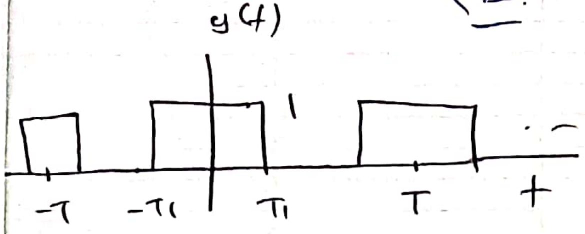
سوال ۱

الف) اگر $g(t)$ را مثل سیگنال زیر درنظر بگیریم

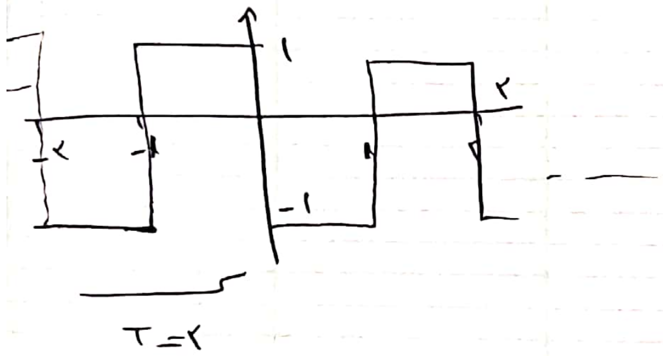


می‌دانیم که ضرایب سری فوریه $g(t)$ ، اگر a_K باشند ←

$$a_K = \frac{\sin(K\omega_0 T_1)}{K\pi} \qquad K \neq 0$$

$$a_0 = \frac{2T_1}{T} = \frac{2\times\frac{1}{2}}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

اگر از $x(t)$ مشتق بگیریم ←



$T=2$

پس بین $\frac{dx(t)}{dt}$ و $g(t)$ یک رابطه‌ای می‌توانیم ایجاد کنیم

اگر $T_1 = \frac{1}{2}$ و ($T=2$ ، دوره تناوب)

اگر $g(t)$ را به اندازه T_1 ، به سمت چپ ببریم و حاصل را ۲ برابر کنیم و یک واحد به پایین منتقل کنیم

① $g(t) \longrightarrow g(t+T_1)$

② $2g(t+T_1)$ ③ $2g(t+T_1)-1$

پس چون $T_1 = \frac{1}{2}$ ← $\boxed{\frac{dx(t)}{dt} = 2g(t+\frac{1}{2})-1}$

طبق رابطه‌ی $\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{FS} jk\omega_0 a_k$ ، اگر ضرایب سری فوریه سیگنال $x(t)$ را $\boxed{b_K}$ درنظر بگیریم ←

$jk\omega_0 b_K = c_K$

و c_K را هم ضرایب سری فوریه $2g(t+\frac{1}{2})-1$ درنظر بگیریم

$g(t+\frac{1}{2})$ یک شیفت زمانی داریم ← $g(t+\frac{1}{2}) \xleftrightarrow{FS} \cancel{a_K e^{-jk\omega_0 t_0}}$

$a_K e^{jK\frac{\pi}{2}}$

چون $t_0 = -\frac{1}{2}$ ← و $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Scanned by CamScanner

متناوب سری فوریه‌ی $\boxed{1}$ ⇐ $1 \xleftrightarrow{FS} d_k = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$

پس

$$c_k = 2a_k e^{\frac{jk\pi}{2}} + d_k$$

$$c_k = \begin{cases} 2a_k e^{\frac{jk\pi}{2}} = 2e^{\frac{jk\pi}{2}}\left(\frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi}\right) & k \neq 0 \\ \frac{\left(\cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{2}}\right)}{1} - 1 = 0 & k = 0 \end{cases}$$

حالا می‌توانیم با رابطه‌ی $c_k = jk\omega_0 b_k$ ، b_k را پیدا کنیم

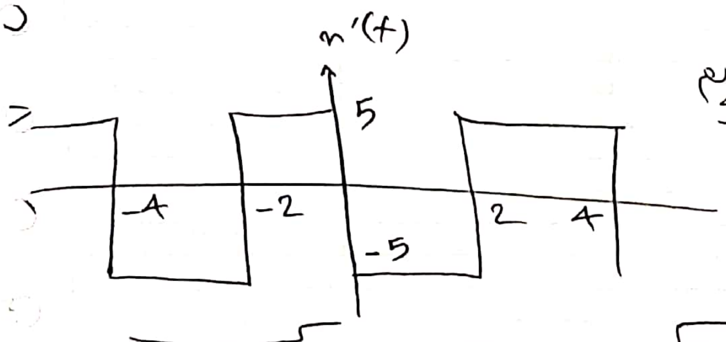
$$b_k = \frac{c_k}{jk\omega_0} \xrightarrow[T=2]{\omega_0 = \frac{2\pi}{T}} \boxed{\omega_0 = \pi} \rightarrow$$

در

$$b_k = \frac{c_k}{jk\pi} = \begin{cases} \frac{2e^{\frac{jk\pi}{2}} \cdot \sin(\frac{k\pi}{2})}{jk\pi \cdot k\pi} = \frac{2e^{\frac{jk\pi}{2}}\sin(\frac{k\pi}{2})}{j(k\pi)^2} & \boxed{k \neq 0} \\ \frac{1}{2}\times\left(2\times\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} & \boxed{k = 0} \end{cases}$$

جواب

$\boxed{\text{سوال ۱ - ب}}$ اگر از $x(t)$ مشتق بگیریم



$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{cases} -5 & 0 \leq t \leq 2 \\ 5 & 2 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

T یک $\quad \boxed{T_1 = 1} \leftarrow \boxed{T = 4}$ یک دوره تناوب

مثل سوال قبلی از سیگنال $g(t)$ استفاده می‌کنیم.

