۱۰

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}=\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T})t}$$ فرم کلی نمایی سری فوریه ①

T دوره تناوب مشترک همه $\phi_k(t)$ ها است

اگر k=1 و k=-1 ← هارمونیک اصلی یا اول / k=±2 ← مولفه‌های هارمونیک دوم

$x(t)$ = ترکیبی خطی از نمایی‌های مختلط وابسته هارمونیک $e^{jk\omega_0 t}$

اگر $x(t)$ حقیقی باشد ← $x^*(t)=x(t)$ ←

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t}$$

ضریب را مزدوج کنیم

به جای k، -k

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t}$$

پس خاصیت تقارن هرمیتی ← $a^*_k=a_{-k}$ یا $a_k=a^*_{-k}$

(اگر اندیس ضریب را قرینه کنیم ← مقدار ضریب هم مزدوج می‌شود)

$$x(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k e^{jk\omega_0 t}+a_k^* e^{-jk\omega_0 t}]$$

مزدوج هستند ← جمع ۲ تا مزدوج = ۲ برابر real part

$$\rightarrow x(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty} 2\,Re\{a_k e^{jk\omega_0 t}\}$$ ②

$$a_0+2\sum Re\{A_k e^{j(k\omega_0 t+\theta_k)}\}$$

خانواده قطبی ضرایب فوریه ← $a_k=A_k e^{j\theta_k}$ ← فرم قطبی

$$x(t)=a_0+2\sum A_k\cos(k\omega_0 t+\theta_k)$$ ③

نمایش دکارتی ضرایب فوریه ← $a_k=B_k+jC_k$ ←

$$e^{jk\omega_0 t}=\cos k\omega_0 t+j\sin k\omega_0 t \rightarrow$$

$$x(t)=a_0+2\sum_{k=1}^{\infty} Re\{(B_k+jC_k)(\cos k\omega_0 t+j\sin k\omega_0 t)\}$$

$$x(t)=a_0+2\sum_{k=1}^{\infty}[B_k\cos k\omega_0 t-C_k\sin k\omega_0 t]$$ ④

$$a_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$ معادله ضرایب بسط سری فوریه

یا

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{T} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$ ← معادله تحلیل

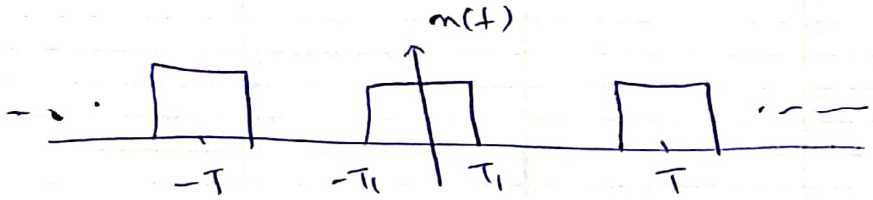
انتگرال در بازه‌ی T که دوره تناوب

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$ معادله ترکیب

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt$$ (مولفه ثابت یا میانگین سیگنال)

انتگرال روی $x(t)$ در بازه‌ای T و تقسیم به دوره T

ضرایب سری فوریه سیگنال پالس به شکل



$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < \frac{T}{2} \end{cases}$$

اگر $k=0 \rightarrow a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T}$

$$k \neq 0 \rightarrow a_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} e^{-jk\omega_0 t}\,dt = -\frac{1}{jk\omega_0 T} e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-T_1}^{T_1}$$

$$\rightarrow a_k = \frac{2}{k\omega_0 T}\Big[\underbrace{\frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j}}_{\sin(k\omega_0 T_1)}\Big] \Rightarrow a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} \quad k \neq 0$$

$T_1 = \frac{T}{4}$

$T =$ دوره تناوب

یک سیگنال متناوب $x(t)$ هنگامی سری فوریه دارد که همگرا (انتگرال تعریف کننده ضرایب بسط a_k) چون (معادله تحلیل) همگرا شود

(همگرایی سری فوریه)

سیگنال های متناوبی که در یک دوره تناوب، انرژی محدودی دارند $\int_T |x(t)|^2 dt < \infty$ بسط سری فوریه دارند و a_k محدودی دارند.

④ تغییر مقیاس زمانی ← ضرائب سری فوریه تغییری نمی‌کنند اما نمایش سری فوریه به خاطر تغییر فرکانس
(اصلی) ← تغییر می‌کند

$$x(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t} \longrightarrow x(\alpha t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk(\alpha\omega_0)t}$$

$x(\alpha t)$ ← یعنی دوره تناوب $\boxed{\frac{T}{\alpha}}$ می‌شود

خواص سری فوریه

⑤ ضرب در سیگنال

$$x(t)y(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} h_k=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}a_l b_{k-l}$$

$x(t)$ و $y(t)$ دوره تناوب یکسان

(حاصل جمع کانولوشن ضرائب سری فوریه دو سیگنال)

⑥ مزدوج گیری و تقارن

$$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$$

$$x^*(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} \boxed{b_k=a^*_{-k}}$$

اگر $x(t)$ حقیقی باشد ← $a_k=b_k=a^*_{-k}$

تقارن مزدوجی

اگر $x(t)$ حقیقی ← $a_k=a^*_{-k}$ ←

① $|a_k|=|a_{-k}|$ ~ زوج

② $\measuredangle a_k=-\measuredangle a_{-k}$ (زاویه) فرد

③ $Re\{a_k\}=Re\{a_{-k}\}$ ~ زوج

④ $Im\{a_k\}=-Im\{a_{-k}\}$ ~ فرد

$x(t)$ حقیقی و زوج ←

$$a_k=a_{-k}=a^*_{-k}=a^*_k$$

ضرائب سری فوریه حقیقی و زوج

$x(t)$ حقیقی و فرد ←

$$a_k=-a_{-k}=a^*_{-k}=-a^*_k$$

ضرائب سری فوریه موهومی و فرد

⑦ رابطه پارسوال

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|a_k|^2$$

کل توان متوسط یک سیگنال متناوب = مجموع توان‌های متوسط در هارمونیک‌های موجود در نمایش سری فوریه

⑧ انتقال در حوزه فرکانس

شیفت فرکانسی به اندازه M

$$e^{jM\omega_0 t}=e^{jM(\frac{2\pi}{T})t}x(t) \longleftrightarrow a_{k-M}$$

⑨ کانولوشن در زمان

$$\int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau \overset{FS}{\longleftrightarrow} Ta_k b_k$$

① $x(t)$ در طول یک دوره تناوب ، مطلقاً انتگرال پذیر باشد ،

$\int_T |x(t)|\, dt < \infty$ → (محدود بودن مقادیر ضرائب سری فوریه)

شرایط محدود دیریکله

برابری $x(t)$ و سری فوریه‌اش در همهٔ زمان‌ها

② تعداد نقاط اکسترمم (min و max) در هر بازه‌ی محدود ، محدود باشد

نقض ، $\sin\left(\frac{2\pi}{t}\right)$

$\frac{2\pi}{t}$ ← $0 < t \leq 1$

(عدد صحیح = $\frac{2\pi}{t}$ ← اگر و) به ازای هر t که کوچک باشد ، شود

اکسترمم داریم ← نقض این شرط

③ تعداد نقاط ناپیوستگی $x(t)$ در بازه‌ی زمانی محدود ، محدود باشد + اندازه ناپیوستگی محدود باشد

مثل T

$z(t) = (Ax(t) + By(t)) \xleftrightarrow{FS} c_k = Aa_k + Bb_k$ ، ① خطی بودن

$z(t)$ ضرائب ، ضرائب ، ضرائب

شرط دارد ← باید ترکیب خطی

* دوره تناوب یکسان داشته باشند *

اگر $x(t)$ و $y(t)$ دوره تناوب یکسان نداشته باشند ← رابطه‌ی بالا

برقرار نیست X

خواص سری فوریه

② انتقال زمانی

$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$ then $x(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-jk\omega_0 t_0} a_k$

به جای $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ هم می‌توانه بگذاری و ——

وقتی شیفت می‌دهیم در حوزه زمان ،

اندازه‌ی ضرائب ثابت می‌ماند فقط فاز عوض می‌شه

$|b_k| = |a_k|$ و $\measuredangle b_k = \measuredangle a_k - k\omega_0 t_0$

اختلاف فاز

③ وارونگی زمانی

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$

$x(-t) \xleftrightarrow{FS} a_{-k}$

یعنی $x(-t) = \sum a_k e^{-jk\omega_0 t}$

$a_k = a_{-k}$ ← $x(-t) = x(t)$ ← اگر $x(t)$ زوج باشد

دنباله ضرائب سری فوریه هم زوج می‌شود

فرد ← $x(-t) = -x(t)$

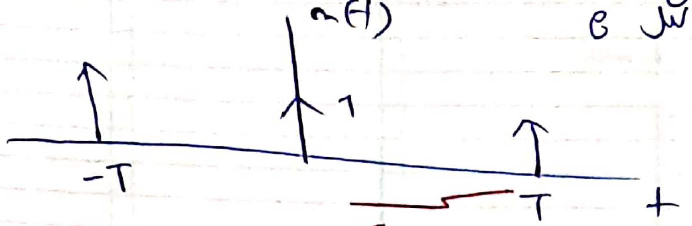
فرد ← $a_k = -a_{-k}$

$$x(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT) \xleftrightarrow{FS} a_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$ (قطار ضربه)

