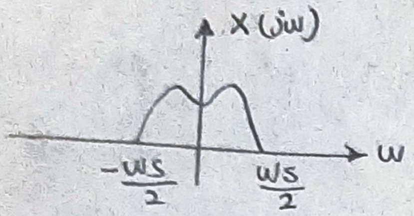
به نام خدا

حل تکلیف سری هشتم - درس تجزیه و تحلیل سیگنال ها و سیستم ها

محمدرضا جباری

سؤال ۱) فرض کنید سیگنال $x(t)$ دارای طیف فرکانسی به صورت زیر با بیشترین مؤلفه فرکانسی برابر با $\omega_m = \frac{\omega_s}{2}$ است.



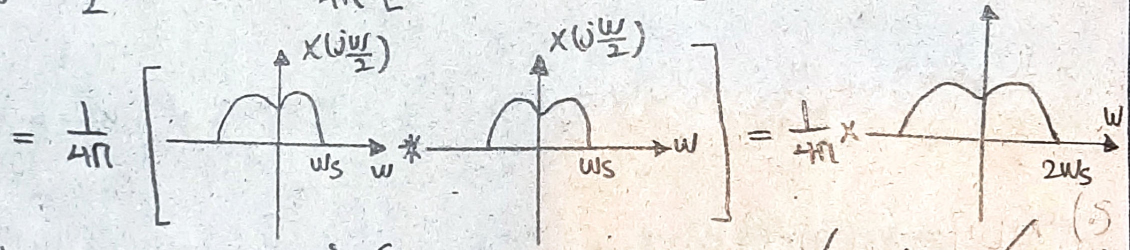
1-الف) $y(t) = x(t) * x(t) \rightsquigarrow Y(j\omega) = X(j\omega)\, X(j\omega)$

بنابراین طیف $Y(j\omega)$ برابر با حاصلضرب طیف $X(j\omega)$ در خودش است و لذا بزرگترین مؤلفه فرکانسی آن مشابه بزرگترین مؤلفه فرکانسی $X(j\omega)$ است و لذا نرخ نایکوئیست آن همان ω_s است.

2-الف) $y(t) = x^2(2t)$

$$y_1(t) = x^2(t) \rightsquigarrow Y_1(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[X(j\omega) * X(j\omega)\right]$$

$$y(t) = y_1(2t) \rightsquigarrow Y(j\omega) = \frac{1}{2} Y_1\left(j\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{4\pi}\left[X\left(j\frac{\omega}{2}\right) * X\left(j\frac{\omega}{2}\right)\right]$$



بنابراین ماکزیمم مؤلفه فرکانسی $y(t)$ برابر $2\omega_s$ بوده و نرخ نایکوئیست آن $4\omega_s$ است، لذا نرخ نایکوئیست آن 4 برابر نرخ نایکوئیست سیگنال $x(t)$ است.

3-الف) $y(t) = x(t)\cos(2\omega_s t)$

$$y(t) = x(t)\left(\frac{e^{j2\omega_s t} + e^{-j2\omega_s t}}{2}\right) \rightsquigarrow Y(j\omega) = \frac{1}{2}\left[X(j(\omega+2\omega_s)) + X(j(\omega-2\omega_s))\right]$$

به عبارتی طیف فرکانسی $Y(j\omega)$ به اندازه $2\omega_s$ جابجا شود و ماکزیمم مؤلفه فرکانسی آن $\frac{\omega_s}{2} + 2\omega_s = \frac{5\omega_s}{2}$ است؛ لذا نرخ نایکوئیست آن برابر $5\omega_s$ و درواقع 5 برابر نرخ نایکوئیست سیگنال $x(t)$ است.

4-الف) $y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \rightsquigarrow Y(j\omega) = j\omega X(j\omega)$

لذا ماکزیمم مؤلفه فرکانسی طیف $Y(j\omega)$ و $X(j\omega)$ یکسان است و نرخ نایکوئیست آن ها نیز یکسان خواهد بود.

5- الف) $y(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(t-mT_c) = x(t) * \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t-mT_c)$

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{T_c} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T_c}k\right) = \frac{2\pi}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(j\frac{2\pi}{T_c}k\right) \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T_c}k\right)$$

درواقع از طیف $X(j\omega)$ در فضای فرکانسی $\frac{2\pi}{T_c}$ نمونه برداری انجام می‌دهیم و بیشترین مؤلفه فرکانس $Y(j\omega)$ تقسیم بر T_c خواهیم داشت.

