نظریه بازی ها

پاییز ۱۴۰۰

بازی‌های استراتژیک با اولویت‌های ترتیبی
(بازی‌های با حرکات همزمان با اولویت‌های ترتیبی)

Strategic games with ordinal preferences
(simultaneous games with ordinal preferences)

فصل ۲ از کتاب An introduction to game theory
با عنوان Nash Equilibrium: Theory

بازی‌های استراتژیک با اولویت‌های ترتیبی
(بازی‌های با حرکات همزمان با اولویت‌های ترتیبی)

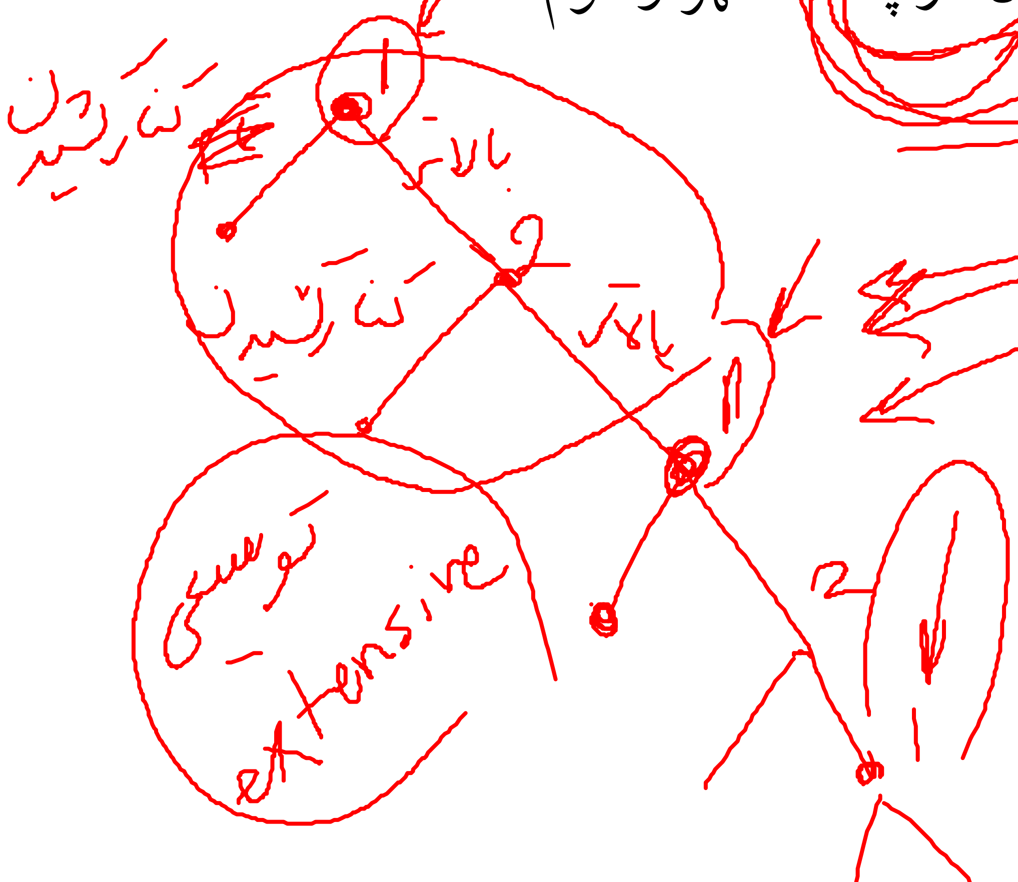
Strategic games with ordinal preferences
(simultaneous games with ordinal preferences)

فصل ۲ از کتاب An introduction to game theory
با عنوان Nash Equilibrium: Theory

strategy = action

حراج و مزایده

- مزایده با اعلام قیمت همزمان در پاکت مهر و موم شده
- مزایده زنده (چکشی)



action
strategy

بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی

مثال:
معمای زندانی Prisoner’s dilemma

- دو متهم به علت جرم کوچکی بازداشت شده اند و برای خبرچینی گرفتن در مورد جرم بزرگتری تحت بازجویی هستند.
- بازجویی ها جداگانه و بدون اطلاع متهمین از یکدیگر انجام می شود و پس از تکمیل پرونده ها، جداگانه بررسی می شوند.
- مجازات جرم کوچک ۱ ماه زندان؛ مجازات جرم بزرگتر ۲ ماه زندان؛ و پاداش خبرچینی، ۱ ماه کاهش زندان است.

- ➢ افراد باید تصمیم گیری کنند و سود هر کدام، علاوه بر تصمیم خود، تحت تاثیر تصمیم دیگری نیز هست.
- ➢ به این وضعیت و شرایط، یک بازی (game) می گوییم؛ و به هر تصمیم گیرنده، یک بازیکن (player) می گوییم.
- ➢ تصمیمات هر بازیکن از بین یک مجموعه ازحرکات (set of actions) انتخاب می شود.
- ➢ به تصمیم (اکشن) هایی که یک بازیکن برای موقعیت های مختلف در یک بازی در نظر می گیرد و انجام می دهد، استراتژی (strategy) آن بازیکن گوییم.

بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی

$i \quad j \quad n \quad m$

$a_i \quad A_i \quad S_i$

مثال:

معمای زندانی

- دو متهم به علت جرم کوچکی بازداشت شده اند و برای خبرچینی گرفتن در مورد جرم بزرگتری تحت بازجویی هستند.
- بازجویی ها جداگانه و بدون اطلاع متهمین از یکدیگر انجام می شود و پس از تکمیل پرونده ها، جداگانه بررسی می شوند.
- مجازات جرم کوچک ۱ ماه زندان؛ مجازات جرم بزرگتر ۲ ماه زندان؛ و پاداش خبرچینی، ۱ ماه کاهش زندان است.

$(F,Q) \succ (Q,Q) \succ (F,F) \succ (Q,F)$

$(Q,F) = $ a ل s

	Q	F
Q	-1,-1	-3,0
F	0,-3	-2,-2

$A_2 = A_1 = \{Q,F\}$

➢ به بردار استراتژی های همه بازیکنان در یک رخداد از بازی، یک نمایه استراتژی (strategy profile) گوییم.

➢ هر بازیکن با توجه به سود و زیان خودش، یک اولویت بندی و ترجیحات بین نمایه های استراتژی های بازی دارد که با $\prec_i$ نمایش می دهیم. مثلا اینجا؟

$u_i : A \to R$

➢ می توان اولویت های هر بازیکن بین نمایه ها را با یک تابع سود (utility function/payoff function) نمایش داد. مثلا اینجا؟

- واضح است که در چنین حالتی، مقادیر دقیقِ توابع مهم نیستند بلکه اولویت ها مهم هستند.

$a_1 = Q \qquad a_2 = F$

$u_1(Q,Q) = -1 \qquad u_1(Q,F) = -3$

$u_1(F,Q) = 0 \qquad u_1(F,F) = -2$

بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی

مثال: معمای زندانی

- دو متهم به علت جرم کوچکی بازداشت شده اند و برای خبرچینی گرفتن در مورد جرم بزرگتری تحت بازجویی هستند.
- بازجویی ها جداگانه و بدون اطلاع متهمین از یکدیگر انجام می شود و پس از تکمیل پرونده ها، جداگانه بررسی می شوند.
- مجازات جرم کوچک ۱ ماه زندان؛ مجازات جرم بزرگتر ۲ ماه زندان؛ و پاداش خبرچینی، ۱ ماه کاهش زندان است.

نتیجه: برای توصیف دقیق بازی بالا، باید موارد زیر را مشخص کرد:

1. **مجموعه بازیکنان؛**
2. **برای هر بازیکن، یک مجموعه از اکشن ها؛**
3. **برای هر بازیکن، مجموعه اولویت ها روی نمایه های استراتژیها، یا برای هر بازیکن، یک تابع سود.**

بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی

تعریف: یک بازی استراتژیک با اولویت های ترتیبی عبارت از یک سه تایی $(N,\{A_i\}_{i\in N},\{\prec_i\}_{i\in N})$ که در آن،

- N مجموعه بازیکنان است،
- A_i مجموعه اکشن های بازیکن i است،
- $\prec_i$ ترتیب ترجیحات (ordinal preferences) بازیکن i بر روی نمایه های استراتژی های بازیکنان است.

تعریف: یک بازی استراتژیک با اولویت های ترتیبی عبارت از یک سه تایی $(N,\{A_i\}_{i\in N},\{u_i\}_{i\in N})$ که در آن،

- N مجموعه بازیکنان است،
- A_i مجموعه اکشن های بازیکن i است،
- u_i تابع سود (utility function – payoff function) بازیکن i از نمایه های استراتژی های بازیکنان به اعداد حقیقی است.

$u_i(a_1,a_2,\dots,a_n)\in R$

بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی

1 \ 2	B	S M
B	2,1	0,0
S	0,0	1,2 3

مثال: باخ یا استراوینسکی؟
Bach or Stravinsky?

$A_2 = \{B, M\}$

$N = \{1, 2\}$

$A_1 = \cancel{A_2} = \{B, S\}$

$u_1(B,B) = 2 = u_2(S,S)$

$u_1(B,M) = u_1(S,B) = 0 = u_2(B,M) = u_2(S,B)$

$u_1(S,M) = 1 = u_2(B,B)$

بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی

مثال: پرتاب سکه
Matching Pennies

1 \ 2	H	T
H	1,-1	-1,1
T	-1,1	1,-1

$N = \{1, 2\}$

$A_1 = A_2 = \{H, T\}$

$u_1(H,H) = u_1(T,T) = 1 = u_2(H,T) = u_2(T,H)$

$u_1(H,T) = u_1(T,H) = -1 = u_2(H,H) = u_2(T,T)$

بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی

2

1

	S	H
S	2,2	0,1
H	1,0	1,1

Stag

Hare

مثال: شکار گوزن
Stag Hunt

$N=\{1,2\}$

$A_1=\{S,H\}=A_2$

$u_2(H,S)=0$

$u_1(S,S)=2 \quad u_1(S,H)=0 \quad u_1(H,S)=1$

$u_2(S,S)=2 \quad u_2(S,H)=1$

$u_1(H,H)=1$

$u_2(H,H)=1$

$N=\{1,2,\dots,6\}$

$a_{-3}=(a_1,a_2,a_4,a_5,a_6)$

$a_{-1}=(a_2,\dots,a_6)$

$i\in\{1,2,3,\dots,\dots\}=N$

A_2

$(a_2,a_{-2})=a$

$(a_1,a_3,a_4,\dots)$

$S \quad a$

$A_2 \quad A_1 \quad A_i$

$u_i(a_j,a_{-j})=u_i(a)$

- جمع بندی نمادها:
  - ✓ بازیکن $\quad n, m, j, i$
  - ✓ مجموعه بازیکنان $\quad a_i$
  - ✓ اکشن (حرکت) و استراتژی $\quad a_i$
    - ✓ یک بازیکن $\quad S_i$ و a_i
    - ✓ سایر بازیکنان $\quad S_{-i}$ ، a_{-i}
  - ✓ نمایه استراتژی و نمایه اکشن
  - ✓ مجموعه اکشن های یک بازیکن
  - ✓ تابع سود یک بازیکن $\quad u_i$
  - ✓ اولویت ترتیبی یک بازیکن $\quad \succsim_i \quad \sim_i \quad \succ_i$

تعادل در وضعیت رقابتی؟

- مثال: نظم در رانندگی؛
  - عبور دو راننده از یک چهارراه

تعادل در وضعیت رقابتی؟

- در بازیهای با حرکات همزمان (استراتژیک) با اولویت های ترتیبی، بازیکنان به سمت انتخاب چه اکشن هایی تمایل دارند؟

- در وضعیت تعادل چه اتفاقی می افتد؟

- مفهوم تعادل در این مسایل چیست؟

تعادل نش
Nash Equilibrium (N.E.)

تعادل نش
Nash Equilibrium (N.E.)

a^* N.E.

غیر همکارانه

تعریف تعادل نش: در یک بازی استراتژیک با ترجیحات ترتیبی، نمایه استراتژی a^* را یک تعادل نش گوییم اگر برای هر بازیکن i و هر اکشن a_i داشته باشیم $u_i(a^*) \ge u_i(a_i, a^*_{-i})$

a^*_1

a^*_2

هیچ بازیکنی از تغییر استراتژی به تنهایی، سود بیشتری نبرد

بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی

مثال: معمای زندانی
Prisoner's Dilemma

u_1, u_2

	Q	F
Q	-1,-1	-3,0
F	0,-3	-2,-2

(Q, Q)   -1   0

(Q, F)   -3   -2

(F, Q)   0   -1   -3   -2

(F, F)   -2, -2   -3   -3

N.E.

بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی

1 \ 2	B	S
B	2,1	~~0,0~~
S	~~0,0~~	1,2

(B,B) N.E.

(S,S) N.E.

مثال: باخ یا استراوینسکی؟
Bach or Stravinsky?
BoS

بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی

فصل ۴

	H	T
H	1,-1	-1,1
T	-1,1	1,-1

2

1

$\frac{1}{2} = p$

$\frac{1}{2} = 1-p$

HH

HT

TH

TT

تطبیق

مثال: ~~پرتاب~~ سکه

Matching Pennies

BS (2,1) (1,2)

بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی

مثال: شکار گوزن
Stag Hunt

Stag

Hare

	S	H
S	2,2	0,1
H	1,0	1,1

(S, S) N.E.

(H, H) N.E.

(2,2)

(1,1)

(S,H)

(H,S)

مثال. لطفا شما تعادل های نش را مشخص کنید

(M, L)

(B, R)

بازیکن دوم

بازیکن اول	L	C	R
T	2,4	2,2	2,0
M	4,4	0,4	0,0
B	0,2	3,0	3,3

N.E.

N.E.

بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی

توجه:

- بازی‌ها ممکن است هر تعداد تعادل نش داشته باشند؛ صفر، یک، دو یا ... .
- تعادل نش الزاما یک استراتژی پروفایل خوب برای بازیکنان نیست، حتی ممکن است بدترین انتخاب باشد.

0,0	2,0
0,2	1,3

- تعیین پروفایل‌های تعادل نش می‌تواند بسیار مشکل و عملا غیرممکن باشد (به دلیل تعداد زیاد بازیکنان یا ...).

بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی

اما یک سوال مهم:

از نظر کاربردی، تحت چه شرایطی تعریف "تعادل نش"، نشان دهنده مفهوم تعادل است؟

اصلا چرا می گوییم "تعادل نش"، یک "تعادل" است؟

	نظم	بی نظمی
نظم	-1,-1	-3,0
بی نظمی	0,-3	-2,-2

N.E

بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی

- در بازی (رقابت و تعامل) هر بازیکن با هدف افزایش سود شخصی‌اش، بهترین اکشن خود را با توجه به اکشن سایر بازیکنان انتخاب می‌کند.
  - ✓ سوال: اطلاعات بازیکن از رفتار و حرکات سایرین چگونه شکل می‌گیرد؟

بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی

پس لازم است در مورد این مساله فکر کنیم که:

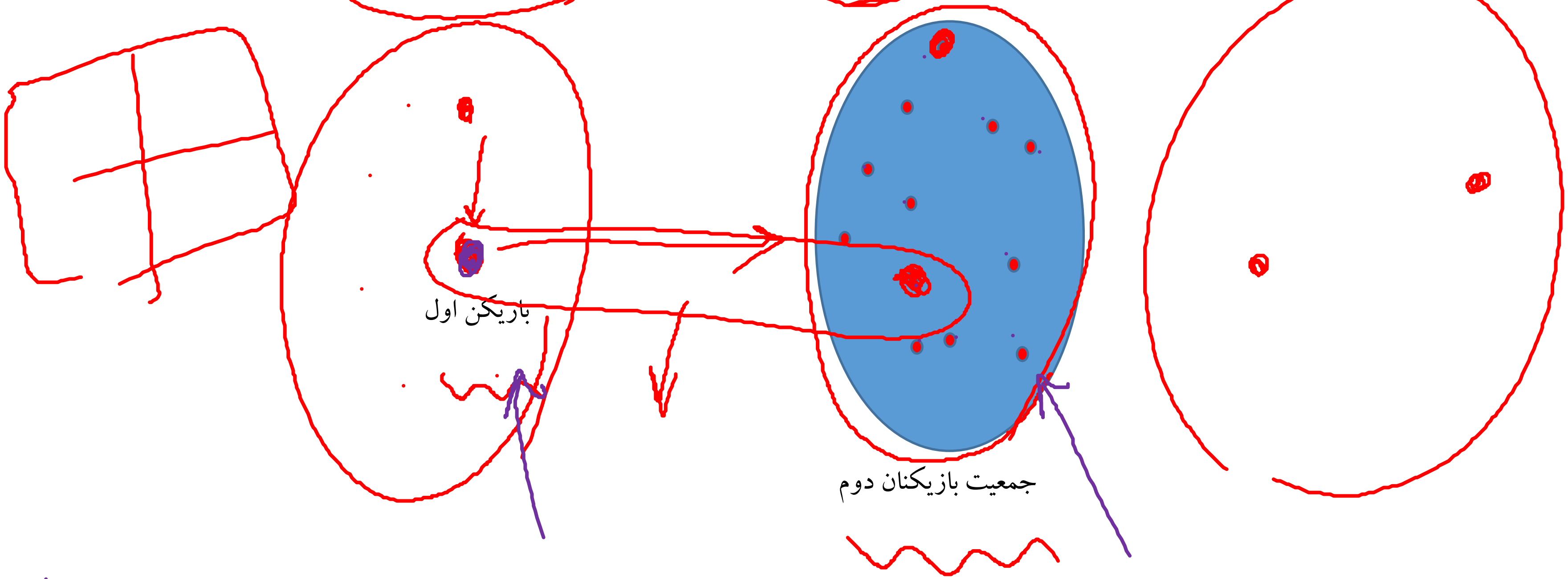
دانش (belief) یک بازیکن نسبت به اطلاعات بازی (حرکات و ترجیحات سایر بازیکنان) چگونه شکل می گیرد؟

- ✓ **کسب تجربه از انجام بازی به تعداد زیاد**
- ✓ **علم قبل از انجام بازی بر اساس مدل‌سازی و تحلیل**

بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی

repeated game

- کسب تجربه از انجام بازی به تعداد زیاد



بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی

- کسب تجربه و حرکت به سمت تعادل در یک بازی (به فرض وجود) باید هوشمندانه و با دید کافی باشد، نه صرفا بر اساس دیدگاه محلی.

بازیکن دوم

بازیکن اول

	L	C	R
T	2,4	2,5	4,0
M	4,4	0,4	0,0
B	0,2	3,0	3,3

.

بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی

پس لازم است در مورد این مساله فکر کنیم که:

دانش (belief) یک بازیکن نسبت به اطلاعات بازی (حرکات و ترجیحات سایر بازیکنان) چگونه شکل می گیرد؟

- ✓ **کسب تجربه از انجام بازی به تعداد زیاد**
- ✓ **علم قبل از انجام بازی بر اساس مدل‌سازی و تحلیل**

بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی

اما یک سوال مهم:

از نظر کاربردی، تحت چه شرایطی تعریف "تعادل نش"، نشان دهنده مفهوم تعادل است؟

اصلا چرا می گوییم "تعادل نش"، یک "تعادل" است؟

حال جواب شما چیست؟ (یعنی، اگر یک مساله واقعی به شما داده شود و بخواهید بدانید که آیا مفهوم تعادل نش می تواند تعادل آن مساله را به ما بدهد، چه نکاتی را در نظر می گیرید؟

یادآوری: تعادل نش
Nash Equilibrium (N.E.)

تعریف تعادل نش: در یک بازی استراتژیک با ترجیحات ترتیبی، نمایه استراتژی a^* را یک تعادل نش گوییم اگر برای هر بازیکن i و هر اکشن a_i داشته باشیم $u_i(a^*) \geq u_i(a_i, a^*_{-i})$

هیچ بازیکنی از تغییر استراتژی به تنهایی، سود بیشتری نبرد

مثال

بازیکن دوم

بازیکن اول

	L	C	R
T	2,4	2,2	2,0
M	4,4	0,4	0,0
B	0,2	3,0	3,3

تعادل نش اکید و غیراکید Strict and non-strict N.E.

تعریف تعادل نش اکید: در یک بازی استراتژیک با ترجیحات ترتیبی، نمایه استراتژی a^* را یک تعادل نش گوییم اگر برای هر بازیکن i و هر اکشن a_i داشته باشیم $u_i(a^*) \geq u_i(a_i, a^*_{-i})$

هر بازیکن از تغییر استراتژی به تنهایی، سود کمتری ببرد

مثال

بازیکن دوم

بازیکن اول

	L	C	R
T	2,4	2,2	2,0
M	4,4	0,4	0,0
B	0,2	3,0	3,3

مثال

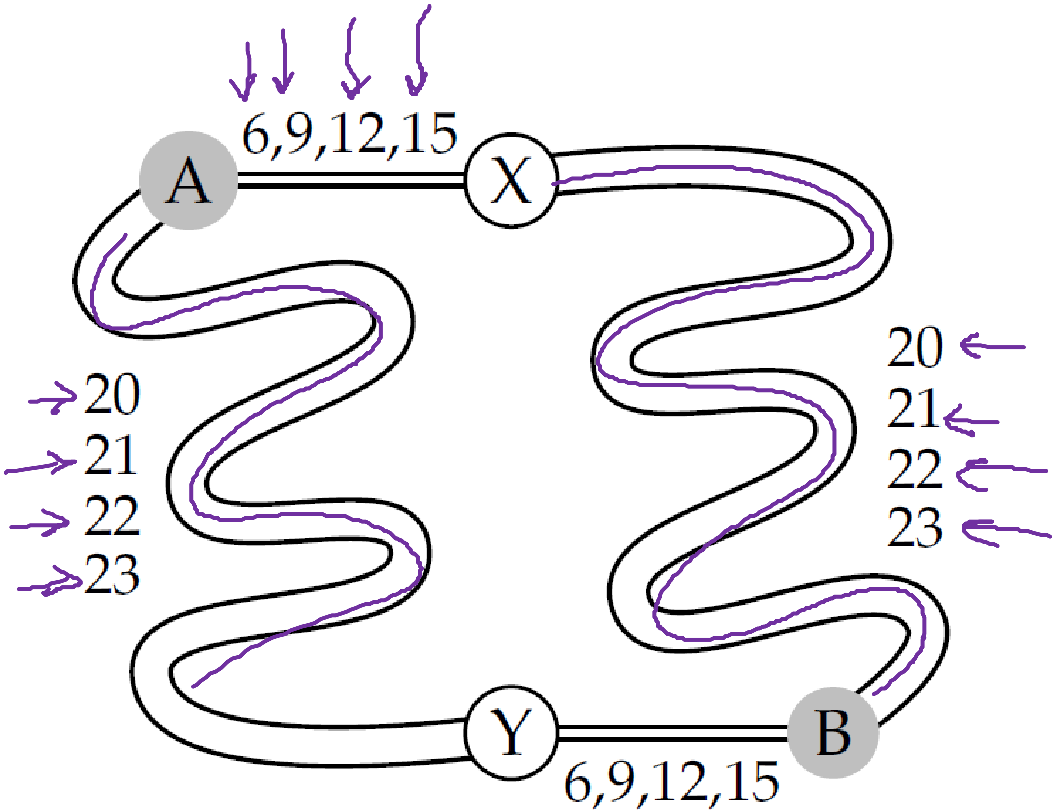
بازیکن دوم

بازیکن اول

	L	C	R
T	2,4	2,5	4,0
M	4,4	0,4	0,0
B	0,2	3,0	3,3

پایان تعادل نش اکید و غیراکید

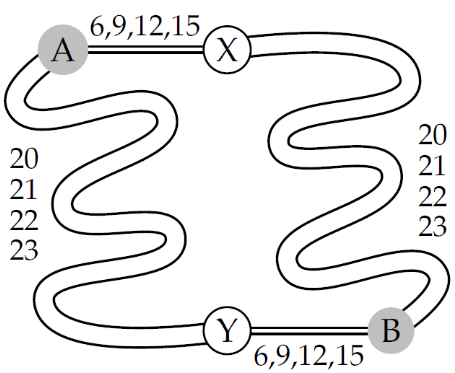
مثال: تناقض نمای جاده میان بر Braess's Paradox



- ۴ ماشین قصد مسافرات از شهر A به شهر B را دارند.
- مسیرهای قابل انتخاب برای هر ماشین AXB یا AYB است.
- هدف (ترجیح) ماشین‌ها: کمترین زمان سفر
- زمان عبور از جاده به طول مسیر، عرض مسیر و میزان ترافیک مسیر بستگی دارد.

- سوال: در وضعیتی که ماشین‌ها بدون هماهنگی و خودخواهانه تصمیم بگیرند چه اتفاقی می افتد؟

مثال: تناقض نمای جاده میان بر Braess's Paradox

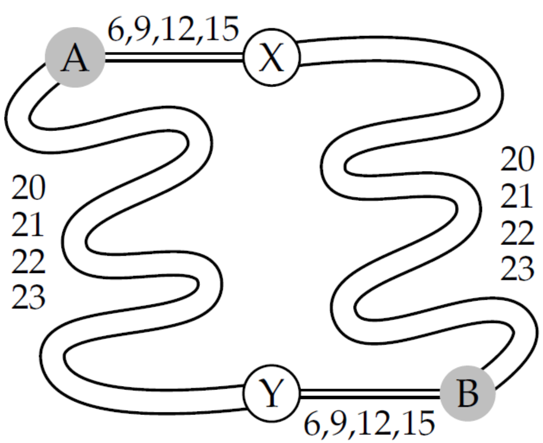


مدل بازی:

- مجموعه بازیکنان: $N = \{1,2,3,4\}$
- مجموعه اکشن‌های بازیکنان: $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = \{AXB, AYB\}$
- ترجیحات بازیکنان روی نمایه استراتژی‌ها: هر بازیکن بین هر دو نمایه استراتژی ممکن، مسیر کوتاه‌تر (از نظر زمانی) را ترجیح می‌دهد

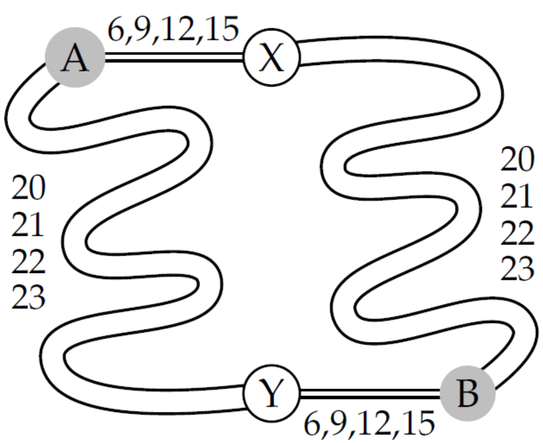
نمایه استراتژی	زمان اولی	زمان دومی	زمان سومی	زمان چهارمی
(AXB, AYB, AXB, AXB)	34	26	34	34
(AXB, AYB, AYB, AYB)	26	34	34	34
…	…	…	…	…
(AYB, AYB, AYB, AYB)	38	38	38	38

مثال: تناقض نمای جاده میان بر Braess’s Paradox



ردیف	تعداد ماشین‌ها در مسیر AXB	زمان مسافرت در مسیر AXB	تعداد ماشین‌ها در مسیر AYB	زمان مسافرت در مسیر AYB
1	4	38	0	-
2	3	34	1	26
3	2	30	2	30
4	1	26	3	34
5	X 0	-	4	38