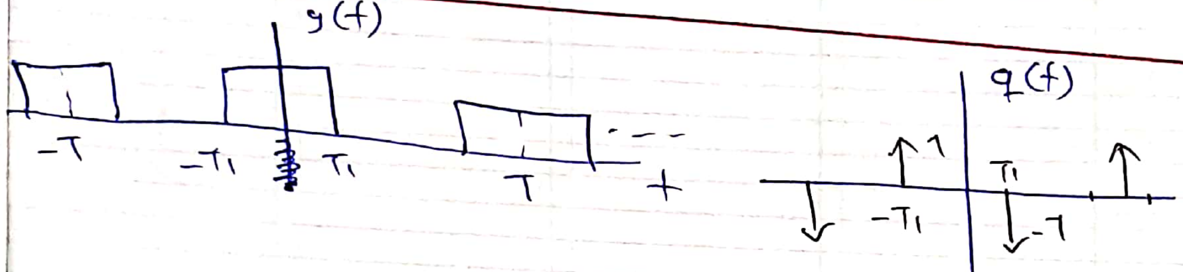
$$\frac{1}{T}(\cancel{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}})=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}1\,dt$$ خاصیت غربالی

$\frac{1}{T}$ $\forall k$

اگر $x(t)$ به شکل ؟



T دوره تناوب



مثال مهم

ضرایب سری فوریه $q(t)$ چه؟ چگونه به کمک $g(t)$ که پایین الان حساب کنیم ضرایبش؟

از $g(t)$ مشتق بگیریم $g'(t)=q(t)$

یا راه ② به کمک قطار ضربه که در بالا گفتیم ؟ T_1 به چپ شیفت داریم

$$q(t)=x(t+T_1)-x(t-T_1)$$

T_1 به راست شیفت داریم

جمع ۲ تا قطار ضربه

$$b_k=e^{jk\omega_0T_1}a_k-e^{-jk\omega_0T_1}a_k=\frac{1}{T}\left[\underbrace{e^{jk\omega_0T_1}-e^{-jk\omega_0T_1}}_{2j\sin(k\omega_0T_1)}\right]=\frac{2j\sin(k\omega_0T_1)}{T}$$

اگر $b_k=e^{-jk\frac{\pi}{2}}a_{-k}$ ← این دارای چه شیفت و وارونی را نشان می‌دهد؟

اگر $T=4$ ← $e^{-jk\omega_0 t_0}=e^{-jk\frac{\pi}{2}}$

$\omega_0=\frac{\pi}{2}$ ← $\boxed{t_0=-1}$

چون a_k ← a_{-k}

یعنی t شده $-t$ ← $\boxed{y(t)=x(-t+1)}$

۶۵ مشتق گیری در زمان

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{FS} jk\omega_0 a_k = jk\frac{2\pi}{T}a_k$$

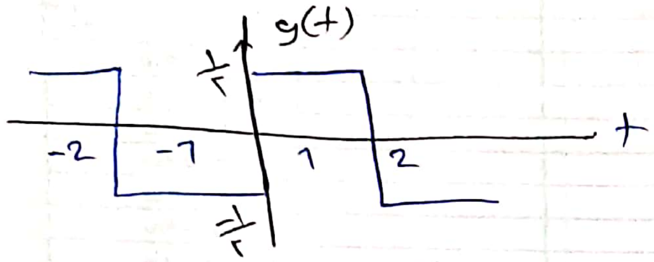
در $jk\omega_0$ ضرب می‌کنیم

خواص سری فوریه

۶۶ انتگرال گیری در زمان

$$\int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt \xleftrightarrow{FS} \left(\frac{1}{jk\omega_0}\right)a_k$$

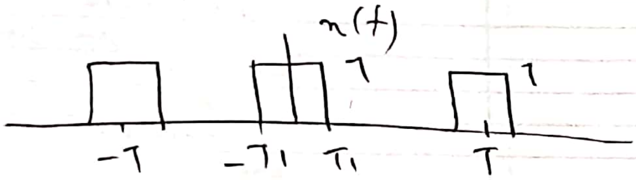
(مثال های مهم سری فوریه)



اگر $T=4$ باشد،

ضرایب سری فوریه = ؟

با کمک پالسی که قبلاً داشتیم



گفتیم اگر

$T_1=\frac{T}{4}$

$$K=0 \rightarrow a_0=\frac{2T_1}{T} \xrightarrow{\text{اینجا}} a_0=\frac{2(1)}{4}=\frac{1}{2}$$

$$k\neq 0 \rightarrow a_k=\frac{2\sin(k\omega_0T_1)}{k\omega_0T} \xrightarrow{\text{اینجا } \omega_0=\frac{\pi}{2}} a_k=\frac{\sin(k\omega_0T_1)}{k\pi}$$

حالا باید $x(t)$ را به شکل $g(t)$ دربیاریم ← باید هم شیفت بدیم هم پایین بیاریم

اگر $T=4 \rightarrow T_1=1 \rightarrow g(t)=x(t-1)-\frac{1}{2}$

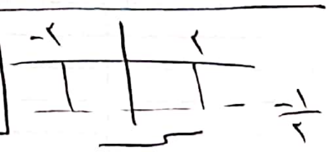
① $b_k=e^{-jk\omega_0t_0}a_k$ — پس ضرایب فوریه ① شیفت پیدا می‌کند

$t_0=1 \rightarrow b_k=e^{-jk\frac{\pi}{2}}a_k$

② با ضرایب $-\frac{1}{2}$ جمع می‌شه

$$c_k=\begin{cases}0 & k\neq 0\\ -\frac{1}{2} & k=0\end{cases}$$

$c_k=-\frac{1}{2}\delta[k]$



$$\frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt \stackrel{T}{=} \frac{2T_1}{T}$$

$$\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}-\frac{1}{2}\,dt=-\frac{1}{8}\times 4=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{\sin(\frac{k\pi}{2})}{k\pi}e^{-jk\frac{\pi}{2}}$$

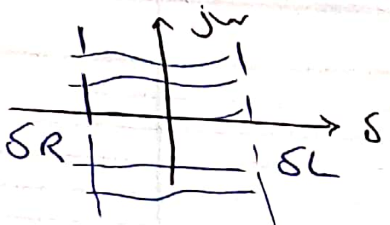
در نهایت جمع ضرایب ها

$$d_k=\begin{cases}a_k e^{-jk\frac{\pi}{2}} & k\neq 0\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0 & k=0\end{cases}$$

جواب

$ROC_X = ROC_{X_R} \cap ROC_{X_L}$ $\quad x(t) = x_R(t) + x_L(t)$ $\quad$ یعنی در دوطرفه‌ها ؟

جمع یک سیگنال یک راست و یک چپ



فرض $\sigma_R < \sigma_L$

اگر $\sigma_R > \sigma_L$ باشد ← تبدیل لاپلاس نداریم

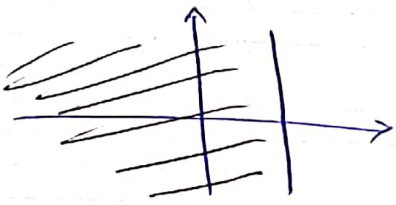
یعنی جمع کنیم $Re\{s\} < 2$ را با $Re\{s\} > 6$ ← اشتراک ندارند ← لاپلاس نداریم

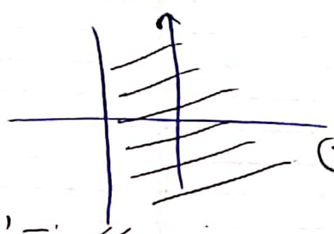
---

⑧ ROC در تبدیل لاپلاس هایی که به صورت کسر گویا هستند ناحیه‌ای محدود به دو قطب و یا محدود به یک قطب و گسترش یافته به سمت بی‌نهایت (چپ یا راست) است.

