن است.

ex) اگر داده‌ی (1,3) به نقاط گره‌ای مثال قبل اضافه شود چندجمله‌ای درون‌یاب را مجدداً محاسبه کنید.

x_i	-1	0	2	1
f_i	1	1	7	3

	x_i	f_i	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$
x_0	-1	1		
x_1	0	1	$\frac{1-1}{0-(-1)}=0$	$\frac{3-0}{2-(-1)}=1$
x_2	2	7	$\frac{7-1}{2-0}=3$	$\frac{4-3}{1-0}=1$
x_3	1	3	$\frac{3-7}{1-2}=4$	

$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$

$\frac{1-1}{1-(-1)}=0 \longrightarrow$ می‌فهمیم که چندجمله‌ای درون‌یاب ما درجه‌ی ۳ نیست ← درجه‌ی ۲ است

$P_n(x) = q(x) + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

در مثال قبل بدست آمد $= q(x) + 0 = \boxed{x^2+x+1}$

در حالتی که تفاوت گره‌های $x_0, x_1, \dots, x_n$ هم فاصله باشند، محاسبات روش نیوتن در یافتن چندجمله‌ای درونیاب کاهش می‌یابد. بنابراین فرض کنید

$$x_{i+1} = x_i + h \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

عملگر انتقال که با نماد E نمایش داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E f_i = f_{i+1} = f(x_{i+1})$$

و برای هر $k \in N$ داریم:

$$E^k f_i = f_{i+k} = f(x_{i+k})$$

حال عملگر تفاضل پیشرو را با نماد Δ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Delta = E - 1$$

پس

$$\Delta f_i = (E-1) f_i = E f_i - f_i = f_{i+1} - f_i$$

همچنین

$$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+1} - f_i) = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i = (f_{i+2} - f_{i+1}) - (f_{i+1} - f_i) = \boxed{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}$$

در حالت کلی برای هر $k \in N$ داریم:

$$\Delta^{k+1} f_i = \Delta^k(\Delta f_i) = \Delta^k(f_{i+1} - f_i) = \Delta^k f_{i+1} - \Delta^k f_i$$

پس مشابه با تفاضلات تقسیم شده نیوتن، تفاضلات پیشرو نیز به صورت بازگشتی محاسبه می‌شوند و از جدولی مشابه با تفاضلات تقسیم شده محاسبه می‌شوند. با این تفاوت که در این جدول نیازی به تقسیم تفاضلات نیست.

لم ۵ اگر $k \in N$ باشد آنگاه ۵ $f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \dfrac{\Delta^k f_i}{k!\,h^k}$

موضوع: ________ تاریخ: / /

یعنی در حالتی که نقاط گره‌ای هم فاصله باشند ، تفاضلات تقسیم شده نیوتن از طریق تفاضلات پیشرو قابل محاسبه هستند.

کاربرد درون‌یابی ، تبدیل اندازه‌های گسسته به پیوسته

قضیه ۵ : چندجمله‌ای درون‌یاب پیشرو نیوتن

چندجمله‌ای درون‌یاب نقاط هم فاصله $\binom{x_0}{f_0}, \binom{x_1}{f_1}, \dots, \binom{x_n}{f_n}$ به صورت زیر است.

تفاضلات پیشرو

$$P_n(x) = f_0 + \theta\Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \dots + \frac{\theta(\theta-1)\dots(\theta-n+1)\,\Delta^n f_0}{n!} = f_0 + \sum \binom{\theta}{i}\Delta^i f_0$$

که در آن $\theta = \dfrac{x-x_0}{h}$ ، $\binom{\theta}{i} = \dfrac{\theta(\theta-1)\dots(\theta-i+1)}{i!}$

از قضیه‌ی قبل فوراً نتیجه زیر حاصل می‌شود ۵

چندجمله‌ای درون‌یاب در نقاط هم فاصله $\binom{x_i}{f_i}, \binom{x_{i+1}}{f_{i+1}}, \dots, \binom{x_{i+k}}{f_{i+k}}$ به صورت زیر بدست می‌آید.

$$P_k(x) = f_i + \theta\Delta f_i + \frac{\theta(\theta-1)}{2!}\Delta^2 f_i + \dots + \frac{\theta(\theta-1)\dots(\theta-k+1)\,\Delta^k f_0}{k!}$$

نکته ۵ فرض کنید نقاط گره‌ای $\binom{x_0}{f_0}$ ... $\binom{x_n}{f_n}$ هم فاصله بوده و مقدار تابع f را در نقطه‌ای مانند x (x یک نقطه‌ی گره‌ای نیست) تقریب بزنیم.

برای این کار لزوماً لازم نیست که چندجمله‌ای درون‌یاب f را در همه‌ی نقاط گره‌ای پیدا کنیم بلکه با انتخاب x_i مناسب (گره‌ای مناسب) طوری که مقدار θ را کوچک کند و انتخاب مناسب درجه چندجمله‌ای (k) می‌توان چندجمله‌ای درون‌یاب را با محاسبات کمتری پیدا کرد و مقدار f را در نقطه x تقریب زد.

با توجه به نقاط گره‌ای داده شده، $\sin(5°)$ و $\sin(42°)$ را تقریب بزنید.

x_i	0	$10°$	$20°$	$30°$	$40°$	$50°$
$\sin(x_i)$	0	0/17364	0/34202	0/5	0/64278	0/76604

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$	$\Delta^5 f_i$
0	0	0/1735				
			-0/0052			
10	0/1735			-0/0052		
		0/1584				
20	0/3420		-0/0104		0/0004	
						0
30	0/5	0/1580		-0/0048		
40	0/6428	0/1428			0/0004	
				-0/0044		
50	0/7660	0/1232				

حل: برای تقریب $\sin(5°)$، چون $x=5°$ به نقطه‌ی گره‌ای $x_0=0°$ نزدیک‌تر است پس مقدار θ با انتخاب $x_0=x_1$ کوچک‌تر می‌شود و قرار می‌دهیم $x_0=x_1$

حال برای مقادیر مختلف K می‌توانیم بنویسیم:

$$\sin(5°) \simeq f_0 + \theta\Delta f_0 + \cdots + \frac{\theta(\theta-1)\cdots(\theta-k+1)\Delta^k f_0}{k!}$$

$\boxed{K=5}$

که در آن

$$\theta = \frac{x-x_0}{h} = \frac{5°-0°}{10} = \frac{1}{2}$$

با جایگذاری $\theta=\frac{1}{2}$ در رابطه‌ی فوق داریم:

$$\boxed{\sin(5°) \simeq 0/0871}$$

$\boxed{\text{برای } K=4}$

$$\sin(5°) = f_0 + \theta\Delta f_0 + \cdots + \frac{\theta(\theta-1)\cdots(\theta-k+1)\Delta^k f_0}{k!}$$

$$\sin(5°) \simeq 0/0871$$

$\sin(5°)$

$\boxed{K=3}$

برای $K=3$ ی $f(50^\circ) = f_0 + \theta \Delta f_0 + \cdots + \dfrac{\theta(\theta-3+1)\Delta^3 f_0}{3!}$

$$\boxed{\sin(50^\circ) \simeq 0/871}$$

برای $K=2$, $K=1$ به طریق مشابه ی تقریب $\sin(50^\circ)$ ی محاسبه می‌شود.

خطای چند جمله‌ای درون‌یاب

فرض کنید P ی چند جمله‌ای درون‌یاب تابع f در نقاط $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ می‌باشد اگر $f \in C^{n+1}[a,b]$ باشد ی آنگاه به ازای هر $x\in[a,b]$ عدد $\xi(x) \in (a,b)$ وجود دارد به طوری که

$$f(x)-P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

بنابراین می‌توان نوشت ی

$$|f(x)-P(x)| \le \frac{M_1 M_2}{(n+1)!}$$

که در آن $M_1 = \max\limits_{a\le x\le b} |f^{(n+1)}(x)|$ و $M_2 = \max\limits_{a\le x\le b} |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|$

درحالی که n ی عددی بزرگ باشد ی محاسبه‌ی M_2 کار ساده‌ای نیست و می‌توان از کران به بیشینه‌ای زیر برای M_2 استفاده کرد ی

$$M_2 \le (b-a)^{n+1}$$

$\boxed{ex}$ ی چند جمله‌ای درون‌یاب تابع $f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{8}\right)$ را در نقاط $x_0=0$ و $x_1=2$ و $x_2=3$ به دست آورید، سپس کران بالای خطای این درون‌یاب را تعیین کنید و آن را با خطای واقعی در نقطه‌ی $x=1$ مقایسه کنید (محاسبات را با سه رقم اعشار ی دنبال کنید).

ابتدا ی چند جمله‌ای درون‌یاب را با استفاده از روش نیوتن ی محاسبه می‌کنیم ی

$$\max_{0\le x\le 3} |g(x)| = \max\{|g(x_1)|, |g(x_2)|, |g(0)|, |g(3)|\} =$$

$$\max\{2.113, 0.431, 0, 0.0\} = \boxed{2.113}$$

$$m_1 = \max_{0\le x\le 3} \left|\frac{\pi^3}{512} \sin\frac{\pi x}{8}\right|$$

چون تابع $\sin\left(\frac{\pi x}{8}\right)$ روی بازه‌ی $[0,3]$ صعودی است پس

$$m_1 = \left|\frac{\pi^3}{512} \sin\frac{3\pi}{8}\right| \simeq \boxed{0.056}$$

$$|f(x) - p(x)| \le \frac{m_1 m_2}{3!} = \frac{0.056 \times 2.113}{6} = \boxed{0.020}$$

مشاهده می‌شود که کران بالای عبور یافته‌ی $\boxed{0.020}$ بهتر آمده که از کران بالای 0.273 بدست آمده است.

از طرفی مقدار واقعی خطا در نقطه‌ی $x=1$ برابر است با

$$|f(1) - p(1)| = |0.924 - 0.912| = 0.012 < 0.020$$
$$< 0.273$$

تعریف کمترین مربعات گسسته:

فرض کنید نقاط (x_1, f_1) و (x_2, f_2) و ... و (x_n, f_n) حاصل از مشاهدات یک پدیده‌ی فیزیکی باشد. در اینجا قصد داریم یک چندجمله‌ای از درجه‌ی $n \le m-1$ به گونه‌ای بدست بیاوریم که تا آنجا که امکان دارد فاصله‌ی چندجمله‌ای بدست آمده تا نقاط نمونه حداقل باشد. دقت شود که در حالتی که $n = m-1$ این مسئله به مسئله‌ی درون‌یابی تقلیل پیدا می‌کند. اما در حالتی که $n < m-1$ باشد، ممکن است هیچ چندجمله‌ای‌ای از درجه‌ی n یافت نشود که از تمام نقاط نمونه‌ای عبور کند. در این حالت به دنبال یک چندجمله‌ای مانند $p_n(x)$ هستیم که مجموع خطاهای زیر را حداقل کند.

$$E_1(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{m} |f_i - p_n(x_i)|$$

x_i	f_i	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_1,x_2,x_3]$
۰	۱	-0.147	
۲	0.707		-0.0539
۳	0.383	-0.324	

پس چند جمله‌ای درون‌یابی به صورت زیر است:

$$f(x)=1-0.147x-0.0539x(x-2)=\boxed{1-0.049x-0.0539x^2}$$

در اینجا $n=2$ و $f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{8}\right)$ است پس محاسبات زیر را انجام می‌دهیم:

$$f'(x)=-\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi x}{8} \qquad f''(x)=-\frac{\pi^2}{64}\cos\frac{\pi x}{8}$$

$$f'''(x)=\frac{\pi^3}{512}\sin\frac{\pi x}{8}$$

$$M_1=\max_{0\le x\le 3}\left|\frac{\pi^3}{512}\sin\frac{\pi x}{8}\right|\le\frac{\pi^3}{512}=\boxed{0.061}$$

کران بالا برای سادگی

$$M_2=\max_{0\le x\le 3}|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|=\max_{0\le x\le 3}|x(x-2)(x-3)|\le 3^3=\boxed{27}$$

$$|f(x)-p(x)|\le\frac{M_1M_2}{(2+1)!}\le\frac{0.061\times 27}{3!}=\boxed{0.273}$$

حال برای اینکه خطای کمتری بدست آوریم، مقادیر M_1، M_2 را به طور دقیق محاسبه کنیم

$$M_2=\max_{0\le x\le 3}|x(x-2)(x-3)| \rightarrow g(x)=x(x-2)(x-3)$$

حال نیاز داریم اکسترمم‌های مطلق تابع $g(x)$ را پیدا کنیم برای این کار:

$$g'(x)=3x^2-10x+6=0 \rightarrow x_1,x_2=\frac{5\pm\sqrt{7}}{3}\in(0,3)$$

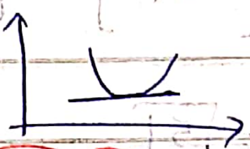
$$\Delta=100-4\times3\times6=28 \rightarrow$$

$$\sqrt{\Delta}=\boxed{2\sqrt{7}}$$

و تابع E_1 به دلیل وجود قدر مطلق مشتق پذیر نیست ← برای رفع این مشکل از مربعات خطا استفاده می‌کنیم:

$$E_2(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{m} \left(f_i - P_n(x_i)\right)^2$$

تابع E_2 مشتق پذیر بوده و محدب است.