اگر $g(t)$ را به اندازه‌ی T_1 ، به چپ منتقل کنیم و سپس ۱۰ برابر کنیم و ۵ واحد به پایین (نسبت به محور) منتقل کنیم یعنی

$$g(t) \rightarrow g(t+T_1) \rightarrow 10g(t+T_1) \rightarrow \boxed{10g(t+T_1) - 5}$$

معادل نمودار $\frac{dx(t)}{dt}$ را خواهیم داشت ←

اگر ضرایب سری فوریه سیگنال $g(t)$ را a_k و سیگنال $x(t)$ را b_k در نظر بگیریم ←

و سیگنال $10g(t+T_1)-5$ را هم c_k

$$jk\omega_0 b_k = c_k \rightarrow b_k = \frac{c_k}{jk\omega_0} \quad \text{و} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \text{و}$$

چون $T=4$ ← $\boxed{\omega_0 = \frac{\pi}{2}}$ ←

$$b_k = \frac{2c_k}{jk\pi}$$

$10g(t+1)-5$ یعنی

انتقال زمانی $g(t+1)$ را انجام دهیم که

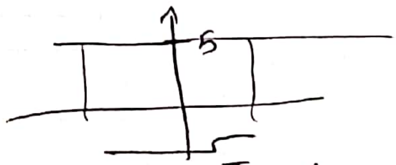
چون $\boxed{t_0=-1}$ ← $d_k = a_k . e^{-jk\omega_0 t_0}$

$$d_k = a_k . e^{\frac{jk\pi}{2}} = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} . e^{\frac{jk\pi}{2}} = \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi} . e^{\frac{jk\pi}{2}} \quad k\neq 0$$

$\boxed{\frac{1}{2} \quad k=0}$

ضرایب سری فوریه برای سیگنال 5

$$5 \overset{FS}{\longleftrightarrow} = \begin{cases} 0 & k\neq 0 \\ 5 & k=0 \end{cases}$$



در یک دوره تناوب e

$$\frac{T\times 5}{T} = 5$$

پس →
$$c_k = \begin{cases} \frac{10\sin(\frac{k\pi}{2})}{k\pi} . e^{\frac{jk\pi}{2}} & k\neq 0 \\ (10\times\frac{1}{2})-5 = 0 & k=0 \end{cases}$$

$$b_k = \frac{2c_k}{jk\pi} = \begin{cases} \frac{20\sin(\frac{k\pi}{2})}{j(k\pi)^2} . e^{\frac{jk\pi}{2}} & k\neq 0 \\ & k=0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{4}\times\left(\frac{2\times 10}{2} - \frac{2\times 10}{2}\right) = 0$$

Scanned by CamScanner

سوال ۶ (2.)

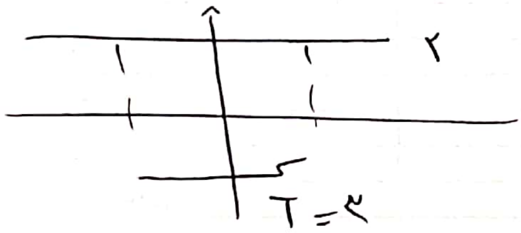
$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{FS} jk\omega_0 a_k$$

اگر فرض کنید سری فوریه سیگنال $x(t)$ ، a_k باشند آن

$$\underbrace{y}_{b_k} \xleftrightarrow{FS} jk\omega_0 a_k \qquad b_k = jk\omega_0 a_k \rightarrow$$

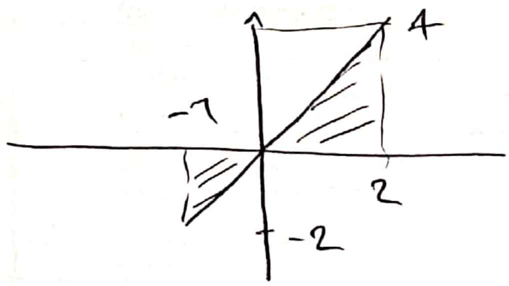
$$a_k = \frac{b_k}{jk\omega_0} \qquad T=3 \rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{3}}$$

$$a_k = \frac{3b_k}{2\pi jk} \quad k \neq 0 \rightarrow$$



اگر $g(t)=2$ ←

$$g(t)=2 \longrightarrow b_k = \begin{cases} 0 & k\neq 0 \\ 2 & k=0 \end{cases}$$



$x(t)=2t$

$$a_k = \begin{cases} 0 & k\neq 0 \\ \underbrace{\frac{1}{3}\left(-\left(\frac{6\times 2}{2}\right) + \frac{2\times 4}{2}\right)}_{} & k=0 \end{cases}$$

