



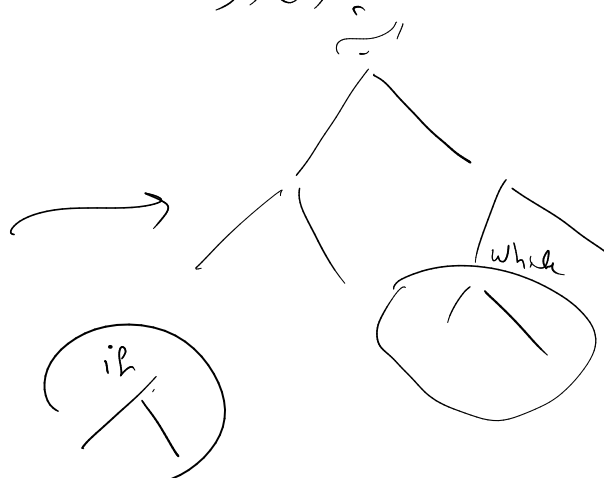
به نام خدا

grammar specification

if exp then {  
if exp then {  
stmt

اجزای نحوی را به یک درخت نحوی برساند

```
main( ) {  
  h( )  
  h( )  
  while  
}
```



تحلیل نحوی دنباله ای از توکن ها را دریافت کرده و ساختار نحوی مختلف زبان را از آن استخراج می کند  
بدین منظور یک درخت نحوی را تولید می کند

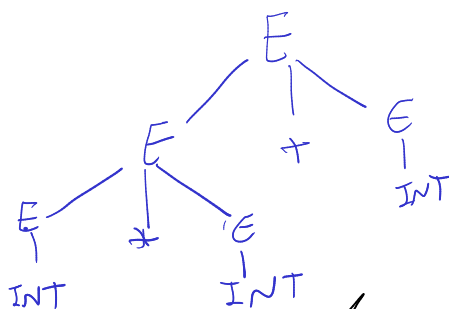
صفت RE برای تشخیص ساختار نحوی زبان های پیچیده نویسی ؟

(( ( ) + ( ) ))

قدرت RE برای ساختار زبان کافی نیست مثلاً توسط RE نمی توان ساختار درونی را شمارش کرد.

Context Free Grammar

مثال)  $3 \times 4 + 5$



راه کار طی

زبان های پیچیده نویسی را از طریق CFG توصیف کنیم و سپس قابلیت های هر رشته از توکن ها  
تکثیر مهم آن رشته توسط زبان توصیف شده تولید می شود یا نه.



CFG

$$\begin{cases} T : \text{مجموعه سمبل‌های بیانگر ترمینال} \\ N : \text{مجموعه سمبل‌های غیر ترمینال} \\ S \in N \\ \text{قوانین} \quad X \rightarrow \gamma_1 \dots \gamma_n \\ X \in N \quad \gamma_i \in N \cup T \cup \{\epsilon\} \end{cases}$$

مثال  $E \rightarrow E + E \mid E * E \mid (E) \mid id$

رشته  $(3 * 4 + 5)$

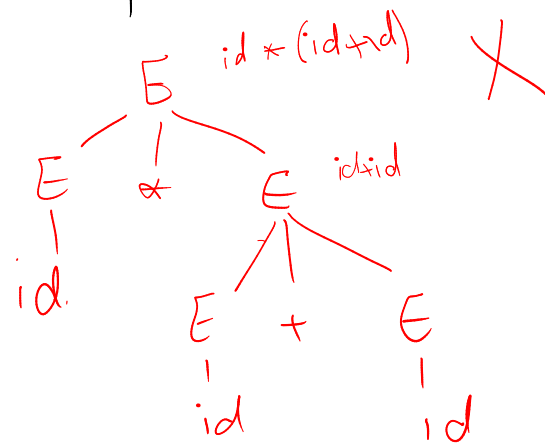
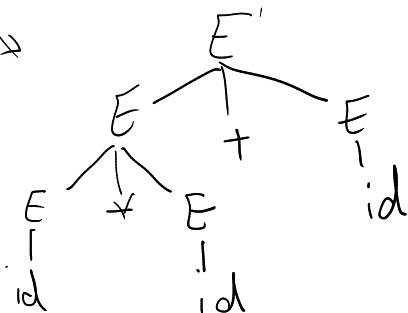
مراحل تأیید رشته با درامر