بنابراین شرط لازم و کافی برای مینیمم این است که

$$\frac{\partial E_2}{\partial a_j} = 0 \qquad j = 0, 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial a_j} = \frac{\partial}{\partial a_j} \sum_{i=1}^{m} \left(f_i - P_n(x_i)\right)^2 = \frac{\partial}{\partial a_j} \sum_{i=1}^{m} \left(f_i - \sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial a_j} \left(f_i - \sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k\right)^2 = -2 \sum_{i=1}^{m} x_i^j \left(f_i - \sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^{k+j}\right) a_k = \sum x_i^j f_i \qquad j = 0, 1, \dots, n \quad \star$$

دستگاه ★ یک دستگاه معادلات خطی به صورت زیر است:

$$Sa = \beta \rightarrow S_{k,j} = \sum_{i=1}^{m} x_i^{k+j},$$

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \beta_j = \sum_{i=1}^{m} x_i^j f_i \quad ; \; k, j = 0, 1, \dots, n$$

پس دستگاه $Sa=\beta$، یک دستگاه مربعی بوده. یعنی ماتریس ضرایب S یک ماتریس $(n+1)(n+1)$ است. به علاوه ماتریس S یک ماتریس متقارن است.

$\boxed{ex}$ چند جمله‌ای درجه ۲ حاصل از تقریب کمترین مربعات گسسته را برای نقاط زیر به دست آورید.

x_i	0	0.25	0.5	0.75	1
f_i	1.000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183

در این مثال $n=2$, $m=5$ است.

دستگاه معادلات نرمال به صورت زیر است (B

$$\begin{bmatrix} S_{0,0} & S_{0,1} & S_{0,2} \\ S_{1,0} & S_{1,1} & S_{1,2} \\ S_{2,0} & S_{2,1} & S_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$S_{0,0} = \sum_{i=1}^{5} x_i^{\cancel{k+j}\,0} = \sum_{i=1}^{5} 1 = \boxed{5}$$

$$S_{0,1} = \sum_{i=1}^{5} x_i^{1} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 =$$

$$0 + 0.25 + 0.5 + 0.75 + 1 = \boxed{2.5} = S_{1,0}$$

ماتریس متقارن است

$$S_{0,2} = S_{2,0} = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 =$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0 + (0.25)^2 + (0.5)^2 + (0.75)^2 + 1^2 = \boxed{1.875}$$

$$S_{1,2} = S_{2,1} = \sum_{i=1}^{5} x_i^3 = x_1^3 + x_2^3 + \_\_\_ + x_5^3 = 1.5625$$

$$S_{2,2} = \sum_{i=1}^{5} x_i^4 = x_1^4 + x_2^4 + \_\_\_ + x_5^4 = 1.3828$$

$$S_{1,1} = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = S_{0,2} = S_{2,0}$$

$$\beta_0 = \sum_{i=1}^{m} x_i^{j} f_i \rightarrow \beta_0 = \sum_{i=1}^{\cancel{m}\,5} f_i = f_1 + f_2 + \_\_\_ + f_5 = \boxed{80.7680}$$

$$j = 0 \quad , \quad m = 5$$

$$\beta_1 = \sum_{i=1}^{5} x_i^{1} f_i = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 + x_5 f_5 = \boxed{5.4514}$$

$$\beta_2 = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 f_i = x_1^2 f_1 + x_2^2 f_2 + \_\_\_ + x_5^2 f_5 = \boxed{4.4015}$$

حال که ماتریس ضرایب S معلوم و بردار سمت راست β معلوم شده است به حل دستگاه

(12) $a^* = [a_0^*, a_1^*, a_2^*]$ با استفاده از دستگاه $Sa = \beta$ و یافتن جواب این دستگاه

Scanned by CamScanner

$a_0^* = 1/00501$, $a_1^* = 0/86468$

$a_2^* = 0/84316$

$p_2(x) = 0/86468\, x^2 + 0/86468\, x + 1/00501$

مشتق گیری و انتگرال گیری عددی

مشتق گیری عددی: فرض کنید که مقدار تابع f را تنها در تعدادی نقطه‌ی متمایز هم فاصله می‌شناسیم و با استفاده از مقادیر تابع f تنها در تعدادی متمایز نقطه که فاصله‌ی آنها یکسان است میسر می‌شود. به عبارت دیگر نقاط گرهی (نمونه‌ای) زیر از تابع f موجود می‌باشد:

x_{i-2}	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	x_{i+2}
f_{i-2}	f_{i-1}	f_i	f_{i+1}	f_{i+2}

توجه شود که نقاط x_i هم فاصله هستند یعنی $(x_{i+1} - x_i = h \quad \forall i)$

پس می‌توان نوشت:

$x_{i-2} = x_i - 2h$, $x_{i-1} = x_i - h$, $x_{i+2} = x_i + 2h$,

$x_{i+1} = x_i + h$

در اینجا قصد داریم به کمک سری تیلور، مشتق تابع را در نقطه‌ی x_i تقریب بزنیم. یعنی به دنبال تقریبی از $f'(x_i)$ هستیم.

یادآوری: اگر f که تابعی با مشتق‌پذیری باشد، بسط تیلور آن حول نقطه‌ی x_0 به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \dots$$

مسئله: تقریب مشتق تابع f در نقطه‌ی x_i: $f'(x_i) = ?$

(۱) تقریب $f'(x_i)$ به کمک نقطه‌ی $(x_{i+1} = x_i + h)$

برای این کار بسط تیلور تابع $f(x_i + h)$ را حول نقطه‌ی x_i می‌نویسیم:

$$f(x_i+h) = f(x_i) + h f'(x_i) + h^2 \frac{f''(x_i)}{2!} + \dots$$

$$\to f(x_i+h) - f(x_i) - \frac{h^2 f''(x_i)}{2!} - \dots = h f'(x_i)$$

$$f'(x_i) = \underbrace{\frac{f(x_i+h)-f(x_i)}{h}}_{\text{تقریب}} - \underbrace{\frac{h f''(x_i)}{2}}_{\text{جملات خطای تقریب}} - \dots$$

$$f'(x_i) \simeq \frac{f(x_i+h)-f(x_i)}{h} = \frac{f_{i+1}-f_i}{h} \to$$

فرمول تفاضلی دو نقطه‌ای پیشرو

جملات خطا برای این فرمول تقریبی برابر است با:

$$\text{خطا} = -h\frac{f''(x_i)}{2!} - \frac{h^2 f'''(x_i)}{3!} - \dots$$

برای h های کوچک جمله‌ی اول خطا از باقی جملات بسیار بزرگ‌تر است.

✓ همواره خطا را با استفاده از جمله‌ی اول می‌سنجیم.

مرتبه‌ی خطا و دقت فرمول: مرتبه‌ی خطای یک فرمول مشتق‌گیری عددی برابر است با $\boxed{O(h^p)}$ اگر h^p در اولین جمله‌ی خطا ظاهر شود.

دقت یک فرمول برابر است با n اگر آن فرمول برای چندجمله‌ای های حداکثر از درجه‌ی n دقیق باشد. اگر چندجمله‌ای درجه یک باشد مقدار $\frac{f_{i+1}-f_i}{h}$ دقیق است.

پس برای فرمول دو نقطه‌ای پیشرو از آنجا که مرتبه‌ی مشتقات ظاهر شده‌ی مرحله‌ی خطا برابر ۲ و بالاتر است این جملات برای چندجمله‌ای های حداکثر از درجه‌ی ۱ برابر صفر هستند. ولذا فرمول دونقطه‌ای پیشرو برای این دسته از چندجمله‌ای ها دقیق است. به طور خلاصه: $O(h) \to$ مرتبه خطا، $n=1 \to$ دقت فرمول

به کمک تفاضلی $x_{i-1} = x_i - h$ یک تعریف برای $f'(x_i)$ به دست آوریم.

موضوع ______ تاریخ / /

$$f(x_i - h) = f(x_i) + f'(x_i)(-h) + \frac{f''(x_i)(-h)^2}{2!} + \dots$$

$$f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2 f''(x_i)}{2!}$$

مرتبه خطا $O(h)$ دقت $n=1$

$$f'(x_i) = \underbrace{\frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h}}_{\text{مشتق تقریبی}} + \underbrace{\frac{h f''(x_i)}{2!}}_{\text{جمله خطا}}$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h} = \frac{f_i - f_{i-1}}{h}$$

فرمول تفاضلی پسرو

③ به کمک $x_{i+1} = x_i + h$ و x_{i-1} یک تعریف برای $f'(x_i)$ به دست آوریم

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2 f''(x_i)}{2!} + \frac{h^3 f^{(3)}(x_i)}{3!} + \dots \quad ①$$

$$f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2 f''(x_i)}{2!} - \frac{h^3 f^{(3)}(x_i)}{3!} \quad ②$$

از ۱ و ۲ کم کنیم $1-2$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} - \frac{h^2 (f^{(3)}(x_i))}{3!}$$

$$\to f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$$

$\boxed{\text{مرتبه خطا } O(h^2) \quad \text{دقت } n=2}$ فرمول سه نقطه‌ای مرکزی

④ به کمک نقاط x_i و x_{i+1} و x_{i+2} یک تعریف برای $f'(x_i)$ به صورت زیر حاصل می‌شود

$$f'(x_i) = \frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2h}$$

سه نقطه‌ای پیشرو

مرتبه خطا $O(h^2)$ دقت فرمول سه $n=2$

۵) به کمک نقاط x_{i-2} و x_{i-1} و x_i یک تقریب برای $f'(x_i)$ به صورت زیر بدست می آید:

$$f'(x_i) \simeq \frac{f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i}{2h}$$

سه نقطه‌ای پسرو

مرتبه خطا $O(h^2)$ ؛ دقت فرمول $n=2$

۶) به کمک نقاط x_{i+2} و x_{i+1} و x_{i-1} و x_{i-2} یک تقریب برای $f'(x_i)$ به صورت زیر بدست می آید:

$$f'(x_i) \simeq \frac{f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}}{12h}$$

دقت فرمول $n=3$ ؛ مرتبه خطا

فرمول پنج نقطه‌ای مرکزی

با روش مشابه می توان برای مشتق های مرتبه بالاتر نیز تقریب های بدست آورد.

به عنوان مثال به کمک نقاط x_{i-1} و x_i و x_{i+1}:

$$f''(x_i) \simeq \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}$$

مرتبه خطا $O(h^2)$ ؛ دقت فرمول $n=3$

ex) داده های جدول زیر را در نظر بگیرید:

x_i	1.8	1.9	2	2.1	2.2
f_i	10.889365	12.703199	14.778112	17.148957	19.855030

$h=0.1$

الف) $f'(2)$ را به کمک فرمول سه نقطه‌ای پیشرو محاسبه کنید؟ $f'(2)$ به کمک سه نقطه‌ای پسرو؟

$$f'(x_i) \simeq \frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2h}$$

$$\Rightarrow f'(2) = \frac{-3f(2) + 4f(2.1) - f(2.2)}{2\times 0.1} = \boxed{22.032310}$$

$$f'(x_i) = \frac{f_{i-2} + 4f_{i-1} + 3f_i}{2h} = \frac{f(1.8) - 4f(1.9) + 3\ldots}{2\times 0.1}$$

$\boxed{22.05344465}$

۲) $f'(x)$ به کمک دو نقطه‌ی مرکزی f

$$f'(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} = \frac{f(2.1) - f(1.9)}{2\times 0.1} = 22.22879$$

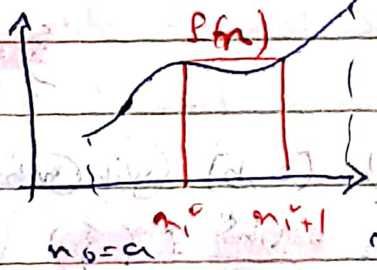
۳) $f'(x)$ به کمک ٤ نقطه‌ی مرکزی

انتگرال گیری عددی

در بسیاری از موارد یافتن یک تابع اولیه برای انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ امکان‌پذیر نمی‌باشد. بنابراین می‌توان مقدار f را در تعداد متناهی نقطه محاسبه کنیم. در این حالت از انتگرال‌گیری عددی استفاده می‌کنیم.