در $k=0$ ، a_k مساوی جمع زیر منحنی
در یک دوره تناوب

$$\frac{1}{3}\left(\cancel{-6+4}\right) = 6$$

3

$$\boxed{a_k = \begin{cases} 0 & k\neq 0 \\ 6 & k=0 \end{cases}}$$

جواب

$\boxed{\text{سوال ۶}}$ ۵

$$T=2,\quad x(t)=1-e^{-2t}\qquad 0\le t\le 2$$

طبق فرمول ضرایب سری فوریه

$$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)\,e^{-jk\omega_0 t}\,dt$$

$$T=2\;\rightarrow\;\omega_0=\frac{2\pi}{T}=\pi$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_T \left(1-e^{-2t}\right)e^{-jk\pi t}\,dt=$$

$$\frac{1}{2}\int_2 \left(1-e^{-2t}\right)e^{-jk\pi t}\,dt=$$

$$\frac{1}{2}\int_2 e^{-jk\pi t}\,dt-\frac{1}{2}\int_2 e^{-(2+jk\pi)t}\,dt=$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{-1}{jk\pi}\cdot e^{-jk\pi t}\Big|_0^2\right)+\left(\frac{1}{2+jk\pi}\cdot e^{-(2+jk\pi)t}\Big|_0^2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(-\frac{e^{-2jk\pi}}{jk\pi}+\cancel{\frac{e^{0}}{jk\pi}}\right)+\left(\frac{1}{2+jk\pi}\cdot e^{-2(2+jk\pi)}-\cancel{\frac{e^{0}}{2+jk\pi}}\right)\right]$$

$$\frac{1}{jk\pi}\qquad\qquad -\frac{1}{2+jk\pi}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1-e^{-2jk\pi}}{jk\pi}+-\left(\frac{1-e^{-2(2+jk\pi)}}{2+jk\pi}\right)\right]$$

جواب

(سوال ٦ - هـ)

$x(t) = 2j\sin(\frac{3}{2}t) + \cos(t-\frac{\pi}{2}) + 2$

طبق رابطه اویلر می‌دانیم که

$$\cos(\omega_0) = \frac{e^{j\omega_0} + e^{-j\omega_0}}{2}$$

$$\sin(\omega_0) = \frac{e^{j\omega_0} - e^{-j\omega_0}}{2j}$$

پس sin و cos را باید بسط دهیم ←

$$2j\sin(\tfrac{3}{2}t) = \cancel{2j}\left[\frac{e^{\frac{3}{2}jt} - e^{-\frac{3}{2}jt}}{\cancel{2j}}\right] = e^{\frac{3}{2}jt} - e^{-\frac{3}{2}jt}$$

$$\cos(t-\tfrac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}\left[e^{(t-\frac{\pi}{2})j} + e^{-j(t-\frac{\pi}{2})}\right] = \frac{1}{2}e^{tj-\frac{\pi}{2}j} + \frac{1}{2}e^{-jt+\frac{\pi}{2}j}$$

$$\rightarrow x(t) = e^{\frac{3}{2}jt} - e^{-\frac{3}{2}jt} + \frac{1}{2}e^{tj}\cdot e^{-\frac{\pi}{2}j} + \frac{1}{2}e^{-tj}\cdot e^{\frac{\pi}{2}j} + 2$$

می‌دانیم در جمع دو سیگنال متناوب ← تناوب کل برابر ک.م.م دوره تناوب‌هاست ↙

$$T = LCM(T_1, T_2) = \left(\frac{2\pi}{\frac{3}{2}}, 2\pi\right) = \left(\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right) = \boxed{4\pi}$$

$$\rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4\pi} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

چون $e^{jk\omega_0 t}$ باید باشد

در بسط ←

$\frac{jt}{2}$ مشترک است

$$e^{\frac{jK\cancel{t}}{\cancel{2}}} = e^{\frac{3}{\cancel{2}}jt} \rightarrow \boxed{K=3}$$

$\boxed{a_3 = 1}$

$\boxed{a_{-3} = -1}$ و $\frac{1}{2}\cancel{e^{jt}}\cdot e^{-\frac{\pi}{2}j} = \cancel{e^{\frac{jKt}{2}}} \rightarrow a_2 = \frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}j}$

$a_{-2} = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}j}$ $\boxed{a_0 = 2}$

۶-هـ

پس $a_0 = 2$ $\quad a_2 = \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi}{2} j}$ $\quad a_4 = 1$

$a_{-2} = \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{2} j}$ $\quad a_{-4} = -6$

و در بقیه‌ی صورت‌ها صفر

سوال ۶

۵

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[2(-1)^k \delta\left(t - \frac{k}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{1+2k}{2}\right) \right]$$

اگر $k=0 \rightarrow 2\delta(t) - \delta(t - \frac{1}{2})$

$k=-1 \rightarrow -2\delta(t+\frac{1}{2}) - \delta(t+\frac{1}{2})$

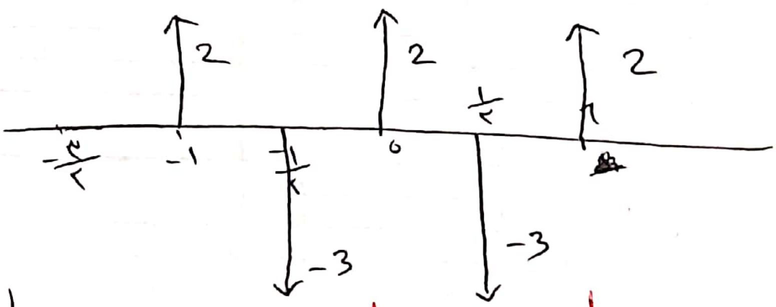
$k=+1 \rightarrow -2\delta(t-\frac{1}{2}) - \delta(t-\frac{3}{2})$