⑨ ROC ← سیگنال سمت راستی ← ناحیه‌ای سمت راست با بزرگترین قطب

← سمت چپی ← سمت چپ با کوچکترین قطب





* یادت باشد که قطب‌ها نباید توی ROC باشند *

خواص تبدیل لاپلاس

① خطی بودن

$ax_1(t) + bx_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} aX_1(s) + bX_2(s)$

ROC شامل $R_1 \cap R_2$

② انتقال زمانی

$x(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} e^{-st_0} X(s)$

$ROC = R$ (ناحیه همگرایی همان قبلی است)

③ انتقال در حوزه فرکانسی

$e^{s_0 t} x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s - s_0)$

$ROC = R + Re\{s_0\}$

④ تغییر مقیاس زمانی

$x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right)$

ROC = aR

⑤ مزدوج گیری

$x^*(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X^*(s^*)$

اگر $x(t)$ حقیقی باشد

① $x(t) = x^*(t)$

② $X(s) = X^*(s^*)$

⑥ خاصیت کانولوشن

$x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s) . X_2(s)$

ضرب می‌شوند ROC شامل $R_1 \cap R_2$

⑦ مشتق‌گیری در حوزه زمان

$\frac{d}{dt} x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} sX(s)$ $\quad$ ROC شامل R

خواص ناحیه همگرایی در تبدیل لاپلاس

① ROC همواره به صورت نواری موازی با محور $j\omega$ است ← باید $x(t)e^{-\sigma t}$ مطلقاً انتگرال پذیر باشد

در صفحه‌ی s

فقط به مقدار σ بستگی دارد

یعنی $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|e^{-\sigma t}dt<\infty$

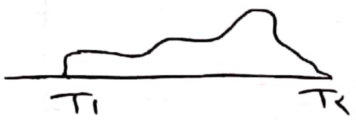
محدود باشد

② اگر X(s) به فرم کسر گویا باشد ← هیچ کدام از قطب‌هایش نباید درون ROC باشند

③ سیگنال با عرض زمانی محدود و مطلقاً انتگرال پذیر ← ROC = کل صفحه‌ی s

(چون مقدار قطب‌ها به بی‌نهایت میل می‌کند در محل X(s))

در حوزه‌ی t محدود باشد



$\int_{T_1}^{T_2}|x(t)|dt<\infty$

④ دقت کن ممکن است یک سری هم ریشه صورت با قطب مخرج باشد

باید ساده‌سازی کنی

$$\frac{1-e^{-(s+a)T}}{s+a}$$

$s=-a$ → صورت و مخرج صفر می‌شوند → باید ساده شود این ریشه

مشتق می‌گیریم

$$\lim_{s\to -a}\left[\frac{\frac{d}{ds}\left(1-e^{-(s+a)T}\right)}{\frac{d}{ds}(s+a)}\right]=\frac{-(e^{-aT})(-T)e^{-sT}}{1}=$$

$$Te^{-(a+s)T}\xrightarrow{a=-s}\boxed{T}$$

یعنی جواب لاپلاس سیگنال x(t)، T محدود است ← ناحیه همگرایی = کل صفحه‌ی s

⑤ اگر x(t) سیگنال سمت راستی باشد ← مقدار سیگنال قبل از یک مقداری مثل T_1 صفر است

← همه‌ی مقادیر s که $Re\{s\}>\sigma_0$ است، ناحیه همگرایی از یک مقدار مشخص به بعد می‌شود

در ROC هستند

⑥ اگر x(t) ~ چپی ~ ← ~ بعد از ~ T_1 ~

همه مقادیر s که $Re\{s\}<\sigma_0$ هستند، در ROC قرار دارند.

ROC ← سمت چپی، نیم صفحه‌ای سمت چپی است.

~ ~ راستی ؟ ~ ~ راست ~

⑦ x(t) سیگنال دوطرفه باشد ← اگر خط $Re\{s\}=\sigma_0$ توی ROC باشد ← ROC یک نوار از صفحه‌ی s است که شامل خط σ_0 است.

⑤ سیستم تغییرناپذیر با زمان (time independent) یا (TI)

خواص سیستم‌ها

سیستمی که هرنوع شیفت زمانی در سیگنال ورودی ⟵ دقیقا در سیگنال خروجی

ظاهر شود

رفتارش مستقل از مبدا زمان است

$$y(t) = T\{x(t)\} \rightarrow$$

$$T\{x(t-t_0)\} = y(t-t_0) \quad \forall t_0$$

سیستم انتقال زمانی را با Z_{t_0} نشان می‌دهیم

$$Z_{t_0}\{x(t)\} = x(t-t_0)$$

سیستم $y(t) = T\{x(t)\}$ یک TI است (اگر و تنها اگر)

$$T\{Z_{t_0}\{x(t)\}\} = Z_{t_0}\{T\{x(t)\}\}$$

اول شیفت دهیم بعد بدیم تو سیستم = اول بریم تو سیستم بعد شیفت دهیم

رابطه ① $T\{Z_{t_0}\{x(t)\}\} = T\{x(t-t_0)\} = |x(t-t_0)|^{\wedge}$

رابطه ② $Z_{t_0}\{T\{x(t)\}\} = Z_{t_0}\{|x(t)|^{\wedge} \text{ مثلا}\} = |x(t-t_0)|^{\wedge}$ ⟹

مساوی‌اند پس ⟵ TI است

مثال:

$$y(t) = T\{x(t)\} = x(\alpha t) \quad \text{به جای } t \text{ بذار } \alpha t$$

$$T\{Z_{t_0}\{x(t)\}\} = T\{x(t-t_0)\} = x(\alpha t - t_0)$$

$$\neq$$

$$Z_{t_0}\{T\{x(t)\}\} = Z_{t_0}\{x(\alpha t)\} = x(\alpha t - \alpha t_0)$$

پس سیستم TI نیست ✗

به جای t بذار $(t-t_0)$

نه جمع پذیر است

سیستم $y[n] = a x[n] + b$ خطی نیست ⟵ نه همگن

⑥ سیستم خطی یا غیرخطی ⟵ سیستم خطی یعنی پاسخ سیستم به هر ترکیب خطی =

ترکیب خطی پاسخ سیستم به ورودی‌ها

$$T\{\sum_{k=1}^{N} \alpha_k x_k(t)\} = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k T\{x_k(t)\} = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k y_k(t)$$

سیستم خطی یعنی ۲ تا خاصیت دارد ⟵ ① جمع پذیری یعنی

$$T\{x_1(t) + x_2(t)\} = T\{x_1(t)\} + T\{x_2(t)\}$$

② همگنی یعنی

$$T\{a x(t)\} = a T\{x(t)\}$$

✱ اگر پاسخ سیستم به ورودی صفر، صفر نشد ⟵ ناهمگن است ✱

$$\rightarrow \boxed{T\{0\} = 0} ✱$$

سیستم انتگرال گیری ⟵ وارون ⟵ مشتق گیری و سیستم تفاضل وارون ⟵ سیستم جمع کننده اند

در پیوسته ها — گسسته ها

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{\text{وارون}} w(t) = \int_{-\infty}^{t} y(\lambda)\, d\lambda = \underset{x(t)}{\text{وارون}}$$

$$y[n] = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} x[K] \xrightarrow{\text{وارون}} w[n] = y[n] - y[n-1]$$

---

③ سیستم علی ⟵ اگر خروجی سیستم فقط تابعی از ورودی در زمان حال یا گذشته باشد ⟵ علی

به آینده ربطی نداشته باشد (پیش بینی نمی تواند بکند)

سیستمی که علی نیست ⟵ غیرعلی (با ضد علی فرق داره!)

اگر دو ورودی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ به یک سیستم علی برای کلیات $t < t_0$ یکسان باشند ⟵ خروجی های $y_1(t)$ و $y_2(t)$ هم حتما برای $t < t_0$ یکسان اند. و بعدش متفاوت

همه سیستم های بدون حافظه، علی (برعکس نه!)

مشتق گیری و انتگرال گیری ⟵ علی

خواص سیستم ها

④ سیستم پایدار: اگر ورودی سیستم پایدار یا محدود یا کران دار باشد ⟵ خروجی های محدود تولید کند

$$\underbrace{|x(t)| \le M < \infty}_{\text{ورودی کراندار}} \longrightarrow \underbrace{|y(t)| \le N < \infty}_{\text{خروجی هم کراندار}}$$

مثال: $y(t) = t\,x(t)$ ⟵ اگر $x(t) = u(t)$ ⟵ $|x(t)| \le 1$

$y(t) = t\,u(t) \xrightarrow{\text{اگر } t\to\infty} \boxed{y(t)\to\infty}$: ناپایدار

مثال ۲: $y[n] = \sum_{K=-\infty}^{n} x[n] \xrightarrow[x[n]=u[n]]{\text{اگر}} |x[n]| \le 1$ ⟵

$$y[n] = \sum_{K=-\infty}^{n} u[K] = (n+1)u[n] \xrightarrow[\text{بدل}]{n\to\infty} \boxed{y[n]\to\infty}$$

ناپایدار

نکته: $|a+b| \le |a| + |b|$ مهم

(تحلیل سیستم های LTI با تبدیل لاپلاس)

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$Y(s) = X(s) . H(s) \longrightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

$y(t) = Y(s)$ وارون

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \rightarrow h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$$

تابع سیستم یا تابع انتقال

شرط دیگر وقتی $t<0$ الزاما $h(t)=0$

① علیت: شرط لازم علی بودن سیگنال سمت راستی باشد $Re\{s\} > K$

شرط لازم و کافی: وقتی $H(s)$ یک کسر گویا است ROC آن سمت راستی باشد و از چپ به بزرگترین قطب (بیشترین مقدار حقیقی) محدود باشد

ضدعلی: شرط لازم ضدعلی بودن سیگنال سمت چپی باشد $Re\{s\} < K$

و شرط دیگر برای $t>0 \rightarrow h(t)=0$ شود

② پایداری: $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < \infty$

شرط لازم و کافی پایداری LTI: ROC تابع $H(s)$ شامل محور $j\omega$ در صفحه s باشد

سیگنال سمت راستی باشد

شرط پایداری برای LTI های علی با $H(s)$ به صورت کسر گویا:

تمام قطب‌های $H(s)$ دارای بخش حقیقی منفی باشند.