روش ذوزنقه

می‌دانیم چندجمله‌ای درون‌یاب پیشرو نیوتن در نقاط x_i و x_{i+1} به صورت زیر داده می‌شود:



$$P_1(x) = f_i + \theta \Delta f_i$$

که در آن $\theta = \dfrac{x - x_i}{h}$

حال با انتگرال‌گیری دو طرف خواهیم داشت:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \simeq \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(x)\,dx$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f_i + \theta\Delta f_i)\,dx$$

با تغییر متغیر $\theta = \dfrac{x - x_i}{h}$ خواهیم داشت:

$$d\theta = \frac{1}{h}dx \rightarrow dx = h\,d\theta$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f_i + \theta \Delta f_i)\,dx = \int_0^1 (f_i + \theta \Delta f_i)\,h\,d\theta =$$

$$h\left(\theta f_i + \frac{\theta^2}{2}\Delta f_i\right)\Big|_0^1 =$$

$$h\left(f_i + \frac{1}{2}\Delta f_i\right) = h\left(f_i + \frac{1}{2}(f_{i+1} - f_i)\right) =$$

$$h\left(\left(\frac{1}{2} f_{i+1}\right) - \frac{1}{2} f_i\right)$$

$$\frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})$$

فرمول ذوزنقه‌ای ساده

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx =$$ قاعده‌ی ذوزنقه‌ای مرکب

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}) =$$

$$T(h) = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n\right)$$ فرمول قاعده‌ی ذوزنقه‌ای مرکب

خطای قاعده‌ی ذوزنقه‌ها

اگر $f \in C^2[x_i, x_{i+1}]$ باشد آنگاه

$$E_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}) = -\frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

$\xi \in [x_i, x_{i+1}]$

و خطای بازه‌ی $[a,b]$ برابر است با

$$E_T(h) = \int_a^b f(x)\,dx - T(h) = -n\frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

تعداد زیربازه‌ها

با توجه به اینکه $n = \frac{b-a}{h}$ داریم

$$E_T(h) = \frac{(b-a)\,h^2}{12} f''(\xi), \quad \xi \in [a,b]$$

بنابراین با توجه به اینکه $f''(x)$ برای چندجمله‌ای‌های حداکثر درجه‌ی یک برابر صفر است، فرمول ذوزنقه‌ای برای این چندجمله‌ای‌ها دقیق است و دقت فرمول برابر است با

$\boxed{n=1}$

اگر M_2 یک کران بالا برای تابع $|f''(x)|$ باشد آنگاه

$$|f''(x)| \leq M_2 \quad \forall x \in [a,b]$$

$$E_T(h) \leq \frac{(b-a)h^2}{12} M_2$$

ex) به کمک قاعده‌ی ذوزنقه‌ای تقریبی از $\int_0^1 x\sin(x)$ بدست آورید که خطای آن حداکثر 10^{-2} باشد.

$$f'(x) = \sin x + x\cos x$$

$$f''(x) = 2\cos x - x\sin x$$

$$|f''(x)| \leq 2\underbrace{|\cos x|}_{\leq 1} + \underbrace{|x|}_{\leq 1}\underbrace{|\sin x|}_{\leq 1} \to \boxed{|f''(x)| \leq 3}$$

$$E_T(h) \leq \frac{(1-0)\times h^2}{12}\times 3 = \frac{h^2}{4} \leq 10^{-2} \to \boxed{h \leq 0.2}$$

$$x_i = x_0 + ih = \frac{i}{5} \qquad n = \frac{b-a}{h} = \frac{1}{0.2} = 5$$

با انتخاب $h = 0.2$ داریم

$$T(0.2) = \frac{0.2}{2}\left(f_0 + 2\sum_{i=1}^{4} f_i + f(5)\right) = 0.3058$$

قاعده‌ی سیمپسون: چندجمله‌ای درون‌یاب درجه دوم تابع f را روی نقاط x_i، x_{i+1} و x_{i+2} (این نقاط هم فاصله هستند) بدست می‌آوریم.

$$P_2(x) = f_i + \theta\Delta f_i + \frac{\theta(\theta-1)}{2}\Delta^2 f_i$$

$$\boxed{\theta = \frac{x - x_i}{h}}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \simeq \int_{x_i}^{x_{i+2}} P_2(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_{i+2}} \left(f_i + \theta\Delta f_i + \frac{\theta(\theta-1)}{2}\Delta^2 f_i\right) dx$$

با تغییر متغیر $\theta = \frac{x - x_i}{h}$ خواهیم داشت

$$\int_0^2 \left(f_i + \theta\Delta f_i + \frac{\theta(\theta-1)}{2}\Delta^2 f_i\right) h\,d\theta =$$

$$h\left(\theta f_i + \frac{\theta^2}{2}\Delta f_i + \left(\frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^2}{4}\right)\Delta^2 f_i\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$h\left(2f_i + 2\Delta f_i + \frac{1}{3}\Delta^2 f_i\right) = \frac{h}{3}\left(f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}\right)$$

قاعده‌ی سیمپسون ساده

یادآوری می‌شود که $\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i)$

$$\Delta(f_{i+1} - f_i) = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$$

قاعده‌ی سیمپسون مرکب

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x) + \int_{x_2}^{x_4} (\ ) + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx \simeq$$

$$\frac{h}{3}\times(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{h}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4) + \dots +$$

$$\frac{h}{3}\times(f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n) =$$

$$\frac{h}{3}(f_0 + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{n-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{n-2}) + f_n) = \boxed{S(h)}$$

قاعده‌ی سیمپسون مرکب

خطای قاعده‌ی سیمپسون: اگر $f \in C^4[x_i, x_{i+2}]$ باشد آنگاه

$$E_i = \int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx - \frac{h}{3}(f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}) =$$

$$\frac{-h^5}{90} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (x_i, x_{i+2})$$

و خطای این قاعده روی بازه‌ی $[a,b]$ برابر است با

$$E_s(h) = \int_a^b f(x)dx - S(h) = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [a,b]$$

بنابراین اگر M_4 یک کران بالا برای $f^{(4)}(x)$ باشد یعنی

$$|f^{(4)}(x)| \leq M_4, \quad \forall x \in [a,b]$$

آنگاه

$$|E_s(h)| \leq \frac{(b-a)h^4}{180} M_4$$

یعنی با توجه به اینکه $f^{(4)}(x)$ برای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه‌ی ۳ برابر با صفر است، دقت فرمول برابر است با $\boxed{n=3}$

در قاعده‌ی سیمپسون ۱/۳ بازه‌ی $[0,2]$ را به چند قسمت تقسیم کنیم تا مقدار تقریبی $\int_0^2 e^{-x^2}$ با خطای کمتر از 10^{-4} محاسبه گردد؟

$$f(x)=e^{-x^2} \longrightarrow f'(x)=-2x\,e^{-x^2} \longrightarrow f''(x)=(-2+4x^2)\,e^{-x^2}$$

$$\longrightarrow f^{(3)}(x)=(12x-8x^3)\,e^{-x^2} \longrightarrow$$

$$f^{(4)}(x)=(12-48x^2+16x^4)\,e^{-x^2}$$

برای محاسبه‌ی M_4 که max تابع $f^{(4)}(x)$ را بدست آوریم. برای این کار ابتدا نقاط بحرانی تابع $f^{(4)}$ را روی بازه‌ی $(0,2)$ بدست آوریم.

$$f^{(5)}(x)=(-120x+160x^3-32x^5)\,e^{-x^2}=0 \longrightarrow$$

$$x=\pm 1.043 \quad , \quad x=0$$

$$x=\pm 0.495$$

با مقایسه‌ی مقدار تابع در نقاط بحرانی و نقاط انتهایی بازه خواهیم داشت:

$$M_4=\max\{f^{(4)}(0),\ f^{(4)}(0.495),\ f^{(4)}(1.043),\ f^{(4)}(2)\}=\boxed{12}$$

$$E_S(h)=\frac{(b-a)}{180}\times h^4\times M_4=\frac{2h^4}{15}\leq 10^{-4} \longrightarrow h^4\leq\frac{15}{2}\times 10^{-4}$$

در نتیجه $h\leq 0.165$ که نتیجه می‌دهد $\boxed{n\geq 12.12}$ از آنجا که n باید برای سیمپسون زوج باشد، پس $\boxed{n\geq 14}$

$$n=\frac{b-a}{h}$$

قاعده‌ی نقاط میانی: در قاعده‌ی ذوزنقه و سیمپسون نیاز داریم که مقدار تابع f را در نقاط ابتدایی و انتهایی بازه انتگرال‌گیری محاسبه کنیم. به عبارت دیگر نیاز داریم مقادیر $f(b), f(a)$ را محاسبه کنیم. این کار برای محاسبه‌ی انتگرال‌هایی مانند $\int_0^1 \ln x\,dx$ ، $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ امکان‌پذیر نیست.

برای محاسبه‌ی این انتگرال‌ها از قاعده‌ی نقطه‌ی میانی استفاده می‌کنیم

فرمول بندی این قاعده به صورت زیر است:

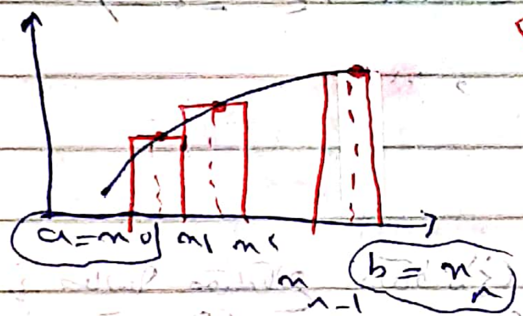
$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx h\, f\left(x_i+\frac{h}{2}\right) \longleftrightarrow h=x_{i+1}-x_i$$

بنابراین قاعده‌ی نقطه‌ی میانی مرکب به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx =$$

$$h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i+\frac{h}{2}\right) = M(h)$$

قاعده‌ی نقطه‌ی میانی مرکب



خطای قاعده‌ی نقطه میانی:

اگر $f\in C^2[x_i,x_{i+1}]$ آنگاه:

$$E_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - h\, f\left(x_i+\frac{h}{2}\right) = \frac{h^3}{24} f''(\xi),\quad \xi\in[x_i,x_{i+1}]$$

و خطای قاعده‌ی میانی مرکب به صورت:

$$E_{M}(h) = \int_a^b f(x)\,dx - M(h) = \frac{(b-a)h^2}{24} f''(\xi),\quad \xi\in[a,b]$$

بنابراین اگر $f''(x)$ روی بازه‌ی $[a,b]$ کران دار باشد یعنی $|f''(x)|\le m_2$ برای $x\in[a,b]$ آنگاه:

$$|E_M(h)| \le \frac{(b-a)m_2 h^2}{24}$$

مقدار تقریبی انتگرال $\int_0^1 \ln x$ را با کمک قاعده نقطه میانی با $n=4$ محاسبه کنید.

$n=4 \to \frac{b-a}{h}=4 \to \boxed{h=0.25}$ در بازه‌ی $[0,1]$

$0,\ \frac{1}{8},\ \frac{2}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{4}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{6}{8},\ \frac{7}{8},\ \frac{8}{8}$

$a=0$, $b=1$

$$\int_0^1 \ln x\,dx \approx 0.25\left(\ln\frac{1}{8}+\ln\frac{3}{8}+\ln\frac{5}{8}+\ln\frac{7}{8}\right) = \boxed{-0.915}$$

از طرفی مقدار واقعی انتگرال برابر است با:

$$\int_0^1 \ln x = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \ln x = \lim_{a\to 0^+}\left[x\ln x - x\right]\Big|_a^1$$

$$\lim_{a\to 0^+}\left[-1-(a\ln a - a)\right] = \boxed{-1}$$

قاعده‌ی نیوتن کاتس: با توجه به قاعده‌های انتگرال‌گیری قبلی، مشاهده می‌شود که فرم کلی یک قاعده‌ی انتگرال‌گیری به فرم زیر است:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) + E$$

که در آن، نقاط گره‌ای $x_0, x_1, \ldots, x_n$ از قبل مشخص شده‌اند و w_iها موسوم به وزن‌های انتگرال‌گیری هستند و همچنین فاصله‌ی بین نقاط x_i و x_{i+1} برابر با مقدار ثابت h است.

تذکر: همواره با استفاده از قاعده‌ی نیوتن کاتس و $n+1$ نقطه‌ی گره‌ای از قبل تعیین شده $x_0, x_1, \ldots, x_n$ می‌توان یک فرمول انتگرال‌گیری تقریبی با درجه‌ی دقت n طراحی کرد.

مثال: یک قاعده‌ی انتگرال‌گیری به فرم نیوتن کاتس زیر را در نظر بگیرید:

$$\int_0^{3h} f(x)\,dx \simeq w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3)$$

که در آن: $x_0=0,\ x_1=h,\ x_2=2h,\ x_3=3h$

ضرایب w_i را به گونه‌ای بدست آورید که درجه دقت فرمول برابر با ۳ باشد. یعنی $n=3$

قاعده: باید برای چندجمله‌ای‌های $f(x)=1$، $f(x)=x$، $f(x)=x^2$ و $f(x)=x^3$ دقیق باشد یعنی دارای خطای صفر باشد.

$f(x)=1$ ، $\int_0^{3h} 1\,dx = w_0\times 1 + w_1 + w_2 + w_3 = \boxed{3h}$

$f(x)=x$ ، $\int_0^{3h} x\,dx = w_0\times 0 + w_1\times \cancel{f(x_1)}^{f(h)} + w_2\times \cancel{f(x_2)}_{f(2h)} + w_3\times \cancel{f(x_3)}_{f(3h)} =$

$\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{3h} = \frac{9h^2}{2}$

$0 + w_1\times h + w_2\times 2h + w_3\times 3h = \frac{9h^2}{2}$

$f(x)=x^2$, $\int_0^{3h} x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^{3h} = \frac{27h^3}{3} = 9h^3$

$$= w_0 \times \underbrace{f(x_0)}_{0} + w_1 \underbrace{f(x_1)}_{h^2} + w_2 \times \underbrace{f(x_2)}_{4h^2} + w_3 \times \underbrace{f(x_3)}_{9h^2} = 9h^3$$

$f(x)=x^3$, $\int_0^{3h} x^3 dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_0^{3h} = \boxed{\frac{81}{4}h^4}$

$$= w_0 \times \underbrace{f(x_0)}_{0} + w_1 \underbrace{f(x_1)}_{h^3} + w_2 \underbrace{f(x_2)}_{(2h)^3} + w_3 \underbrace{f(x_3)}_{(3h)^3} = \frac{81}{4}h^4$$

اگر دستگاه بالا را حل کنیم خواهیم داشت:

$w_0 = \frac{3h}{8}$, $w_1 = \frac{9h}{8}$, $w_2 = \frac{9h}{8}$, $w_3 = \frac{3h}{8}$

پس $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\left(f(0)+3f(h)+3f(2h)+f(3h)\right)$

به قاعده‌ی ۴ نقطه‌ای $\frac{3}{8}$ سیمپسون معروف است.

