بسمه تعالی

هوش مصنوعی

عدم قطعیت – ۱

نیمسال اوّل ۱۴۰۲-۱۴۰۱

دکتر مازیار پالهنگ
آزمایشگاه هوش مصنوعی
دانشکدهٔ مهندسی برق و کامپیوتر
دانشگاه صنعتی اصفهان

مقدمه

- هنگامی که عامل واقعیتهای کافی در مورد محیطش می داند روش منطقی عامل را قادر می سازد که طرحهائی را بدست آورد که ضمانت می دهند که کار کنند.
- در عمل اینگونه نیست.
- در این حالت، عمل تحت عدم قطعیت
- مثال دنیای دیو:
  - محیط نیمه مشاهده پذیر
  - عامل همیشه نمی داند کدام خانه گودال است
  - ممکن است مجبور به قبول ریسک شود

- قبلاً از فضای باور برای برخورد با عدم قطعیت استفاده می کردیم.
- مشکلات:
- فضای باور شامل همه حالتهای ممکن است که می تواند بسیار بزرگ بوده و شامل حالاتی باشد که کمتر احتمال وقوع دارند.
- ایجاد یک طرح اقتضائی که همه شرایط را در نظر بگیرد می تواند بسیار پیچیده باشد و شامل وضعیتهائی باشد که کمتر محتمل هستند.
- گاهی طرحی که صددرصد به هدف برسد وجود ندارد ولی باید کاری انجام داد. باید راهی برای مقایسه شایستگی چنین طرحهائی وجود داشته باشد.

- دنیای واقعی بسیار پیچیده تر
- فرض کنید عامل می خواهد کسی را به فرودگاه برساند تا به پرواز به موقع برسد.
- طرح A90: ترک خانه ۹۰ دقیقه قبل از پرواز و رانندگی با سرعت معقول
- اگرچه فرودگاه دور نیست ولی عامل با قطعیت نمی تواند نتیجه بگیرد که A90 او را به موقع به فرودگاه خواهد رساند.
- در واقع طرح A90 به فرودگاه می رساند، اگر خودرو خراب نشود، سوخت تمام نشود، هواپیما زودتر نرود، ...

- عامل منطقی که نتواند استنتاج کند که دنبالۀ اعمالی او را به اهدافش می رساند نمی تواند عمل کند.
- مثال: تشخیص بیماری، عیب یابی وسایل، ... دندان درد

$$Toothache \Rightarrow Cavity.$$

کرم خوردگی

- ولی همۀ دندان دردها به دلیل کرم خوردگی نیست.
- دلیلهای دیگر هم ممکن است:

$$Toothache \Rightarrow Cavity \vee GumProblem \vee Abscess \ldots$$

- تالی لیست نامحدودی از سببها

- قانون بصورت فوق، قانون تشخیصی گفته می شود.
- می توان قانون سببی نوشت:

$$Cavity \Rightarrow Toothache.$$

- همهٔ کرم خوردگیها باعث درد نمی شوند.
- لیست کردن تمام عواملی که کرم خوردگی باعث دندان درد می شود در مقدم قانون
- امکان این وجود دارد که کرم خوردگی و دندان درد هر دو وجود داشته باشند و به هم مربوط نباشند.

- منطق شکست می خورد به دلایل:
- **تنبلی:** کار زیاد برای کامل کردن لیست مقدم و تالی، سختی استفاده از چنین قانونی
- **نادانی نظری:** عمل پزشکی ممکن است به دانش کامل نرسیده باشد.
- **نادانی عملی:** حتی اگر همهٔ قانونها را بدانیم ممکن است در مورد بیمار خاصی همهٔ آزمونها انجام نشده یا نتواند انجام شود.

- در این حالت دانش عامل در بهترین حالت می تواند یک درجهٔ باور به جملات داشته باشد.
- بهترین ابزار: نظریهٔ احتمال
- مثال: احتمال آنکه بیماری کرم خوردگی دندان داشته باشد ۰،۸ است.
- عقاید بستگی به ادراکاتی دارد که عامل تا آن لحظه دریافت کرده است.
- با رسیدن ادراکات بیشتر، درجهٔ اعتقاد عامل تغییر می کند.