$k=-2 \rightarrow 2\delta(t+1) - \delta(t+\frac{3}{2})$

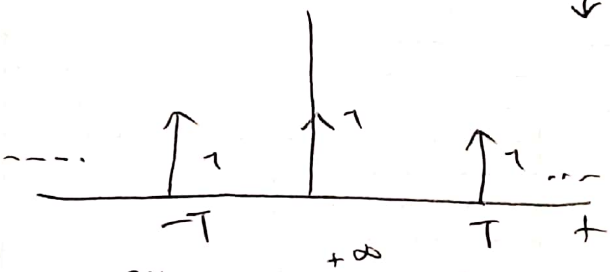
$k=2 \rightarrow 2\delta(t-1) - \delta(t-\frac{5}{2})$

$\vdots$ ـــــ و

اگر $x(t)$ را رسم کنیم به شکل زیر می‌شود



$\boxed{T = 1}$ دوره تناوب



می‌دانیم که برای قطار ضربه به شکل

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) \xleftrightarrow{FS} a_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)\, e^{-jk\frac{2\pi t}{T}}\, dt = \underbrace{}_{1} \frac{1}{T}$$

(طبق خاصیت غربالی ضربه)

پس $x(t) = 2y(t) - 3y(t-\frac{1}{2}) \leftarrow \boxed{a_k = \frac{1}{T}} \rightarrow \boxed{a_k = 1}$

$b_k = ?\quad 2a_k - 3a_k e^{-jk\omega_0 t_0}$

به ازای $t = \frac{1}{2} \longrightarrow$ شیفت می‌دهیم

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$

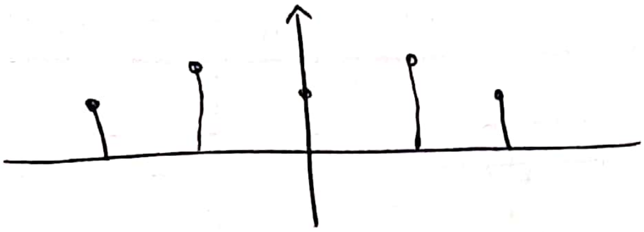
$2a_k - 3a_k e^{-j2\pi k\frac{1}{2}} =$

$2a_k - 3a_k e^{-j\pi k} \xrightarrow{a_k = 1} b_k = 2 - 3e^{-j\pi k}$

جواب

سوال ۲

الف)



$$a_K = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{۲}\delta(t-۲K) + \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{۳}{۴}\delta(t-۲K-1)$$

$$\Rightarrow a_K = \frac{1}{۲}\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-۲K) + \frac{۳}{۴}\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-۲K-1)$$

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_K e^{jK\omega_0 t}$$

$T = ۸ \rightarrow \omega_0 = \frac{۲\pi}{۸} = \frac{\pi}{۴}$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta$$

سوال ۲_ ب

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \xleftrightarrow{F_s}$$

می دانیم در قطار ضربه

$$a_k' = \frac{1}{T}$$

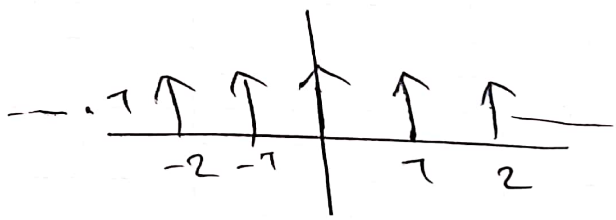
$$T = 1 \longrightarrow \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-k) \longleftrightarrow \frac{1}{T} = \boxed{1}$$

$$a_k = e^{-2jk\pi 1} = b_k \cdot e^{-jk\omega_0 t_0} \longrightarrow$$

به اندازه‌ی t_0 شیفت داریم در حوزه زمان

$$-\cancel{2jk\pi} = -\cancel{jk}\cancel{\omega_0} t_0 \rightarrow \boxed{t_0 = 1}$$
$$\cancel{2\pi}$$

$$x(t) = g(t-1) \Rightarrow$$



یک واحد شیفت به راست

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-1-k) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-k)$$

2.

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$T = 4$ $\qquad a_k = \frac{(-1)^k}{2}$

وقتی k فرد

$a_{\text{فرد}} = -\frac{1}{2}$

$a_{\text{زوج}} = \frac{1}{2}$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\frac{\pi}{2}t} \qquad \cancel{\frac{2\pi}{4}}$$

$(-1)^k \frac{1}{2}$

$k = 0 \rightarrow$

$$\frac{1}{2}\left[\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{jk\frac{\pi}{2}t}\right] \quad 1 + (-e^{-j\frac{\pi}{2}t}) + (-e^{j\frac{\pi}{2}t}) +$$

$\pm 2 \rightarrow \quad e^{j\pi t} + e^{-j\pi t}$

$$1 - (e^{+j\frac{\pi}{2}t} + e^{-j\frac{\pi}{2}t}) + (e^{j\pi t} + e^{-j\pi t}) +$$

$$-(e^{\frac{3j\pi}{2}t} + e^{-\frac{3}{2}j\pi t}) + (e^{2j\pi t} + e^{-2j\pi t})$$

$$1 - \cancel{2\cos(\tfrac{\pi t}{2})}_{0} + 2\cos(\pi t) - \cancel{2\cos(\tfrac{3\pi t}{2})}_{0} + 2\cos(2\pi t)$$

$$\boxed{1 + 2\cos(\pi t) + 2\cos(2\pi t) + \ldots}$$

سوال ۲

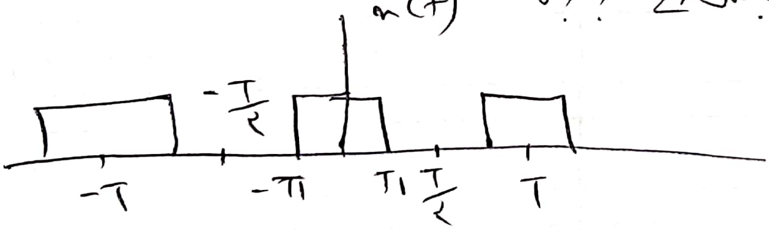
د

$T=3 \qquad a_k = \dfrac{\sin(\frac{k\pi}{3})}{k\pi}\left[2\cos(\frac{k\pi}{3}) + e^{-jk\frac{\pi}{3}}\right]$