یعنی قطب‌ها در نیم صفحه چپ صفحه s باشند

خواص سیستم های LTI طبق تابع سیستم

تابع سیستم در معادلات دیفرانسیل

$$H(s) = \frac{\{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k\}}{\{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k\}} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$\sum_{k=0}^{M} b_k s^k = 0$ صفرهای $H(s)$

$\sum_{k=0}^{N} a_k s^k = 0$ قطب‌های $H(s)$

مثال: $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$ ، s^2+3s+2

معادله دیفرانسیل به کمک لاپلاس

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \longrightarrow \left(\sum_{k=0}^{N} a_k s^k\right) Y(s) = \left(\sum_{k=0}^{M} b_k s^k\right) X(s)$$

$$H(s) = \mathcal{L}^{-1}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-st}\, dt$$

★ $H(s)$ به تنهایی اطلاعات کامل ← باید در راستای ویژگی های علی/غیرعلی/ضدعلی و پایداری/ناپایداری ← ROC را پیدا کنیم.

سیستم خطی $y_2[n] - y_1[n] = a(x_2[n] - x_1[n])$ ← تفاضل خروجی ها نسبت به

تفاضل ورودی ها خطی اند

برای هر سیگنال زمان گسسته دلخواه

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k] \triangleq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta_k[n]$$

$$\delta[n+2] = \delta_{-2}[n]$$
$$\delta[n+1] = \delta_{-1}[n]$$

اگر $x[n] = u[n]$ ⇐

$$x[n] = u[n] = \begin{cases} 0 & n<0 \\ 1 & n\geq 0 \end{cases}$$

$$= \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \ldots$$

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]\,\delta[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} \cancel{u[k]}\,\delta[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k[n]$$ یعنی $$\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k[n]$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow y[n]$$

جمع کانولوشن

$$y[n] = T\{x[n]\} = T\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta_k[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,T\{\delta_k[n]\}$$

طبق خطی بودن

پاسخ سیستم خطی به ضربه واحد در $n=k$ $= h_k[n] = T\{\delta_k[n]\}$

پاسخ به $\delta[n-k]$ $= h_k[n]$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h_k[n]$$

پاسخ یک سیستم خطی به یک ورودی دلخواه = ترکیب خطی پاسخ های ضربه به ورودی های مختلف

وزن پاسخ ضربه　　　پاسخ ضربه

مثلاً $\delta[n+1] + 2\delta[n+1] - 3\delta[n]$

پاسخ ضربه سیستم ، جواب سیستم به ورودی ضربه واحد در $n=0$:

$$T\{\delta[n]\} = h[n]$$

با معلوم بودن $h[n]$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k] = x[n] * h[n]$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]$$

$h[-k]$ معکوس شده پاسخ ضربه در محور زمان است

$$y[3] = x[k] \times h[3-k]$$
$$y[2] = x[k] * h[2-k]$$

★ تکنیک:

برای پیدا کردن $y[n]$ که در هر تو توان $h[n]$ و $x[n]$ را می‌دهد ←

اول $h[n-k]$ را رسم کن بعد $x[k]$ و بعد $h[n-k]$ را به ازای مقادیر مختلف n که روی محور k ها بلغزان ← با انتقال های مختلف که نقاط هم پوشانی به دست بیاد.

★ تست:

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^n = \sum_{k=0}^{n} a_1 r^k$$

مساوی = $a_1 \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = \int_{-t}^{\infty} \delta(\lambda)\, d\lambda = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$$ ★ نکته ★

(انتگرال ضربه ← پله)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h_\tau(t)\, d\tau \rightarrow$$ (انتگرال کانولوشن)

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$h(t) = T\{\delta(t)\}$ پاسخ سیستم LTI به ورودی ضربه واحد $= h(t)$

پاسخ ضربه سیستم

($h(-\tau)$ ← معکوس می‌کنه و به اندازه‌ی t شیفت داده می‌شه)

$$\sum_{n=m_1}^{m_2} a^n = \frac{a^{m_1} - a^{m_2+1}}{1-a} \qquad a \neq 1$$

★ مهم ★

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} sX(s)\,ds \longleftarrow x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}\,ds$$

---

⑧ مشتق گیری در حوزه فرکانس

$$-t\,x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{dX(s)}{ds} \qquad ROC = R$$

* منفی *

⑨ انتگرال گیری در حوزه زمان

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}X(s)$$

ROC شامل $R \cap \{Re\{s\} > 0\}$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau = u(t) * x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}X(s)$$

ادامه خواص تبدیل لاپلاس

⑩ مقدار اولیه : اگر $t<0$ باشد و $x(t)=0$ و $x(t)$ شامل ضربه یا مراتب بالاتر ضربه در مبدأ نداشته باشد

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$$

مقدار نهایی : ~ و $x(t)$ یک مقدار محدود در $t\to\infty$ داشته باشیم

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

تبدیل لاپلاس معکوس ← کلی

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}\,ds$$

کسرهای گویا

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

درجه‌ی صورت $= m$

درجه مخرج $= n$

اگر $m>n$ باشد ← کسر نامناسب ← باید مناسب کنیم

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \underbrace{Q(s)}_{} + \frac{R(s)}{D(s)} \qquad deg\{R(s)\} < deg\{D(s)\}$$

$q(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\}$ کسر مناسب

حالا برای کسرهای مناسب به فرم

$$X(s) = \frac{KN(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{s-p_i}$$

ROC_x و

(ROC_x اشتراک همه‌ی ROC ها)

(p_i زمانی تکی قطب) $A_i = (s-p_i)X(s)\Big|_{s=p_i}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A_i}{s-p_i}\right\} = \begin{cases} A_i e^{p_i t}u(t) & Re\{s\} > Re\{p_i\} \text{ سمت راستی} \\ -A_i e^{p_i t}u(-t) & Re\{s\} < Re\{p_i\} \text{ سمت چپی} \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

اگر $X(S)$ قطب تکراری داشته باشد ← $X(S)$ قطب تکراری P_1 را از مرتبه n_1 داشته باشد و بقیه قطب ها ساده باشند.

$$X(S)=\frac{KN(S)}{(S-P_1)^{n_1}(S-P_2)\text{——}(S-P_r)}$$

P_i قطب های ساده مانده $i\geq 2$ ⟶ $\Delta_i=(S-P_i)X(S)\Big|_{S=P_i}$

اما برای اونهایی که تکراری اند

$$B_{n_1}=(S-P_1)^{n_1}X(S)\Big|_{S=P_1}$$

$$B_{n_1-1}=\frac{d}{ds}\left[(S-P_1)^{n_1}X(S)\right]\Big|_{S=P_1}$$

یک بار مشتق از این می گیریم

$$B_{n_1-2}=\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}[\text{همون عبارت}]$$

۲ بار مشتق $\frac{1}{2}\times$

در نهایت فرمولی (که یعنی تو n بار مشتق بگیری بعد تقسیم به n فاکتوریل) ←

$$B_j=\frac{1}{(n_1-j)!}\left(\frac{d}{ds}\right)^{n_1-j}\left[(S-P_1)^{n_1}X(S)\right]\Big|_{S=P_1}$$

کسر — مرتبه مشتق — همون عبارت اولیه اند

$$x(t)=\sum_i a_i x_i(t)$$

(سری فوریه)

اگر ورودی $x(t)$ را بشه به صورت ترکیبی خطی از سیگنال های پایه $x_i(t)$ نوشت و پاسخ سیستم LTI به $x_i(t)$ را $y_i(t)$ بنامیم ←

$$y(t)=\sum_i a_i y_i(t)$$

← $y_i(t)$ ها هم سیگنال پایه می شوند

$x_i(t)$ ← تابع ویژه یک سیستم

اگر پاسخ سیستم به آن ضریب ثابتی از $x_i(t)$ باشد

$$T\{x_i(t)\}=\lambda_i x_i(t)$$

ثابت مختلط λ_i ⟶ مقدار ویژه

توابع نمایی مختلط $x(t)=e^{st}$ توابع ویژه ی هر سیستم LTI اند.