مثال: تناقض نمای جاده میان بر Braess's Paradox

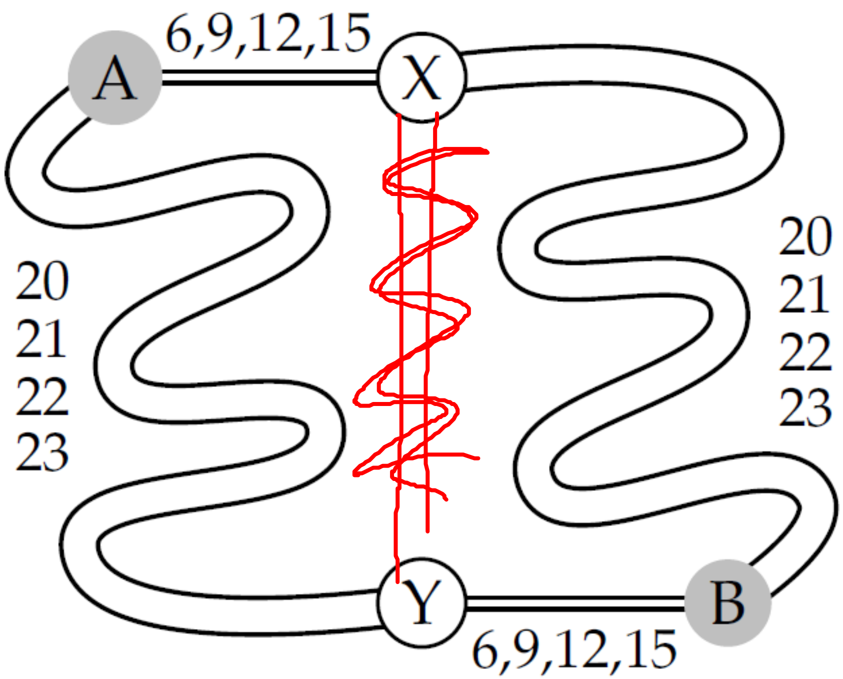


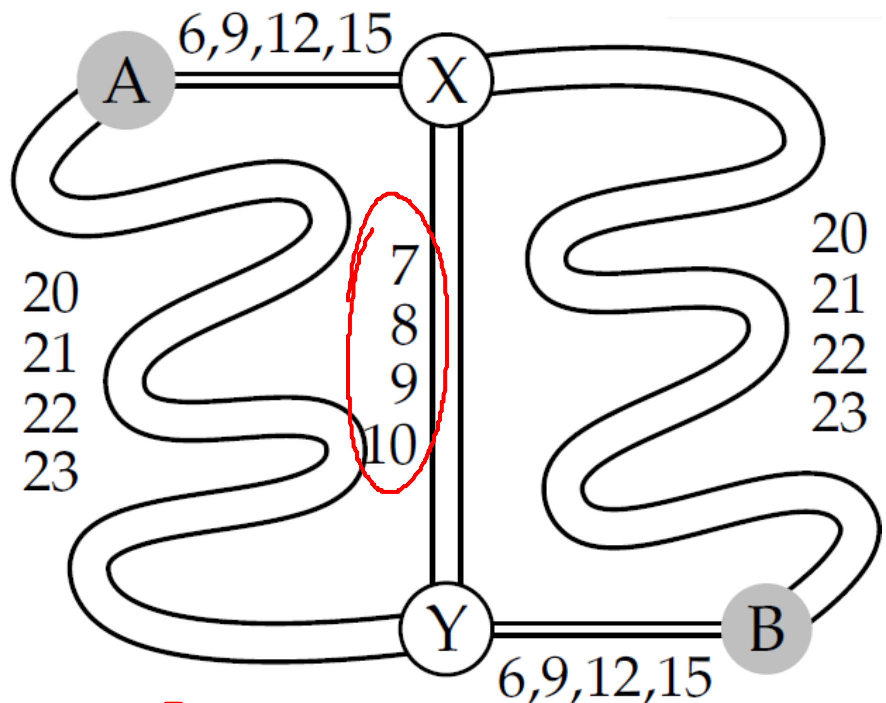
ردیف	تعداد ماشین‌ها در مسیر AXB	زمان مسافرت در مسیر AXB	تعداد ماشین‌ها در مسیر AYB	زمان مسافرت در مسیر AYB
1	4	38	0	-
2	3	34	1	26
3	2	30	2	30
4	1	26	3	34
5	0	-	4	38

نتیجه:

- حالتهایی که در آن از هر مسیر دو ماشین عبور می کند، تعادل نش هستند (شش تعادل نش)
- با جستجوی سایر سطرها مشاهده می‌شود که تعادل نش دیگری نداریم
- در وضعیت تعادل، هر ماشین به مدت ۳۰ دقیقه در راه است

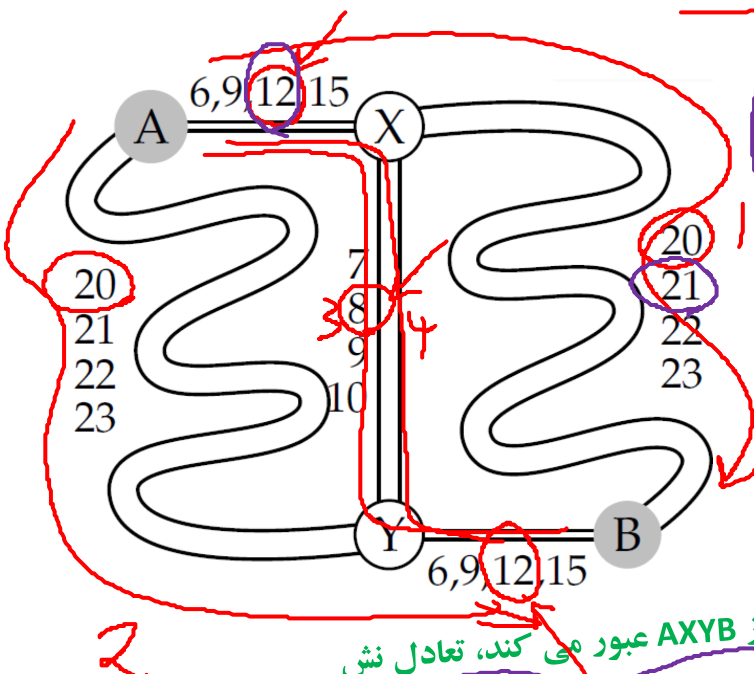
مثال: تناقض نمای جاده میان بر Braess’s Paradox





30 حجم <30

مثال: تناقض نمای جاده میان بر Braess's Paradox



(AXB, AYB, AXYB, AXYB)

32 32 12+8+12 32

20+12 12+20 32

~~(AXB, AYB, AXB, AXYB)~~

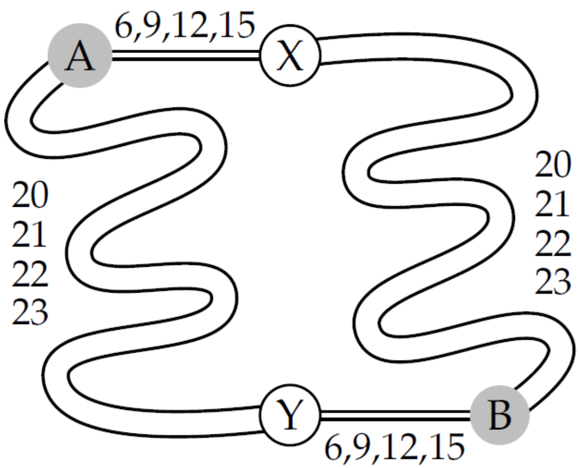
12+21 12+21 12

33

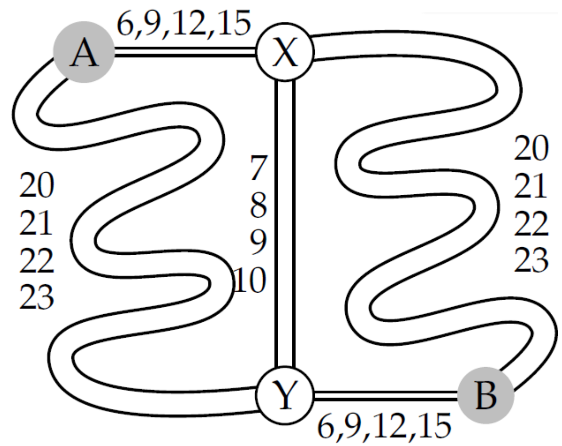
نتیجه:

- حالتهایی که در آن‌ها یک ماشین از AXB، یک ماشین از AYB، دو ماشین از AXYB عبور می کند، تعادل نش هستند (دوازده تعادل نش)
- با جستجوی سایر سطرها مشاهده می‌شود که تعادل نش دیگری نداریم
- در وضعیت تعادل، هر ماشین به مدت ۳۲ دقیقه در راه است

مثال: تناقض نمای جاده میان بر Braess’s Paradox



۳۰ دقیقه



۳۲ دقیقه

پایان مثال تناقض نمای جاده میان بر

دو سوال اساسی:

- □وجود تعادل نش؟

- □چگونگی یافتن تعادل نش؟

تابع بهترین پاسخ

Best Response Function

BR

$BR_i(a_{-i})$

Best Response Function تابع بهترین پاسخ

$b_i(a_{-i})$

BR

B

$B_i(a_{-i})$

a_{-i}

- تعریف: تابع بهترین پاسخ بازیکن i ام به نمایه استراتژی سایر بازیکنان، یعنی a_{-i}، عبارت است از مجموعه اکشن‌هایی از بازیکن i ام که تابع سود این بازیکن را با فرض a_{-i} حداکثر کند. به بیان ریاضی:

$$B_i(a_{-i}) \triangleq \{a_i \in A_i | u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i(a'_i, a_{-i}) \quad for\ all \quad a'_i \in A_i\}$$

توجه:

- در حالت کلی $B_i(a_{-i})$ یک مجموعه است که می تواند تهی یا یک یا چند عضوی باشد.
- در حالتی که تک عضوی باشد آن را با نماد $b_i(a_{-i})$ نمایش می دهیم.

Best Response Function تابع بهترین پاسخ

	L	C	R
T	1,2	2,1	1,0
M	2,1	0,1	0,0
B	0,1	0,0	1,2

- مثال:

$a_{-1} = a_2$

$a_{-2} = a_1$

$B_1(L) = \{M\}$, $B_1(C) = \{T\}$, $B_1(R) = \{T, B\}$,

$B_2(T) = \{L\}$, $B_2(M) = \{L, C\}$, $B_2(B) = \{R\}$,

$B_2(M) = \{L, C\}$

تابع بهترین پاسخ Best Response Function

$(a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*)$

n بازیکن

- قضیه: یک نمایه استراژی a^* یک تعادل نش است اگر و تنها اگر برای هر بازیکن i داشته باشیم $a_i^* \in B_i(a_{-i}^*)$
- به بیان دیگر، همه نقاط تعادل نش از حل دستگاه $a_i = B_i(a_{-i}), i = 1,2,\dots,N$ به دست می‌آیند.

$$\begin{cases} a_1 = B_1(a_{-1}) \\ a_2 = B_2(a_{-2}) \\ \vdots \\ a_N = B_N(a_{-N}) \end{cases}$$

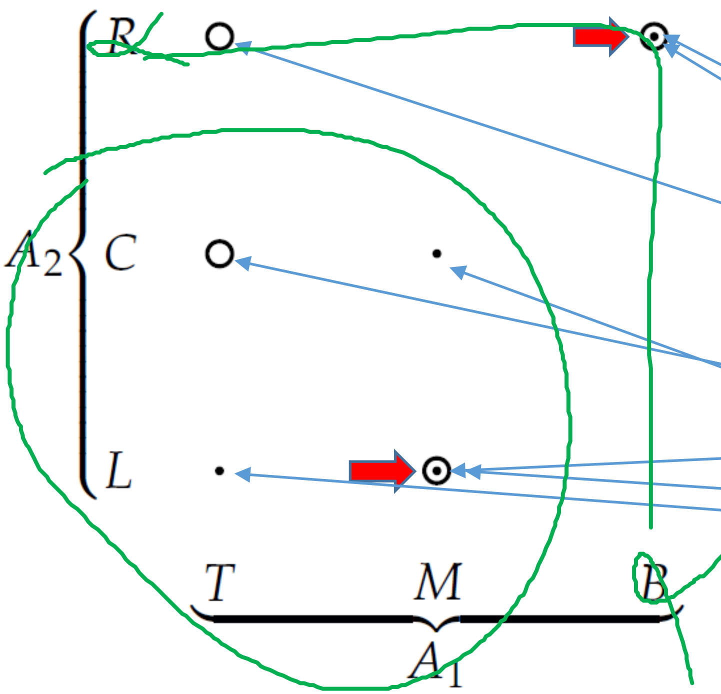
- در حالت خاص اگر توابع بهترین پاسخِ همه بازیکنان، تک عضوی باشند آنگاه همه نقاط تعادل نش از حل دستگاه معادلات $a_i = b_i(a_{-i}), i = 1,2,\dots,N$ به دست می‌آیند.

$B_i \rightarrow b_i$

Best Response Function تابع بهترین پاسخ

- مثال:

	L	C	R
T	1,2	2,1	1,0
M	2,1	0,1	0,0
B	0,1	0,0	1,2



$B_1(L) = \{M\}$, $B_1(C) = \{T\}$, $B_1(R) = \{T, B\}$,

$B_2(T) = \{L\}$, $B_2(M) = \{L, C\}$, $B_2(B) = \{R\}$,

Best Response Function تابع بهترین پاسخ

کوییز

- **به عنوان ~~تمرین~~ با کمک تابع بهترین پاسخ، تعادل نش را برای مثال های قبلی (معمای زندانی، پرتاب سکه، شکار گوزن-خرگوش و ...) بیابید.**

کوییز

- **به عنوان ~~تمرین~~، قضیه اسلاید ٤٦ را اثبات کنید.**

Best Response Function تابع بهترین پاسخ

$a_i, a_j, c \geq 0$ $\quad a_i \in A_i$

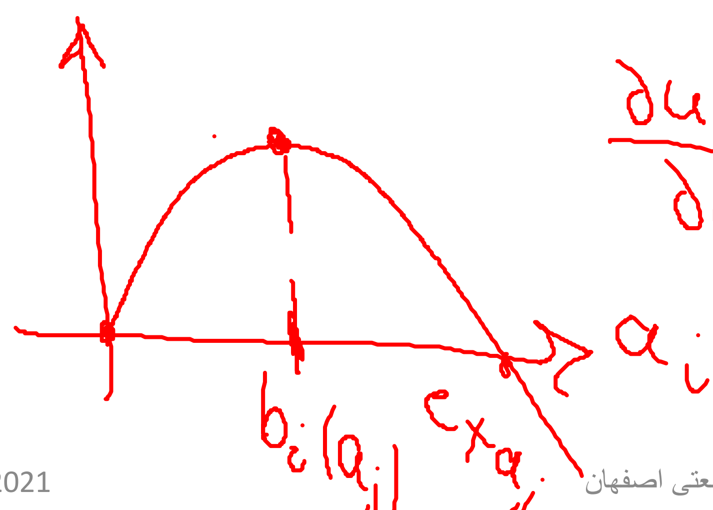
- یک مثال از بازی با مجموعه اکشن‌های پیوسته:
- تعامل هم افزا:
- دو نفر در حال تلاش برای انجام یک کار مشترک هستند. برای هر فرد، هرچه طرف مقابل بیشتر تلاش کند منفعت بیشتری حاصل می شود، اما تلاش خود فرد تا حدی باعث افزایش منفعت می‌شود و پس از آن حد، تلاش بیشتر باعث کاهش منفعت می شود. به طور خاص، فرض کنید تابع سود نفر i ام برابر است با $u_i(a_i,a_j) = a_i(c + a_j - a_i)$ که در آن a_i مقدار تلاش نفر i ام است و c یک ثابت مثبت است.