قاعده‌ی انتگرال‌گیری گاوس (لژاندر - گاوس)

مشاهده کردیم که زمانی که $n+1$ نقطه‌ی گره $x_0, x_1, \ldots, x_n$ و وزن‌ها از قبل دارای مکان مشخصی باشند، با استفاده از قاعده‌ی نیوتن کاتس می‌توان انتگرال را با دقت n طراحی کرد. حال سوال که مطرح است آن است که به کمک $n+1$ نقطه‌ی گره که مکان آن از قبل مشخص نیست، چه قاعده‌ی انتگرال‌گیری با حداکثر از چه درجه‌ای می‌توان طراحی کرد؟

قبل از پاسخ به سوال نیاز داریم با چندجمله‌ای‌های لژاندر آشنا شویم.

چندجمله‌ای‌های لژاندر: یک چندجمله‌ای لژاندر درجه n، دارای n ریشه‌ی متمایز است که این ریشه‌ها همگی در بازه‌ی $[-1,1]$ قرار دارند. همچنین ریشه‌های این چندجمله‌ای‌ها متقارن هستند یعنی اگر x_i یک ریشه باشد $\boxed{-x_i}$ هم یک ریشه است.

چندجمله‌ای های لژاندر درجه‌ی ۱ تا ۳ و ریشه‌های آنها در جدول زیر معرفی می‌کنیم .

چندجمله‌ای های لژاندر	ریشه‌ها
$P_0(x) = 1$	—
$P_1(x) = x$	$x_0 = 0$
$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$	$x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$	$x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$

چندجمله‌ای های لژاندر درجه‌ی بالاتر را می‌توان از فرمول رابطه‌ی بازگشتی زیر محاسبه کرد :

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}\, x \times P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x)$$

$n = 1, 2, \dots$

* فرمولی برای محاسبه‌ی ریشه‌ها نداریم

فرمول‌های کوادراتور گاوسی - لژاندر : فرض کنید برای محاسبه‌ی انتگرال $\int_{-1}^{+1} f(x)dx$ می‌خواهیم از فرمول‌های $n+1$ نقطه‌ای زیر استفاده کنیم :

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \dots + w_n f(x_n)$$

اگر نقاط گره‌ای $x_0, \dots, x_n$ را برابر با ریشه‌های چندجمله‌ای لژاندر درجه‌ی $n+1$ در نظر بگیریم که آن را نشان می‌دهیم ، وزن‌ها (w_i) به صورت زیر حاصل می‌شوند :

$$w_i = \frac{2(1-x_i^2)}{n^2 (P_{n-1}(x_i))^2} \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n$$

و همچنین خطای انتگرال‌گیری برابر است با :

$$E_n = \frac{2^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^3} f^{(2n+1)}(\xi) \quad , \quad \xi \in [-1, 1]$$

پس با توجه به جمله‌ی $f^{(2n+1)}(\xi)$ در جمله‌ی خطا ، درجه‌ی دقت فرمول برابر است با $2n$ که دو برابر درجه‌ی دقت فرمول‌های نیوتن کاتس است .

ex | کوادراتور ۳ نقطه‌ای گاوس لژاندر را به دست آورید ؟

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

در این جا چون تعداد نقاط گره‌ای برابر است با $n=3$ بیان چندجمله‌ای‌های لژاندر درجه ۳ را محاسبه کنیم.

$$P_0(x)=1 \rightarrow P_2(x) = \frac{2n+1}{n+1}\, x P_1(x) - \frac{n}{n+1} P_0(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_1(x) = x$$

به همین ترتیب $P_3(x)$ به صورت زیر حاصل می‌شود

$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

ریشه‌های $P_3(x)$ عبارت‌اند از

$$x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = +\sqrt{\frac{3}{5}}$$

برای محاسبه w ها از ... استفاده می‌کنیم که ضریب‌های متناظر با ریشه‌های متقارن باید یکسان باشند

$$w_2 = w_0 = \frac{2(1-x_0^2)}{9(P_2(x_0))^2} = \boxed{\frac{5}{9}}$$

$$w_1 = \frac{2(1-x_1^2)}{9(P_2(x_1))^2} = \boxed{\frac{8}{9}}$$

$$E_3 = \frac{2^7 \times (3!)^4}{7 \times (6!)^3} \times f^{(6)}(\xi), \quad \xi \in [-1, 1]$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{9}\left(5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f(0) + 5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right) + E_3$$

فرمول به دست آمده از روش گاوس لژاندر را می‌توان از طریق تغییر متغیر زیر به بازه دلخواه $[a,b]$ تعمیم داد

$$x = \frac{1}{2}\left[(b-a)t + (b+a)\right] \rightarrow dx = \frac{1}{2}(b-a)\,dt$$

$$\rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{1}{2}\left[(b-a)t + (b+a)\right]\right) dt$$

فصل 5

دستگاه‌های معادلات خطی

دستگاه خطی n معادله و n مجهولی زیر را در نظر بگیرید:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

این دستگاه را می‌توان به فرم ماتریسی زیر نوشت:

$$AX=b \rightarrow A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}, \quad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix}$$

اگر ماتریس A وارون پذیر باشد ← دستگاه $AX=b$ دارای جواب است. اما محاسبه‌ی A^{-1} پر هزینه است برای حل دستگاه $AX=b$ نیاز داریم از روش‌های دیگر استفاده کنیم.

$x^* = A^{-1}b$

۱- روش‌های مستقیم: روش حذف گاوسی — قبل از بیان روش، دو تعریف نیاز داریم

۱) ماتریس $U=(u_{ij})$ را بالا مثلثی می‌گوییم اگر $\forall i>j : u_{ij}=0$

درایه‌های زیر قطر اصلی صفر باشد

۲) ماتریس $L=(l_{ij})$ را پایین مثلثی می‌گوییم اگر $\forall i<j : l_{ij}=0$

بالای قطر اصلی صفر باشد

اعمال سطری مقدماتی

① ضرب یک سطر در یک عدد مخالف صفر $(R_i \leftarrow m_i R_i)$ / E_1

② افزودن مضربی از یک سطر به سطر دیگر $(R_j \leftarrow \lambda_i R_i + R_j)$ E_2

③ جابجا کردن دو سطر $(R_i \leftrightarrow R_j)$ E_3

ماتریس افزوده

متناظر با دستگاه $AX=b$ ، ماتریس افزوده را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$S=[A|b]$$

اگر اعمال سطری مقدماتی را روی ماتریس افزوده $S=[A|b]$ اعمال کنیم، جواب دستگاه $AX=b$ تغییر نمی کند.

روش حذفی گاوسی: در این روش با استفاده از انواع سطری مقدماتی، ماتریس A در ماتریس افزوده $[A|b]$ به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل می کنیم. سپس با استفاده از جایگذاری پسرو، جواب دستگاه $AX=b$ را می یابیم.

ex) دستگاه زیر را به روش حذفی گاوسی حل کنید:

$$x_1+x_2-x_3=1$$
$$2x_1+x_2+x_3=0$$
$$-x_1-2x_2+3x_3=2$$

$$A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&1&1\\-1&-2&3\end{bmatrix} \quad b=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} \quad x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

① تشکیل ماتریس افزوده

② تبدیل به ماتریس بالا مثلثی

$$S=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\2&1&1&0\\-1&-2&3&2\end{array}\right] \xrightarrow[R_3\leftarrow R_1+R_3]{R_2\leftarrow -2R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&-1&3&-2\\0&-1&2&3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3\leftarrow -R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&-1&3&-2\\0&0&2&5\end{array}\right]$$

ماتریس بالا مثلثی

$\boxed{Ux = b'}$ حال برای یافتن x از جایگذاری پسرو خواهیم داشت که

موضوع ______ تاریخ / /

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}}_{b'} \longrightarrow -x_3 = -5 \rightarrow \boxed{x_3 = -5}$$

$$-x_2 + 3x_3 = -2 \longrightarrow x_2 = -(-2 - \cancel{3x_3}) \qquad x_3 = -5 \qquad 3x_3 + 2 = \boxed{-13}$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1 \longrightarrow x_1 = 1 - x_2 + x_3 = 1 + 13 - 5 = \boxed{9}$$

* جایگذاری پسرو یعنی از آخر معادله ها شروع کنیم چون درایه ها صفر داریم

محورگیری جزئی ماتریس A را در نظر بگیرید فرض کنید خواهیم ماتریس A را بالا مثلثی کنیم

$$A = \begin{bmatrix} 0/00001 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0/00001 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow -\frac{2}{0/00001} R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 0/00001 & 3 \\ 0 & -599999 \end{bmatrix} = \boxed{U}$$

حال فرض کنید کل عملیات محاسبات E_2 را می خواهیم در یک ماشین با دقت ۳ رقم انجام دهیم

$$-599999 = -0/599999 \times 10^6 \longrightarrow -0/600 \times 10^6 \rightarrow$$

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} 0/0001 & 3 \\ 0 & -600000 \end{bmatrix}$$

خطای تولید شده در ماتریس $\tilde{U}$ که توسط ماشین بدست آمد به جواب x منتقل می شود ناشی از کوچک بودن a_{11}

ضمنا مشکل آن است که عنصر محوری 0/00001 که کوچک بوده عنصر بزرگ بوده مضرب

که باعث شود مضرب $\lambda = \frac{2}{0/00001}$ عدد بزرگ شود که در ماشین قابل ذخیره نیست

★ برای رفع این مشکل با استفاده از عمل سطری مقدماتی الف ج عنصر محوری را با یکی از عناصر زیر عنصر محوری که دارای بزرگترین مقدار ...

جابجایی دو سطر

به کمک قدر مطلق الف ج جابجایی می کنیم.

زمانی که خیلی کوچک یا صفر باشد جابجایی را انجام می دهیم.

ex دستگاه زیر را به کمک روش حذف گاوسی با محورگیری جزئی حل کنید.

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 8 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & 12 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[\max\{3,5,6\}=6]{\text{محورگیری}} \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 1 & 12 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 8 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

switch

$$R_2 \leftarrow -\frac{5}{6}R_1 + R_2$$

$$R_3 \leftarrow -\frac{3}{6}R_1 + R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 1 & 12 & 5 \\ 0 & \frac{7}{6} & -10 & -\frac{7}{6} \\ 0 & \frac{15}{2} & 5 & -\frac{3}{2} \end{array}\right]$$

محورگیری

$$\max\left\{\frac{7}{6}, \frac{15}{2}\right\} = \frac{15}{2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 1 & 12 & 5 \\ 0 & \frac{15}{2} & 5 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{7}{6} & -10 & -\frac{7}{6} \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \leftarrow -\frac{\frac{7}{6}}{\frac{15}{2}} R_2 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 1 & 12 & 5 \\ 0 & \frac{15}{2} & 5 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{83}{9} & -\frac{21}{10} \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\qquad}_{U} \qquad b'$$

$$-\frac{7}{6} \times \frac{2}{15} \times \frac{15}{2} + \frac{7}{6} = 0$$

$$-\frac{7}{6} \times \frac{2}{15} \times 5 - 10 = -\frac{7}{9} - 10 =$$

با حل دستگاه $Ux = b'$ به روش پسرو خواهیم داشت:

$$-\frac{83}{9}x_3 = -\frac{21}{10} \rightarrow \boxed{x_3 = 0.228}$$

$$\frac{15}{2}x_2 - 5x_3 = -\frac{3}{2} \rightarrow \boxed{x_2 = 0.436}$$

$$6x_1 + x_2 + 12x_3 = 5 \rightarrow \boxed{x_1 = 0.304}$$

$$-\frac{7}{6} \times \frac{2}{15} \times -\frac{3}{2} - \frac{7}{6} = \frac{7}{30} - \frac{7}{6} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$$

تجزیه‌ی مثلثی: ماتریس مربعی A مفروض است. می‌خواهیم این ماتریس را به صورت حاصل ضرب یک ماتریس پایین مثلثی و بالا مثلثی بنویسیم یعنی $\boxed{A = LU}$

فرض کنیم این تجزیه برای ماتریس A موجود باشد. به علاوه فرض می‌کنیم که عناصر روی قطر اصلی ماتریس L همگی برابر ۱ هستند.

با توجه به این مقدمات ماتریس A را تنها به وسیله‌ی عمل سطری مقدماتی E_2 به یک ماتریس بالا مثلثی کاهش می‌دهیم. آنگاه برای به دست آوردن ماتریس L کافی است قرینه‌ی مضرب‌های استفاده شده در اعمال E_2 را در درایه‌های متناظر در ماتریس L قرار دهیم.

* دقت: U ماتریس همان است که از طریق روش حذفی گاوس حاصل می‌شود.

ex تجزیه‌ی مثلثی A را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow -2R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

~~$R_3 \leftarrow -3R_1 + R_3$~~

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow -5R_1 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -9 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow -9R_2 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -27 \end{bmatrix} = U$$

$$A = LU$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -27 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A = LU}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس A:

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L)\cdot\det(U) = 1 \times 27 = \boxed{27}$$

* اگر دترمینان یک ماتریس مخالف صفر $\neq 0$ باشد، ماتریس معکوس پذیر است.