سؤال 2

الف) $x_1[n] = x_1(nT_s) = x_1\left(\frac{n}{400}\right) = \cos\left(200\pi \times \frac{n}{400}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ ✓

ب) $x_2[n] = x_2(nT_s) = x_2\left(\frac{n}{1000}\right) = \cos\left(\omega \frac{n}{1000}\right) \equiv \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

$\rightsquigarrow \frac{\omega}{1000} = \frac{\pi}{4} \rightsquigarrow \omega = 250\pi$

اما دقت کنید که چون سیگنال $x(t)$ متناوب است پس داریم:

$\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \cos\left(n\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)$ و $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

ولذا در حالت کلی داریم:

$\rightsquigarrow \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{\omega}{1000} \rightsquigarrow \omega = 250\pi + 2000k\pi$ و $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ ✓

ج) $x_3[n] = x_3(nT_s) = \cos(400\pi nT_s) \equiv \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

$400\pi T_s = \frac{\pi}{3} \rightsquigarrow T_s = \frac{1}{1200}$

دقت کنید که مشابه قسمت ب، T_s بدست آمده یکتا نیست زیرا:

$\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) = \cos\left(n\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)\right)$ و $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

$\rightsquigarrow \frac{\pi}{3} + 2k\pi = 400\pi T_s \rightsquigarrow T_s = \frac{1}{1200} + \frac{k}{200}$ و $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

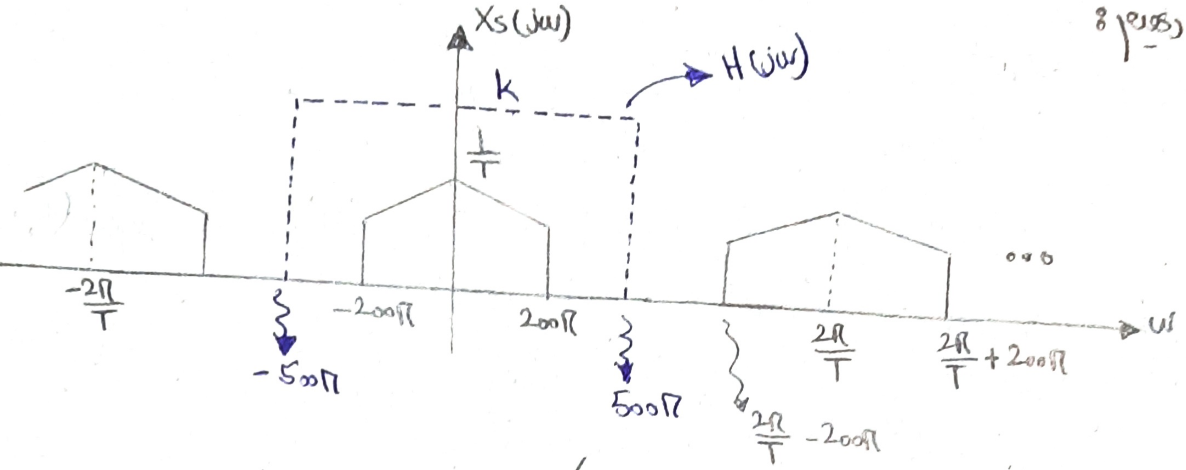
سؤال 3) طیف سیگنال نمونه‌برداری شده به صورت زیر است:

$x_s(t) = x(t)p(t) = x(t) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t-mT) \rightsquigarrow X_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[X(j\omega) * \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{T} \delta\left(\omega - m\frac{2\pi}{T}\right)\right]$

3 صفحه

$$X_s(j\omega)=\frac{1}{T}X(j\omega) * \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-m\frac{2\pi}{T}\right)$$

بنابراین برای محاسبه‌ی $X_s(j\omega)$ کافی است که طیف $X(j\omega)$ را در $\frac{1}{T}$ ضرب کرده و به اندازه‌ی مضارب $\frac{2\pi}{T}$ به سمت راست و چپ شیفت دهیم:



بنابراین اینکه $x(t)=y(t)$ باشد پس باید $Y(j\omega)=X(j\omega)$ شود، پس با توجه به شکل فوق باید داشته باشیم:

$$\frac{2\pi}{T}-200\pi > \underbrace{500\pi}_{\text{فرکانس قطع فیلتر}} \rightsquigarrow \boxed{T<\frac{1}{350}} \checkmark$$

همچنین باید $T=K$ باشد.