- ۱- از چپ شروع می‌کنیم
- ۲- یک سمبل غیر ترمینال در رشته را با سمت راست می‌ازدوانیم جایگزینی کنیم
- ۳- مرحله ۱ را تکرار می‌کنیم به طوری که نهایتاً هیچ سمبل غیر ترمینالی در جمله نداشته باشد و رشته نهایی با رشته مورد نظر تطابق داشته باشد

$$\begin{aligned} E &\rightarrow E + E \rightarrow E * E + E \rightarrow id * E + E \rightarrow id * id + E \rightarrow \\ &\quad E \rightarrow E * E \rightarrow E * E + E \rightarrow E * id + id \quad id * id + id \\ &\quad \rightarrow id * id + id \end{aligned}$$

$$L(G) = \{a_1 \dots a_n \mid \exists a_1 \in T \wedge S \xrightarrow{*} a_1 \dots a_n\}$$

درخت تفسیر





برنامفدا

Derivation (استنتاج) دنباله‌ای از قوانین گرانحوی که از یک سنجش آغاز می‌شود و به رشته مورد نظر ختم می‌شود  
 به ازای هر استنتاج یک درخت پارس درست می‌آید

\* به ازای یک رشته، ممکن است استنتاج‌های زیادی وجود داشته باشد ولی همه استنتاج‌ها برای پارس مورد قبول نیست

left-most derivation در هر مرحله چپ‌ترین غیر ترسیال را جایگزین کن  
 right-most derivation در هر مرحله راست‌ترین غیر ترسیال را جایگزین کن

backtracked recursive تجزیه  
 recursive جستجو  
 با استفاده از جدول (غیر بازگشتی) LL(1)  
 پارس پائین به بالا  
 روش‌های تجزیه پارس

$$A \rightarrow \beta_1 \mid \beta_2 \mid \dots \mid \beta_m$$

bool while ( ) {  
 choose an A-production

for ( i = 1 to k ) {  
 if (  $X_i \in N$  )

$X_i()$   
 else if (  $X_i = \text{next}$  )

next++ ;

else  
 break // error

}

}

$$X_1 X_2 \dots X_k$$

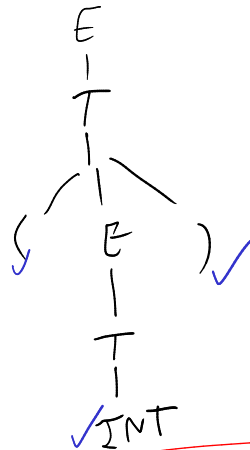
next  
 $\downarrow$   
 دردی  $a_1 a_2 \dots a_n$



$$E \xrightarrow{E_1} T \xrightarrow{E_2} T + E$$

$$T \rightarrow \underbrace{INT}_{T_1} \mid \underbrace{INT * T}_{T_2} \mid \underbrace{(E)}_{T_3}$$

رشته ورودی (INT)



پارس تمام می شود

```

match(Token tok) {
    return *next++ == tok;
}
  
```

Recursive ادسن پارس

- فرض می کنیم که توکن  $lex$  به دست آمده اند  
- متغیر  $next$  در ورودی بعدی اشاره می کند

- برای هر  $non-terminal$  یک تابع  $boolean$  که چک کردن قانون  $S_n$  است  $match$  می نامیم

$a_1 \xrightarrow{next} a_n$

- همه قوانین را با  $match$  چک کردن می توانیم

```

bool E() {
    Token *save = next;
  
```

```

    return (E1() || (next=save, E2()))
  
```

```

    bool E1() {
        return T();
    }
  
```

```

    bool E2() {
  
```

```

        return (T() && match('+') && E());
    }
  
```

 $E_2 \rightarrow T + E$ 

```

}
bool T() {
  
```

```

    Token *save = next;
  
```

```

    return (T1() || (next=save, T2()) || (next=save, T3()))
  
```

```

}
  
```

**Algorithm 4.19:** Eliminating left recursion.**INPUT:** Grammar  $G$  with no cycles or  $\epsilon$ -productions.**OUTPUT:** An equivalent grammar with no left recursion.**METHOD:** Apply the algorithm in Fig. 4.11 to  $G$ . Note that the resulting non-left-recursive grammar may have  $\epsilon$ -productions.  $\square$ 