$$y(t)=H(S)\cdot x(t)$$

مقدار ویژه متناظر هم $H(S)$

تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه سیستم یا $\boxed{\text{تابع سیستم}}$

$$a_1e^{s_1t}\rightarrow a_1H(S_1)e^{s_1t}$$

$$a_2e^{s_2t}\rightarrow a_2H(S_2)e^{s_2t}$$

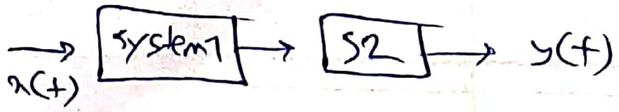
دو سیگنال متناوب پایه

$$x(t)=\cos\omega_0 t \qquad \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

$$x(t)=e^{j\omega_0 t}$$

نمایی مختلط

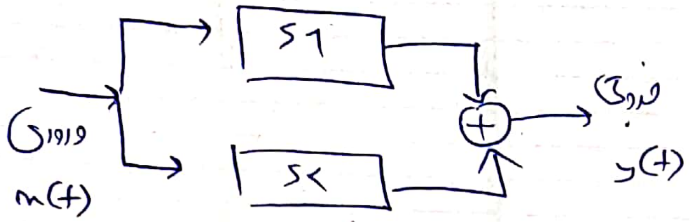
اتصال یا ترکیب سیستم ها



اتصال سری :

خروجی سیستم ۱ را می‌دهیم به عنوان ورودی سیستم 2 → $y(t)=T_2\{T_1\{x(t)\}\}$

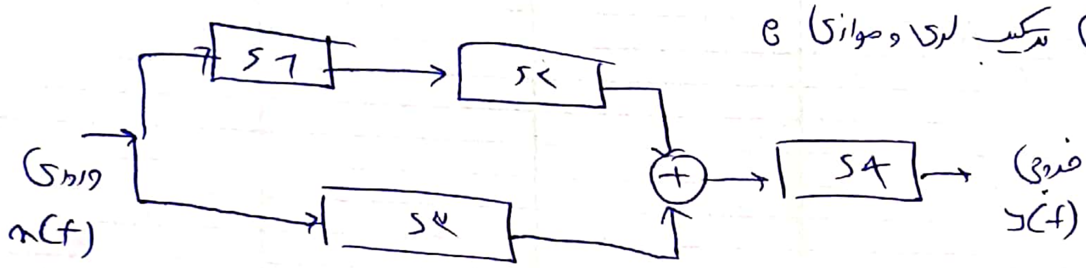
اتصال موازی



$y(t)=T_1\{x(t)\}+T_2\{x(t)\}$

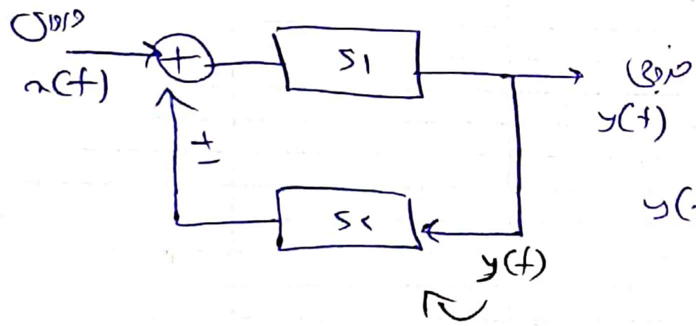
جمع خروجی سیستم ها

③ ترکیب سری و موازی :



$y(t)=T_4\{T_2\{T_1\{x(t)\}\}+T_3\{x(t)\}\}$

④ اتصال فیدبک



$y(t)=T_1\{x(t)\pm T_2\{y(t)\}\}$

ویژگی های سیستم ها

① سیستم حافظه دار یا بدون حافظه

بدون حافظه : خروجی سیستم در هر لحظه وابسته به ورودی در همان لحظه

حافظه دار : به قبل یا بعد هم وابسته باشد

مثل انتگرال ، مشتق ، سیستم های که انتگرال یا معادلات دیفرانسیل - انتگرال دارند

② سیستم های وارون پذیر :

$x_2(t)\neq x_1(t)\rightarrow y_2(t)\neq y_1(t)$

$y_2(t)=y_1(t)$

$x_2(t)=x_1(t)$

سیستم های همانی ← $y(t)=T\{x(t)\}=x(t)$

سیستم وارون پذیر است که ترکیب سری سیستم اصلی با وارون سیستم ، سیستم همانی شود.

مثلاً ژنراتور و کابل وارون پذیرند ← [illegible] توان الف)

سری فوریه و سیستم های LTI زمان پیوسته

$$y(t) = x(t) \cdot H(s)$$

اگر $h(t)$ را دارد ← $H(s)$ را پیدا کن با

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$x(t)$ را، فهمم که داریم از صورت سوال ← ضرایب $x(t)$ را پیدا کن

بعد در $H(s)$ ضرب کن

$$b_k = a_k H(jk\omega_0)$$

$y(t)$ ضرایب سری فوریه

$x(t)$ ضرایب

$$b_1 = a_1 H(j\omega_0)$$

$$b_2 = a_2 H(j\omega) \text{ , و —}$$

اگر $y(t)$ حقیقی باشد $b_k = b_{-k}^*$

---

* نکته e: اگر ضرایب سری فوریه یک سیگنال زمان پیوسته $x(t)$، متقارن باشد ←

سیگنال $x(t)$ فقط دنباله‌ای از ضریب توابع می‌شه ☆

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \longleftarrow a_k = |a_k|\, e^{+j\measuredangle a_k}$$

اندازه a_k ← $|a_k|$

فاز a_k ← $\measuredangle a_k$

ک.م.م دو کسر

ک.م.م صورت‌ها

بر م.م مخرج‌ها

$$\sum_{n=m_1}^{m_2} a^n = \begin{cases} \dfrac{a^{m_1} - a^{m_2+1}}{1-a} & a \neq 1 \\ m_1 + m_2 - 1 & a = 1 \end{cases}$$

مهم مهم

$$1 - e^{j2\pi(t-1)} = e^{j\pi(t-1)}\left[e^{-j\pi(t-1)} - e^{j\pi(t-1)}\right]$$

$$(-j)^k = \left(e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)^k$$

حالا می‌توان به $\sin(\pi(t-1))$ تبدیل کرد ☆

$$-1 = e^{-j\pi}$$

چون ← $(-1)^k = e^{-jk\pi}$

اگر a_k متقارن باشد ← $x(t)$ فقط شامل فرکانس‌ها /

اگر ضرایب سری فوریه زوج و حقیقی باشند ← $x(t)$ هم زوج و حقیقی می‌شود ☆

دستگاه اعداد مختلط

عدد مختلط

$z=(x,y)$ $\quad z=x+iy$ → قسمت موهومی

قسمت حقیقی

$Re\,z=x$

$Im\,z=y$

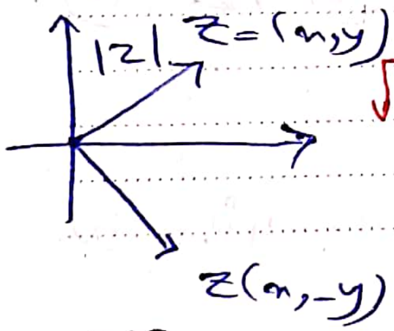
$i^2=-1$ $\quad i=\sqrt{-1}$

(۱) $z+w=(x+iy)+(a+ib)=(x+a)+i(y+b)$

(۲) $zw=(x+iy)(a+ib)=(xa-yb)+i(xb+ya)$

(C = مجموعه اعداد مختلط)

(۳) طول بردار (x,y) ← $\sqrt{x^2+y^2}=|z|$



(۴) $\bar{z}=z$ مزدوج $=x-iy$

$z\bar{z}=(x-iy)(x+iy)=x^2+y^2=|z|^2$

(۵) $z\bar{z}=|z|^2$

$|z|^2=x^2+y^2$

(۶) $\sqrt{x^2+y^2}=|z|=|\bar{z}|$

(۷) وارون عدد مختلط $z=x+iy$

$\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$

(۸) $\overline{zw}=\bar{z}\bar{w}$

(۹) $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$

(۱۰) $z+\bar{z}=2Re\,z$ $\quad z-\bar{z}=2i\,Im\,z$

$|zw| = |z||w|$ (۱۱)

نامساوی مثلث ☆☆

$||z|-|w|| \le |z \pm w| \le |z|+|w|$ (۱۲)