طبق اویلر $\longrightarrow \quad 2\cos(\frac{k\pi}{3}) = \cancel{2}\left[\dfrac{e^{jk\frac{\pi}{3}} + e^{-jk\frac{\pi}{3}}}{\cancel{2}}\right] = e^{jk\frac{\pi}{3}} + e^{-jk\frac{\pi}{3}}$

$+\ e^{-jk\frac{\pi}{3}} = e^{jk\frac{\pi}{3}} + 2e^{-jk\frac{\pi}{3}}$

می دانیم که ضرایب سری فوریه برای پالس به شکل زیر برابر با



$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} \qquad k \neq 0$$

Scanned by CamScanner

ادامه‌ی سوال ۲_د

$$a_k = \underbrace{\frac{\sin\left(k\frac{\pi}{4}\right)}{k\pi}}_{b_k}\left[e^{jk\frac{\pi}{4}} + 2e^{-jk\frac{\pi}{4}}\right]$$

اگر $b_k = \frac{\sin\left(k\frac{\pi}{4}\right)}{k\pi}$ باشد

$$a_k = \underbrace{b_k e^{jk\frac{\pi}{4}}}_{①} + \underbrace{b_k \cdot 2e^{-jk\frac{\pi}{4}}}_{②}$$

طبق خاصیت انتقال زمان ⇐

$$x(t-t_0) \longleftrightarrow a_k e^{-jk\omega_0 t_0}$$

① ⇐ $\cancel{-jk}\,\omega_0 t_0 = \cancel{jk}\frac{\pi}{4} \xrightarrow{\omega_0 = \frac{2\pi}{4}} -\frac{2\pi}{4} t_0 = \frac{\pi}{4} \to \boxed{t_0 = -\frac{1}{2}}$

به اندازه‌ی $+\frac{1}{2}$ به چپ شیفت می‌دهیم

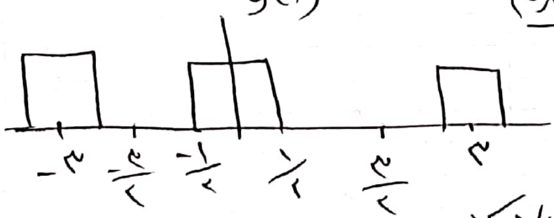
② $\cancel{-jk}\frac{\pi}{\cancel{4}} = \cancel{-jk}\frac{2\pi}{\cancel{4}} t_0 \to \boxed{t_0 = \frac{1}{2}}$

به اندازه‌ی $\frac{1}{2}$ به راست شیفت دهیم

سیگنال متناظر با b_k ⇐ $\frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$ $k \neq 0$ برای پالس‌ها چون

و $\frac{\sin\left(k\frac{\pi}{4}\right)}{k\pi} \to \cancel{\omega_0}\, T_1 = \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\omega_0 = \frac{2\pi}{4}} \boxed{T_1 = \frac{1}{2}}$

پس یعنی سیگنال پالس را با $T_1 = \frac{1}{2}$ می‌سازیم



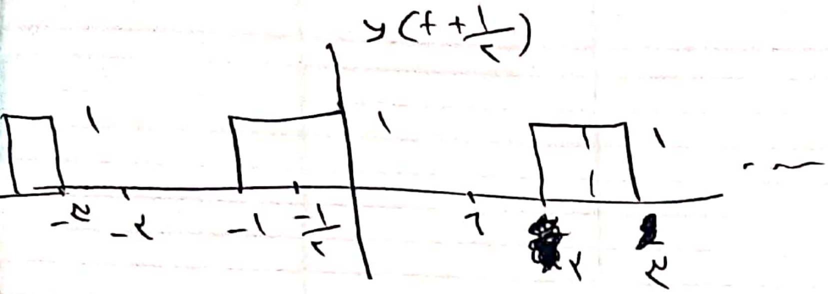
$y(t)$ متناظر با سری فوریه b_k است

پس در مرحله بعدی ⇐

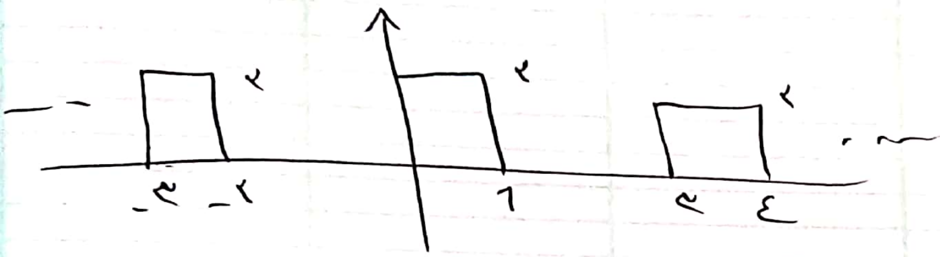
$y(t+\frac{1}{2}) + 2y(t-\frac{1}{2})$ را باید رسم کنیم