- 1) arrange the nonterminals in some order  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .
- 2) **for** ( each  $i$  from 1 to  $n$  ) {
- 3)     **for** ( each  $j$  from 1 to  $i - 1$  ) {
- 4)         replace each production of the form  $A_i \rightarrow A_j \gamma$  by the  
               productions  $A_i \rightarrow \delta_1 \gamma \mid \delta_2 \gamma \mid \dots \mid \delta_k \gamma$ , where  
                $A_j \rightarrow \delta_1 \mid \delta_2 \mid \dots \mid \delta_k$  are all current  $A_j$ -productions
- 5)     }
- 6)     eliminate the immediate left recursion among the  $A_i$ -productions
- 7) }

bool isLeftRecursive

return !match('(') && E() && match(')');

}

برای تشخیص

۱- max به انتهای رشته درودی است، لکنه  
 ۲- S() فراخوانی شود (بسیار نزدیک)



نام ضری

مثال  
رودی  $INT * INT$

$$E \rightarrow \overset{E_1}{T} | \overset{E_2}{T + E}$$

$$T \rightarrow \underset{T_1}{INT} | \underset{T_2}{INT * T} | \underset{T_3}{(E)}$$

$$T \rightarrow INT T'$$

$$T' \rightarrow * T | \epsilon$$

مسکات روشن Recursive  
ترتیب مراضوانی تراجم رودی رودی

$$E \rightarrow E_1 \rightarrow T \rightarrow INT$$

همه توابع تا  $E$  ، match  
true ، برگرداند و به این به صورت بازگشتی  
true برگرداند و کار متوقف و تمام می شود  
بهایی که رشته رودی کام آید

این روش حفظ برای هر ورودی دست کاری نمی کند، آن را برای هر غیرترتیبیال حدالزرب قانون تواند true  
برگرداند ، قانون ۱ هیچ یک نمی تواند باشد

$$A \rightarrow \alpha \beta_1 | \alpha \beta_2 | \dots | \alpha \beta_n | \gamma \rightarrow \text{با شروع شود}$$

صبر کنید

$$A \rightarrow \alpha A' | \gamma$$

$$A' \rightarrow \beta_1 | \beta_2 | \dots | \beta_n$$

$$E \rightarrow E + E | (E) | id$$

ترتیب مراضوانی :  $E, E, E, \dots$

مسکات روش مراضوانی تراجم در  $pop$  می افتد این مشکل در رودی که recursion دارد نیستی می آید  
اصل صند left recursion

$$A \rightarrow A \alpha | \beta \rightarrow \begin{cases} A \rightarrow \beta A' \\ A' \rightarrow \alpha A' | \epsilon \end{cases}$$

مثال

$$E \rightarrow E * E | (E) | id$$

$$E \rightarrow (E) E' | id E'$$

$$E' \rightarrow * E E' | \epsilon$$



فرم کلی (نموداری)  
left recursion  
اولین دفعه آن

$$A \rightarrow A\alpha_1 \mid A\alpha_2 \mid \dots \mid A\alpha_n \mid \beta_1 \mid \beta_2 \mid \dots \mid \beta_m$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A \rightarrow \beta_1 A' \mid \beta_2 A' \mid \dots \mid \beta_m A' \\ A' \rightarrow \alpha_1 A' \mid \alpha_2 A' \mid \dots \mid \alpha_n A' \mid \epsilon \end{cases}$$

left recursion  
تکرار مستقیم

مثال) 
$$\begin{aligned} S &\rightarrow Aa \mid b \\ A &\rightarrow Sd \mid a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow Aa \rightarrow Sda \rightarrow \\ &\rightarrow Aada \rightarrow Sdaada \rightarrow \end{aligned}$$

$$S \rightarrow Aa \mid b \rightarrow \begin{cases} S \rightarrow Sda \mid aa \mid b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} S \rightarrow aaS' \mid bS' \\ S' \rightarrow daS' \mid \epsilon \end{cases}$$

#### Algorithm 4.19: Eliminating left recursion.

**INPUT:** Grammar  $G$  with no cycles or  $\epsilon$ -productions.

**OUTPUT:** An equivalent grammar with no left recursion.

**METHOD:** Apply the algorithm in Fig. 4.11 to  $G$ . Note that the resulting non-left-recursive grammar may have  $\epsilon$ -productions.  $\square$