Fixed a_j

$i \neq j$

$\frac{\partial u_i}{\partial a_i} = 0$

- تعادل؟



Best Response Function تابع بهترین پاسخ

$$\frac{\partial u_i}{\partial a_i} = c + a_j - a_i + (-1)a_i = c + a_j - 2a_i = 0 \rightarrow a_i = \frac{c+a_j}{2}$$

- یک مثال از بازی با مجموعه اکشن‌های پیوسته:
- تعامل هم افزا:

$$u_i(a_i, a_j) = a_i(c + a_j - a_i)$$

$$a^* = (a_1^*, a_2^*)$$

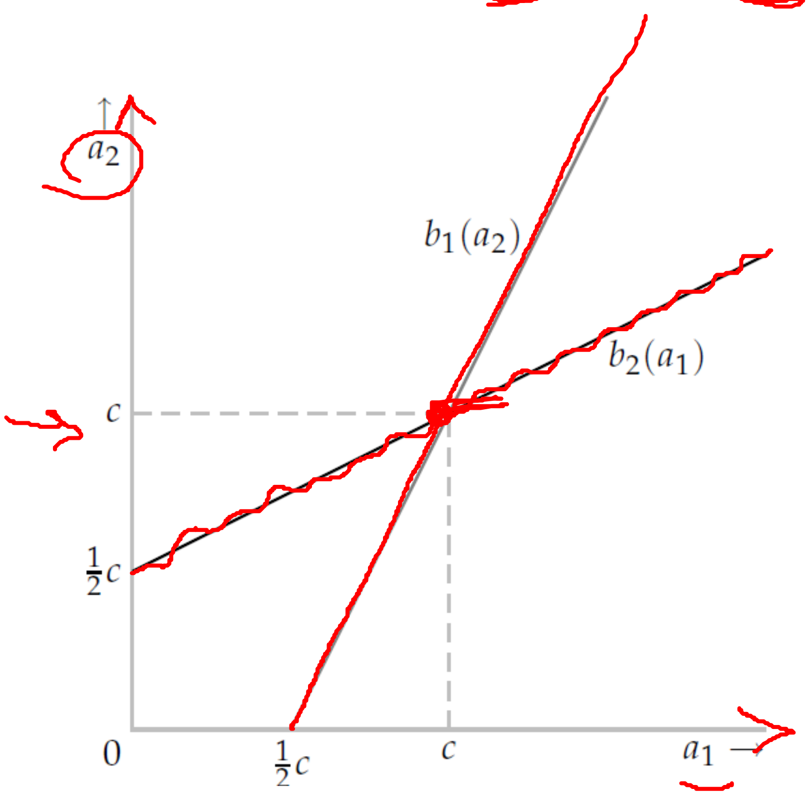
$$\frac{\partial u_i(a_i, a_j)}{\partial a_i} = 0 \Rightarrow b_i(a_j) = \frac{1}{2}(c + a_j) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_1^* = b_1(a_2^*) \\ a_2^* = b_2(a_1^*) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1^* = \dfrac{1}{2}(c + a_2^*) \\ a_2^* = \dfrac{1}{2}(c + a_1^*) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{a_1^* = a_2^* = c}$$

Best Response Function تابع بهترین پاسخ

$a_1^* = b_1(a_2^*)$ $a_2^* = b_2(a_1^*)$



- یک مثال از بازی با مجموعه اکشن‌های پیوسته:
- تعامل هم افزا:

$$b_i(a_j) = \frac{1}{2}(c + a_j)$$

تابع بهترین پاسخ - مثال

$c_1 \in [0, w_1]$

$c_2 \in [0, w_2]$

$w_1 \quad w_2$

- مشارکت در امور عام المنفعه
- بازیکنان: دو فرد ذینفع در استفاده از یک امر مشترک، $i = 1,2$
- مجموعه اکشن ها: برای هر بازیکن، میزان سرمایه گزاری c_i درتوسعه $(0 \le c_i \le w_i)$
- اولویت بازیکنان، بر اساس تابع سود

$$u_i(c_1, c_2) = \underbrace{v_i(\overbrace{c_1 + c_2}^{\text{مجموع سرمایه گزاری}})}_{\text{منفعت بازیکن i ازنتیجه کار}} - c_i$$

$u_2(c_1, c_2) = v_2(c_1 + c_2) - c_2$

تابع بهترین پاسخ - مثال

$v_2'(0) > 0$

$c_1 = 0$

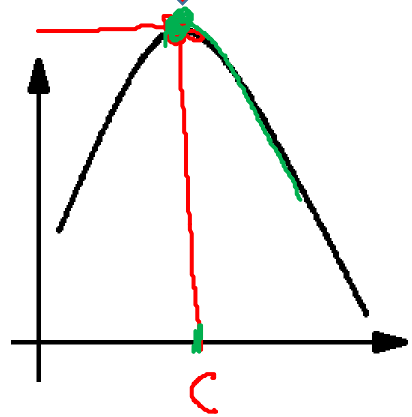
- مشارکت در امور عام المنفعه

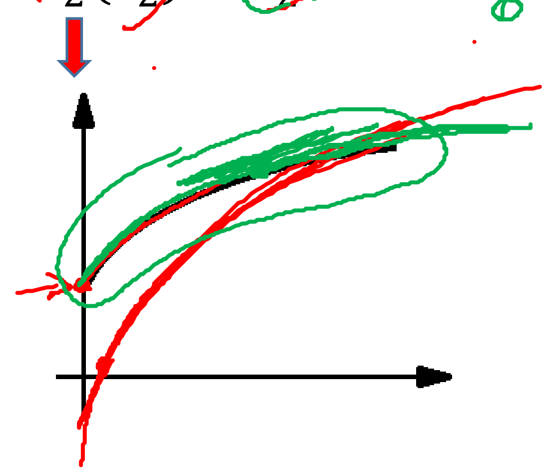
$u_1(x, 0)$

$$u_2(0, c_2) = v_2(c_2) - c_2$$

$0 < c_i < w_i$

w_i: درآمد

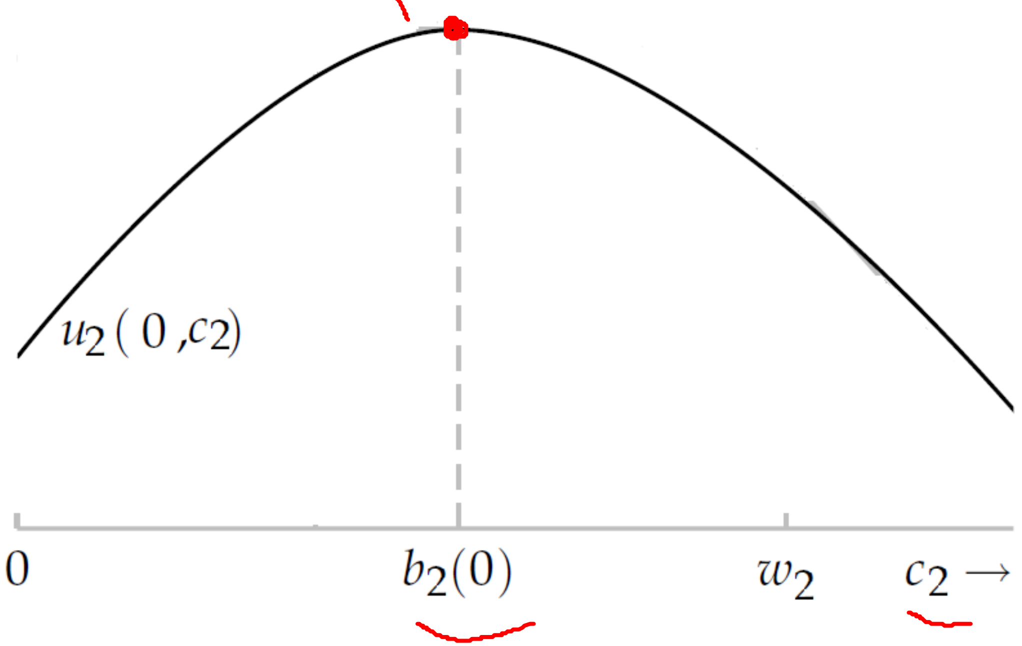




تابع بهترین پاسخ - مثال

- مشارکت در امور عام المنفعه

$$u_2(0, c_2) = v_2(c_2) - c_2$$

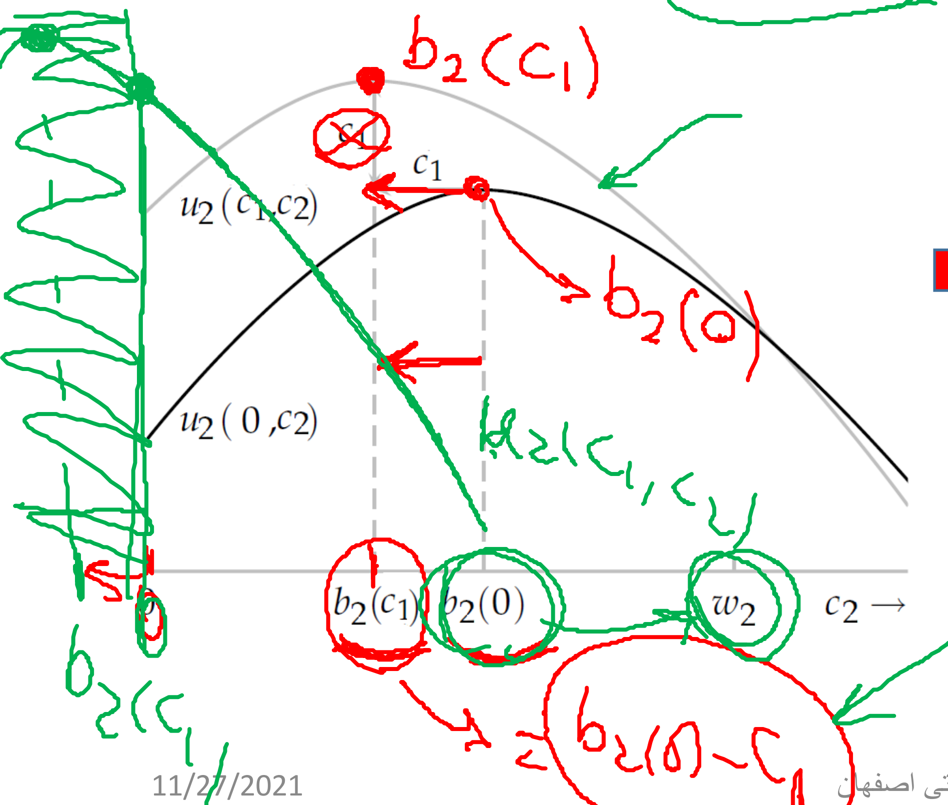


تابع بهترین پاسخ - مثال

$0 \leq c_i \leq w_i$

- مشارکت در امور عام المنفعه

$$u_2(c_1, c_2) = v_2(c_1 + c_2) - c_2 = u_2(0, c_1 + c_2) + c_1$$

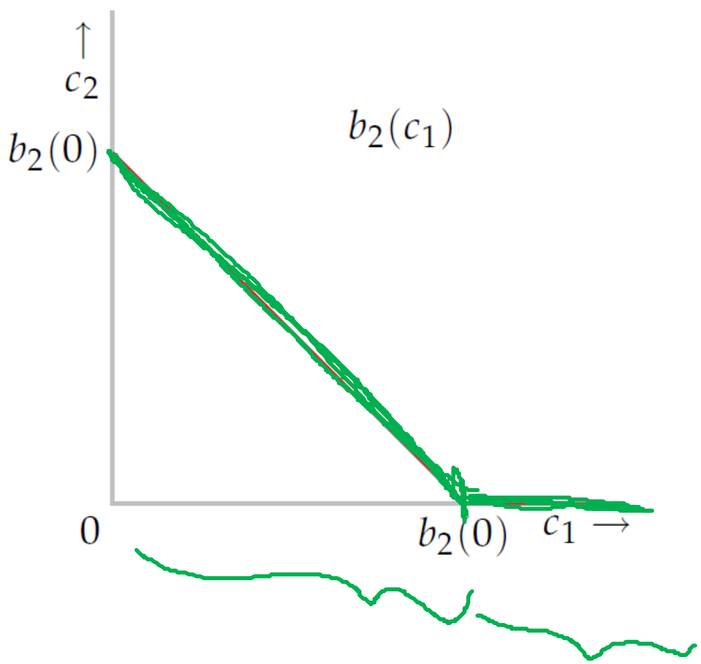


$$\begin{cases} b_2(c_1) = b_2(0) - c_1 & \text{If } c_1 < b_2(0) \\ b_2(c_1) = 0 & \text{If } c_1 \geq b_2(0) \end{cases}$$

تابع بهترین پاسخ - مثال

- مشارکت در امور عام المنفعه

$$b_2(c_1) = \begin{cases} b_2(0) - c_1 & c_1 < b_2(0) \\ 0 & c_1 \geq b_2(0) \end{cases}$$



$b_2(c_1) = b_2(0) - c_1$ If $c_1 < b_2(0)$

$b_2(c_1) = 0$ If $c_1 \geq b_2(0)$

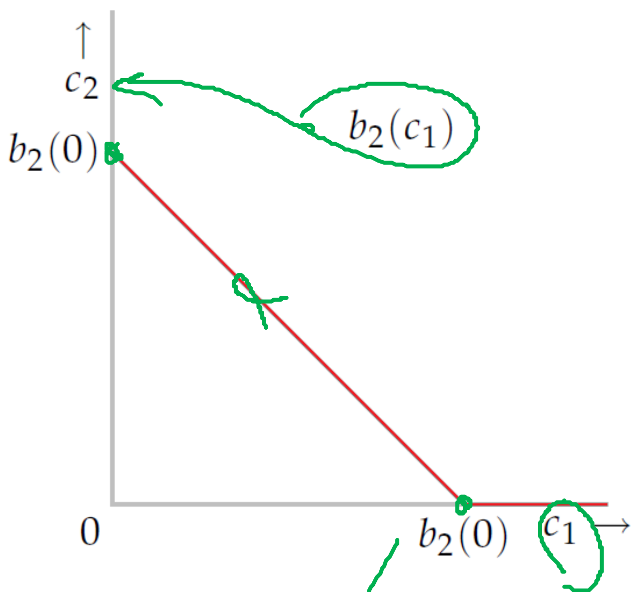
تابع بهترین پاسخ - مثال

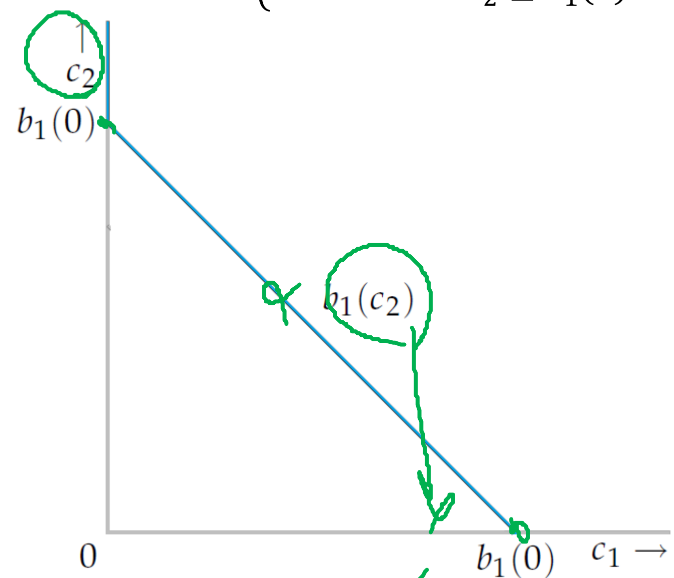
(c_1^*, c_2^*)