- ادراکات دلایلی را تشکیل می دهند که محاسبهٔ احتمالات بر اساس آنها انجام می گیرد.
- قبل از دریافت دلیل دربارهٔ احتمال پیشین یا بدون شرط صحبت می کنیم.
- بعد از دریافت دلیل دربارهٔ احتمال پسین یا شرطی صحبت می کنیم

عدم قطعیت و تصمیم معقول

- عامل منطقی هر طرحی که او را به هدفش برساند اجرا می کند.
- هر عمل بر حسب اینکه او را به هدفش می رساند قبول یا پذیرش می شود.
- عدم قطعیت وضعیت را تغییر می دهد.
- طرح A90 با احتمال ۹۵٪
- طرح A120 با احتمال ۹۸٪
- طرح A1440 (۲۴ ساعت قبل) با احتمال بیشتر
- کدام را عامل انتخاب کند؟

- انتخاب بستگی به ترجیح از دست دادن پرواز در مقابل زمان انتظار دارد.
- نظریهٔ سودمندی برای نمایش و استنتاج ترجیحها استفاده می شود.
- نظریهٔ تصمیم = نظریهٔ احتمال + نظریهٔ سودمندی

دستور زبان

- درجات باور به گزاره ها اعمال می شوند.
- عنصر بنیادی: متغیر تصادفی
- رجوع به بخشی از دنیا که وضعیت آن در ابتدا نامعلوم است.
- هر متغیر تصادفی دامنه ای دارد.
- بولی: همانند کرم خوردگی با دامنهٔ <درست، نادرست>
  - Cavity=true را با cavity نمایش می دهیم
  - Cavity=false را با ¬cavity نمایش می دهیم.

- گسسته: همانند هوا با دامنهٔ <آفتابی، بارانی، ابری، برفی>
- مقادیر دامنه منفصل و کامل هستند.
- Weather=snow را با snow نمایش می دهیم.
- پیوسته
- گزاره های بنیادی توسط رابطهای منطقی می توانند ترکیب شوند.
- مثال $Weather{=}sunny \wedge Cavity{=}false$
- نمایش $sunny \wedge \neg cavity$

متغیرها با اون مقادیری که بخودشون گرفتن دارن یه حالتی از دنیا را نشان میدن
پس اگه مثلا دوتا متغیرتصادفی داریم مثل
cavity , toothache
اگ فر ض کنیم هردو بولین باشن پس ۴تا حادثه ی اتمی داریم یعنی ۴ تا وضعیت میتونه دنیای ما داشته باشه

- حادثهٔ اتمی: یک مشخص نمودن کامل حالت دنیا که عامل در مورد آن نامطمئن است (یک مدل).
- تصور از حادثهٔ اتمی: انتساب مقادیر خاصی به همهٔ متغیرهائی که دنیا از آن ترکیب شده است.
- اگر دنیائی فقط شامل متغیرهای Cavity و Toothache باشد در این صورت فقط ۴ حادثهٔ اتمی وجود دارند.
- مجموعه همه دنیاهای ممکن: فضای نمونه (sample space)

احتمال هرحادثه اتمی

مجموع احتمال های همه ی حوادث اتمی یک میشه

یعنی حادثه اتمی دیگری نیست ک بتونه وجود داشته و باشه و توی فضای نمونه ما نباشه

- Ω: فضای نمونه و ω حادثه اتمی/نقطهٔ نمونه/مدل/دنیای ممکن

$$0 \leq P(\omega) \leq 1 \text{ for every } \omega \text{ and } \sum_{\boxed{\omega\in\Omega}} P(\omega) = 1$$

- خواص حوادث اتمی:
- فقط یکی از آنها می تواند برقرار باشد.
- مجموعهٔ همهٔ حوادث اتمی کامل است. حداقل یکی باید برقرار باشد.
- یک حادثهٔ A زیر مجموعه ای از Ω می باشد.
- مثلاً احتمال اینکه مجموع اعداد پرتاب دو تاس برابر ۶ باشد.
- یک گزاره را اینجا می توان به عنوان یک حادثه تصور نمود.