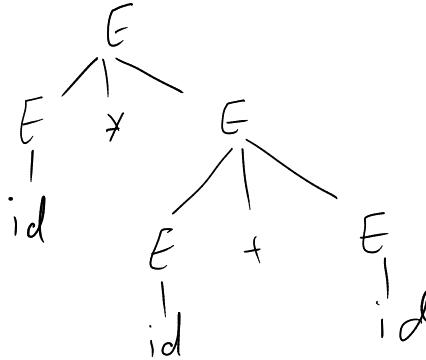
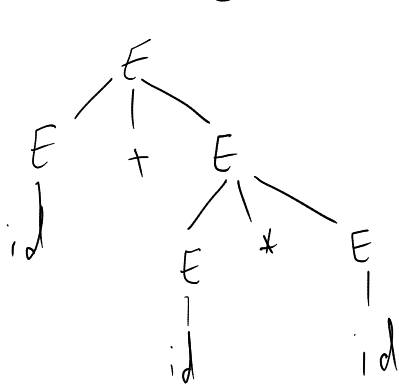
- 1) arrange the nonterminals in some order  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .
- 2) **for** ( each  $i$  from 1 to  $n$  ) {
- 3)     **for** ( each  $j$  from 1 to  $i - 1$  ) {
- 4)         replace each production of the form  $A_i \rightarrow A_j \gamma$  by the productions  $A_i \rightarrow \delta_1 \gamma \mid \delta_2 \gamma \mid \dots \mid \delta_k \gamma$ , where  $A_j \rightarrow \delta_1 \mid \delta_2 \mid \dots \mid \delta_k$  are all current  $A_j$ -productions
- 5)     }
- 6)     eliminate the immediate left recursion among the  $A_i$ -productions
- 7) }



مثال)  $E \rightarrow E + E \mid E - E \mid E * E \mid E / E \mid E^E \mid -E \mid (E) \mid id$

درودی  $id + id * id$

در وقت متفاوت پارس می‌شود اگر گرانحوی نتواند بدست بیاورد



بهم در گرانحوی

صل مثال

گرامر مورد نظر نباید ابهام داشته باشد می‌توان گرامر را در صورت امکان رفع ابهام کرد

یعنی گرامر به هم را تبدیل به گرانحوی کرد که زبان تولید شده توسط گرامر خنثی بدون ابهام دقیقاً معادل گرامر اول به هم باشد

ترتیب اولویت:  $(E), -, ^, *, /, +, -$   
ترتیب سرنگشت پذیری:  $\underbrace{\quad\quad\quad}_{\text{حیث}}$  راست است، راست است، راست است

گرامر معادل  
بدون ابهام  
 $E \rightarrow E + T \mid E - T \mid T$   
 $T \rightarrow T * F \mid T / F \mid F$   
 $F \rightarrow G^F \mid G$   
 $G \rightarrow - G \mid H$   
 $H \rightarrow (E) \mid id$

مثال دوم برای حل  
نصف درودی نشان  
دهند گرامر ابهام دارد  
پس یعنی سید گرامر  
جدید معادلی که بدون  
ابهام است بنویسد

$st \rightarrow id \quad exp \quad then \quad st \mid$   
 $id \quad exp \quad then \quad st \quad else \quad st \mid s$   
 $exp \rightarrow e$