$|z\bar{w}| = |z||\bar{w}| = |z||w|$

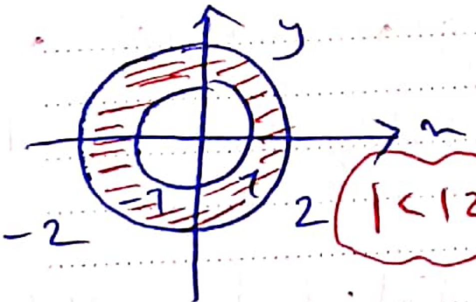
(۱۳) معادله دایره به مرکز (a,b) و شعاع R ←

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

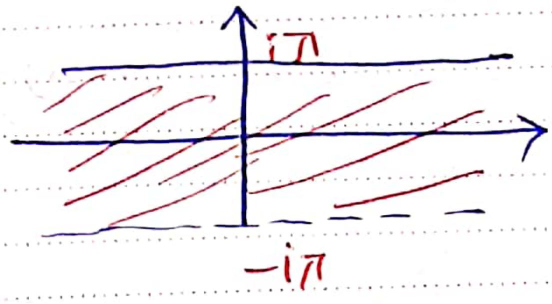
$z_0 = a+ib \qquad z = x+iy \qquad z - z_0 = (x-a) + i(y-b)$

$|z-z_0|^2 = R^2 \qquad |z-z_0| = R$

$= (x-a)^2 + (y-b)^2$



$1 < |z| \le 2$



(۱۴)

$-\pi < \operatorname{Im} z \le \pi$

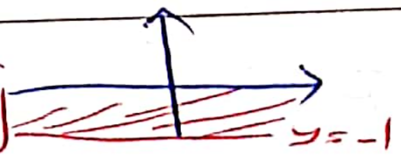
(۱۵) مجموعه نقاط $D = \{ z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re}(iz) \le 1 \}$ ☆☆

منفی

$z = x+iy \rightarrow i(z) = xi - y \rightarrow (-y) + xi \qquad 0 \le -y \le 1$

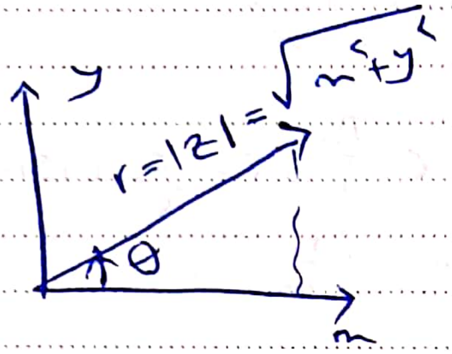
$-1 \le y < 0$ ←

(۲) نوار افقی



$\overline{i-z} = -i-\bar{z}$ $\quad$ $(i-z)(\overline{i-z}) = |i-z|^2$ (۱۶)

خلاصه‌ی قبلی اعداد مختلط



$\cos\theta = \frac{x}{r}$ $\quad$ $\sin\theta = \frac{y}{r}$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$

بین $(-\pi, \pi]$

تابع تک مقداری

آرگومان اصلی ← زاویه‌ای که بردار با جهت مثبت محور xها می‌سازد ← $\text{Arg } z$

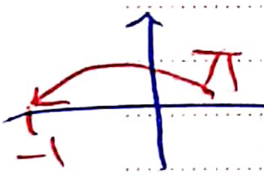
مقدار اصلی

$\arg z$

$\arg z$ ← آرگومان z

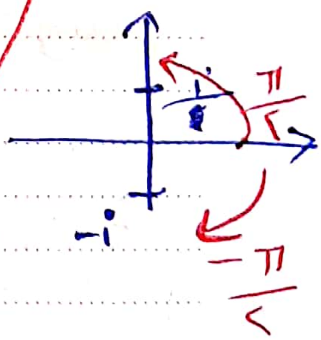
اگر $z=0$ → $\arg z$ تعریف نشده

تابع نیست



به ازای هر z، نامتناهی مقدار هست

تابع چند مقداری



$\arg(-1) = \pi + 2n\pi$

$\arg i = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$

$\text{Arg}(-1) = \pi$ $\quad$ $\text{Arg } i = \frac{\pi}{2}$

$z = \overset{r\cos\theta}{x} + i\underset{r\sin\theta}{y} = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} = z$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$z = |z| e^{i \arg z} = r e^{i\theta}$$

هر عدد مختلط
z را

نمایش قطبی z

$r = |z|$

$\theta = \arg z$

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 \qquad e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

$$z = 1 + i \rightarrow |z| = \sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\arg z = ? \quad \tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\star\ |e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

$$\arg(zw) = \arg z + \arg w \xrightarrow{\text{دقیق‌تر}} \arg z + \arg w + 2n\pi$$

$n \in \mathbb{Z}$

$$\arg(z_1 z_2 \cdots z_k) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + \cdots + \arg(z_k)$$

$$\arg(z^n) = n \arg(z)$$

اگر $z = re^{i\theta}$, $w = \rho e^{i\phi}$

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{\rho} e^{i(\theta - \phi)} \qquad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} = \frac{r}{\rho}$$

$$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \theta - \phi = \arg z - \arg w$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \qquad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

$$w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

$$z^n = 1 \xrightarrow[\text{ام } n]{\text{ریشه های}} \underbrace{k = 0, 1, \ldots, n-1}_{\text{ضرب های متعارف}}$$

$$z^4 = 1 \longrightarrow z = 1, w, w^2, w^3 \qquad w = e^{\frac{2i\pi}{n}} \xrightarrow{n=4}$$

$$w = e^{\frac{2i\pi}{4}} = \underbrace{e^{\frac{i\pi}{2}} = i}_{} \longrightarrow \underbrace{z = 1, i, -1, -i}_{\text{۴ تا ریشه}}$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$e^{z+w} = e^z e^w \qquad e^{z-w} = e^z e^{-w} = \frac{e^z}{e^w}$$

$$e^{z+2i\pi} = e^z \underbrace{e^{2\pi i}}_{1} = \boxed{e^z}$$

تابع e^z یک تابع تناوبی با دوره تناوب $2\pi i$ است ←

$$e^z = e^w \Longleftrightarrow e^{z-w} = 1 \longrightarrow z - w = 2n\pi i$$
$$n \in \mathbb{Z}$$

$$w = f(z) \Longleftrightarrow z = f^{-1}(w) = \ln|w| + i\arg w$$
تابع چندمقداری

$$f^{-1}(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z \longleftarrow$$ شاخه اصلی تابع لگاریتم مختلط

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z \qquad \ln z = \ln|z| + i\theta, \quad \theta = \arg z$$

$$\ln z = \ln r + i\theta \xleftarrow{\text{اگر } z = re^{i\theta}} \alpha < \theta < \alpha + 2\pi$$

نکته

$\ln i = \ln|i| + i\arg i = 0 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2$

$\ln 1 = 0$

شاخه اصلی

$\operatorname{Ln} i = \frac{i\pi}{2}$

$\ln(-4) = \ln|-4| + i\arg(-4) = \ln 4 + i(\pi + 2n\pi)$

$e^{\ln z} = e^{\ln|z| + i\arg z} = \underbrace{e^{\ln|z|}}_{|z|} e^{i\arg z} = z$

$e^{\ln z} = z$

$\ln e^z = \ln|e^z| + i\arg(e^z) = \ln(e^x) + i(y + 2n\pi)$

$= x + i(y + 2n\pi) = z + 2n\pi i$

لزوما برقرار نیست $\operatorname{Ln} e^z = z$ رابطه

$\ln e^z = z + 2n\pi i$

$\ln(zw) = \ln z + \ln w \rightarrow \ln(zw) = \ln z + \ln w + 2n\pi i$

$\ln\left(\frac{z}{w}\right) = \ln z - \ln w \rightarrow \ln\left(\frac{z}{w}\right) = \ln z - \ln w + 2n\pi i$

روابط بالا لزوما برای "Ln" برقرار نیست

$$i^i = e^{i\ln i} = e^{i(\ln|i| + i\,Arg(i))}$$

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$$

$$= e^{i(i\frac{\pi}{2})} = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$\ln \alpha^\beta = \ln e^{\beta \ln \alpha} = \beta \ln\alpha + 2n\pi i$$

رابطه‌ی $\ln \alpha^\beta = \beta \ln \alpha$ لزوماً برقرار نیست.