دترمینان ماتریس A = $|A|$

محاسبه‌ی دترمینان لازمه اول ماتریس مربعی باشه. (تعداد سطر = تعداد ستون)

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad |A| = ad - bc$$

ضرب درایه‌های قطر اصلی − ضرب درایه‌های قطر فرعی

محاسبه دترمینان ماتریس ۳×۳

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$|A| = a(ei - hf) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

$$|A| = a\cdot\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\cdot\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\cdot\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} ۶ & ۱ & ۱ \\ ۴ & -۲ & ۵ \\ ۲ & ۸ & ۷ \end{bmatrix} \qquad |C| = ۶\times(\underbrace{-۲\times۷ - ۸\times۵}_{-۵۴}) - ۱\times(\underbrace{۴\times۷ - ۲\times۵}_{۱۸}) + ۱\times(\underbrace{۴\times۸ - ۲\times -۲}_{۳۶})$$

$$= ۶\times(-۵۴) - ۱۸ + ۳۶ = \boxed{-۳۰۶}$$

$\boxed{\text{دترمینان ۴×۴}}$

$$B=\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} \qquad |B| =$$

$$a\times\begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - b\times\begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} + c\times\begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} - d\times\begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix}$$

الگو: $\boxed{+ \; - \; + \; -}$

$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ $\boxed{A=LU}$ از چه جهت گفتیم مثلثی ؟

ماتریس بالا مثلثی

ماتریس پائین مثلثی با درایه‌های روی قطر اصلی برابر با یک

سوال ۲: آیا همه‌ی ماتریس‌های مربعی تجزیه LU را دارند؟ خیر

چه دسته از ماتریس ← وارون پذیرند ؟

تعریف: زیر ماتریس‌های پیشرو

زیر ماتریس پیشرو مرتبه K ماتریس A برابر است با درایه‌هایی که در K سطر اول و K ستون اول از ماتریس A قرار دارند.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\qquad A^{(1)}=[1]\qquad A^{(2)}=\begin{bmatrix}1&2\\4&5\end{bmatrix}\qquad \underbrace{A^{(3)}=A}_{\text{برابر با خودش}}$$

قضیه: فرض کنید ماتریس A وارون پذیر باشد آنگاه ماتریس A تجزیه‌ی LU دارد اگر و تنها اگر تمام زیر ماتریس‌های پیشرو آن وارون پذیر باشند.

ex) آیا ماتریس $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\2&1&3\\4&-1&1\end{bmatrix}$ تجزیه‌ی LU دارد؟

$\det \neq 0$ وارون پذیر است

باید زیر ماتریس‌های پیشرو A را بررسی کنیم

$A^{(1)}=[2]$ وارون پذیر

$$A^{(2)}=\begin{bmatrix}2&1\\2&1\end{bmatrix}\qquad \det = 2-2=0$$

$\det(A^{(2)})=0 \rightarrow$ ماتریس $(A)^{(2)}$ وارون پذیر نیست بنابر قضیه بالا ← ماتریس A تجزیه‌ی LU ندارد

این راه خوبی نیست چون باید تعداد ماتریس‌های زیادی را بررسی کنیم ← از قضیه‌ی زیر استفاده می‌شود.

قضیه: ماتریس $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ دارای تجزیه‌ی LU است اگر در طول فرایند تجزیه این ماتریس به یک عنصر محوری صفر برخورد نشود.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 0 \\ \boxed{2} & \boxed{} & 1 \end{bmatrix}$$

$\frac{4}{2}$، عنصر محوری اول

* ماتریس L هم از روش حذفی گاوسی بدست میآید *

$R_3 \leftarrow -2R_1 + R_3$

$R_2 \leftarrow -R_1 + R_2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & +2 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

عنصر محوری = صفر الف

نباید عنصر محوری صفر بر خورد کنیم ← ماتریس A تجزیه‌ی LU را ندارد.

چون ۱- × سطر اول را با سطر دوم جمع کردیم ← قرینه‌ی ضریبی که استفاده کردیم را توی ماتریس L می‌گذاریم ← $\boxed{1}$ ← ماتریس L حاصل فقط به A بستگی دارد

مرحله بعد هم عنصر ۴ باید صفر شود ← ۲- × سطر اول + سطر سوم = سطر سوم

پس $\boxed{+2}$ را توی ماتریس L می‌گذاریم.

ex) آیا ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

دارای تجزیه‌ی LU است؟

حل دستگاه به کمک تجزیه مثلثی

روش‌های مستقیم: با تعداد متناهی مرحله به جواب می‌رسند

روش حذفی گاوسی

به تجزیه مثلثی

چرا؟ چون اعمال سطری مقدماتی روی جواب دستگاه تاثیری ندارد.

روش‌های حل دستگاه

روش‌های غیر مستقیم: یک دنباله نامتناهی از جواب‌ها داریم.

روش حذفی گاوسی: $\det(A) \neq 0$ ، $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ، $Ax = b$

① ماتریس افزوده دستگاه را تشکیل می‌دهیم

یعنی به ماتریس ضرایب A ستون b را الحاق می‌کنیم $[A \mid b]$

الحاقی

جواب هر دوتای این دستگاه‌ها برابر است. می‌شود

② به کمک اعمال سطری مقدماتی، ماتریس ضرایب (A) را به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل می‌کنیم و اعمال را هم روی ستون الحاق شده b انجام می‌دهیم ← A به U و b به $\tilde{b}$ تبدیل

جواب‌های دستگاه‌های $Ax = b$ و $Ux = \tilde{b}$ یکسان است. $[U \mid \tilde{b}]$

مرحله ۳

$Ax=b$ | $Ux=b$ | $\Rightarrow x^*$ تاریخ fixed

در حل دستگاه $\boxed{Ax=b}$ که ماتریس ضرایب A ثابت است و فقط بردار سمت راست b تغییر کند یعنی b ها مدام تغییر کند برای رفع این مشکل از تجزیه‌ی مثلثی ماتریس A استفاده می‌شود.

از جایگذاری پسرو ← ماتریس U بالا مثلثی است
می‌توانیم استفاده کنیم تا x^* را بدست بیاوریم

فرض کنیم ماتریس A دارای تجزیه مثلثی $A=LU$ باشد آنگاه

$$Ax=b \Rightarrow \boxed{LUx=b} \xrightarrow{\times L^{-1}} Ux=L^{-1}b \xrightarrow{\times U^{-1}}$$

ضرب طرفین در L^{-1} — ضرب طرفین در U^{-1}

$$\boxed{x=U^{-1}L^{-1}b}$$

ماتریس‌های L و U وارون پذیر هستند

$\det(U)\neq 0$
$\det(L)\neq 0$

برای محاسبه بردار جواب x دو گام زیر را انجام می‌دهیم:

گام اول: محاسبه $y=L^{-1}b \xrightarrow{\times L} Ly=b$

دستگاه فوق که ماتریس ضرایب پایین مثلثی است با یک جایگذاری پیشرو y بدست می‌آید.

$x=U^{-1}y \xrightarrow{\times U} \boxed{Ux=y}$ ماتریس بالا مثلثی

با یک جایگذاری پسرو بردار x بدست می‌آید.

پس از تجزیه‌ی LU ماتریس A برای حل دستگاه $\boxed{Ax=b}$ دو گام زیر را انجام می‌دهیم:

گام اول: حل دستگاه $Ly=b$ با جایگذاری پیشرو

گام دوم: حل دستگاه $Ux=y$ با جایگذاری پسرو

$\boxed{ex}$ دستگاه

$$\begin{bmatrix}1&2&2\\4&4&2\\4&6&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}}_{b}$$

را با یک تجزیه مثلثی حل کنید.

حل:

$$A=LU \qquad A=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&0\\4&\frac{1}{-2}&1\end{bmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{bmatrix}1&2&2\\0&-4&-6\\0&0&-1\end{bmatrix}}_{U}$$

گام اول: حل دستگاه $\boxed{Ly=b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ماتریس پایین مثلثی

با جایگذاری پیشرو بردار y بدست میاریم → از سطر اول شروع کنیم → y_1 را بدست میاریم

و سپس برای سطر دوم y_2 را بدست میاریم ...

از سطر اول: $\boxed{y_1=1}$ سطر دوم → $\cancel{4y_1}+y_2=2 \to \boxed{y_2=-2}$

سطر سوم → $4y_1+\frac{1}{2}y_2+y_3=2$, $4+\frac{1}{2}\times -2+y_3=2$

$\boxed{y_3=-1} \leftarrow -1$

$$\to y=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

گام دوم: حل دستگاه $Ux=y$ (یافتن بردار x)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

از جای گذاری پس رو استفاده می کنیم

از سطر سوم: $-x_3=-1 \to \boxed{x_3=1}$

سطر دوم: $-4x_2-6x_3=-2 \to -4x_2-6=-2 \to$ $\boxed{x_2=-1}$

سطر اول: $x_1+2x_2+2x_3=1$ $\quad x_1=1-2\times-1-2\times1=1+2-2=1$

$\boxed{x_1=1}$

$$x^*=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$ جواب دستگاه $Ax=b$

بردار

این روش‌ها مستقیم هستند یعنی در تعداد متناهی گام به جواب می‌رسیم

موضوع .... تاریخ / /

① روش ژاکوبی ② روش گاوس سایدل

روش ژاکوبی ← فرض کنید می‌خواهیم دستگاه

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

را به روش ژاکوبی حل کنیم.

گام اول ← ابتدا فرم گسترده‌ی دستگاه معادلات را می‌نویسیم ←

$$5x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$$

$$-x_1 + 4x_2 + x_3 = -2$$

$$x_1 + 6x_2 - 7x_3 = 5$$

گام دوم ← به ازای هر $1 \le k \le n$ ، معادله‌ی k ام را برای x_k حل می‌کنیم.

معادله‌ی اول را برای x_1 حل می‌کنیم $\longrightarrow$ $x_1^{(k+1)} = \frac{1}{5}\left(1 + x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}\right)$

دومی را برای x_2 حل می‌کنیم $\longrightarrow$ $x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(-2 + x_1^{(k)} - x_3^{(k)}\right)$

سومی را x_3 $\longrightarrow$ $x_3^{(k+1)} = \frac{-1}{7}\left(5 - x_1^{(k)} - 6x_2^{(k)}\right)$

رابطه‌های روش ژاکوبی

گام سوم ← اندیس گذاری

به وسیله‌ی اندیس گذاری زیر به صورت گذاری بیانگر دنباله‌ای از تکرارها ایجاد می‌شود.

جملاتی که سمت چپ قرار دارند را با $(k+1)$ نام گذاری می‌کنیم.

(k) سمت راست

حال با استفاده از حدس اولیه $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ دنباله‌ی اول از دنباله‌ی ژاکوبی را دنبال می‌کنیم.

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} \rightarrow x_1^{(1)} = \frac{1}{5}\left(1 + x_2^{(0)} - 2x_3^{(0)}\right) = \frac{1}{5}(1 + 0 + 0) = \boxed{\frac{1}{5}}$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{4}\left(-2 + x_1^{(0)} - x_3^{(0)}\right) = \frac{-1}{2}$$

$$x_3^{(1)} = \frac{-1}{7}\left(5 - x_1^{(0)} - 6x_2^{(0)}\right) = \frac{-5}{7}$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{-5}{7} \end{bmatrix}$$

(ب) بردار $X^{(2)}$ را بدست میاوریم :

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{5}\left(1 + x_2^{(1)} - 2x_3^{(1)}\right) = \frac{1}{5}\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right) - 2\left(-\frac{?}{?}\right)\right) = \boxed{0.38857}$$

$x_2^{(2)}$, $x_3^{(2)}$ را که بدست بیاوریم $\longrightarrow$ بردار $X^{(2)}$ بدست میاد

روش گاوس سیدل :

تنها تفاوت روش های ژاکوبی و گاوس سیدل در جایگذاری اندیس گذاری است :

★ متغیرهایی که آپدیت شدند بلافاصله در معادلات بعد از شون استفاده میکنیم

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{5}\left(1 + x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}\right)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(-2 + x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}\right)$$

$$x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{7}\left(5 - x_1^{(k+1)} - 6x_2^{(k+1)}\right)$$

★ از بازنویسی x_1 و x_2 در معادلات بعدی استفاده می کنیم.

با شروع از حدس اولیه ی $X^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ تکرار از روش گاوس سیدل را دنبال می کنیم. برای $k=0$ داریم :

$$\boxed{x_1^{(1)}} = \frac{1}{5}\left(1 + x_2^{(0)} - 2x_3^{(0)}\right) = \frac{1}{5}$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{4}\left(-2 + \boxed{x_1^{(1)}} - x_3^{(0)}\right) = \frac{1}{4}\left(-2 + \frac{1}{5} - 0\right) = \boxed{-0.45}$$

$$x_3^{(1)} = -\frac{1}{7}\left(5 - x_1^{(1)} - 6x_2^{(1)}\right) = -\frac{1}{7}\left(5 - \frac{1}{5} - 6(-0.45)\right) = \boxed{-1.071}$$

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ -0.45 \\ -1.071 \end{bmatrix} , \quad X^{(2)} = ?$$

★ ماتریس A وارون پذیر است ★

سوال : دستگاه $Ax=b$ را در نظر بگیرید. فرض کنید x^* جواب یکتای دستگاه باشد. سوالی که مطرح است این است تحت چه شرایطی ، دنباله ی تولید شده $X^{(k)}$ توسط الگوریتم های ژاکوبی و گاوس سیدل به x^* همگراست. یعنی تحت چه شرایطی :

$$\lim_{k\to\infty} X^{(k)} \longrightarrow x^*$$

تعریف: ماتریس A را غالب قطری می‌گوییم اگر

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \quad , \quad i=1,\dots,n$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

$|5| \geq |-1| + |2| = 3$

$|4| \geq |-1| + |1| = 2$

$\cancel{|-7|} \geq |1| + |4| = 5$

این ماتریس، غالب قطری اکید نیست

ماتریس A را غالب قطری اکید می‌گوییم اگر نامساوی به صورت اکید برقرار باشد.