Scanned by CamScanner

$\boxed{\text{ادامه‌ی سوال ۲ـ د}}$

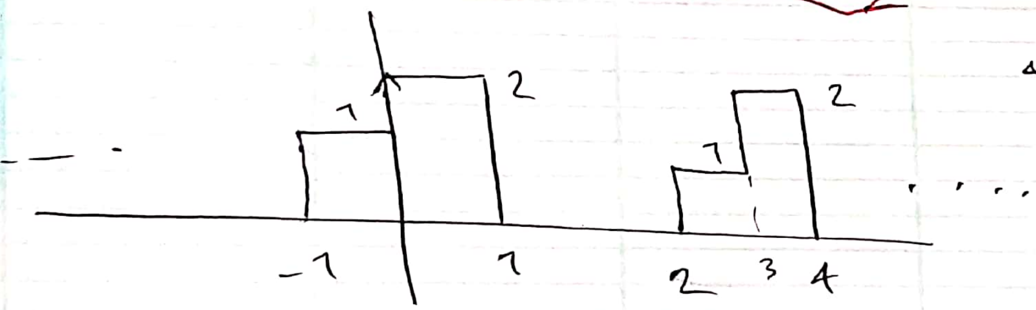


c $y(t+\frac{1}{2})$



$2y(t-\frac{1}{2}) = e$

جمع این دو با هم ←



جواب مساله

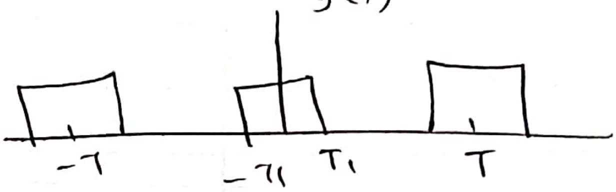
سوال ۲_۵

$$T=4 \qquad a_k = \begin{cases} \dfrac{(-j)^k \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)}{k\pi} & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

طبق مسائل قبلی از پاسخ استفاده می کنیم

می دانیم که ضرایب سری فوریه پالس مثل شکل زیر هست: $\dfrac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$ ، $k \neq 0$

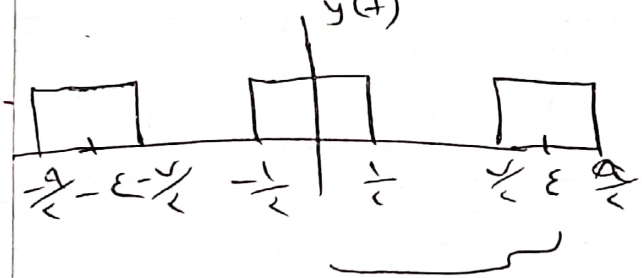
الف



$$\boxed{b_k = \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)}{k\pi}} \longrightarrow \cancel{k}\omega_0 T_1 = \cancel{k}\frac{\pi}{4} \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \boxed{\omega_0 = \frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{\pi}{2} T_1 = \frac{\pi}{4} \rightarrow \boxed{T_1 = \frac{1}{2}}$$

پس اگر $y(t)$ را بخواهیم رسم کنیم:



پس در $k \neq 0$ ، $a_k = b_k(-j)^k$ پس

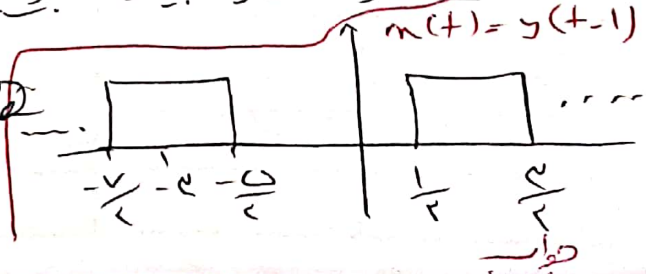
$$\boxed{e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j}$$

$$a_k = b_k \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}k}$$

$$a_k = b_k \cdot e^{-jk\omega_0 t_0} \quad \leftarrow \text{اینجا هم انتقال زمانی داریم}$$

$$-j\cancel{k}\cancel{\omega_0} t_0 = -\cancel{j}\,\cancel{\tfrac{\pi}{2}}\,\cancel{k} \rightarrow \boxed{t_0 = 1} \qquad y(t-t_0)$$

یعنی $y(t-1)$ باید کرد تا بتوانیم سیگنال متناظر با a_k را بدست آوریم:



جواب

سوال ۳

الف) اگر $y(t) = x(t) + x(2t)$ و $T_x = T_0$ ، $b_2 = ?$

$x(t)$ دوره تناوب $= T_0$

$x(2t)$ ~ $= \frac{T_0}{2}$

اگر دوره تناوب یک سیگنال m برابر شود ← ضرایب سری فوریه با ضریب m گسترده می شوند

$$\rightarrow \boxed{a_k + a_{[2]k}}$$

$$a_{[2]k} = \begin{cases} a[\frac{k}{2}] & k = 2k' \\ 0 & oth.w \end{cases}$$

چون b_2 را می خواهیم

$$b_k = a_k + a_{[2]k} \rightarrow b_2 = a[2] + a[1]$$

یا $b_2 = a_2 + a_1$

ب) $y(t) = x^*(t)\cos(\frac{\pi t}{2})$ و $T_x = 2$ ، $b_k = ?$

اول $\cos$ را بسط می دهیم طبق اویلر ←

$$\cos(\frac{\pi t}{2}) = \frac{e^{j\frac{\pi}{2}t} + e^{-j\frac{\pi}{2}t}}{2} \rightarrow x^*(t)\left(\frac{e^{j\frac{\pi}{2}t} + e^{-j\frac{\pi}{2}t}}{2}\right) =$$

$$\left(\frac{x^*(t)\, e^{j\frac{\pi}{2}t}}{2}\right) + \left(\frac{x^*(t)\, e^{-j\frac{\pi}{2}t}}{2}\right)$$