اگه ۲و۴ بیاد میشه ی حادثه اتمی اگه ۳و۳ بیاد یه حادثه اتمی میشه

میتونه ترکیب چندتا حادثه اتمی باشه

اصول احتمال

a
یک گزاره است و
گزاره معادل یه حادثه
است

مجموع حوادث اتمی
که اون حادثه اتمی
متعلق باشه به گزاره
یا حادثه ی
-a

جمع همه ی حوادثی
ک متعلق به گزاره یا
حادثه ی
a,-a
هستند
کلشون فضای نمونه
ی ما را تشکیل میدن

- برای هر گزارهٔ A و B
  - $0 \le P(A) \le 1$
  - $P(true)=1$ و $P(false)=0$
  - .

فصل دوتا حادثه

  - $P(A \vee B)=P(A)+P(B)-P(A \wedge B)$

$$
\begin{aligned}
\boxed{P(\neg a)} &= \sum_{\omega\in\neg a} P(\omega) \\
&= \boxed{\sum_{\omega\in\neg a} P(\omega) + \sum_{\omega\in a} P(\omega)} - \boxed{\sum_{\omega\in a} P(\omega)} \\
&= \sum_{\omega\in\Omega} P(\omega) - \sum_{\omega\in a} P(\omega) \\
&= \boxed{1 - P(a)}
\end{aligned}
$$

$$0 \le P(\omega) \le 1 \text{ for every } \omega \text{ and } \sum_{\omega\in\Omega} P(\omega) = 1$$

- قانون آخر و
- اصول کلمگرف (Kolmogrov) نامیده می شوند.

احتمال پیشین

- درجهٔ باور در غیاب هر اطلاعات دیگر
- مثال P(cavity)=0.1، یا P(sunny)=0.78
- گاهی در مورد احتمال تمام مقادیر یک متغیر تصادفی صحبت می کنیم.
- مثال: P(Weather) برداری از مقادیر برای هر حالت هوا

احتمال اینکه هر مقداری از اون متغیر تصادفی چقدره را میخایم

یه بردار از مقادیر احتمال که جمعشون هم یکه

$$P(Weather = sun) = 0.6$$
$$P(Weather = rain) = 0.1$$
$$P(Weather = cloud) = 0.29$$
$$P(Weather = snow) = 0.01\ ,$$

خود متغیر تصادفی را نوشتیم

- $P(Weather) = <0.6, 0.1, 0.29, 0.01>$
- عبارت فوق توزیع احتمال متغیر تصادفی Weather را نشان می دهد.

تا۸
حادثه ی اتمی
میتونیم داشته باشیم

باید ببینیم چندتا
حادثه ی اتمی
میتونیم داشته باشیم؟

توزیع احتمال توام

- توزیع احتمال توأم برای یک مجموعه از متغیرهای تصادفی احتمال هر حادثهٔ اتمی روی آن متغیرهای تصادفی را نشان می دهد.
- مثال (P(Weather،Cavity یک ماتریس ۴×۲ از مقادیر است.

Weather	sunny	rainy	cloudy	snow
Cavity=true	0.144	0.02	0.016	0.02
Cavity=false	0.576	0.08	0.064	0.08

داره احتمال رخداد یه
حادثه ی اتمی را
نشان میده

- توزیع احتمال توأم کامل شامل همهٔ متغیرهای موجود برای توصیف دنیا
- هر سؤال در مورد دامنه از این توزیع قابل پاسخگوئی است.

بی رخداده است

احتمال شرطی

- هنگام دریافت دلیل بیشتر
- P(a|b) احتمال a به شرط آنکه تمام آنچه که می دانیم b باشد.
- P(cavity|toothache)=0.8
- نماد برای توزیع شرطی
- P(Cavity|Toothache) بردار دو عضوی که هر عضو یک بردار دو عضوی است.

توزیع ینی برای یک متغیر تصادفی که ما احتمال رخداد همه ی مقادیر ممکنش را مینویسیم

دقت کن چون متغیر میذاریم حرف اولشون بزرگه

احتمال شرطی

- $P(a|b)=P(a\wedge b)/P(b)$ (هر گاه $p(b)\neq 0$)
- $\boxed{P(a\wedge b)}=P(a|b)P(b)=P(b|a)P(a)$
- قانون ضرب
- حالت کلی تر برای کل توزیع
- $P(Weather, Cavity)=P(Wather|Cavity)P(Cavity)$
- قانون زنجیری با اعمال مکرر قانون ضرب