- مشارکت در امور عام المنفعه

$$b_2(c_1) = \begin{cases} b_2(0) - c_1 & c_1 < b_2(0) \\ 0 & c_1 \geq b_2(0) \end{cases}$$

$$b_1(c_2) = \begin{cases} b_1(0) - c_2 & c_2 < b_1(0) \\ 0 & c_2 \geq b_1(0) \end{cases}$$

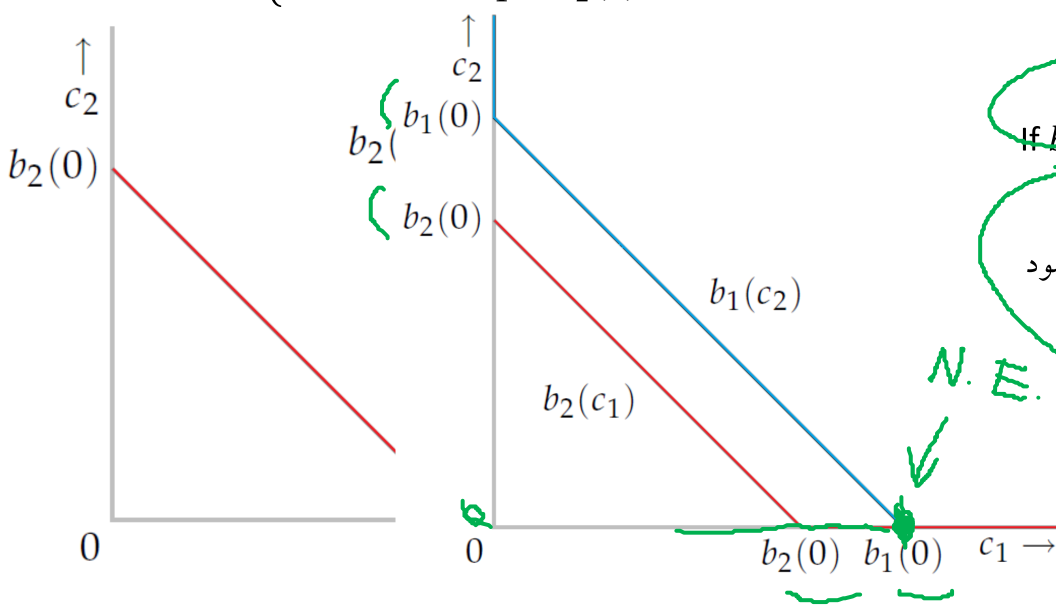




تابع بهترین پاسخ - مثال

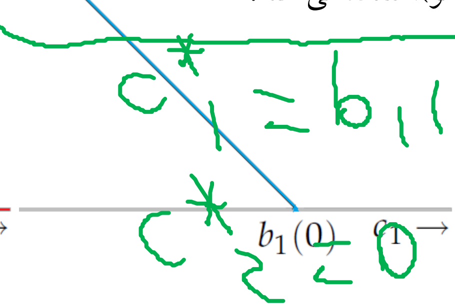
- مشارکت در امور عام المنفعه

$$b_2(c_1) = \begin{cases} b_2(0) - c_1 & c_1 < b_2(0) \\ 0 & c_1 \geq b_2(0) \end{cases} \qquad b_1(c_2) = \begin{cases} b_1(0) - c_2 & c_2 < b_1(0) \\ 0 & c_2 \geq b_1(0) \end{cases}$$



If $b_1(0) > b_2(0)$ then $c_1^* = b_1(0)$, $c_2^* = 0$

فردی که در تنهایی، حاضر به پرداخت هزینه بیشتری است،
حتی در حضور فرد دیگر همچنان عهده دار همه هزینه می شود
و فرد دوم فقط (سو)استفاده می کند.



1000

$(1000, \infty)$

min > 1000

پایان مثال

Dominated and Dominant Actions حرکت های غالب و مغلوب

- تعریف غلبه ی اکید Strict Domination: در یک بازی استراتژیک با اولویت های ترتیبی، گوییم برای بازیکن i، اکشن a_i'' بر اکشن a_i' غلبه ی اکید دارد اگر

$$u_i(a_i'', a_{-i}) > u_i(a_i', a_{-i})$$

برای هر نمایه استراتژی a_{-i} از دیگر بازیکنان.

$$\boxed{a_i'' > a_i'}$$

F>Q

	Q	F
Q	2,2	0,3
F	3,0	1,1

F>Q

	A	B	C
X	3,2	2,4	3,1
Y	6,0	0,1	2,2
Z	2,3	0,2	0,2

X > Z

Dominated and Dominant Actions حرکت های غالب و مغلوب

- قضیه: یک اکشن اکیدا مغلوب، در هیچ تعادل نشی ظاهر نمی‌شود

نکته: یافتن تعادل نش با کمک حذف اکشن‌های اکیدا مغلوب

F>Q

F>Q

	Q	F
Q	[illegible]	[illegible],3
F	3,0	1,1

X>Z

	A	B	C
X	3,2	2,4	3,1
Y	6,0	[illegible]	[illegible],2
Z	2,[illegible]	[illegible]	[illegible]

(X, B)

Dominated and Dominant Actions حرکت های غالب و مغلوب

- تعریف غلبه ی اکید Strict Domination: در یک بازی استراتژیک با اولویت های ترتیبی، گوییم برای بازیکن i، اکشن a_i'' بر اکشن a_i' غلبه ی اکید دارد اگر

$$u_i(a_i'', a_{-i}) > u_i(a_i', a_{-i})$$

برای هر نمایه استراتژی a_{-i} از دیگر بازیکنان.

$\boxed{a_i'' > a_i'}$

F>Q

	Q	F
Q	2,2	0,3
F	3,0	1,1

F>Q

X>Z

	A	B	C
X	3,2	2,4	3,1
Y	6,0	0,1	2,2
Z	2,3	0,2	0,2

Dominated and Dominant Actions حرکت های غالب و مغلوب

- قضیه: یک اکشن اکیدا مغلوب، در هیچ تعادل نشی ظاهر نمی‌شود

نکته: یافتن تعادل نش با کمک حذف اکشن‌های اکیدا مغلوب

F>Q

F>Q

	Q	F
Q	2,2	0,[illegible]
F	3,0	1,1

X>Z

	A	B	C
X	3,2	2,4	3,1
Y	6,0	0,1	2,2
Z	2,[illegible]	0,2	0,2

حرکت های غالب و مغلوب Dominated and Dominant Actions

- تعریف غلبه ی ضعیف **Weak** Domination: در یک بازی استراتژیک با اولویت های ترتیبی، گوییم برای بازیکن i، اکشن a_i'' بر اکشن a_i' غلبه ی ضعیف دارد اگر

$$u_i(a_i'', a_{-i}) \geq u_i(a_i', a_{-i})$$

برای هر نمایه استراتژی a_{-i} از دیگر بازیکنان، و

$$u_i(a_i'', a_{-i}) > u_i(a_i', a_{-i})$$

برای حداقل یک نمایه استراتژی a_{-i} از دیگر بازیکنان.

	A	B	C
X	3,2	2,4	3,1
Y	2,0	4,1	2,2
Z	2,3	0,2	0,2

$X > Z,$ $Y \geq Z$

$\boxed{a_i'' \geq a_i'}$

Dominated and Dominant Actions حرکت های غالب و مغلوب

نکته: $a_i'' \geq a_i' \Leftarrow a_i'' > a_i'$

تعادل نش است

$A \geq B$

$X \geq Y$

	A	B
X	1,1	2,0
Y	0,2	2,2

تعادل نش اکید نیست

(X, A)

نکته: اکشن های مغلوب ضعیف می توانند در یک تعادل نش ظاهر شوند

- قضیه: یک اکشن مغلوب ضعیف، در هیچ تعادل نش اکیدی ظاهر نمی شود

نکته: یافتن تعادل نش اکید با کمک حذف مکرر اکشن‌های مغلوب اکید و ضعیف

(Y, B)

پایان حرکات غالب و مغلوب

تعادل در یک جمعیت همگن: بازی متقارن و تعادل نش متقارن

- بازی بین بازیکنان با خصوصیات یکسان
  - ✓ مجموعه اکشن های بازیکنان یکسان است
  - ✓ تابع سود هر بازیکن، مستقل از شماره و هویت بازیکن بوده و فقط تابعی از اکشن آن بازیکن و اکشن سایرین است

- تعریف بازی دو نفره متقارن: یک بازی دو نفره استراتژیک با اولویت های ترتیبی را متقارن گوییم اگر $A_1 = A_2$ و برای هر $x,y \in A_1 = A_2$ داشته باشیم $u_1(a_1,a_2)|_{a_1=x,a_2=y} = u_2(a_1,a_2)|_{a_1=y,a_2=x}$

	A	B
A	q,q	w,e
B	e,w	r,r

	A	B	C
A	q,q	w,e	r,t
B	e,w	y,y	s,d
C	t,r	d,s	f,f

تعادل در یک جمعیت همگن: بازی متقارن و تعادل نش متقارن

	B	S
B	2,1	0,0
S	0,0	1,2

	A	B	C
A	1,1	2,1	4,1
B	1,2	5,5	3,6
C	1,4	6,3	0,0

A,A

A,C

C,A

N

- تعریف تعادل نش متقارن: یک بازی استراتژیک با اولویت های ترجیحی که در آن مجموعه اکشن بازیکنان یکسان است را در نظر بگیرید. در چنین بازی‌ای، یک نمایه استراتژی a^* را یک تعادل نش متقارن گوییم اگراولا تعادل نش باشد و ثانیا a_i^* برای همه بازیکنان i یکسان باشد، یعنی $a_1^* = a_2^* = \cdots = a_N^*$.

پایان بازی و تعادل نش تقارن

پایان فصل دوم

فصل سوم: تعادل نش- مثال‌ها

- مدل کورنات (Cournot) برای بازار با انحصار چندجانبه
- مدل برتراند (Bertrand) برای بازار با انحصار چندجانبه
- رقابت الکترال
- جنگ فرسایشی
- حراج ها (Auctions)
- قاعده تصادف

➢ An Introduction to Game Theory, by: Martin J. Osborne

فصل سوم: تعادل نش- مثال‌ها

- مدل کورنات (Cournot) برای بازار با انحصار چندجانبه

❖مثال ساده شده:

✓دو تولید کننده کالای یکسانی تولید می کنند،

✓هر یک تصمیم می گیرند که چه میزانی از کالا را تولید کنند،

✓قیمت کالا را میزان فراوانی در بازار تعیین می کند،

✓هزینه تولید برای هر تولید کننده تابعی از میزان تولید او است،

✓سود هر تولید کننده برابر است با تفاضل فروش و هزینه تولید.

❑سوال: هر تولید کننده چه میزان کالا تولید خواهد کرد و با چه قیمتی؟

فصل سوم: تعادل نش- مثال‌ها

- مدل کورنات (Cournot) برای بازار با انحصار چندجانبه

❖مثال ساده شده:

✓دو تولید کننده کالای یکسانی تولید می کنند،

✓هر یک تصمیم می گیرند که چه میزانی از کالا را تولید کنند،

✓قیمت کالا را میزان فراوانی در بازار تعیین می کند،

✓هزینه تولید برای هر تولید کننده تابعی از میزان تولید او است،

✓سود هر تولید کننده برابر است با تفاضل فروش و هزینه تولید.

$A_1 = A_2$

$a_1 \quad a_2$

$\boxed{N = \{1,2\}}$

$\boxed{q_1, q_2 \in R^+}$

$P(Q), \quad Q = q_1 + q_2$

$C_i(q_i)$

$$\boxed{\pi_i(q_1, q_2) = q_i P(q_1 + q_2) - C_i(q_i)}$$

$u_i(q_1, q_2)$

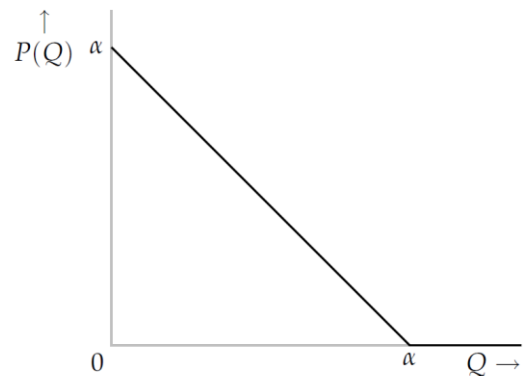
❑سوال: هر تولید کننده چه میزان کالا تولید خواهد کرد و با چه قیمتی؟

فصل سوم: تعادل نش- مثال‌ها

- مدل کورنات (Cournot) برای بازار با انحصار چندجانبه

$$P(Q),\triangleq\begin{cases}\alpha-Q & for\ Q\le\alpha\\ 0 & for\ Q>\alpha\end{cases}$$

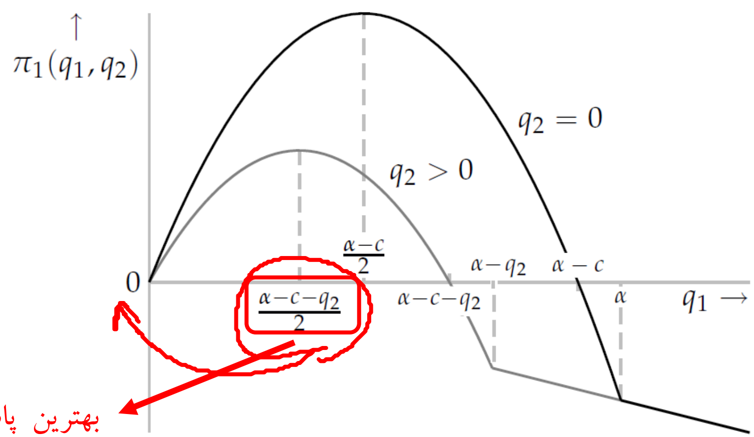
$$C_i(q_i)=cq_i,\qquad c<\alpha$$



$$\pi_i(q_1,q_2)=q_i(P(q_1+q_2)-c)=\begin{cases}q_i(\alpha-q_1-q_2-c) & \text{for}\ \ q_1+q_2\le\alpha\\ -cq_i & \text{for}\ \ q_1+q_2>\alpha\end{cases}$$