قضیه: اگر ماتریس A قطری غالب اکید باشد آنگاه روش‌های تکراری ژاکوبی و گاوس سایدل همواره به جواب دستگاه $Ax=b$ همگرا هستند.

$1 \not> 6$

تذکر: ماتریس A در دستگاه زیر قطری غالب نیست. $|1| \not> |4| + |-2| = 6$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$|1| \not> |1| + |4| = 5$

آیا با جابه‌جایی سطرهای ماتریس A می‌توان این ماتریس را به یک ماتریس قطری غالب اکید تبدیل کرد؟

ماتریس قطر غالب اکید

$$\overbrace{\begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}}^{B} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ماتریس این از نوع غالب قطری اکید است

سطر اول را می‌آوریم به جای سطر دوم

سطر سوم را به اول

سطر دوم به سوم

از این جابه‌جایی کردن تا اکید بشن

قضیه‌ی غالب قطری را برقرار می‌کنه

ما فقط جای معادلات را جابه‌جا کردیم به صورتی که نامساوی‌ها که مقدار قدر مطلق‌ها کوچک بود بزرگتر توی مقدار اصلی نباشند و از روی مقدار اصلی خارج نشوند.

معادله دیفرانسیل مرتبه اول با شرط مرزی یا یک شرط مرزی با مقدار اولیه هم دارد. با شرط اولیه

$$\begin{cases} y' = f(x, y(x)) \\ y(\alpha) = \beta \end{cases}$$

نمایش یک معادله دیفرانسیل عادی

* برای اختصار در نوشتار، تابع $y'(x)$ را با y' نشان می‌دهیم.

مثل

$$\begin{cases} y'(x) = 1 + x\sin(x\,y(x)) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

بازنویسی مسئله با اختصار:

$$\begin{cases} y' = 1 + x\sin(xy) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

۳ روش برای حل تقریبی معادلات دیفرانسیل

① روش بسط تیلور ② روش اویلر ③ روش رانگ کوتا

روش بسط تیلور

ex: به کمک روش تیلور مرتبه ۴ و طول گام $h = 0.1$ مقدار تقریبی از $y(0.5)$ را بیابید.

معادله دیفرانسیل عادی زیر داریم که در آن تابع y مجهول است:

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

دنبال تابعی هستیم که مشتقش = خودش + x

این روش تیلور ۴ یک بازه که از ۰ تا $\boxed{0.5}$ است را در نظر می‌گیریم و آن را افراز می‌کنیم. ابتدای بازه ← جایی که مقدار اولیه که مسئله داده ← $\boxed{\text{صفر}}$

مقدار تابع را می‌خواهیم در نقطه‌ی $\boxed{0.5}$ حساب کنیم ← انتهای بازه را هم $\boxed{0.5}$ در نظر می‌گیریم. طول گام $= \boxed{0.1}$ ← افراز به صورت زیر می‌شود:

0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5

مقدار تابع در نقطه‌ی x_5 را می‌خواهیم (داده‌ی مسئله)

از بسط تیلور استفاده می‌کنیم و به صورت زنجیره‌وار:

$y(0) \to y(0.1) \to y(0.2) \to y(0.3) \to y(0.4) \to y(0.5)$

با انتقال از مقدار مرزی و بسط های تیلور به صورت زنجیره وار ...

در نقاط افراز شده پیدا می کنیم و بدانیم (x_i, y) را می توانیم محاسبه

هدف ما که گفته شد ← مقدار جواب را می توانیم در نقاط بیشتری ارزیابی کنیم و در نهایت یه تقریبی از تابع y پیدا بسازیم.

بسط تیلور تابع $y(x_i+h)$ را حول نقاط $\boxed{x_i}$ می نویسیم و از آن برای ... می نویسیم

$y(x_i+h)$ به ازای $i = 0, 1, 2, 3$ استفاده می کنیم (این کار به ترتیب برای $i = 0, 1, 2, 3$ صورت می گیرد)

بسط تیلور تابع $y(x_i+h)$ حول x_i

$$y(x_i+h) \simeq y(x_i) + \boxed{y'(x_i)}\,h + \frac{y''(x_i)h^2}{2!} + \frac{y^{(3)}(x_i)h^3}{3!} + \frac{y^{(4)}(x_i)h^4}{4!}$$

$i = 0, 1, 2, 3$

چون مسأله گفته از بسط تیلور مرتبه ۴ باید استفاده کنیم ← بسط تیلور را تا $y^{(4)}$ ادامه می دهیم که مشتق صریح قاعده ... و بعد از آن را هم نویسیم.

مشتق اول را خود مسأله داده ولی مشتق های مرتبه بالاتر را باید از اطلاعات مسأله استخراج کنیم ←

مشتق ها نسبت به x

$y' = x + y$

$y'' = 1 + y' = 1 + x + y$

$y''' = 1 + y' = 1 + x + y$

$y^{(4)} = 1 + y' = 1 + x + y$ ★ مقدار مشتق ها تقریبی

x_i ها الان اینها هم مهم اند.

$$y(x_i+h) \simeq y(x_i) + (x_i + y(x_i))h + \frac{(1 + x_i + y(x_i))h^2}{2!} + \frac{(1 + x_i + y(x_i))h^3}{3!} + \frac{(1 + x_i + y(x_i))h^4}{4!}$$

این می شه بسط تیلور ما

$\boxed{i = 0, 1, 2, 3}$

Scanned by CamScanner

$i=0 \to x_i = x_0 = 0$ و $h=0.1 \to \boxed{x_0+h=0.1}$

$$\to y(x_0+h) = y(0.1) \simeq y(0) + (0+y(0))\,0.1 + \frac{(1+0+y(0))(0.1)^2}{2} + \frac{(1+0+y(0))(0.1)^3}{3!} + \frac{(1+0+y(0))(0.1)^4}{4!} = \boxed{1.11034}$$

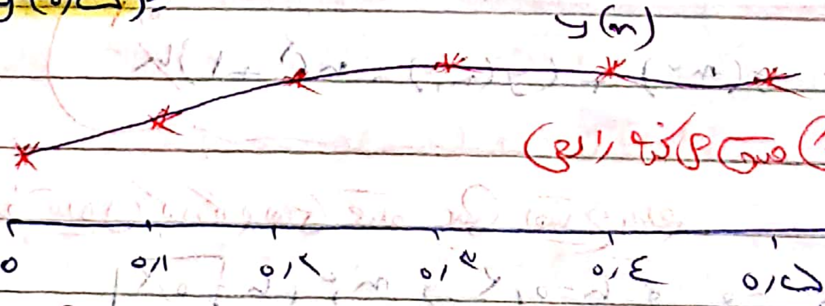
$i=1 \to x_i = x_1 = \boxed{0.1}$ و $h=0.1 \to \boxed{x_i+h=0.2}$

$$y(x_i+h) = y(0.2) \simeq y(x_1) + (x_1+y(x_1))\,0.1 + \frac{(1+x_1+y(x_1))(0.1)^2}{2!} + \frac{(1+x_1+y(x_1))(0.1)^3}{3!} + \frac{(1+x_1+y(x_1))(0.1)^4}{4!} = \boxed{1.24280}$$

⋮

$i=4 \quad x_i = 0.4 = x_4$ و $h=0.1 \to x_i+h = \boxed{0.5}$

$y(0.5)=$



تابع ای کدام نقاط بالا آمده تولیدی می‌کند را هم می‌کشند باید ازش یاد بگیریم بسازد

هرچه h کوچک‌تر باشد ← ↑ تعداد نقاطی که جواب معادله دیفرانسیل را ارزیابی می‌کند ← ↑ دقت ارزیابی

$\frac{dy}{dx}$

تمرین: معادله دیفرانسیل عادی زیر را در نقطه ... به کمک روش تیلور مرتبه ۴، با طول گام $h=0.2$ مقدار $y(1)$ را به صورت تقریبی محاسبه کنید.

$$\begin{cases} y' = -2xy^2 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

0   0.2   0.4   0.6   0.8   1

$y(1)=0.50001$ $y(0.8)=0.6100$

$y(0)=1$ ، $y(0.2)=0.9615$ $y(0.4)=0.8624$ $y(0.6)=0.7353$

روش دوم: ادامه ← روش تیلور مرتبه اول

که حالت خاصی از روش تیلور است

مثال) برای حل معادله دیفرانسیل

$$\begin{cases} y' = y - x^2 + 1 \\ y(0) = 0.5 \end{cases} \qquad x \in [0,2]$$

فاصله‌ی $[0,2]$ را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم کرده و به کمک روش اویلر مقادیر تقریبی از $y_1, \dots, y_{10}$ را مشخص کنید. $h = \frac{b-a}{10} = \frac{2}{10} = \boxed{0.2}$

$$\begin{array}{cccccccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \cdots & x_{10} \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & \cdots & 2 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & & \\ y(0) & y(0.2) & y(0.4) & & & & \end{array}$$

یادآوری: $y'_i = y'(x_i)$ و $y_i = y(x_i)$

بسط تیلور مرتبه اول تابع $y(x_i + h)$ را حول نقطه‌ی x_i برای $i = 0, \dots, n-1$ می‌نویسیم:

$$y(x_i + h) \simeq y(x_i) + y'(x_i)h = \boxed{y_i + y'_i h}$$

$a = 0,\ i = 0, \dots$ بسط تیلور مرتبه اول

$$y(x_i + h) \simeq y(x_i) + \left(y(x_i) - x_i^2 + 1\right)\cancel{h}^{\,0.2}$$

بسط تیلوری که در گام‌های مختلف نیاز (احتیاج) داریم.

$i = 0 \rightarrow x_0 = 0$ و $h = 0.2 \rightarrow x_i + h = \boxed{0.2}$

$$\underbrace{y(0.2)}_{y(x_1)} \simeq \underbrace{y(0)}_{0.5} + \big(\underbrace{y(0)}_{0.5} - 0 + 1\big)\,0.2 = \boxed{0.8}$$

$i = 1,\ x_i = x_1 = 0.2,\ h = 0.2 \rightarrow \boxed{x_i + h = 0.4}$

$$\underbrace{y(0.4)}_{y(x_2)} \simeq y(x_1) + \big(\underbrace{y(x_1)}_{0.8} - x_1^2 + 1\big)(0.2) =$$

$$(0.8 - (0.2)^2 + 1)(0.2) = \boxed{1.152}$$

از مرحله قبل

معادله دیفرانسیل مقابل را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} y' = -2x - y \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

با استفاده از روش اویلر و طول گام $h = 0.1$ مقدار تابع را در نقطه 0.5 پیدا کنید. $y(0.5) = ?$

$0 \quad 0.1 \quad 0.2 \quad 0.3 \quad 0.4 \quad 0.5$

$y(0.1) = -0.8999$

$y(0.2) \simeq -0.8299$

$y(0.3) \simeq -0.7869$

$y(0.4) \simeq -0.7683$

$y(0.5) \simeq \boxed{-0.7715}$

جواب مسئله

روش رانگ کوتا (اویلر اصلاح شده)

$$\begin{cases} y' = f(x, y(x)) \\ y(\alpha) = \beta \end{cases}$$

یادآوری روش اویلر

$$y(x_i + h) \simeq y(x_i) + y'(x_i) h$$

روش اویلر چون فقط از مشتق نقطه اول استفاده می کند ← خطای بالایی دارد

$y(x_i) \to y(x_i + h)$

میانگین مشتق در نقاط x_i و x_{i+1} را در روش استفاده می کنیم

$\boxed{x_i + h} = x_{i+1}$

$$\underbrace{y(x_i + h)}_{\text{مجهول ما}} \simeq y(x_i) + \left(\frac{y'(x_i) + y'(x_{i+1})}{2}\right) h =$$

$$y(x_i) + \frac{1}{2}\left[h f(x_i, y(x_i)) + h f(x_i + h, y(x_i + h))\right]$$

$$y(x_i + h) \simeq y(x_i) + y'(x_i) h = y(x_i) + f(x_i, y(x_i)) h \quad (*)$$

باید حذف کنیم

در معادله ی معادل دوباره مجهول برخورد کردیم ← مجهول $y(x_i + h)$ که

تقریبش را در $(*)$ حساب کردیم استفاده می کنیم

$$\to y(x_i + h) \simeq y(x_i) + \frac{1}{2}\left(h f(x_i, y(x_i)) + h f\left(x_i + h, y(x_i) + f(x_i, y(x_i)) h\right)\right)$$

پس در روش رانگ کوتا:

$$y(x_i+h) \simeq y(x_i) + \frac{1}{2}\left[hf(x_i, y(x_i)) + hf(x_i+h, y(x_i) + f(x_i, y(x_i))h)\right]$$

به این فرمول، روش رانگ کوتای دومرحله‌ای گفته می‌شود ($RK-2$)

شیب در ۲ نقطه‌ی ابتدا و انتهای زیر بازه استفاده می‌کند.

تعریف می‌کنیم ۲ نماد را:

$K_1 = hf(x_i, y_i)$, $K_2 = hf(x_i+h, y_i+K_1)$

با این تعاریف ← فرمول روش رانگ کوتای ۲ مرحله‌ای به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$y(x_i+h) \simeq y(x_i) + \frac{1}{2}(K_1+K_2)$$

ex ۴۸) معادله دیفرانسیل روبرو:

$$\begin{cases} y' = y - x^2 + 1 , \quad x \in [0, 2] \\ y(0) = 0.5 \end{cases}$$

بازه‌ی $[0, 2]$ را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم کرده و مقدار y را در نقاط x_i تقریب بزنید.