به این میگیم قانون ضرب

پی بزرگ به معنای توزیع است

$$
\begin{aligned}
P(X_1,\cdots,X_n) &= \boxed{P(X_1,\cdots,X_{n-1})}P(X_n|X_1,\cdots,X_{n-1}) \\
&= \boxed{P(X_1,\cdots,X_{n-2})P(X_{n-1}|X_1,\cdots,X_{n-2})}P(X_n|X_1,\cdots,X_{n-1}) \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

استنتاج با فهرست کردن

حادثه ی اتمی اگ این باشه
دندان درد براش درسته
کشیدن درسته
کرم خوردگی هم درسته

سه تا متغیر تصادفی داریم

- شروع با توزیع احتمال توأم

هرموقع اومگا درست بود فی هم درست باشه

	toothache		¬ toothache	
	catch	¬ catch	catch	¬ catch
cavity	.108	.012	.072	.008
¬ cavity	.016	.064	.144	.576

احتمال اون حادثه که از یه تعدادی حادثه اتمی ایجاد شده

- برای هر گزارهٔ φ، گزاره های اتمی که در آنها درست است را جمع کن:

- $P(\varphi) = \sum_{\boxed{\omega:\omega \models \varphi}} P(\omega)$

محاسبه ی احتمال هرگزاره ی فی باید گزاره های اتمی که برای اون گزاره فی درست هستن را جمع کنیم

حوادث اتمی که متعلق به اون حادثه ما هستند

استنتاج با فهرست کردن

تا۴
حادثه ی اتمی هست
که مقدار دندان درد
که یه حادثه است
توشون درست است

- شروع با توزیع احتمال توأم

	toothache		¬ *toothache*	
	catch	¬ *catch*	*catch*	¬ *catch*
cavity	.108	.012	.072	.008
¬ *cavity*	.016	.064	.144	.576

- برای هر گزارهٔ φ، گزاره های اتمی که در آنها درست است را جمع کن:
- $P(\varphi) = \Sigma_{\omega:\omega \models \varphi} P(\omega)$
-
- $P(\mathit{toothache}) = 0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064 = 0.2$
- $$\boxed{\mathbf{P}(\mathbf{Y}) = \sum_{\mathbf{z} \in \mathbf{Z}} \mathbf{P}(\mathbf{Y}, \mathbf{z})}$$

احتمال دندان درد

درنظر گرفتن همه ی
مقادیر متغیرهای
دیگه توی مسئله

متغیرهای دیگه ای
ک توی مسئله وجود
داره را هم باید
درنظر گرفت

این یه توزیع توام است

- Z مجموعهٔ متغیرهای دیگربه جز Y

$$\mathbf{P}(\mathbf{Y}) = \sum_{\mathbf{z}\in\mathbf{Z}} \boxed{\mathbf{P}(\mathbf{Y},\mathbf{z})}$$

- مثال:

$$\boxed{\mathbf{P}(Cavity) = \sum_{\mathbf{z}\in\{Catch, Toothache\}} \mathbf{P}(Cavity, \mathbf{z})}$$

- تنوع دیگری از این قانون:

$$\mathbf{P}(\mathbf{Y}) = \sum_{\mathbf{z}} \boxed{\mathbf{P}(\mathbf{Y}\,|\,\mathbf{z})P(\mathbf{z})}$$

متغیرهای دیگ توی مسئله
متغیرهای نهان مساله

- به این کار به حاشیه بردن marginalization گفته می شود.

چون داریم متغیرهای دیگه را به حاشیه میبریم

استنتاج با فهرست کردن

- شروع با توزیع احتمال توأم

	$toothache$		$\neg toothache$	
	$catch$	$\neg catch$	$catch$	$\neg catch$
$cavity$	.108	.012	.072	.008
$\neg cavity$	.016	.064	.144	.576

بدست اوردن احتمال های شرطی به کمک توزیع توام

- همچنین می توان احتمالهای شرطی را محاسبه نمود:

$$P(\neg cavity \mid toothache) = \frac{\boxed{P(\neg cavity \land toothache)}}{P(toothache)}$$

$$= \frac{0.016 + 0.064}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064} = 0.4 .$$

استنتاج با فهرست کردن

- شروع با توزیع احتمال توأم

	toothache		¬ toothache	
	catch	¬ catch	catch	¬ catch
cavity	.108	.012	.072	.008
¬ cavity	.016	.064	.144	.576