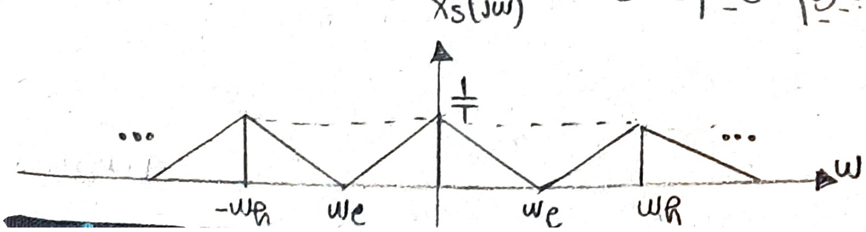
! گاهی اوقات طیف فرکانسی سیگنال به گونه‌ای است که می‌توان با نرخی کمتر از نرخ نایکوئیست نیز از سیگنال نمونه‌برداری کرد بدون اینکه طیف دچار اختلال فرکانسی شود (به قسمت «الف» سؤال بعد توجه کنید)

سؤال 4

الف) فرض کنید از سیگنال $x(t)$ با پریود زمانی T، نمونه‌برداری می‌کنیم. مشابه آنچه در سؤال قبل بیان کردیم، طیف سیگنال نمونه‌برداری شده $x_s(t)$ به صورت زیر است:

$$X_s(j\omega)=\frac{1}{T}X(j\omega) * \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-m\underbrace{\frac{2\pi}{T}}_{\triangleq\,\omega_s}\right)$$

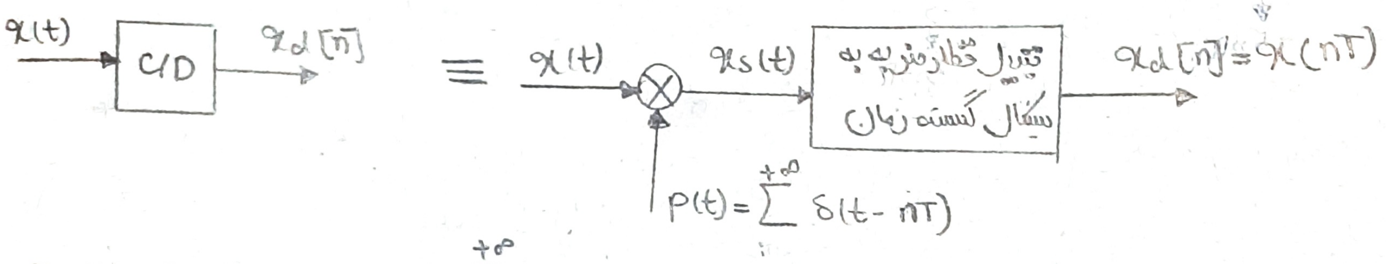
برای اینکه بتوان سیگنال $x(t)$ را از روی نمونه‌های $x_s(t)$ بازیابی نمود این است که هیچ تداخل فرکانسی (الیاسینگ) در فرآیند نمونه‌برداری رخ ندهد. با توجه به طیف فرکانسی $X(j\omega)$ داده شده در صورت سؤال، اگر فرکانس نمونه‌برداری را برابر با بزرگترین مؤلفه‌ی فرکانسی یعنی ω_h در نظر بگیریم خواهیم داشت:



ملاحظه می‌شود علی‌رغم اینکه نرخ نایکوئیست را در نمونه‌برداری رعایت نکردیم اما هیچگونه تداخل فرکانسی میان طیف‌ها رخ نداد پس می‌توان با یک فیلتر میان‌گذر با فرکانس‌های قطع ω_ℓ و ω_h و بهره‌ی T دقیقاً $X(j\omega)$ را از روی $X_s(j\omega)$ بدست آورد.

در حالت کلی اگر طیف سیگنال میانگذر باشد، می‌توان با نرخی کمتر از نرخ نایکوئیست نیز از سیگنال نمونه‌برداری کرد.

ب) همانطور که می‌دانیم، فرآیند درون مبدل C/D به صورت زیر است:



$$x_s(t) = x(t)\,p(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\,\delta(t-nT)$$

$$X_s(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(mT)\,F\{\delta(t-nT)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\,e^{-j\omega nT}$$

با جاگذاری $x_d[n]$ به جای $x(nT)$ داریم:

$$X_s(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_d[n]\,e^{-j\omega nT}$$

رابطه 1

از طرفی می‌دانیم تبدیل فوریه‌ی سیگنال گسسته زمان $x_d[n]$ از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$X_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_d[n]\,e^{-j\omega n}$$

رابطه 2

رابطه 1 و رابطه 2 $\rightsquigarrow$ $\boxed{X_d(e^{j\omega}) = X_s\left(j\frac{\omega}{T}\right)}$

رابطه 3

دقت کنید که چون $X_d(e^{j\omega})$ تبدیل فوریه‌ی یک سیگنال گسسته زمان است پس با دوره تناوب 2π متناوب است. لذا $X_s\left(j\frac{\omega}{T}\right)$ با دوره تناوب $\frac{2\pi}{T}$ متناوب خواهد بود.