می دانیم که $x(t)\, e^{jk_0\omega_0 t} \longrightarrow a_{k-k_0}$ ←

ادامه‌ی سوال ۳_ب

$T=2 \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{\cancel{T}_2} = \pi$

$x^*(t) \cdot \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}t}$ یعنی $\cancel{j} k_0 \cancel{\omega_0} \cancel{t} = \cancel{j}\frac{\pi}{2}\cancel{t}$

$\boxed{k_0 = \frac{1}{2}}$

$\left(\frac{x(t)\, e^{-j\frac{\pi}{2}t}}{2}\right)^* + \left(\frac{x(t)\, e^{j\frac{\pi}{2}t}}{2}\right)^*$ می‌توانیم بنویسیم (ضرورت را روی کل عبارت قرار دهیم)

$\longrightarrow \quad -\cancel{j}\frac{\pi}{2}\cancel{t} = \cancel{j} k_0 \cancel{\pi} \cancel{t} \rightarrow \boxed{k_0 = -\frac{1}{2}} \rightarrow$

$a_{k-k_0} = \boxed{a(k+\frac{1}{2})}$

$\cancel{j}\frac{\pi}{2}\cancel{t} = \cancel{j} k_0 \cancel{\pi} \cancel{t} \rightarrow \boxed{k_0 = \frac{1}{2}}$

$a_{k-k_0} = \boxed{a(k-\frac{1}{2})}$

پس $\left(\frac{1}{2} a_{k+\frac{1}{2}}\right)^* + \left(\frac{1}{2} a_{k-\frac{1}{2}}\right)^* \longrightarrow$

$b_k = \frac{1}{2} a^*_{(-k+\frac{1}{2})} + \frac{1}{2} a^*_{(-k-\frac{1}{2})}$ جواب

سوال ٤

$$x(t)=\begin{cases} t & -1\le t\le 1 \\ -t+2 & 1\le t\le 3 \end{cases}$$

حاصل $\quad P=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|ka_k|^2$

طبق رابطه یا تساوی پارسوال می‌دانیم

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\,dt=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|a_k|^2$$

و طبق خاصیت مشتق هم می‌دانیم اگر از $x(t)$ مشتق بگیریم ←

$$\underbrace{\frac{d}{dt}x(t)}_{b_k}\longleftrightarrow jk\omega_0 a_k$$

$$b_k=jk\omega_0 a_k$$

پس اگر تساوی پارسوال را برای $\frac{dx(t)}{dt}$ بنویسیم

$$\frac{1}{T}\int_T |x'(t)|^2\,dt=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|jk\omega_0 a_k|^2=$$

ثابت از سیگما خارج می‌شود

$$|j\omega_0|^2\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|ka_k|^2$$

چون $T=4$

$$\omega_0=\frac{2\pi}{4}=\boxed{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{dx(t)}{dt}=\begin{cases} 1 & -1\le t\le 1 \\ -1 & 1\le t\le 3 \end{cases}$$

$$\frac{1}{4}\int_4 |x'(t)|^2\,dt=\frac{1}{4}\Big[\underbrace{\int_{-1}^{1}1\,dt}_{2}+\underbrace{\int_{1}^{3}+1\,dt}_{+2}\Big]$$

$$\Rightarrow \frac{4}{4}=1$$

پس $\quad |j\omega_0|^2\sum_{-\infty}^{+\infty}|ka_k|^2=1 \quad \rightarrow \sum_{-\infty}^{+\infty}|ka_k|^2=\frac{1}{|j\omega_0|^2}$

$$\frac{1}{\frac{\pi^2}{4}}=\frac{4}{\pi^2}$$

$\frac{4}{\pi^2}=$ جواب ←

$\boxed{\text{سوال ک}}$

$$\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = x(t)$$

ضرایب سری فوریه‌ی $y(t)$ را می‌توانیم به کمک $x(t)$ بدست آوریم

اگر ضرایب سری فوریه $y(t)$ را $\boxed{b_k}$ در نظر بگیریم ←

و ضرایب سری فوریه سیگنال $x(t)$ را $\boxed{a_k}$ بگیریم ؛

$$jk\omega_0 b_k + 4b_k = a_k$$

با داشتن $x(t)$ به صورت

$$x(t) = 1 + \cos(3\pi t) + \sin(8\pi t + \frac{\pi}{4})$$

باید a_k را حساب کنیم ←

T کل را با ک.م.م گرفتن از Tها حساب می‌کنیم

$$T_1 = \frac{2\pi}{3\pi} = \boxed{\frac{2}{3}} \qquad T_2 = \frac{2\pi}{8\pi} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$\rightarrow \operatorname{lcm}(\frac{2}{3}, \frac{1}{4}) = \boxed{2} \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$x(t) = \frac{e^{j3\pi t} + e^{-j3\pi t}}{2} + \frac{\left(e^{j(8\pi t + \frac{\pi}{4})} - e^{-j(8\pi t + \frac{\pi}{4})}\right)}{2j} + 1$$