- همچنین می توان احتمالهای شرطی را محاسبه نمود:
-

$$P(cavity \mid toothache) = \frac{\boxed{P(cavity \wedge toothache)}}{P(toothache)}$$

$$= \frac{0.108 + 0.012}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064} = 0.6$$

عادی سازی

- مخرج کسر را می توان به عنوان ثابت عادی ساز در نظر گرفت

$$P(Cavity \mid toothache) = \alpha\, P(Cavity, toothache)$$

$$= \alpha\, [P(Cavity, toothache, catch) + P(Cavity, toothache, \neg catch)]$$

$$= \alpha\, [<0.108, 0.016> + <0.012, 0.064>]$$

$$= \alpha\, <0.12, 0.08> = <0.6, 0.4>$$

	toothache		¬ toothache	
	catch	¬ catch	catch	¬ catch
cavity	.108	.012	.072	.008
¬ cavity	.016	.064	.144	.576

ایدهٔ کلی: محاسبهٔ توزیع روی متغیر سؤال با ثابت در نظر گرفتن دلیل و جمع گرفتن روی متغیرهای مخفی

اینجا یکی از متغیرهای مساله که catch است را درنظر نگرفته پس سیگما را روی مقادیر مختلف کچ باید بگیریم که کچ یه بار درسته یه بار نادرسته

متغیر سوال کویتی است دلیلمون toochache متغیر مخفیمون کچ است

سی بزرگه C

t تی کوچیکه

چون سی کویتی بزرگه هم باید برای مقدار درستش بنویسیم هم نادرست پس یه بردار میخایم

برای جمع کردن وقتی که کویتی درسته باهم جمع میشه وقتی نادرسته باهم

حالت برای کویتی درست میشه ۰.۱۰۸ برای نادرست ۰.۰۱۶

0.12/(0.12+0.08) = 0.12/0.2 = 0.6
=>>>> alpha = 1/0.2 = 5

الفا ضریب عادی سازه پس باید یه کاری کنه جمع مقادیر نهایی یک بشه ۰.۶+۰.۴=۱ پس الفا چیه؟

اگ یه توزیع شرطی بمون دادن یه متغیرسوال داریم یه دلیل هم بمون دادن
به شرط دلیل که دلیل را که بخایم حساب کنیم یه سری متغیرمخفی هم داریم
که میشه سایر متغیرهایی که توی مساله هستند ولی ما استفاده نکردیم
متغیر مخفی مثال قبل کچ است پس روی مقادیر مختلف کچ باید جمع را انجام
بدیم

$$P(X \mid e) = \alpha P(X, e) = \alpha \sum_{y} P(X, e, y)$$

متغیر سوال

دلیل

ضریب عادی ساز

سایر متغیرهای نهان

- X، e، و Y با هم شامل همهٔ متغیرهای موجود می شوند.

خلاصه

- عدم موفقیت عامل منطقی در حالت عدم قطعیت
- عدم امکان استنتاج عملی که با موفقیت او را به هدفش برساند.
- عدم امکان بوجود آوردن قوانینی که کامل باشند بدلایل:
  - تنبلی
  - نادانی نظری
  - نادانی عملی
- نظریهٔ تصمیم = نظریهٔ احتمال + نظریهٔ سودمندی
- متغیر تصادفی، فضای نمونه، حادثه، حادثهٔ اتمی
- اصول احتمال
- احتمال پیشین
- توزیع احتمال
- توزیع احتمال توأم
- احتمال شرطی
- توزیع شرطی
- استنتاج با فهرست کردن
- عادی سازی

منظور از فهرست کردن: پیداکردن حوادث اتمی که حادثه ی موردنظر ما براشون درست است را پیداکنیم مقادیرشون را فهرست کنیم و باهم جمع کنیم

نظریه ی احتمال به تنهایی کامل نیست و کافی نیست تا عامل تصمیم گیری را انجام بده

احتمال بدون داشتن هیچ اطلاعات قبلی ای

توزیع احتمال برای چندتا متغیر

یه سری دانش دیگه هم داریم

استفاده از جدول توزیع توام کامل تا استنتاج انجام دهیم

وقتی میخایم احتمال شرطی را حساب کنیم این پارامتر عادی ساز به درد میخوره

اصفهان — بوستان شهرستان

- در تهیه این اسلایدها، از اسلایدهای سایت کتاب استفاده شده است.