(توابع مثلثاتی و هذلولوی مختلط)

۱) $\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$

۲) $\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$

۳) $\cosh(-z) = \cosh z$

۴) $\sinh(-z) = -\sinh z$

۲۱ | آذر جمعه | ۱۴۴۲ ربیع الثانی ۲۵ | 11 DEC 2020

۵) $\cosh(z+w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w$

۶) $\cosh(z-w) = \cosh z \cosh w - \sinh z \sinh w$

۷ و ۸) $\sinh(z \pm w) = \sinh z \cosh w \pm \sinh w \cosh z$

۹) $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ توابع مثلثاتی مختلط cos و sin

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$ جمع $2i$

۷) $\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) = -\sin z$

رابطه‌ی بین توابع مثلثاتی و هذلولوی

$$\cosh(iz) = \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

$$\frac{1}{i} = -i$$

$$\sinh(iz) = i\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = -i\sinh(iz)$$

$$\sin(iz) = i\sinh z$$

$$e^{2iz} = 1 = e^{0} \longrightarrow 2iz = 0 + 2n\pi i \longrightarrow z = n\pi$$

$$\sin z = \underbrace{\sin x\cosh y}_{u(x,y)} + \underbrace{i\cos x\sinh y}_{v(x,y)}$$

$$\cos z = \underbrace{\cos x\cosh y}_{u(x,y)} - \underbrace{i\sin x\sinh y}_{v(x,y)}$$

$\cos(iy) = \cosh y$ و $\sin(iy) = i\sinh y$

معادله‌ی $\left|\frac{z-3i}{z+i}\right| = 1$ ⟵ یک خط $y=1$ می‌شود

$|z-3i| = |z+i| \xrightarrow[\text{به توان ۲}]{\text{دو طرف}}$ حل می‌کنیم

مکان هندسی $|z|^2 + 2Re(z^2) = 4$ ⟵ $x^2 - \frac{y^2}{3} = \frac{4}{3}$ ⟵ هذلولوی

۸

* معادله‌ی $\left|\frac{z+i}{z-i}\right| = \sqrt{2}$ ← دایره

* $|z-1-3i|^2 = (x-1)^2+(y-3)^2$

$z_0 = 1+3i$

معادله‌ی $|z-1|+|z+1| = 2\sqrt{2}$ ← بیضی

* تابع $f(z) = \operatorname{Arg} z$ روی نیم‌محور حقیقی منفی پیوسته نیست.

$\{z = x+iy \mid y=0, x\leq 0\} = \{z \mid \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \leq 0\}$

$= \{z \mid \operatorname{Arg} z = \pi\}$

* شاخه اصلی لگاریتم $(\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z)$ روی نیم‌محور حقیقی منفی و صفر پیوسته نیست

* تابع $\operatorname{Arg} z$ در صفر تعریف نشده است.

اگر تابع مختلط $f(z)$ در همسایگی نقطه z_0 تعریف شده باشد

$$f'(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

اگر $f(z)$ در z_0 مشتق‌پذیر باشد ← $f(z)$ در z_0 پیوسته است.

$(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$

$(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$

$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2}$

$(g\circ f)'(z) = g'(f(z))\, f'(z)$

قاعده هوپیتال

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} \begin{cases} 0 & m>n \\ \infty & m<n \\ \dfrac{f^{(m)}(z_0)}{g^{(m)}(z_0)} & m=n \end{cases}$$

$g(z), f(z)$ مشتق‌پذیر باشند

معادلات کشی ریمان: $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ (در همسایگی)

$z_0 = x_0 + iy_0$ تحلیلی باشد، $f'(z_0)$ وجود داشته باشد ←

$$f'(z_0) = f_x(z_0) \qquad f'(z_0) = -i f_y(z_0)$$

$$\boxed{f_x(z_0) = -i f_y(z_0)} \rightarrow \begin{cases} u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0) \end{cases}$$

$$f_x = -i f_y \quad \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

$$e^z = \underbrace{u(x,y)}_{e^x \cos y} + i\underbrace{v(x,y)}_{e^x \sin y} \quad \begin{cases} u_x = e^x \cos y \\ u_y = -e^x \sin y \end{cases}$$

(1)

$u_y = -v_x$ ، $u_x = v_y$ (2)

(3) $$\frac{d}{dz} e^z = u_x + i v_x = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z$$

تابع تام ← هرگاه در هر نقطه‌ای صفحه‌ی مختلط مشتق بپذیرد (مثل e^z)

در همه جا مشتق دارد

$$(e^{f(z)})' = f'(z) e^{f(z)}$$

$\sinh z$, $\cosh z$

$\sin z$, $\cos z$ ← تابع تام

کشی ریمان $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \rightarrow f_x = -i f_y$

~~[illegible]~~

با مشتق

★ روش انتگرال گیری جزء به جزء (جدولی)

وقتی ها به صفر برسد

$$\int x^2 \sin x \, dx$$

$$-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$$

x^2	$\sin x$
$2x$ (+)	$-\cos x$
2 (−)	$-\sin x$
0 (+)	$\cos x$

جواب

$$A = \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \underbrace{\int e^x \cos x \, dx}_{A}$$

مشتق	انتگرال
e^x (+)	$\cos x$
e^x (−)	$\sin x$
e^x (+)	$-\cos x$

جواب

$$2A = e^x(\sin x + \cos x)$$

قسمتش میکنیم

یه مقداری از سطر ای اونا انتگرال اش

به جای این را میگذاریم

(۵ تار نیمه متناهی)

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \qquad 0 < x < +\infty,\ t > 0$$

$$u(0,t) = 0$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$u_t(x,0) = g(x)$$

$$u(x,t) = \varphi(x+at) + \psi(x-at) \qquad (1)$$

$$0 \le x < \infty \qquad (2)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x g(\tau)\,d\tau + \frac{k}{2} \qquad (3)$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x g(\tau)\,d\tau - \frac{k}{2}$$

حالت ① $\leftarrow x - at > 0 \leftarrow$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+at) + f(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(\tau)\,d\tau ,$$

حالت ② $x - at < 0 \leftarrow at - x > 0$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+at) - f(at-x)\right] + \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at} g(\tau)\,d\tau$$

چک کن اگر سؤال شکل ارائه داد ← ① با فرمول $f(x)$ و $\psi(x)$

$$u_x(x,t) = f'(x+at) + \psi'(x-at) \xrightarrow{\text{[illegible]}} \psi(x-at)$$ را پیدا کن

(روش دالامبر در حل معادله موج نامتناهی)

① نامتناهی

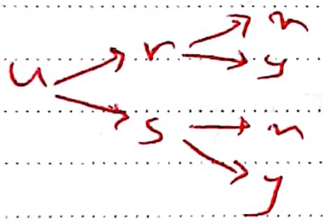
$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \qquad -\infty < x < +\infty \quad t>0$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$u_t(x,0) = g(x)$$

① تغییر متغیر → $s = x+at, \quad r = x-at$

$s_x = 1 \qquad r_x = 1$



② $u(x,t) = \varphi(x+at) + \psi(x-at)$ ★★

از جواب ۲ → $\varphi(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds + \frac{k}{2}$

$$\psi(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds - \frac{k}{2}$$

$$\rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+at) + f(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)\,ds$$

معادله لاپلاس در مختصات قطبی

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0$$

$$u(a,\theta)=f(\theta)$$

$$\boxed{u(r,\theta)=R(r)f(\theta)}\longrightarrow R''f+\frac{1}{r}R'f+\frac{1}{r^2}Rf''=0$$

$$\frac{r^2R''+rR'}{R}=-\frac{f''}{f}=\delta$$

$$\longrightarrow\begin{cases}r^2R''+rR'-\delta R=0 & \text{معادله اویلر}\\ f''+\delta f=0\end{cases}$$

حالت‌ها ① $\delta=0 \rightarrow f''=0 \leftarrow$

$$f(\theta)=c_1+c_2\theta\longrightarrow R(r)=a_1+a_2\ln r$$

حذف a_2 ، $r\to 0^+$ باشد

② $\delta=-\lambda^2 \longrightarrow f''-\lambda^2f=0$

$$f(\theta)=c_1\cosh\lambda\theta+c_2\sinh\lambda\theta$$

اگر f نسبت به θ تناوبی باشد $\longrightarrow \boxed{c_1=c_2=0}$

$R_n(r)=r^n$

اگر $r\to 0^+$

حالت ③ $\delta=\lambda^2$ ، $f(\theta)=c_1\cos\lambda\theta+c_2\sin\lambda\theta$

حل اشتورم لیوویل

$$f''+\delta f=0$$
$$f(\pi)=f(-\pi)$$
$$f'(\pi)=f'(-\pi)$$

$$R(r)=c_1r^n+c_2r^{-n}$$

$\mu = \frac{1}{p(x)} e^{\int \frac{Q(x)}{p(x)} dx}$ تابع وزن ☆

اگر معادله $x^2 y'' + xy' + \delta y = 0$

اگر $\boxed{u_{tt} = u_{xx}}$, $u(x,t) = X(x)\,T(t)$

$\rightarrow \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\delta$

$\begin{cases} X'' + \delta X = 0 \\ X(0) = 0 ,\ X(\pi) = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} T'' + \cancel{\delta} T = 0 \quad (n^2 T) \\ T(0) = 0 \end{cases} \rightarrow T_n(t) = \sin nt$