فصل سوم: تعادل نش- مثال‌ها

- مدل کورنات (Cournot) برای بازار با انحصار چندجانبه



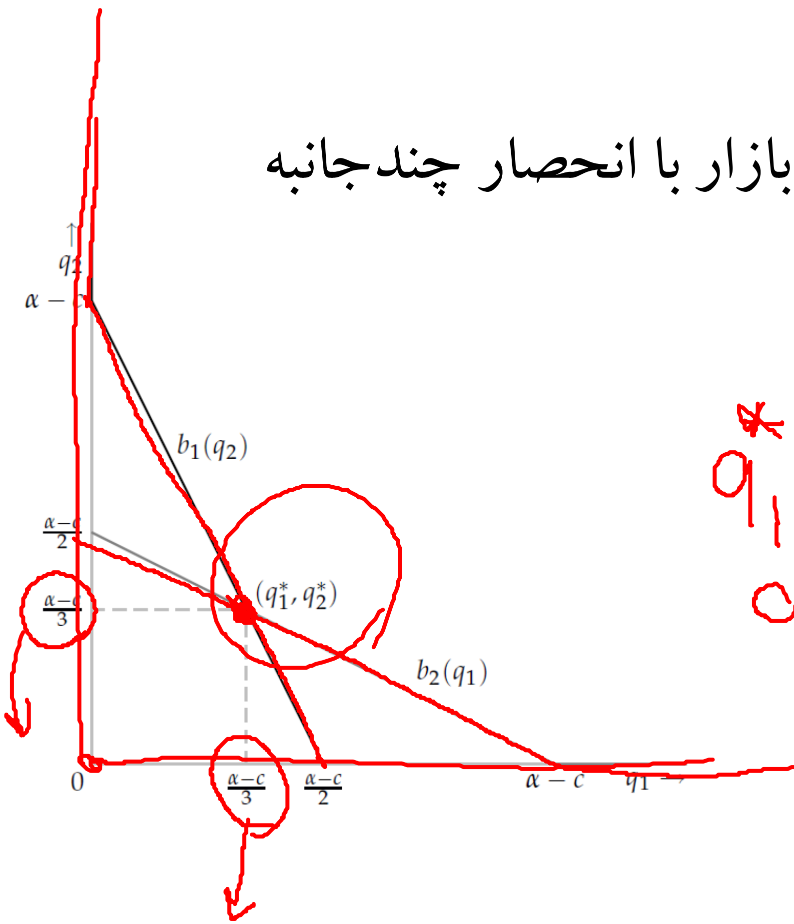
$$b_i(q_j) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha - c - q_j) & \text{for } 0 \le \alpha - c - q_j \\ 0 & \text{for } 0 > \alpha - c - q_j \end{cases}$$

$$\pi_i(q_1, q_2) = q_i(P(q_1 + q_2) - c) = \begin{cases} q_i(\alpha - q_1 - q_2 - c) & \text{for } q_1 + q_2 \le \alpha \\ -cq_i & \text{for } q_1 + q_2 > \alpha \end{cases}$$

فصل سوم: تعادل نش- مثال‌ها

$c < \alpha$

- مدل کورنات (Cournot) برای بازار با انحصار چندجانبه



$$b_i(q_j) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha - c - q_j) & \text{for } q_j \le \alpha - c \\ 0 & \text{for } q_j > \alpha - c \end{cases}$$

$q_1^* = b_1(q_2^*)$

$q_2^* = b_2(q_1^*)$

$P(Q) = P(q_1^* + q_2^*)$

$= P\left(2\frac{\alpha - c}{3}\right)$

فصل سوم: تعادل نش- مثال‌ها

- مدل کورنات (Cournot) برای بازار با انحصار چندجانبه
- مدل برتراند (Bertrand) برای بازار با انحصار چندجانبه
- رقابت الکترال
- جنگ فرسایشی
- حراج ها
- قاعده تصادف

فصل سوم: تعادل نش– مثال‌ها

- مدل برتراند (Bertrand) برای بازار با انحصار چندجانبه

فصل سوم: تعادل نش- مثال‌ها

- مدل برتراند (Bertrand) برای بازار با انحصار چندجانبه

❖مثال ساده شده:

✓دو تولید کننده کالای یکسانی تولید می کنند،

$\boxed{N = \{1,2\}}$

✓هر یک تصمیم می گیرند که با چه قیمتی کالا را عرضه کنند،

A_2

A_1

$a_1 \quad a_2$

$\boxed{p_1, p_2 \in R^+}$

✓میزان تقاضا برای کالا، تابعی از قیمت آن است و مشتریان صرفا از تولید کننده با کمترین قیمت خرید می کنند،

$p_i < p_j \Rightarrow q_j = 0, \quad q_i = D(p_i)$

✓هزینه تولید برای هر تولید کننده تابعی از میزان تولید است،

$C_i(q_i)$

✓سود هر تولید کننده برابر است با تفاضل فروش و هزینه تولید.

$\boxed{\pi_i(p_1, p_2) = p_i q_i - C_i(q_i)}$

u_i

❑سوال: هر تولید کننده چه میزان کالا تولید خواهد کرد و با چه قیمتی؟

فصل سوم: تعادل نش- مثال‌ها

- مدل برتراند (Bertrand) برای بازار با انحصار چندجانبه

$$D(p) \triangleq \begin{cases} \alpha - p & \text{for } p \le \alpha \\ 0 & \text{for } p > \alpha \end{cases} \qquad C_i(q_i) = cq_i, \qquad c < \alpha$$

$$\Downarrow$$

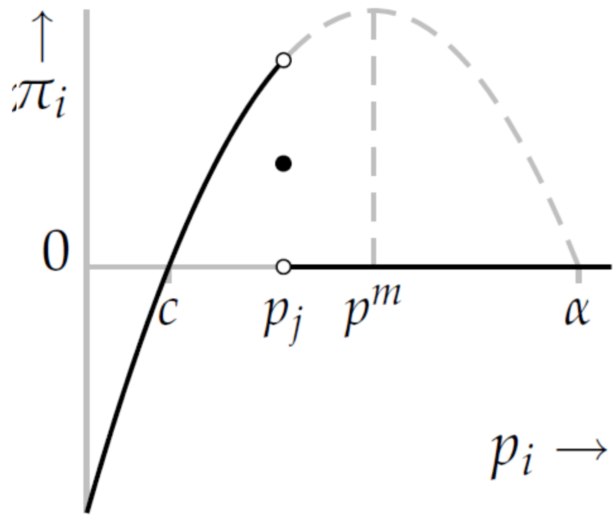
$$\pi_i(p_1, p_2) = \begin{cases} 0 & \text{if } p_i > p_j \\ (p_i - c)(\alpha - p_i) & \text{if } p_i < p_j \\ \frac{1}{2}(p_i - c)(\alpha - p_i) & \text{if } p_i = p_j \end{cases}$$

فصل سوم: تعادل نش- مثال‌ها

- مدل برتراند (Bertrand) برای بازار با انحصار چندجانبه

$$\pi_i(p_1,p_2)=\begin{cases}0 & \text{if } p_i>p_j\\ (p_i-c)(\alpha-p_i) & \text{if } p_i<p_j\\ \frac{1}{2}(p_i-c)(\alpha-p_i) & \text{if } p_i=p_j\end{cases}$$

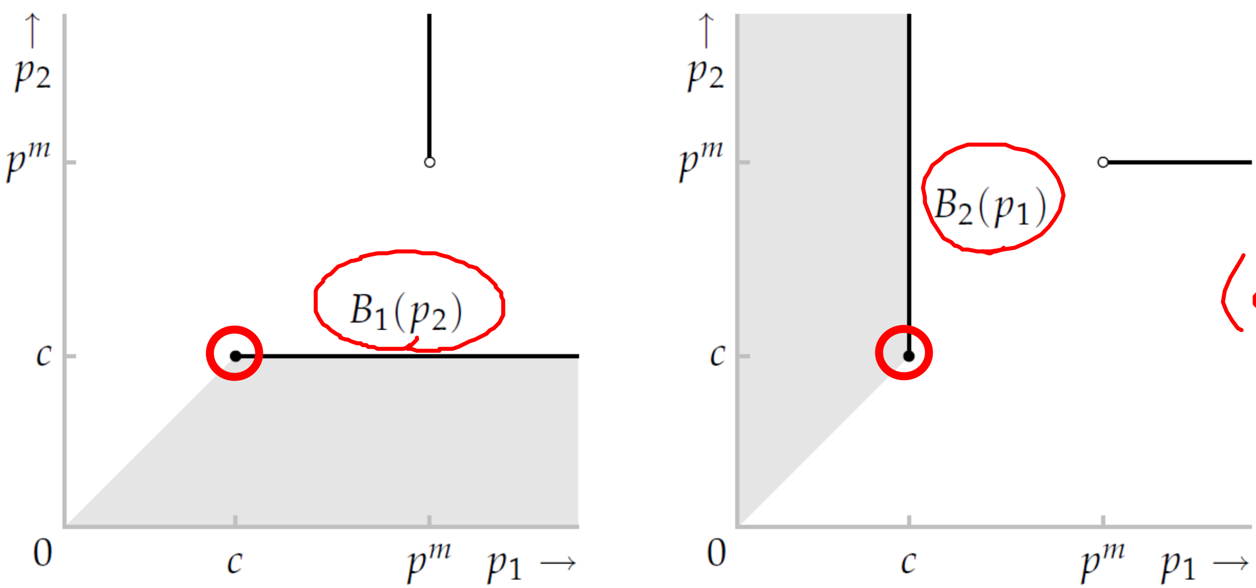
$$B_i(p_j)=\begin{cases}\{p_i: p_i>p_j\} & \text{if } \ p_j<c\\ \{p_i: p_i\geq p_j\} & \text{if } \ p_j=c\\ \{p^m\} & \text{if } \ p_j>p^m\\ \{\,\} & \text{if } \ c<p_j\leq p^m\end{cases}$$



$c<p_j\leq p^m$

فصل سوم: تعادل نش- مثال‌ها

- مدل برتراند (Bertrand) برای بازار با انحصار چندجانبه



b

B

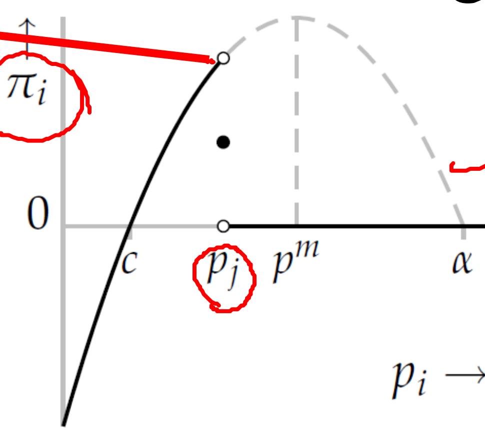
(c, c)

فصل سوم: تعادل نش- مثال‌ها

- مدل برتراند (Bertrand) برای بازار با انحصار چندجانبه
  - ✓ تنها تعادل نش، نمایه استراتژی (c,c) است!
  - ✓ تابع بهترین پاسخ برابر تهی؟

$p_j - \epsilon$

$$B_i(p_j) = \begin{cases} \{p_i : p_i > p_j\} & \text{if } \ p_j < c \\ \{p_i : p_i \geq p_j\} & \text{if } \ p_j = c \\ \{p^m\} & \text{if } \ p_j > p^m \\ \{\ \} & \text{if } \ c < p_j \leq p^m \end{cases}$$



$c < p_j \leq p^m$

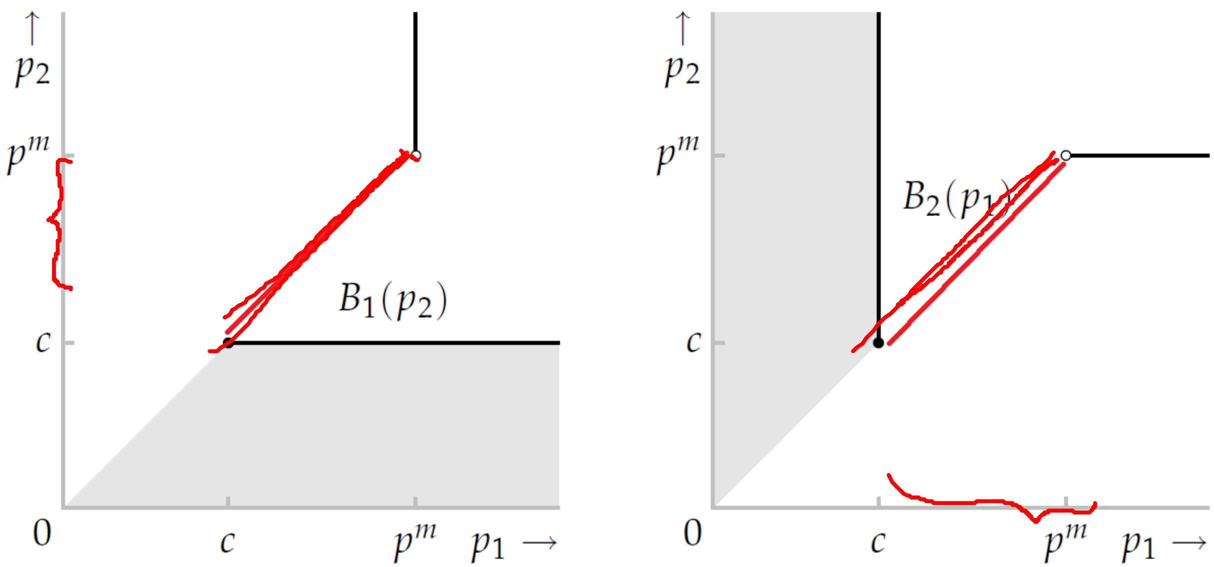
0 1

Supremum

(0, 1)

فصل سوم: تعادل نش- مثال‌ها

- مدل برتراند (Bertrand) برای بازار با انحصار چندجانبه



?

تمرین ها در سامانه درس حل شوند

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

mixed strategy

استراتژی آمیخته Mixed Strategy ؟

- وقتی بازیکنان حرکات خود را تصادفی (Random) انتخاب می کنند!!