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{j3\pi t} + \frac{1}{2} e^{-j3\pi t} + \frac{1}{2j} e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{8\pi j t} - \frac{1}{2j} e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-j8\pi t} + 1$$

$$\cancel{j}k\cancel{\omega_0}\cancel{t} = \cancel{j}3\cancel{\pi}\cancel{t} \rightarrow k=3 \rightarrow \boxed{a_3 = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{a_{-3} = \frac{1}{2}}$$

$$8\cancel{\pi}\cancel{j}\cancel{t} = \cancel{j}k\cancel{\pi}\cancel{t} \rightarrow \boxed{k=8}$$

$$a_8 = \frac{1}{2j} e^{j\frac{\pi}{4}} \qquad a_{-8} = \frac{-1}{2j} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$1 \xleftrightarrow{FS} \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k\neq 0 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

$jk\omega_0 b_k + 4 b_k = a_k$

$\omega_0 = \pi \rightarrow (jk\pi + 4)\, b_k = a_k \rightarrow \boxed{b_k = \dfrac{a_k}{4 + jk\pi}}$

a_k را حساب کردیم ← b_k هم حساب می‌کنیم

اگر $k = 0 \rightarrow b_0 = \dfrac{a_0}{4} = \dfrac{\quad}{4}$

اگر $k \neq 0 \rightarrow \dfrac{a_k}{4 + jk\pi} \xrightarrow[k = \pm 8]{k = \pm 3}$ جواب

$b_3 = \dfrac{a_3}{4 + 3j\pi}$ $\quad b_{-3} = \dfrac{a_{-3}}{4 - 3j\pi}$ $\quad b_8 = \dfrac{a_8}{4 + 8j\pi}$ طبق

$b_{-8} = \dfrac{a_{-8}}{4 - 8j\pi}$

سوال ۶ $x(t)$ با ضرایب سری فوریه a_k

① $a_1^* = a_1$ $\quad a_k = \begin{cases} 0 & k \geq 3 , k=0 \\ <0 & k=1 \end{cases}$

② $x(t) = -x(t-2) \rightarrow$

طبق خاصیت انتقال زمانی

$\cancel{a_k} = -e^{-2jk\omega_0} \cancel{a_k}$

$\boxed{t_0 = 2}$

$\rightarrow -1 = e^{-2jk\omega_0} \rightarrow$ این تساوی بازای

③ $\int_0^4 |x(t)|^2 dt = 2$

طبق تساوی پارسوال

$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$

④ $x^*(t) = x(t) \xrightarrow{}$ سیگنال حقیقی الند $\rightarrow a_k = a_{-k}^*$

تقارن مزدوجی

$x(t) = x(t \pm 4n) \quad n \in \mathbb{Z}$

ازای می فهمیم که دوره تناوب اصلی برابر ۴ الند $\rightarrow \boxed{T_0 = 4}$

$\frac{1}{4} \underbrace{\int_4 |x(t)|^2 dt}_{2} = \frac{1}{2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$

$T = 4 \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$

$-1 = e^{-\cancel{2}j\frac{\pi}{\cancel{2}}k}$ $\rightarrow$ $-1 = e^{-j\pi k} \rightarrow$ طبق رابطه اویلر

$\cos(-\pi k) + j\cancel{\sin(-\pi k)}_{0} = -1$

$\cos(-\pi k) = \cos(\pi k) = -1 \rightarrow$

k باید فرد باشد تا این برقرار شود $\rightarrow$ $\boxed{k = \pm 1}$

چون $a_1^* = a_1$ ، حقیقی الند $\rightarrow a_1^* = a_{-1} \rightarrow \boxed{a_1 = a_{-1}}$

ادامه‌ی سوال ٤

چون $a_1 = a_{-1}$ ←

$$\frac{1}{2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} = |a_{-1}|^2 + \underbrace{\cancel{|a_0|^2}}_{0} + |a_1|^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} = 2|a_1|^2 \rightarrow \boxed{|a_1|^2 = \frac{1}{4}} \rightarrow \boxed{|a_1| = \frac{1}{2}}$$

چون $x(t)$ حقیقی و زوج است ←

$$\boxed{a_1 = -\frac{1}{2}}$$

پس $\boxed{a_{\pm 1} = -\frac{1}{2}}$ $\quad a_0 = 0$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \rightarrow$$

$$x(t) = a_{-1} e^{-j\omega_0 t} + \underbrace{\cancel{a_0}}_{0} + a_1 e^{j\omega_0 t} \xRightarrow{a_{-1} = a_1 = -\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right) = -\frac{1}{2}\left(2\cos(\omega_0 t)\right) =$$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}} \qquad -\cos(\omega_0 t) \xrightarrow{\omega_0 = \frac{\pi}{2}} -\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

چون طبق گزاره مسئله اگر $K=1$ ← $\boxed{a_1 < 0}$

جواب: $\boxed{-\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)}$

سوال ۲_ج

$$-1 = e^{j\pi} \rightarrow a_k = \frac{(-1)^k}{4} \rightarrow$$

$$\boxed{a_k = \frac{e^{jk\pi}}{4}}$$

اگر $b_k = \frac{1}{4} \rightarrow$

با توجه به خاصیت جابجایی e

$$a_k = b_k \cdot e^{-jk\omega_0 t_0}$$

$$-\cancel{jk}\underbrace{\omega_0}_{\frac{\pi}{2}} t_0 = \cancel{jk}\pi$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{t_0 = -2}$$

باید $y(t)$ را بدست آوریم و $y(t - t_0)$ یعنی $\boxed{y(t+2)}$

را رسم کنیم تا $x(t)$ پیدا شود

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$