میانمذا

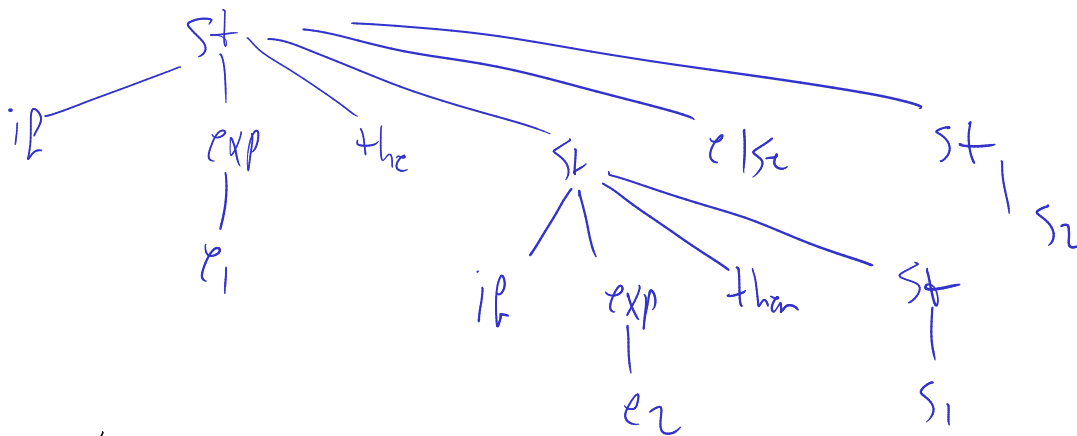
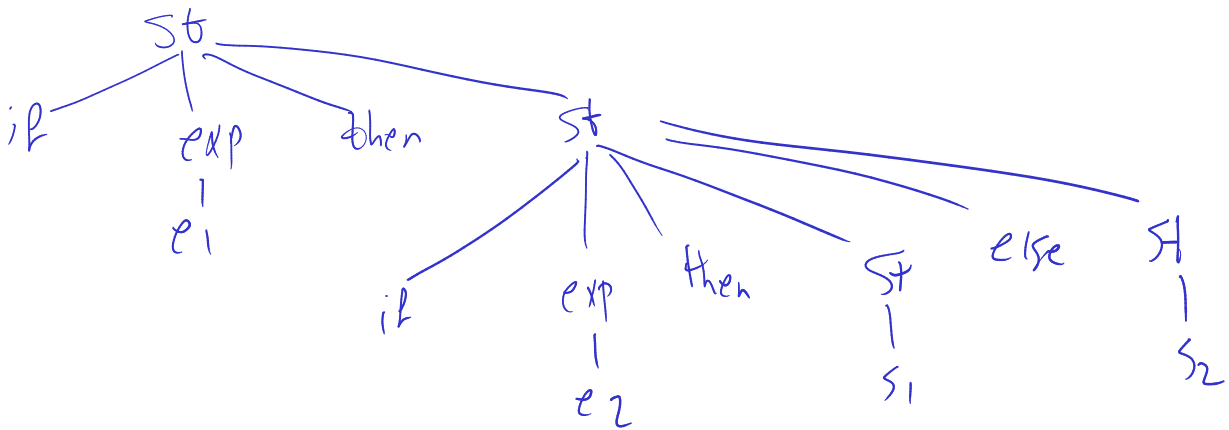
مثال رفع ابهام از گرامر

$$st \rightarrow \text{if } exp \text{ then } st \mid$$

$$\text{if } exp \text{ then } st \text{ else } st \mid S$$

$$exp \rightarrow \epsilon$$

مثال)  $\text{if } e_1 \text{ then } \underbrace{\text{if } e_2 \text{ then } s_1 \text{ else } s_2}_{\text{if } e_2 \text{ then } s_1 \text{ else } s_2}$