$\delta_n = n^2 ,\ X_n(x) = \sin nx$ جای گذاری کن

$\delta = n^2$

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nt \sin nx$

$C \cdot S n x \rightarrow ((-1)^n - 1)$

اگر $u_t = u_{xx}$

$X''(x)T(t) = X(x)T'(t)$

$\rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = -\delta \rightarrow \begin{cases} X'' + \delta X = 0 \\ X'(0) = 0 \\ X'(1) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} T' = -\delta T \\ T(t) = c e^{-\delta T} \end{cases}$

انتگرال فوریه ـــــ یک تابع پیوسته‌ی قطعه‌ای

در فاصله‌ی $(-\infty, +\infty)$

$f(x)$ در این فاصله مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد ← $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx$ وجود داشته باشد

انتگرال فوریه = $f(x) \sim \int_0^{+\infty}(A_\alpha\cos\alpha x + B_\alpha\sin\alpha x)\,d\alpha$

ضریب انتگرال فوریه

$A_\alpha = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\alpha x\,dx \qquad B_\alpha = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\alpha x\,dx$

انتگرال کسینوسی — انتگرال سینوسی

$$\frac{1}{2}\left[f(x^+)+f(x^-)\right] = \int_0^{+\infty}(A_\alpha\cos\alpha x + B_\alpha\sin\alpha x)\,d\alpha$$

اگر f در x پیوسته باشد ـــ انتگرال f در x به $f(x)$ همگرا است

$$f(x) = \int_0^{+\infty}(A_\alpha\cos\alpha x + B_\alpha\sin\alpha x)\,d\alpha$$

تابع: زوج ← انتگرال cos ✓ انتگرال sin ✗

فرد ← ~ ✗ ~ ~ ✓

$X''+\delta X=0 \quad 0<x<a$ — $\delta_n=\lambda_n^2=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$

$X(0)=0$

$X(a)=0$ — $X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{a} \quad n=1,2,\dots$

$X''+\delta X=0 \quad 0<x<+\infty$

$X'(0)=0$ ⟶ $X_\lambda(x)=\cos\lambda x$

$x\to+\infty$ و $X(x)$ کراندار

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2} \qquad \int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$e^{-ax} \quad \oplus \quad \cos bx$$
$$-ae^{-ax} \quad \ominus \quad \frac{\sin bx}{b}$$
$$a^2e^{-ax} \quad \frac{-\cos bx}{b^2}$$
$\oplus$ انتگرال

$$\longrightarrow \bar{e}^{ax}\frac{\sin bx}{b} - ae^{-ax}\frac{\cos bx}{b^2} - \int a^2 e^{-ax}\frac{\cos bx}{b^2}$$

$$2\cos x \cos \alpha x = \cos(1+\alpha)x + \cos(1-\alpha)x$$

رابطه اویلر $e^{it} = \cos t + i\sin t$

$$\int_0^{+\infty} \bar{e}^{ax}\cos bx\,dx + i\int_0^{\infty} \bar{e}^{ax}\sin bx\,dx = \int_0^{\infty} \bar{e}^{ax} e^{ibx}\,dx$$

حل معادلات با مشتقات جزئی همگن در حالت نامتناهی

تیپ ①

$u_t = a^2 u_{xx} \qquad -\infty < x < +\infty \qquad t > 0$

$x \to \pm\infty$ (پیوستگی) $\to u(x,t)$ کران‌دار

$u(x,0) = f(x)$

① $XT' = a^2 X'' T \to \frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\delta \to$

$X'' + \delta X = 0 \ , \ T' = -a^2\delta T$

② حل مسئله $\to \quad \delta = -\lambda^2 \to X'' - \lambda^2 X = 0 \to X(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}$

$\delta = +\lambda^2 \to X'' + \lambda^2 X = 0 \to X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$

③ $\xrightarrow{\lambda \text{ با } \delta}$ جایگذاری $\to \delta = \lambda^2 \to T' = -a^2\delta T \to \boxed{T = e^{-a^2\lambda^2 t}}$

④ $u(x,t) = \int_0^{+\infty} \bar{e}^{a^2\lambda^2 t}(A_\lambda \cos \lambda x + B_\lambda \sin \lambda x) \quad \lambda > 0$

$\longrightarrow$

$$A_\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x)\cos \lambda x\,dx$$

$\star \begin{cases} Y'' + \delta Y = 0 & y > 0 \\ y(0) = 0 \\ y \to +\infty \text{ (پیوسته)} \to Y(y) \text{ کران‌دار} \end{cases} \longrightarrow \boxed{\delta = \lambda^2 ,\ Y_\lambda(y) = \sin \lambda y}$

Scanned by CamScanner

تساوی پارسوال

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|f_n\|^2$$

$$\|f\|^2 = a_0^2\|1\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2\|\cos nx\|^2 + b_n^2\|\sin nx\|^2\right)$$

فرمول

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

سری مهم

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)^2}\right) = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}\right)^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1} = \frac{-\pi}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{12} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

سری فوریه سینوسی :

$$b_n = \frac{(f, \sin nx)}{\|\sin nx\|^2} \xrightarrow{\text{در }(0,\pi)} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

سری فوریه کسینوسی :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{(f(x), \cos nx)}{\|\cos nx\|^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

① $\|f\| = (f,f)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b [f(x)]^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$

② $\|f\| = 1 \rightarrow$ [illegible]

③ $\sin nx \sin mx = \frac{1}{2}[\cos(n-m)x - \cos(n+m)x]$

④ $\cos nx \cos mx = \frac{1}{2}[\cos(n-m)x + \cos(n+m)x]$

$\|1\|^2 = 2\pi$

$(-\pi, \pi)$ در فاصله ★

$\|\cos nx\|^2 = \pi$

$\|\sin nx\|^2 = \pi$

$\|1\|^2 = \pi \leftarrow (0, \pi)$ در فاصله

$\|\cos nx\|^2 = \frac{\pi}{2}$

$\|\sin nx\|^2 = \frac{\pi}{2}$

$c_n = \frac{(f, f_n)}{\|f_n\|^2}$ که $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x) = f(x)$ سری فوریه

سری فوریه مثلثاتی

$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

★★ $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

مرضوع: اشتورم لیوویل   تاریخ: / /

① $y'' + \lambda y = 0$, $0 < x < L$: $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$

$y(0) = 0$ و $\rightarrow$ $y_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L} x$

$y(L) = 0$

② $y'' + \lambda y = 0$, $0 < x < \pi$: $\lambda_0 = 0$, $y_0(x) = 1$

$y'(0) = 0$ $\rightarrow$ $\lambda_n = n^2$, $y_n(x) = \cos nx$

$y'(\pi) = 0$

③ $y'' + \lambda y = 0$, $-\pi < x < \pi$

$y(-\pi) = y(\pi)$ $\rightarrow$ $\lambda_n = \lambda n^2 = n^2$

$y'(-\pi) = y'(\pi)$, $y_n = \cos nx$ و $\sin nx$

اگر $y'' + \lambda y = 0$ $\rightarrow$ $r^2 + \lambda = 0$ $\rightarrow$ $r = \pm\sqrt{-\lambda}$

حالت ها $\rightarrow$ اول $\lambda = 0$ $\rightarrow$ $y(x) = c_1 x + c_2$

دوم $\lambda = -\lambda^2$ $\rightarrow$ $y(x) = c_1 \cosh \lambda x + c_2 \sinh \lambda x$

سوم $\lambda = \lambda^2$ $\rightarrow$ $y(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$

$X'' + \lambda X = 0$
$X(0) = 0$ $\rightarrow$ $\lambda_n = n^2$ و $X_n = \sin nx$ و $T'' + n^2 T = 0$
$X(\pi) = 0$, $T(0) = 0$ $\rightarrow$ $T_n(t) = \sin nt$

اگر بود $\rightarrow$ $T'' + n^2 T = 0$, $T'(0) = 0$, $T = \cos nt$

مجموعه کامل

$y'' + \lambda y = 0$

$y(-L) = y(L) \qquad -L < x < L$

$y'(-L) = y'(L)$

$\rightarrow \lambda_0 = 0 \quad y_0(x) = 1$

$\lambda_n = \lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$

$y_n = \cos\frac{n\pi}{L}x , \sin\frac{n\pi}{L}x$

$-L \leq x \leq L \quad \text{یا} \quad 0 \leq x \leq 2L$

$\|1\|^2 = 2L , \quad \|\cos(\frac{n\pi x}{L})\|^2 = L , \quad \|\sin(\frac{n\pi x}{L})\|^2 = L$

$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{1}{2L}\int_{0}^{2L} f(x)\,dx$

$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{L}\int_{0}^{2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$

$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{L}\int_{0}^{2L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$