ما به دنبال رابطه‌ی طیف $x_d[n]$ و $x(t)$ هستیم. می‌توانیم بنویسیم:

$$x_s(t) = x(t)\,p(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT) \rightsquigarrow X_s(j\omega) = \frac{1}{T}X(j\omega) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega - n\frac{2\pi}{T}\right)$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(j\left(\omega - n\frac{2\pi}{T}\right)\right)$$

رابطه 4

با قرار دادن $X_s(j\omega)$ بدست آمده در رابطه ی فوق، در رابطه ی 3 خواهیم داشت:

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(j\left(\frac{\omega-2n\pi}{T}\right)\right)$$

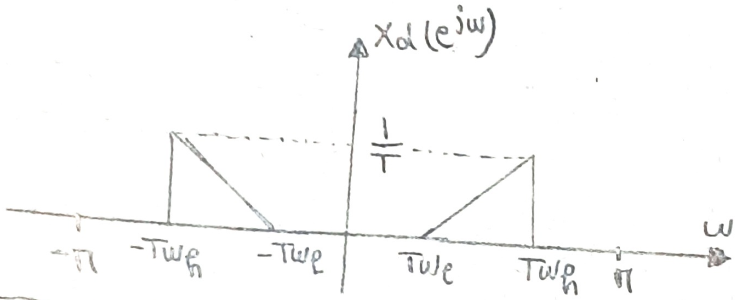
با توجه به متناوب بودن $X_d(e^{j\omega})$ با دوره ی تناوب 2π داریم:

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}X\left(j\frac{\omega}{T}\right) \quad \text{for} \quad \boxed{|\omega|<\pi}$$

رابطه 4

رابطه ی روبرو را به خاطر بسپارید!!

بنابراین طبق رابطه ی فوق داریم:

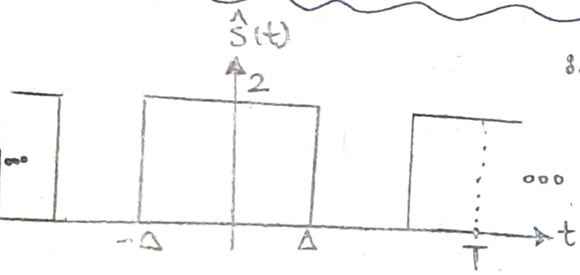


ج) $T\omega_h<\pi \Rightarrow \boxed{T<\frac{\pi}{\omega_h}}$

برای اینکه تداخل فرکانسی رخ ندهد، داریم:

سؤال 5

در این سؤال، نمونه برداری توسط قطار پالس مستطیلی انجام می‌شود:



$$\Rightarrow s(t) \triangleq \hat{s}(t) - 1$$

$$\hat{S}(j\omega) = F\{\hat{s}(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{4\sin\left(\frac{2k\pi\Delta}{T}\right)}{k}\,\delta\left(\omega-\frac{2k\pi}{T}\right)$$

$$S(j\omega) = \hat{S}(j\omega) - 2\pi\delta(\omega)$$

واضح است که $S(j\omega)$ دارای ضربه های متناوب در فرکانس های $\frac{2\pi}{T}$ است. حال اگر $\Delta = \frac{T}{3}$ باشد خواهیم داشت:

$$S(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{4\sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right)}{k}\,\delta\left(\omega-\frac{2k\pi}{T}\right) - 2\pi\delta(\omega)$$

$$y(t) = x(t)s(t) \Rightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[X(j\omega) * S(j\omega)\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{4\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)}{k}\,X\left(j\left(\omega-\frac{2k\pi}{T}\right)\right) - X(j\omega)$$

بنابراین $Y(j\omega)$ شامل نسخه های شیفت یافته ی $X(j\omega)$ به اندازه ی مضارب صحیح $\frac{2\pi}{T}$ است. بنابراین برای اینکه تداخل فرکانسی رخ ندهد باید داشته باشیم:

$$\frac{2\pi}{T} - \underbrace{\omega_M}_{\text{بزرگترین مؤلفه فرکانسی}} \geqslant \omega_M \Rightarrow 2\omega_M \geqslant \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega_M \geqslant \frac{\pi}{T} \Rightarrow \boxed{T_M \leqslant \frac{\pi}{\omega_M}}$$