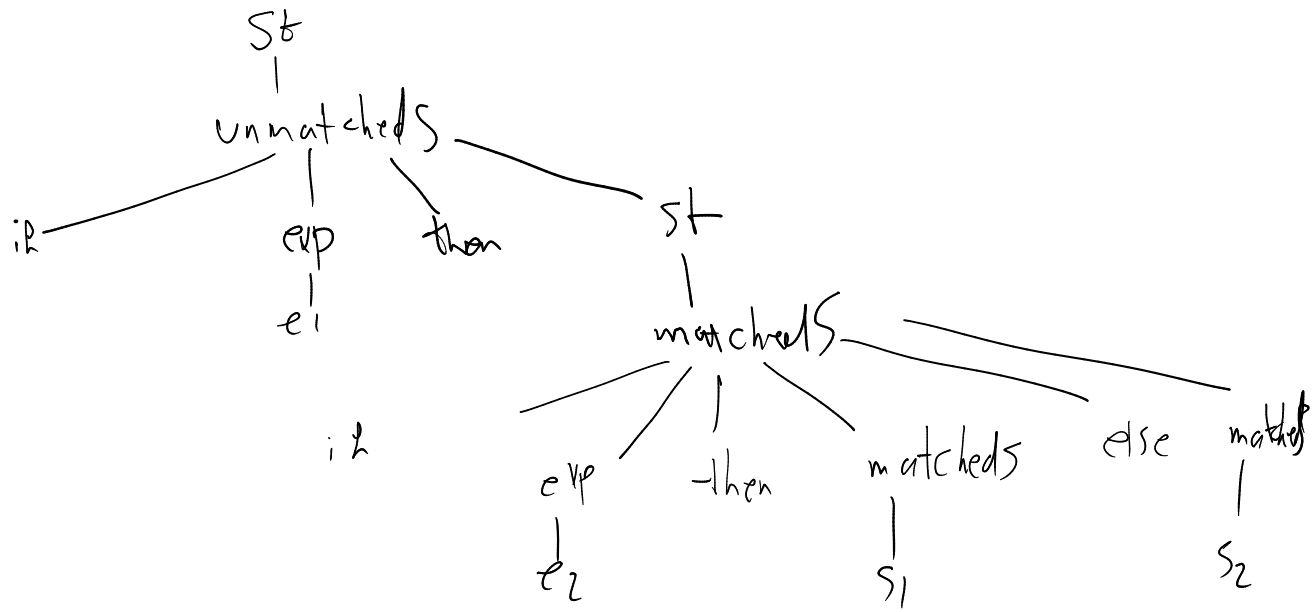
رفع ابهام

$$st \rightarrow \text{matched } S \mid \text{unmatched } S$$

$$\text{matched } S \rightarrow \text{if } exp \text{ then } \text{matched } S \text{ else } \text{matched } S \mid S$$

$$\text{unmatched } S \rightarrow \text{if } exp \text{ then } st \mid \text{if } exp \text{ then } \text{matched } S \text{ else } \text{unmatched } S$$

$$exp \rightarrow$$



## Predictive Recursive Descent

**Predictive Recursive Descent**

خطه دختربه به غیر مثال A داریم درستی که A دارای است این prediction به معنی خواهد بود  
توایم با ترجمه ورودی معضای از prediction را انتخاب کنیم

\*next ورودی

$$A \rightarrow \alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \dots \mid \alpha_k$$

۱- اگر  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \rightarrow A$ ، باید محض کنیم حرف از  $\alpha_i$  ها چه توکن یا توکن های می توانند شروع شوند و انتظاره  $\alpha_i$  را انتخاب کنیم که شروعش با توکن جاری ورودی مطابق باشد (بهت آوردن  $\alpha_i$ ) (first)

\* پس لازم است  $\text{first}(\alpha_i) \cap \text{first}(\alpha_j) = \emptyset$  تا قانون یک به اراسی توکن موجود (در ورودی بهت آید)

۲- اگر  $A \rightarrow \epsilon$  (  $A \xrightarrow{*} \epsilon$  ) در آن صورت بدون صرف درجی return کنیم

$$s \xRightarrow{*} \beta A \beta' \rightarrow \vec{\beta} \beta'$$

$a_1 \dots a_i \qquad a_1$   
 $\qquad \qquad \uparrow$   
 $\qquad \text{next}$

با سبلی که بعد از  $A$  در قانون خرافه‌گویی نه به قبل آمده است  
 'ا' داده هم. در این صورت باید توکن جاری ورودی بتواند  
 با 'ا' داده  $A$  (  $hallow(A)$  ) مطابقت کند

$$(A \rightarrow_{\mathcal{E}} \gamma_i) \text{ list } (\alpha_i) \cap \text{follow}(A) = \emptyset \quad *$$

predictive اوش

بہ انہی احرار غریب سنال A تابع زیر اعلیٰ تھانہ سے

$A \rightarrow \alpha_1 | \dots | \alpha_k | \epsilon$   
\* next, لیکن جاری در ویدیو

$A()$  {  
 if  $(x_{next} \in \text{first}(\alpha_1))$  continue parsing the input with  $\alpha_1$   
 else if  $(x_{next} \in \text{first}(\alpha_2))$   $\alpha_2$   
 :  
 else  $\dots \text{first}(\alpha_k)$   $\alpha_k$   
 else if  $(x_{next} \in \text{Follow}(A))$   
     return ;  
 else syntax Error ;
 }



مثال)  $E \rightarrow E+T \mid E-T \mid T$  LR  
 $T \rightarrow id$

$E \rightarrow TE'$   
 $E' \rightarrow +TE' \mid -TE' \mid \epsilon$   
 $T \rightarrow id$

```

E() {
  if (*next ∈ first(TE'))
    T(); E'();
  else
    syn Err
}

T() {
  if (*next == id)
    match('id');
  else
    syn Err
}
  
```

```

E'() {
  if (*next ∈ first(+TE'))
    match('+'); T(); E'();
  else if (*next ∈ first(-TE'))
    match('-'); T(); E'();
  else if (*next ∈ follow(E'))
    return;
  else
    syn Err
}
  
```



به نام خدا

شرایط استقاده از الگوریتم بدون عقب‌گرد برای تجزیه Top down

کرای حرکت و  $\beta$  از production  $A$  (  $A \rightarrow \alpha | \beta$  ) شرط زیر برقرار باشد:

$$1- \text{first}(\alpha) \cap \text{first}(\beta) = \emptyset$$

$$2- \epsilon \Rightarrow \beta \text{ انتخاب نباشد } \text{follow}(A) \cap \text{first}(\alpha) = \emptyset$$

\* این شرایط، شرایط لازم و کافی برای LL(1) بودن یک گرامر است.