با روش رانگ کوتا

$$\boxed{h = \frac{2-0}{10} = 0.2}$$

$$y(x_i+h) \simeq y(x_i) + \frac{1}{2}[K_1+K_2]$$

$\boxed{K_1} = hf(x_i, y_i)$, $\boxed{K_2} = hf(x_i+h, y_i+K_1)$

$\boxed{f(x, y)} = y - x^2 + 1$

$$\boxed{y(x_i+h)} \simeq y(x_i) + \frac{1}{2}\Big[0.2\,(y(x_i) - x_i^2 + 1) + 0.2\big(\underbrace{y(x_i) + 0.2(y(x_i) - x_i^2 + 1)}_{K_1} - (x_i+h)^2 + 1\big)\Big]$$

0 , 0.2 , 0.4 , 0.6 , ... , 2
x_0 , x_1 , x_2 , x_3

$i = 0 \to y(x_1) = y(0.2) = \boxed{0.826}$

$i = 1 \to y(x_2) = y(0.4) = \boxed{1.207}$

روش رانگ کوتای مرتبه ۴

موضوع

تاریخ

$$\xrightarrow{+h}$$

$x_i \qquad x_i + \frac{h}{2} \qquad x_{i+1}$

$$K_1 = h f(x_i , y_i) \quad , \quad K_2 = h f\left(x_i + \frac{h}{2} , y_i + \frac{K_1}{2}\right)$$

$$K_3 = h f\left(x_i + \frac{h}{2} , y_i + \frac{K_2}{2}\right) ,$$

$$K_4 = h f(x_i + h , y_i + K_3)$$

$$y(x_i + h) \simeq y(x_i) + \frac{1}{6}\left(K_1 + \underbrace{2K_2 + 2K_3}_{} + K_4\right)$$

وزن بیشتر را نقاط مرکزی دارند از نقاط ابتدایی و انتهایی بازه الف.

کمک می‌کند تا مرتبه خطای کمتری بدست بیاوریم.

حل فصل ۴

موضوع   تاریخ / /

سوال ۵: قاعده‌ی مشتق‌گیری زیر، برای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه‌ی چند دقیق است؟

$$f'(x) = \frac{f(x+\frac{h}{2}) - f(x-\frac{h}{2})}{h} \quad (*)$$

حل:

نکته: ما یک چندجمله‌ای داریم که می‌خواهیم از آن مشتق بگیریم

$$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)' = a_n (x^n)' + a_{n-1} (x^{n-1})' + \dots + a_1 (x)' + a_0 (1)'$$

پس اگر یک قاعده‌ی مشتق‌گیری بخواهد برای یک چندجمله‌ای از حداکثر درجه‌ی n دقیق باشد

پس اگر یک فرمول بخواهد برای چندجمله‌ای حداکثر درجه‌ی n دقیق باشد

باید ① برای تابع ثابت ۱ دقیق باشد   ما با ضرایب کاری نداریم

② ~ x ~ ~

③ ~ x^{n-1} ~

④ ~ x^n ~

پس باید چک کنیم فرمول (*) برای حداکثر چه درجه‌ای از توابع بالا دقیق است.

پس با تابع $f(x)=1$ شروع می‌کنیم   از قاعده‌ی (*) اگر مشتق را حساب کنیم

① $f(x)=1 \Longrightarrow f'(x) \simeq \frac{1-1}{h} = \boxed{0}$

می‌دانیم که مشتق دقیق تابع ثابت $\boxed{0}$ هم صفر است ← قاعده‌ی (*) که داده به ما مشتق را برای تابع ثابت $\boxed{0}$ حساب می‌کند.

② $f(x)=x \Longrightarrow f'(x) \simeq \frac{x+\frac{h}{2} - (x-\frac{h}{2})}{h} = \frac{h}{h} = 1$

پس قاعده‌ی (*) مشتق $f(x)=x$ را هم دقیق حساب می‌کند تا اینجا برای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه‌ی ۱ این قاعده دقیق است.

③ $f(x)=x^2 \Longrightarrow f'(x) \simeq \frac{(x+\frac{h}{2})^2 - (x-\frac{h}{2})^2}{h} =$

$$\frac{\cancel{x^2} + xh + \cancel{\frac{h^2}{4}} - (\cancel{x^2} - xh + \cancel{\frac{h^2}{4}})}{h} = \frac{2xh}{h} = \boxed{2x}$$

پس این فرمول برای چندجمله‌ای های حداکثر از درجه ۲ هم دقیق است

④ گام ۴ $f(x) = x^3$

$$f'(x) \simeq \frac{(x+\frac{h}{2})^3 - (x-\frac{h}{2})^3}{h} =$$

$$\frac{\cancel{x^3} + 3 \times (x)^2 \times \frac{h}{2} + \cancel{3 \times (x) \times (\frac{h^2}{4})} + (\frac{h}{2})^3 - (\cancel{x^3} - 3x^2(\frac{h}{2}) + \cancel{3x(\frac{h^2}{4})} - \frac{h^3}{8})}{h} =$$

$$\frac{3x^2h + \frac{h^3}{4}}{h} = \boxed{3x^2 + \frac{h^2}{4}} \neq 3x^2$$

فرمول ⊛ برای این چندجمله‌ای دقیق نیست.

بنابراین فرمول ⊛ برای چندجمله‌ای های حداکثر از درجه ۲ دقیق است.

ex مشتق‌گیری عددی از فصل ۴

فرض a0 و a1 و a2 را چنان بیابید که فرمول تقریبی زیر برای چندجمله‌ای های حداکثر از درجه ۲ دقیق باشد.

$$f'(x) \simeq a_0 f(x-h) + a_1 f(x) + a_2 f(x+h) \quad ⊛$$

برای اینکه فرمول ⊛ برای چندجمله‌ای های از درجه ۲ دقیق باشد باید برای ① $f(x)=1$ و ② $f(x)=x$ و ③ $f(x)=x^2$ دقیق باشد.

فرمول مشتق‌گیری ⊛ برای این تابع باید از حالت تقریبی گام اول $f(x)=1$

خارج شود و مقدار دقیق مشتق را برای تابع به ما بدهد [ ] که جایگذاری کنید.

$$f'(1) = 0 = a_0 \times 1 + a_1 + a_2 \rightarrow \boxed{0 = a_0 + a_1 + a_2}$$

معادله اول ما ⊛ چون ۳ تا مجهول داریم و حتماً به ۲ تا معادله دیگر هم نیاز داریم.

② فرمول ⊛ باید برای $f(x) = x$ هم دقیق باشد ←

$(a+b)^3 = a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3$ — $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ (نکته)

$f(x)=x \longrightarrow 1 = a_0(x-h) + a_1(x) + a_2(x+h)$

$\therefore 1 = a_0x - a_0h + a_1x + a_2x + a_2h$

مجموع ضرایب x = صفر (طرف چپ ضریبی از x نداریم)

$\longrightarrow \boxed{a_0 + a_1 + a_2 = 0}$

جمع ثابت های طرفین

$h(a_2 - a_0) = 1 \longrightarrow \boxed{a_2 - a_0 = \frac{1}{h}}$ معادله دوم

$f(x) = x^2 \longrightarrow 2x = a_0(x-h)^2 + a_1x^2 + a_2(x+h)^2 \Rightarrow$

$2x = a_0(x^2 - 2xh + h^2) + a_1x^2 + a_2(x^2 + 2xh + h^2) \Rightarrow$

$2x = a_0x^2 - 2a_0xh + a_0h^2 + a_1x^2 + a_2x^2 + 2a_2xh + a_2h^2$

طرف چپ هیچ ثابتی نداریم ← مجموع ثابت های طرف راست = صفر

$a_0h^2 + a_2h^2 = 0 \longrightarrow (a_0 + a_2)h^2 = 0$

می دانیم $h \neq 0 \longrightarrow \boxed{a_0 + a_2 = 0}$ معادله سوم

(1) $a_0 + a_1 + a_2 = 0$

(2) $a_2 - a_0 = \frac{1}{h}$

(3) $a_0 + a_2 = 0 \Rightarrow a_0 = -a_2 \xrightarrow{(2)} a_2 - (-a_2) = \frac{1}{h}$, $2a_2$

$\boxed{a_2 = \frac{1}{2h}}$

$a_0 = -a_2 \Rightarrow \boxed{a_0 = -\frac{1}{2h}}$

پس با جایگذاری این ضرایب در فرمول کلی که مسئله داده $\boxed{a_1 = 0}$ از رابطه (1)

$$f'(x) \simeq \frac{-f(x-h) + f(x+h)}{2h}$$

* این فرمول برای چندجمله‌ای های حداکثر از درجه ۲ دقیق است *

ex) انتگرال گیری عددی

۱) حداقل تعداد تقسیمات n را چنان بیابید که خطای حاصل از $\int_1^2 e^{-x^2}$ به روش ذوزنقه کمتر از 10^{-4} شود.

برای حل این سوال از کران بالای خطای ذوزنقه

$$|E_T(h)| \le \frac{(b-a)M_2}{12} h^2$$

h = طول زیربازه‌ها

از رابطه $n \rightleftarrows h$ می‌توانیم h را به دست بیاوریم

صفحه ۲۸

* M_2: کران بالای مشتق دوم تابع زیر انتگرال است.

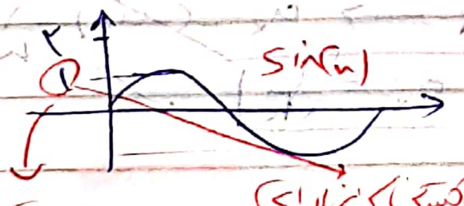
$$\boxed{|f''(x)| \le M_2} \quad \forall x \in [a,b]$$

$a=1,\ b=2$ و $f(x)=e^{-x^2}$

اول باید M_2 را محاسبه کنیم که کران بالای $f''(x)$ است.

چون مسئله گفته حداقل، این کران باید $\boxed{\text{Tight}}$ باشد. یعنی باید کوچکترین کران بالا را به دست بیاوریم. نباید از هر کران بالایی استفاده کنیم چون از ما حداقل تعداد تقسیم‌ها را خواسته. M_2 باید دقیقا بالاترین $\max$ $f''(x)$ باشد.

در بازه $[a,b]$ → $M_2 = \max |f''(x)|$
$x \in [1,2]$



کوچکترین کران بالا $= 1 = \max \sin(x)$

کران بالا

تابع

Tight کران $\sin(x)$ است.

* بهترین کران بالا = کوچکترین کران بالا *

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} \qquad f''(x) = -2e^{-x^2} - 2x \times -2xe^{-x^2} = 4x^2e^{-x^2}$$

$$\boxed{f''(x) = e^{-x^2}(4x^2-2)}$$

$$f^{(3)}(x) = -2xe^{-x^2} \times (4x^2-2) + e^{-x^2}(8x) = e^{-x^2} \times -8x^3 + 4xe^{-x^2} + 8xe^{-x^2} = e^{-x^2}(-8x^3+12x)$$

نقاط بحرانی تابع $f''(x)$ روی بازه‌ی $[1,2]$ و نقاطی که مشتق مرتبه سوم را صفر می‌کنند ← $f^{(3)}(x)=0 \Rightarrow x=0 ,\ x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

ریشه‌ی $x=0$ در بازه‌ی $[1,2]$ نیست و مقدار $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ هم توی بازه نیست ← $\boxed{x=\sqrt{\frac{3}{2}}}$ فقط قابل قبول است به عنوان نقطه‌ی بحرانی

مقدار تابع در نقطه‌ی بحرانی، مقدار تابع در ابتدای بازه، انتهای بازه $\max\{\ \}$ = $\max|f''(x)|$, $x\in[1,2]$

$\max|f''(x)| = \max\{|f''(1)|, |f''(2)|, |f''(\sqrt{\frac{3}{2}})|\} = \max\{0.7338, 0.2564, 0.8925\}$
$x\in[1,2]$

$=\boxed{0.8925}$ بزرگترین

کران که می‌خواستیم $\boxed{M_2 = 0.8925}$

از خطا استفاده می‌کنیم h را بدست می‌آوریم و بعد n را

$\frac{(2-1)\times \max}{12}\times h^2 \le 10^{-4} \to \boxed{h \le 0.0361}$ (0.8925)

حداقل تعداد تقسیم‌های بازه از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$n=\frac{b-a}{h}=\frac{1}{0.0361}\approx 27.7 \to \boxed{n=28}$

n باید عدد صحیح باشد

$n\ge 28$ حداقل تعداد تقسیم‌ها 28 است ← بازه‌ی $[1,2]$ را به 28 قسمت مساوی باید تقسیم کنیم.

ex) به کمک قاعده‌ی سیمپسون تقریبی از $\int x\sin(x)\,dx$ بدست آورید که خطای آن حداکثر 10^{-5} باشد.

حل:

روی سیمپسون $|E_s(h)| \le \frac{(b-a)M_4}{180}h^4$

M_4 یک کران بالا برای قدر مطلق مشتق مرتبه ۴ تابع زیر انتگرال است

$|f^{(4)}(x)| \le M_4 ,\ \forall x\in[a,b]$

٨٣

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left[f_0 + 4(f_1+f_3+\dots+f_{n-1}) + 2(f_2+f_4+\dots+f_{n-2}) + f_n \right]$$

مقدار تابع در نقطه x_0

جملات فرد میانی

جملات زوج میانی

مقدار تابع در نقطه انتهای بازه

فرمول سیمپسون

پس باید مقدار این انتگرال را به کمک قاعده‌ی بالا تقریب بزنیم ولی سوال اینجاست که مقدار h و n را باید از کجا استخراج کنیم. h و n چی باشه؟

① ابتدا نیاز داریم که M_4 را محاسبه کنیم.