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

❑ مثال:

	Q	F
Q	2,2	0,3
F	3,0	1,1

➢ تصمیم گیری بازیکن: پس از شروع بازی یا حرکت F را انجام می دهم یا حرکت Q را. کدام حرکت را انتخاب کنم؟

استراتژی های ممکن: انتخاب حرکت F. انتخاب حرکت Q.

استراتژی خالص (Pure)

➢ تصمیم گیری بازیکن: پس از شروع بازی، به تصادف، با احتمال مثلا p، حرکت F را انجام می دهم و با احتمال $1-p$ ، حرکت Q را. p را چه مقدار انتخاب کنم؟

استراتژی های ممکن: انتخاب احتمالات مختلف بر روی حرکات $\{F,Q\}$، یعنی بردارهای $(p,1-p)$ به ازاء مقادیر مختلف $0 \le p \le 1$.

استراتژی آمیخته (Mixed)

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

- چرا ممکن است یک بازیکن منطقی(Rational)، به صورت تصادفی تصمیم گیری کند؟ (چرا مدل قبلی برای مدل سازی رفتار بازیکنان کفایت نمی کند؟)

		q	$1-q$
		H	**T**
p	**H**	**1,-1**	**-1,1**
$1-p$	**T**	**-1,1**	**1,-1**

➢توجیه اول: بازی های بدون تعادل

➢مثال. بازی Matching pennies

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

		q	$1-q$
		H	**T**
p	**H**	**1,-1**	**-1,1**
$1-p$	**T**	**-1,1**	**1,-1**

- ✓ میانگین گیری از تابع سود
- ✓ بهترین پاسخ در استراتژی آمیخته
- ✓ تعادل نش آمیخته

برای

$$pq \times 1 + (1-p)q \times (-1) + p(1-q) \times (-1) + (1-p)(1-q) \times 1 = (2p-1)\,(2q-1)$$

HH TH HT TT

❖ انتخاب بهترین مقدار p برای بازیکن اول

- ✓ اگر $q > 0.5$، باید $p = 1$.
- ✓ اگر $q < 0.5$، باید $p = 0$.
- ✓ اگر $q = 0.5$، آنگاه مقدار p دلخواه است.

❖ به طریق مشابه، انتخاب بهترین مقدار q برای بازیکن دوم

- $p >$، باید $q = 0$.
- $p <$، باید $q = 1$.
- ✓ اگر $p = 0.5$، آنگاه مقدار q دلخواه است.

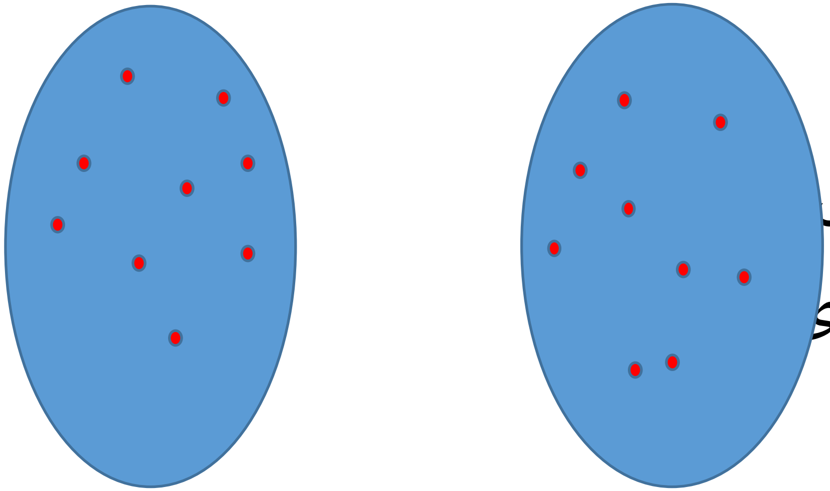
تعادل: $p = 0.5,\ \text{and}\ q = 0.5$

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

- چرا ممکن است یک بازیکن منطقی(Rational)، به صورت تصادفی تصمیم گیری کند؟ (چرا مدل قبلی برای مدل سازی رفتار بازیکنان کفایت نمی کند؟)

➢ توجیه اول: بازی های بدون تعادل

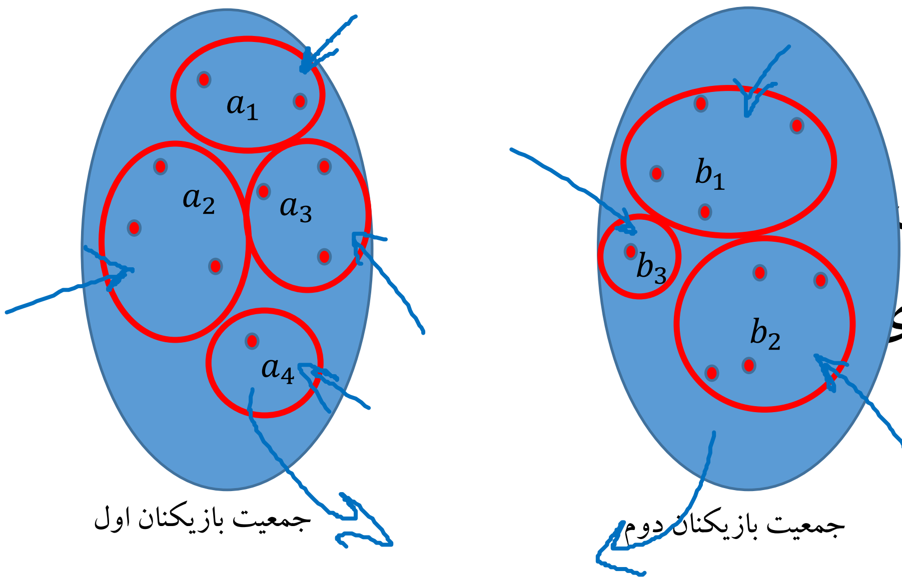
➢ توجیه دوم: یادگیری در جمعیتهای



جمعیت بازیکنان اول   جمعیت بازیکنان دوم

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

- چرا ممکن است یک بازیکن منطقی(Rational)، به صورت تصادفی تصمیم گیری کند؟ (چرا مدل قبلی برای مدل سازی رفتار بازیکنان کفایت نمی کند؟)



➢ توجیه اول: بازی های بدون تعادل

➢ توجیه دوم: یادگیری در جمعیتهای

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

- چرا ممکن است یک بازیکن منطقی(Rational)، به صورت تصادفی تصمیم گیری کند؟ (چرا مدل قبلی برای مدل سازی رفتار بازیکنان کفایت نمی کند؟)

➢ توجیه اول: بازی های بدون تعادل

➢ توجیه دوم: یادگیری در جمعیتهای بازیکنان

➢ توجیه سوم: ابهام در مورد خصوصیات بازی و رفتار بازیکنان

30% 70%

	A	B
S	1 or -3,-1	-1,1
T	-1,2	1,-1

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

		q	$1-q$
		H	**T**
p	**H**	**1,-1**	**-1,1**
$1-p$	**T**	**-1,1**	**1,-1**

نمادها، تعاریف و قراردادها:

- ✓ مجموعه بازیکنان ۱ و۲
- ✓ مجموعه حرکات بازیکنان: $A_1 = \{H,T\}$ و $A_2 = \{H,T\}$
- ✓ استراتژی آمیخته بازیکنان: توزیع احتمال های $\alpha_1 = (p,1-p)$ و $\alpha_2 = (q,1-q)$

  $\alpha_1(H) = p$ و $\alpha_1(T) = 1-p$ و $\alpha_2(H) = q$ و $\alpha_2(T) = 1-q$

- ✓ نمایه استراتژی های آمیخته بازیکنان (لاتاری Lottery):

  $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2) = ((p,1-p),(q,1-q))$

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

	X	Y
A	2,2	3,0
B	1,4	0,0

$$\left(\begin{smallmatrix}A & B\\ (1, & 0)\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}X & Y\\ (1, & 0)\end{smallmatrix}\right)$$

u_i

$u_i(a_1, a_2, \dots, a_N)$

		q	$1-q$
		H	**T**
p	**H**	1,-1	-1,1
$1-p$	**T**	-1,1	1,-1

نمادها، تعاریف و قراردادها:

✓ توابع سود برنولی:

برای بازیکن اول $u_1(H,H) = u_1(T,T) = 1$ و $u_1(H,T) = u_1(T,H) = -1$،

وبرای بازیکن دوم $u_2(H,H) = u_2(T,T) = -1$ و $u_2(H,T) = u_2(T,H) = 1$

U_i

✓ میانگین توابع سود (توابع سود میانگین):

برای بازیکن اول

$U_1(\alpha) =$

$$U_1(\alpha_1,\alpha_2) = E_{\alpha_1,\alpha_2}[u_1(a_1,a_2)] = \sum_{a_1\in A_1}\sum_{a_2\in A_2} \alpha_1(a_1)\alpha_2(a_2)u_1(a_1,a_2) = pq\times 1 + (1-p)q\times(-1) + p(1-q)\times(-1) + (1-p)(1-q)\times 1$$

وبرای بازیکن دوم

$$U_2(\alpha_1,\alpha_2) = E_{\alpha_1,\alpha_2}[u_2(a_1,a_2)] = \sum_{a_1\in A_1}\sum_{a_2\in A_2} \alpha_1(a_1)\alpha_2(a_2)u_2(a_1,a_2) = \dots$$

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

نمادها، تعاریف و قراردادها:

- ✓ ترجیحات vNM (von Neumann-Morgenstern): اولویت ترجیحیِ هر بازیکن بین لاتاری ها، بر اساس میانگین توابع سود آن بازیکن تعیین می شود

		q	$1-q$
		H	**T**
p	**H**	**1,-1**	**-1,1**
$1-p$	**T**	**-1,1**	**1,-1**

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

تعریف:
یک بازی استراتژیک با اولویت های vNM مشتمل است بر
- یک مجموعه بازیکنان،
- برای هر بازیکن، یک مجموعه حرکت ها،
- برای هر بازیکن، اولویت های بین لاتاری ها که می تواند بر اساس امید ریاضی تابع سود برنولی روی نمایه اکشن ها نمایش داده شود.

در مقایسه با بازی استراتژیک با استراتژی های خالص،
- استراتژی به جای آن که یک اکشن باشد یک توزیع احتمال روی اکشن ها است،
- اولویت ها به جای آن که روی تابع سود برنولی تعریف شوند، روی امیدریاضی آن تعریف می شود.

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

تعریف:

در یک بازی استراتژیک با اولویت های vNM، نمایه استراتژی آمیخته $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*)$ را یک تعادل نش گوییم اگر برای هر بازیکن i و هر استراتژی آمیخته α_i از این بازیکن داشته باشیم

$$U_i(\alpha^*) \geq U_i(\alpha_i, \alpha_{-i}^*),$$

به عبارت دیگر هیچ بازیکنی به تنهایی از تغییر استراتژی (آمیخته) خود، (میانگین) سود بیشتری کسب نکند.

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

$\alpha_{-i} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \dots, \alpha_n)$

تعریف:

تابع بهترین پاسخ بازیکن i ام به نمایه استراتژی آمیخته سایر بازیکنان، یعنی α_{-i}، عبارت است از مجموعه استراتژی‌های آمیخته از بازیکن i ام که میانگین تابع سود این بازیکن را با فرض α_{-i} حداکثر کند. به بیان ریاضی:

$$B_i(\alpha_{-i}) = \{\alpha_i | \alpha_i \text{ is a probability distribution over } A_i \text{ and } U_i(\alpha_i, \alpha_{-i}) \geq U_i(\alpha_i', \alpha_{-i}) \text{ for all probability distribution } \alpha_i' \text{ over } A_i\}$$

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

- قضیه: نمایه استراژی آمیخته ی α^* یک تعادل نش آمیخته است اگر و تنها اگر برای هر بازیکن i داشته باشیم $\alpha_i^* \in B_i(\alpha_{-i}^*)$

- به بیان دیگر، همه نقاط تعادل نش آمیخته از حل دستگاه $\alpha_i = B_i(\alpha_{-i}), i = 1,2, \dots, N$ به دست میآیند.

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

- مثال: نقاط تعادل نش آمیخته؟

		q	$1-q$
		B	**S**
p	**B**	**2,1**	**0,0**
$1-p$	**S**	**0,0**	**1,2**

	B	S
B	pq	$p(1-q)$
S	$(1-p)q$	$(1-p)(1-q)$

$$U_1(p,q) = 2pq + (1-p)(1-q) = 1 - q + p(3q-1)$$

$$U_2(p,q) = pq + 2(1-p)(1-q)$$
$$= 2(1-p) + q(3p-2)$$

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

- مثال: نقاط تعادل نش آمیخته؟

$$U_1(p,q) = 2pq + (1-p)(1-q) = 1 - q + p(3q-1)$$

$$U_2(p,q) = pq + 2(1-p)(1-q)2(1-p) + q(3p-2)$$

$$B_1(q) = \begin{cases} \{1\} & \text{for } q > \frac{1}{3} \\ \{0\} & \text{for } q < \frac{1}{3}, \\ \{p: 0 \le p \le 1\} & \text{for } q = \frac{1}{3} \end{cases} \quad B_2(p) = \begin{cases} \{1\} & \text{for } p > \frac{2}{3} \\ \{0\} & \text{for } p < \frac{2}{3},. \\ \{q: 0 \le q \le 1\} & \text{for } p = \frac{2}{3} \end{cases}$$