تعریف گرامر (LL1)

به تجزیه سردمی که می‌تواند در هر قدم، قاعده صحیح را برای حرکت  $\text{NonTerminal}$  انتخاب کند (بدون backTrack) تجزیه‌گر پیشگام می‌گردد. اگر در هر مرحله با توجه به یک ترمینال ورودی، قاعده صحیح انتخاب شود (تجزیه‌گر را LL(1) می‌نامند).

Left most derivation - Left to right , LL(1)

روش‌های تدبیر جهت تبدیل گرامر به LL(1)

۱- حذف left recursion

۲- حذف فاکتورهای از چپ

۳- تبدیل گرامر به گرامر غیر همبند

- استخراج زبان گرامر و تعریف گرامر جدید LL(1)



محاسبه first و follow

$first(\alpha)$  مجموعه سکهایی است که انتهای رشته‌های بدست آمده از  $\alpha$  قرار گیرند.

روش محاسبه  $first(\alpha)$ 

- اگر  $\alpha$  یک سکه است  $first(\alpha) = \alpha$

- اگر  $\alpha$  یک غیر انتهای باشد،  $\alpha \rightarrow \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_k$  یکی از قوانین  $\alpha$  باشد

- اگر برای یک  $i$ ،  $a \in first(\gamma_i)$ ، برای همه  $j < i$ ،  $\epsilon \in first(\gamma_j)$ ،  $a \in first(\alpha)$

- اگر برای همه  $i$ ،  $\epsilon \in first(\gamma_i)$ ،  $1 \leq i \leq k$ ،  $\epsilon \in first(\alpha)$

- اگر  $\alpha \rightarrow \epsilon$ ،  $\epsilon \in first(\alpha)$

مثال)  $S \rightarrow ABCDE \mid P$

$A \rightarrow aA \mid B$

$B \rightarrow bB \mid \epsilon$

$C \rightarrow cC \mid d$

$D \rightarrow dD \mid B\epsilon$

$E \rightarrow gE \mid \epsilon$

$first(S) = \{P, a, b, c, d\}$

$first(A) = \{a, b, \epsilon\}$

$first(B) = \{b, \epsilon\}$

$first(C) = \{c, d\}$

$first(D) = \{d, b, \epsilon\}$

$first(E) = \{g, \epsilon\}$

روش بدست آوردن follow

- اگر  $S$  سکه شروع باشد،  $\$ \in follow(S)$

- اگر قانونی به صورت  $A \rightarrow \alpha B \beta$  باشد، سکهایی که در  $first(\beta)$  قرار دارند، در  $follow(A)$  قرار می‌گیرند.

- اگر قانونی به صورت  $A \rightarrow \alpha B$  باشد، سکهایی که در  $first(\alpha)$  قرار دارند، در  $follow(A)$  قرار می‌گیرند.

دست‌های هم‌آنجایی در  $follow(A)$  قرار می‌گیرند و می‌توانند با توجه به این جمله در  $follow(B)$  هم قرار گیرند.



مثال)  $S \rightarrow A \underline{BCSDE} | \epsilon$

$A \rightarrow aA | B$

$B \rightarrow bB | \epsilon$

$C \rightarrow cC | d$

$D \rightarrow dD | Be$

$E \rightarrow gE | \epsilon$

$$① \text{first}(BCSDE) \subseteq \text{follow}(A)$$

$$A \rightarrow B \Rightarrow \text{follow}(A) \subseteq \text{follow}(B) \quad ②$$

$$③ \text{first}(SDE) \subseteq \text{follow}(C)$$

$$S \rightarrow ABCSDE \Rightarrow \text{follow}(S) \subseteq \text{follow}(E) \quad ④$$

$$\text{first}(E) \subseteq \text{follow}(D) \quad ⑤$$

$$S \rightarrow ABCSDE \Rightarrow \text{first}(DE) \subseteq \text{follow}(S)$$

$$E \rightarrow \epsilon \Rightarrow \text{follow}(S) \subseteq \text{follow}(D)$$