$f(x) = x\sin x \rightarrow f'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$

$f''(x) = \cos(x) + \cos(x) + x \times -\sin x = \boxed{2\cos x - x\sin x}$

$f^{(3)}(x) = -2\sin x - (\sin x + x\cos x) = \boxed{-3\sin x - x\cos x}$

$f^{(4)}(x) = -3\cos x - (\cos x + x \times -\sin x) = \boxed{-4\cos x + x\sin x}$

M_4 سقف کران بالا برای $|f^{(4)}(x)|$ در بازه‌ی $[0,1]$ ← الخ

$\forall x \in [0,1], \quad |f^{(4)}(x)| = |x\sin x - 4\cos x| \le \underbrace{|x||\sin x|}_{\le 1} + \underbrace{4|\cos x|}_{\le 4\times 1}$

طبق نامساوی مثلثی

* داریم بازه *

$\le 4 + 1 = \boxed{5}$

$\rightarrow \boxed{M_4 = 5}$

$\frac{(b-a)M_4}{180} \times h^4 \le \underbrace{10^{-5}}_{\text{حداکثر خطا}} \rightarrow \frac{5}{180} \times h^4 \le 10^{-5} \rightarrow \boxed{h \le 0.1377}$

$n = \frac{1}{0.1377} \simeq \boxed{7.2} \leftarrow n = \frac{b-a}{h}$

چون n تعداد زیربازه‌ها است باید یک عدد طبیعی باشد ← 7.2 را به بالا گرد می‌کنیم ← n زوج باید باشد ← $n = 8$

عدد

طبق قاعده‌ی سیمپسون را می‌گذاریم ← $\boxed{n = 8}$

جمع‌بندی: بازه‌ی $[0,1]$ را به ۸ قسمت مساوی تقسیم کنیم ← $\boxed{h=\frac{1}{8}}$

موضوع .... تاریخ / /

$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7 \quad x_8$

$0 \quad \frac{1}{8} \quad \frac{2}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{4}{8} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{6}{8} \quad \frac{7}{8} \quad 1=\frac{8}{8}$

$f(x)=x\sin x$, $h=\frac{1}{8}$

انتگرال کن قاعده‌ی سیمپسون با $h=\frac{1}{8}$ در بازه‌ی بالا؟

$$\int_0^1 x\sin x \simeq \frac{h}{3}\Big[f(0)+4\big(f(\tfrac{1}{8})+f(\tfrac{3}{8})+f(\tfrac{5}{8})+f(\tfrac{7}{8})\big)$$
$$+2\big(f(\tfrac{2}{8})+f(\tfrac{4}{8})+f(\tfrac{6}{8})\big)+f(1)\Big]$$

$\frac{h}{3}=\frac{1}{24}$

= جواب بدهید

که حداکثر خطای 10^{-4}

الف

آیدا می‌خواهد مقدار تقریبی انتگرال را در بازه‌ی $[0,1]$

ex) مقدار $\int (x^3+1)dx$ را به کمک روش دو نقطه‌ای گاوسی و روش دوزنقه با طول گام $\boxed{h=0.2}$ تقریب بزنید. جواب کدام یک دقیق‌تر است؟
برای ادامه خود مقدار دقیق انتگرال و دلیل بیاورید.

حل: با روش دو نقطه‌ای گاوسی

$\boxed{n=2}$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq w_0 f_0 + w_1 f_1 = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$$

نقاط گره‌ای در روش گاوسی، ریشه‌های چندجمله‌ای لژاندر درجه ۲ هستند.

چندجمله‌ای لژاندر درجه ۲: $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1) \Rightarrow x_0=-\frac{\sqrt{3}}{3},\ x_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$

لژاندر درجه n

ریشه‌های چندجمله‌ای‌های لژاندر ← در بازه‌ی $[-1,1]$ است. n تا ریشه‌ی متمایز دارد

ریشه‌ها قرینه‌ی هم هستند ← نقاط گرهی که در روش گاوسی دو نقطه‌ای در نظر گرفته می‌شوند

x_0, x_1 هستند

در روش دو نقطه‌ای گاوسی، وزن‌ها چگونه به دست می‌آیند؟

$w_0, w_1 = ?$

حذف

Scanned by CamScanner

$$= \frac{2(1-x_i^2)}{4\left(P_{n-1}'(x_i)\right)^2}$$

$x^2 = 0/1$

$n = 2 \longrightarrow \boxed{x^2 = 4}$

چندجمله‌ای $P_{n-1} = P_1$ ← ترانه در اینجا

$\boxed{P_1(x) = x}$

وزن های متناظر با ریشه های متقارن با هم برابر هستند ←

۲) w_0 متناظر با x_0 و w_1 متناظر با x_1 است ← چون x_0 و x_1 قرینه هم هستند ← $\boxed{w_0 = w_1}$

$$\boxed{w_0 = w_1 = 1} \qquad w_0 = w_1 = \frac{2(1-x_0^2)}{4\left(P_1'(x_0)\right)^2}$$

$$x_0 = \frac{-\sqrt{3}}{3} \longrightarrow w_0 = \frac{2\left(1-\frac{3}{9}\right)}{4(x_0)^2} = \frac{2\times\frac{2}{3}}{4\left(\frac{1}{3}\right)} = \boxed{1}$$

وزن های گاوسی دو نقطه‌ای ← $\boxed{w_0 = w_1 = 1}$

روش های گاوسی را ما در بازه ی $[-1,1]$ تعریف کردیم و در بازه ی مسئله‌های ما $[0,1]$ است

تذکر:
$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{1}{2}\left[(b-a)t + (b+a)\right]\right)dt$$

۳) هر موقع خواستیم از روش های گاوسی استفاده کنیم و بازه ی انتگرالی که خواستیم حل کنیم $[-1,1]$ نبود ← اولین قدم به کمک رابطه ی بالا انتگرال را به بازه ی $[-1,1]$ می بریم

بنابراین:
$$\int_0^1 (x^3+1)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)^3 + 1\,dt$$

$$f(x) = x^3+1 \longrightarrow g(t) = \left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)^3 + 1$$

تبدیل کردیم

۵۶) انتگرال این تابع را در بازه ی $[-1,1]$ با روش گاوسی ... حساب کنیم.

$$\int_0^1 x^3+1\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)^3+1\,dt \simeq \frac{1}{2}\left[w_0\, g(t_0) + w_1\, g(t_1)\right]$$

$x_0 = t_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$x_1 = t_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ، $w_0 = w_1 = 1$

قاعده گاوسی ۲ نقطه‌ای

$$= \frac{1}{2}\left[g\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \right] = \boxed{1.245}$$

موضوع کتبی اول سوال   تاریخ / /

محاسبه‌ی انتگرال داده شده به کمک روش گاوس دو نقطه‌ای

روش ذوزنقه‌ها با طول گام ۰٫۲ $h=0.2$

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n\right) \qquad \boxed{h=0.2}$$

بازه‌ی [۰و۱] را با طول گام‌های ۰٫۲ افراز می‌کنیم.

$$\begin{array}{cccccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1 \end{array}$$

$$\int_0^1 x^3+1\,dx \simeq \frac{0.2}{2}\Big(f(x_0) + 2\big(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)\big) + f(x_5)\Big) =$$

$f(x)=x^3+1$

$$0.1\Big(f(0) + 2\big[f(0.2)+f(0.4)+f(0.6)+f(0.8)\big] + f(1)\Big)$$

$$0.1\Big(1 + 2\big[\underbrace{1.008 + 1.064 + 1.216 + 1.512}_{4.8}\big] + 2\Big) =$$

$$0.1\big(1 + \cancel{2\times 4.8}^{\,9.6} + 2\big) = \boxed{1.26}$$

مقدار تقریبی انتگرال به کمک روش ذوزنقه‌ای با طول گام $\boxed{0.2}$

پس کدام روش دقیق‌تر است؟

باید خطای قاعده‌ها را حساب کنیم و مقایسه کنیم

یادآوری خطای قاعده‌ی گاوس n نقطه‌ای ← برای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه‌ی $\boxed{2n-1}$ دقیق است.

$$E_n = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)\big((2n)!\big)^3} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in [-1,1]$$

خطای قاعده‌ی ذوزنقه‌ای مشتق مرتبه‌ی ۲n ام صفر

$$E_T(h) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi), \quad \xi \in [a,b]$$

می‌دانیم اگر در خطای یک قاعده‌ی انتگرال‌گیری، مشتق مرتبه‌ی k ام صفر شود ←

آن قاعده برای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه‌ی $\boxed{k-1}$ دقیق است.

ما از گاوسی ۲ نقطه‌ای استفاده کردیم ← برای چندجمله‌ای حداکثر از درجه‌ی $3 = 2\times 2-1$ دقیق است.

$f(x)=x^3+1$ یک چندجمله‌ای درجه ۳ است ← گاوسی دو نقطه‌ای باید دقیق باشد.

$$\int_0^1 x^3+1\,dx = \frac{1}{4}x^4 + x\Big|_0^1 = \frac{1}{4}+1 = \frac{5}{4} = \boxed{1.25}$$

مقدار دقیق انتگرال که برابر با مقداری است که از روش گاوسی دو نقطه‌ای بدست آوردیم

اگر از یک چندجمله‌ای با درجه‌ی $2n-1$ ، $2n$ بار مشتق بگیریم ← خطا صفر می‌شود (تابع صفر می‌دهد) — دقیق بدست آورده

در خطای دو نقطه ← مشتق مرتبه ۴ ظاهر شد ← این قاعده برای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه‌ی ۳، دقیق است.

پس طبق استدلال‌های بالا ← خطای گاوسی دو نقطه‌ای برای محاسبه‌ی $\int_0^1 x^3+1\,dx$ ، خطای برابر صفر است ← مقدار دقیق را می‌دهد.

درحالی که قاعده‌ی ذوزنقه این گونه نیست.

انتگرال گیری

① روش ذوزنقه

قاعده ذوزنقه : $\frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})$

قاعده مرکب :

$$\frac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{i=1} f_i + f_n\right)$$

رقم فرمول
حداکثر ۱ درجه

خطا :

$$E_T(h) = \frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi), \quad \xi \in [a,b]$$

$|f''(x)| \leq m_2 \quad \forall x \in [a,b]$

$$E_T(h) \leq \frac{(b-a)h^2}{12} m_2$$

② قاعده سیمپسون

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{3}\left(f_0 + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{n-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{n-2}) + f_n \right)$$

خطا :

$$E_S(h) = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [a,b]$$

$|f^{(4)}(x)| \leq m_4 \quad \forall x \in [a,b]$

حداکثر
رقم فرمول = ۳ درجه

$$|E_S(h)| < \frac{(b-a)h^4}{180} m_4$$

$\boxed{n}$ باید زوج باشد

③ نقطه میانی

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$$

خطا :

$$E_M(h) = \frac{(b-a)h^2}{24} f''(\xi), \quad \xi \in [a,b]$$

$|f''(x)| \leq m_2 \quad \forall x \in [a,b]$

$$|E_M(h)| \leq \frac{(b-a)h^2}{24} m_2$$

④ قاعده نیوتن کاتس

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0} w_i f(x_i) + E$$

⑤ کوادراتور گاوسی

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \dots + w_n f(x_n)$$

$x_0, x_1, \dots, x_n$ ریشه‌های لژاندر درجه $n+1$

$$\boxed{n = \frac{b-a}{h}}$$

$$w_i = \frac{2(1-x_i^2)}{n^2\left(P_{n-1}(x_i)\right)^2}$$

کوادراتور گاوسی لژاندر

فقط ی انتگرال گیری

$$E_n = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)\left((2n)!\right)^3} f^{(2n+1)}(\xi)$$

$\xi \in [-1,1]$

درجه دقت فرمول $\boxed{2n}$

۲ برابر دقت فرمول های نیوتن کاتس

تعمیم فرمول به بازه $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}\left[(b-a)t + (b+a)\right]\right)dt$$

تابع زیر انتگرال را با کمک روش بالا حل کنیم

① فرمول ۲ نقطه‌ای پیشرو ← $f'(x_i) = \dfrac{f_{i+1} - f_i}{h}$

خطا ← $O(h)$ ضریب خطا : $-\dfrac{h}{2} f''(x_i) - \dfrac{h^2}{6} f'''(x_i)$ ، ...

دقت فرمول ← $\boxed{n=1}$

② ~ ~ پسرو ← $f'(x_i) = \dfrac{f_i - f_{i-1}}{h}$

③ ~ ~ ۳ پیشرو ← $f'(x_i) = \dfrac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2h}$

④ ~ ~ پسرو ←

مشتق گیری

$f'(x) = \dfrac{3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{2h}$

ضریب خطا ← $O(h^3)$

دقت فرمول ← $n=2$

⑤ ۳ نقطه‌ای مرکزی ←

$f'(x) = \dfrac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$

ضریب خطا ← $O(h^2)$

دقت ← $\boxed{n=2}$

⑥

۵ نقطه‌ای مرکزی

$f'(x) = \dfrac{f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}}{12h}$

دقت فرمول ← $\boxed{n=3}$