$$\text{first}(bB) \cap \text{follow}(B) = \{b\} \cap \{b, c, d\} = \{b\}$$

$B \rightarrow bB | \epsilon$

در هر LL(1) نیست

$$\text{follow}(S) = \{ \$, d, b, e \}$$

$$\text{follow}(A) = \{ \underbrace{b, c, d}_1 \}$$

$$\text{follow}(B) = \{ \underbrace{b, c, d}_2 \}$$

$$\text{follow}(C) = \{ \underbrace{\epsilon, a, b, c, d}_3 \}$$

$$\text{follow}(E) = \{ \underbrace{\epsilon}_4, d, b, e \}$$

$$\text{follow}(D) = \{ \underbrace{g}_5, \$, d, b, e \}$$



روش پارس درودی با کمک جدول (۱) LL1

مثال)  $E \rightarrow T + E \mid T$   
 $T \rightarrow id \mid id * T \mid (E)$

ورودی:  $id + id * id$

$E \rightarrow TX \rightarrow id \mid X \rightarrow id \mid X \rightarrow id + E$   
 $\rightarrow id + TX \rightarrow id + id \mid X \rightarrow id + id * TX \rightarrow$   
 $id + id * id \mid X \rightarrow id + id * id X \rightarrow$   
 $id + id * id$

معادلات گرامر

$$\begin{cases} E \rightarrow TX \\ X \rightarrow +E \mid \epsilon \\ T \rightarrow id \mid (E) \\ Y \rightarrow *T \mid \epsilon \end{cases}$$

terminal

		id	*	+	(	)	\$
E	TX				TX		
X				+E		$\epsilon$	$\epsilon$
T	id Y				(E)		
Y			*T	$\epsilon$		$\epsilon$	$\epsilon$

Stack	ورودی	action
E \$	id + id * id \$	$E \rightarrow TX$
TX \$	id + id * id \$	$T \rightarrow id \mid$
id Y X \$	id + id * id \$	match(id)
Y X \$	+ id * id \$	$Y \rightarrow \epsilon$
X \$		$X \rightarrow +E$
+E \$	+ id * id \$	match(+)
E \$	id * id \$	$E \rightarrow TX$
TX \$	id * id \$	$T \rightarrow id \mid$
id Y X \$	id * id \$	match(id)
Y X \$	* id \$	$Y \rightarrow *T$
*T X \$	* id \$	match(*)
TX \$	id \$	$T \rightarrow id \mid$
id Y X \$	id \$	match(id)
Y X \$	\$	$Y \rightarrow \epsilon$
X \$	\$	$X \rightarrow \epsilon$
\$	\$	accept





الگوریتم طرز تجزیه بالا به پایین به جدول LL(1) تبدیل گرامر LL(1)

initialize stack  $\langle S \$ \rangle$

\*next = next token at input (initialize by first token at input)

Done T

Repeat

case stack of

$\langle X \text{ rest} \rangle$  : if  $T[X, *next] = Y_1 \dots Y_n$   
 $X \in \text{NonTerminals}$  then stack  $\leftarrow \langle Y_1 \dots Y_n \text{ rest} \rangle$ ;  
 else error;

$\langle t \text{ rest} \rangle$  : if  $t = *next$   
 $t \in \text{Terminals}$  then stack  $\leftarrow \langle \text{rest} \rangle$   
 else error;

Until stack =  $\langle \rangle$

**Algorithm 4.31:** Construction of a predictive parsing table.

**INPUT:** Grammar  $G$ .

**OUTPUT:** Parsing table  $M$ .

**METHOD:** For each production  $A \rightarrow \alpha$  of the grammar, do the following:

1. For each terminal  $a$  in  $\text{FIRST}(\alpha)$ , add  $A \rightarrow \alpha$  to  $M[A, a]$ .
2. If  $\epsilon$  is in  $\text{FIRST}(\alpha)$ , then for each terminal  $b$  in  $\text{FOLLOW}(A)$ , add  $A \rightarrow \alpha$  to  $M[A, b]$ . If  $\epsilon$  is in  $\text{FIRST}(\alpha)$  and  $\$$  is in  $\text{FOLLOW}(A)$ , add  $A \rightarrow \alpha$  to  $M[A, \$]$  as well.

مثال  $S \rightarrow i E t S \mid i E t S e S \mid a$   
 $E \rightarrow b$