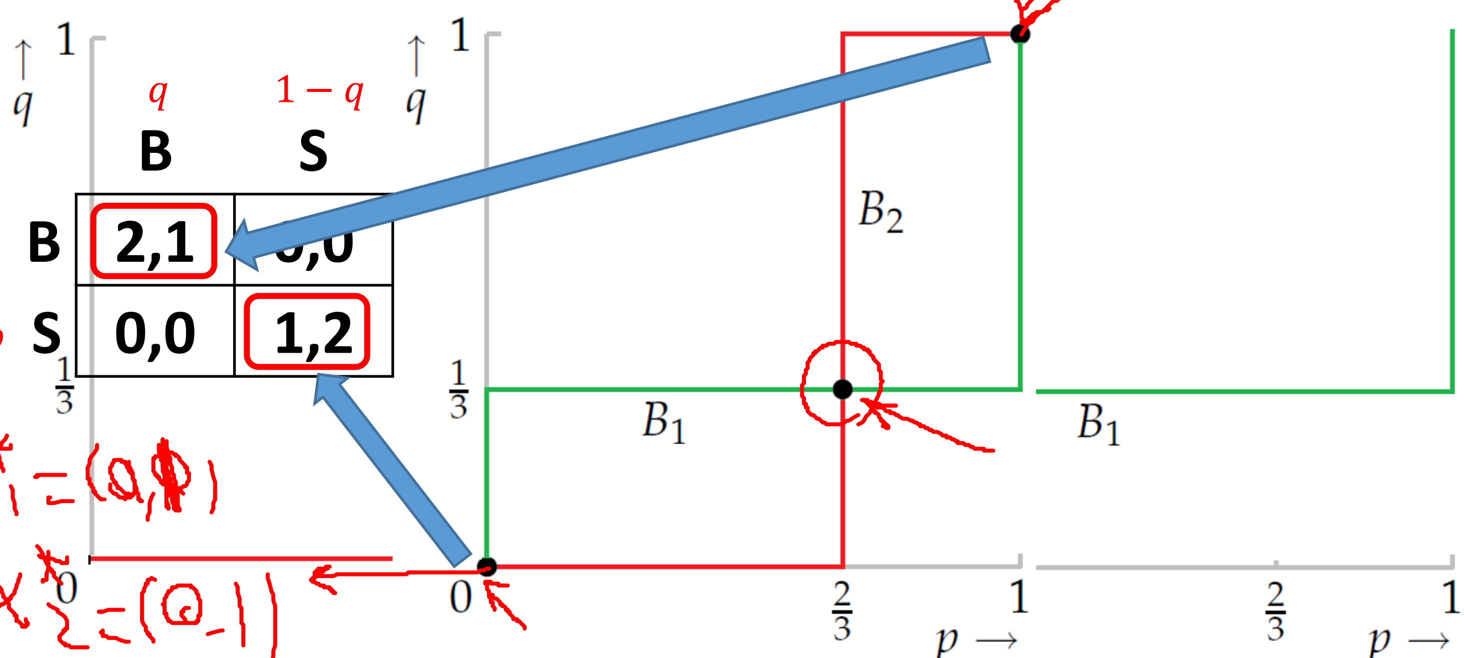
بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

$\alpha_1^* = (1,0)$

$\alpha_2^* = (1,0)$

- مثال:

		q	$1-q$
		B	S
p	B	2,1	0,0
$1-p$	S	0,0	1,2



$\alpha_1^* = (0,1)$

$\alpha_2^* = (0,1)$

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

- نکته: یک مجموعه بازیکنان و مجموعه حرکات آنها را در دو حالت زیر در نظر بگیرید:

الف) بازیکنان به صورت قطعی حرکات خود را انتخاب کنند (استراتژی خالص)،

ب) بازیکنان به صورت تصادفی حرکات خود را انتخاب کنند (استراتژی آمیخته).

نمایه استراتژی $a^* = (a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*)$ یک تعادل نش برای بازی در حالت اول است اگر و تنها اگر در بازی حالت دوم، نمایه استراتژی آمیخته $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*)$ یک تعادل نشَ باشد که در آن برای هر بازیکن i، توزیع احتمال α_i^* در محل مربوط به a_i^* برابر یک باشد (و طبیعتا در بقیه محل ها برابر صفر باشد).

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

- تذکر: برای پرهیز از پیچیدگی محاسبات، و تمرکز بر روی مفاهیم اصلی درس، در تقریبا همه مثال های درس فقط از بازی دونفره و مجموعه حرکات دوتایی استفاده شده است؛ بنابراین استراتژی آمیخته با یک متغیر قابل نمایش است و در نتیجه تابع بهترین پاسخ، تک متغیره است.

$$\big((p,1-p),(q,1-q)\big) \Longrightarrow (p,q)$$

$$p = B_1(q), \qquad q = B_2(p)$$

		q	$1-q$
		B	S
p	B	2,1	0,0
$1-p$	S	0,0	1,2

اما در حالتی که تعداد حرکات بیش از دو باشد تابع بهترین پاسخ، چند متغیره شده و حل مساله بسیار دشوارتر می شود. مثلا در یک بازی دو نفره که هر بازیکن، سه حرکت داشته باشد،

$U_1((P_1,P_2),(q_1,q_2))$

		q_1	q_2	$1-q_1-q_2$
		X	**Y**	**Z**
p_1	**A**	**-1,1**	**2,1**	**4,1**
p_2	**B**	**3,2**	**5,3**	**4,4**
$1-p_1-p_2$	**C**	**1,4**	**6,3**	**0,0**

$$\big((p_1,p_2,1-p_1-p_2),(q_1,q_2,1-q_1-q_2)\big) \Longrightarrow \big((p_1,p_2),(q_1,q_2)\big)$$

$$(p_1,p_2) = B_1(q_1,q_2), \qquad (q_1,q_2) = B_2(p_1,p_2)$$

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

- ✓ چگونه می توان در یک بازی با استراتژی های آمیخته، نمایه های تعادل نش را یافت؟
  - ❑ تعیین شرایط لازم و کافی برای تعادل نش بودن یک نمایه استراتژی (خواص معادل با تعریف تعادل نش)

❖ قضیه:یک نمایه استراتژی آمیخته α^*، یک تعادل نش است اگر و تنها اگر برای هر بازیکن i، به شرط آن که سایر بازیکنان نمایه استراتژی α^*_{-i} را اتخاذ کرده باشند، دو خاصیت زیر برقرار باشد:

1. به ازاء انتخاب هر اکشنی که در α_i^* با احتمال غیر صفر انتخاب می شود، میانگین سود بازیکن i یکسان باشد.
2. به ازاء انتخاب هر اکشنی که در α_i^* با احتمال صفر انتخاب می شود، میانگین سود بازیکن i حداکثر برابر زمانی باشد که یک اکشن با احتمال غیر صفر انتخاب کند.

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

- ✓ تابع میانگین سود برای بازیکن i ام در یک بازی n نفره با نمایه استراتژی مختلط $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

$$U_i(\alpha) = E_\alpha[u_i(a)] = \sum_{a_1 \in A_1} \sum_{a_2 \in A_2} \dots \sum_{a_n \in A_n} \alpha_1(a_1)\alpha_2(a_2) \dots \alpha_n(a_n) \times u_i(a)$$

$$= \sum_{a_i \in A_i} \alpha_i(a_i) \underbrace{\boxed{\sum_{a_1 \in A_1} \dots \sum_{a_{i-1} \in A_{i-1}} \sum_{a_{i+1} \in A_{i+1}} \dots \sum_{a_n \in A_n} \alpha_1(a_1) \dots \alpha_{i-1}(a_{i-1})\alpha_{i+1}(a_{i+1}) \dots \alpha_n(a_n) \times u_i(a)}}_{U_i(a_i, \alpha_{-i})}$$

$$= \sum_{a_i \in A_i} \alpha_i(a_i) U_i(a_i, \alpha_{-i})$$

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

✓ تابع سود میانگین برای بازیکن $\boldsymbol{i}$ ام در یک بازی $\boldsymbol{n}$ نفره با نمایه استراتژی مختلط $\boldsymbol{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}$

$$\boldsymbol{U_i(\alpha) = \sum_{a_i \in A_i} \alpha_i(a_i) U_i(a_i, \alpha_{-i})}$$

بحث: فرض کنید $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*)$ یک تعادل نش آمیخته باشد و a_i' یک اکشن از بازیکن i ام باشد که در α_i^* با احتمال غیر صفر استفاده می شود. حال برای هر اکشن a_i'' از بازیکن i ام:

a_i''

$\cancel{U_i(a_i'', \alpha^*_{-i})\ \text{[illegible]}\ U_i(a_i', \alpha^*_{-i})}$ $\qquad U_i(a_i'', \alpha^*_{-i}) \le U_i(a_i', \alpha^*_{-i})$

$U_i(a_i'', \alpha^*_{-i}) < U_i(a_i', \alpha^*_{-i}) \qquad \Longrightarrow \alpha_i^*(a_i'') = 0$

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

α_i^*

(x, y, z)

$U_i(x,\alpha^*_{-i}) = U_i(y,\alpha^*_{-i})$

$U_i(z,\alpha^*_{-i})$

...مایه استراتژی مختلط $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ ...

$$U_i(\alpha) = \sum_{a_i\in A_i} \alpha_i(a_i \dots$$

در نمایه استراتژی تعادل نش آمیخته، برای هر بازیکن،
۱- اکشن های با احتمال غیر صفر، به یک اندازه میانگین سود می دهند؛
۲- هیچ اکشنی بیشتر از اکشن های با احتمال غیرصفر سود نمی دهد.

...د و a_i' یک اکشن از بازیکن i ام باشد که در α_i^* با احتمال غیر صفر استفاده می شود. حال برای هر اکشن a_i'' از بازیکن i ام:

a_i''

$\cancel{U_i(a_i'', \alpha^*_{-i}) \quad U_i(a_i', \alpha^*_{-i})}$ $\quad U_i(a_i'', \alpha^*_{-i}) \le U_i(a_i', \alpha^*_{-i})$

$U_i(a_i'', \alpha^*_{-i}) < U_i(a_i', \alpha^*_{-i}) \quad \Rightarrow \alpha_i^*(a_i'') = 0$

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

در نمایه استراتژی تعادل نش آمیخته، برای هر بازیکن،
۱- اکشن های با احتمال غیر صفر، به یک اندازه میانگین سود می دهند؛
۲- هیچ اکشنی بیشتر از اکشن های با احتمال غیرصفر سود نمی دهد.

...مایه استراتژی مختلط $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2, \dots ,\alpha_n)$

صفر استفاده می شود. حال برای هر اکشن a_i'' از بازیکن i ام:

$$U_i(a_i'',\alpha_{-i}^*) \le U_i(a_i',\alpha_{-i}^*)$$

$$\Rightarrow \alpha_i^*(a_i'') = 0$$

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

- قضیه: نمایه استراژی آمیخته ی α^* یک تعادل نش آمیخته است اگر و تنها اگر برای هر بازیکن i داشته باشیم $\alpha_i^* \in B_i(\alpha_{-i}^*)$
- به بیان دیگر، همه نقاط تعادل نش آمیخته از حل دستگاه $\alpha_i = B_i(\alpha_{-i}), i = 1,2, \dots ,N$ به دست می آیند.

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

✓ چگونه می توان در یک بازی با استراتژی های آمیخته، نمایه های تعادل نش را یافت؟

❑ تعیین شرایط لازم و کافی برای تعادل نش بودن یک نمایه استراتژی (خواص معادل با تعریف تعادل نش)

❖ قضیه: یک نمایه استراتژی آمیخته α^*، یک تعادل نش است اگر و تنها اگر برای هر بازیکن i، به شرط آن که سایر بازیکنان نمایه استراتژی α^*_{-i} را اتخاذ کرده باشند، دو خاصیت زیر برقرار باشد:

1. به ازاء انتخاب هر اکشنی که در α^*_i با احتمال غیر صفر انتخاب می شود، میانگین سود بازیکن i یکسان باشد.
2. به ازاء انتخاب هر اکشنی که در α^*_i با احتمال صفر انتخاب می شود، میانگین سود بازیکن i حداکثر برابر زمانی باشد که یک اکشن با احتمال غیر صفر انتخاب کند.

$$\boldsymbol{U_i(\alpha^*) = \sum_{a_i \in A_i} \alpha_i^*(a_i) U_i(a_i, \alpha^*_{-i})}$$

b

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

$\alpha^* = (\alpha^*_1, \alpha^*_2, \ldots, \alpha^*_n)$

✓ چگونه می توان در یک بازی با استراتژی های آمیخته، نمایه های تعادل نش را یافت؟

❑ تعیین شرایط لازم و کافی برای تعادل نش بودن یک نمایه استراتژی (خواص معادل با تعریف تعادل نش)

❖ قضیه: یک نمایه استراتژی آمیخته α^*، یک تعادل نش است اگر و تنها اگر برای هر بازیکن i، به شرط آن که سایر بازیکنان نمایه استراتژی α^*_{-i} را اتخاذ کرده باشند، دو خاصیت زیر برقرار باشد:

1. به ازاء انتخاب هر اکشنی که در α_i^* با احتمال غیر صفر انتخاب می شود، میانگین سود بازیکن i یکسان باشد.
2. به ازاء انتخاب هر اکشنی که در α_i^* با احتمال صفر انتخاب می شود، میانگین سود بازیکن i حداکثر برابر زمانی باشد که یک اکشن با احتمال غیر صفر انتخاب کند.

?

نتیجه: تعادل های نش آمیخته ی nondegenerate هیچ گاه تعادل نش اکید نیستند

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

T α_1 B N.E. MNE

❑ مثال: نشان دهید در بازی زیر، نمایه استراتژی آمیخته $\alpha = \left(\left(\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}\right), \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)$ یک تعادل نش آمیخته است.

	L	C	R
T	۰,2	3,3	1,1
M	۰,۰	0,۰	2,۰
B	۰,4	5,1	0,7

❑ حل:

$$U_2(\alpha_1, L) = \frac{3}{4} \times 2 + \frac{1}{4} \times 4 = \frac{10}{4}$$

$$U_2(\alpha_1, C) = \frac{3}{4} \times 3 + \frac{1}{4} \times 1 = \frac{10}{4}$$

$$U_2(\alpha_1, R) = \frac{3}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times 7 = \frac{10}{4}$$

$$U_1(T, \alpha_2) = \frac{1}{3} \times 3 + \frac{2}{3} \times 1 = \frac{5}{3}$$

$$U_1(M, \alpha_2) = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3}$$

$$U_1(B, \alpha_2) = \frac{1}{3} \times 5 + \frac{2}{3} \times 0 = \frac{5}{3}$$

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

- قضیه: هر بازی با اولویت های vNM که در آن هر بازیکن، تعداد متناهی اکشن داشته باشد، حداقل یک تعادل نش استراتژی آمیخته دارد.

اثبات: .....

تذکر: برای تضمین وجود تعادل نش آمیخته، متناهی بودن تعداد اکشن ها شرط کافی است نه لازم

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

➢ تعریف حرکات مغلوب (مغلوب شده توسط یک استراتژی آمیخته).

در یک بازی استراتژیک با اولویت های vNM ، می گوییم استراتژی آمیخته α_i از بازیکن iام بر حرکت a_i از این بازیکن، غلبه‌ی اکید دارد اگر برای هر نمایه حرکات a_{-i} از سایر بازیکنان داشته باشیم $U_i(\alpha_i, a_{-i}) > u_i(a_i, a_{-i})$.

	A	B
C	6,3	2,6
D	2,0	3,3
E	1,2	7,5

مثال: نشان دهید برای بازیکن اول، نمایه استراتژی آمیخته $\left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$ بر اکشن D غلبه دارد

$$U_1\left(\left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right), A\right) = \frac{13}{3} > 2 = u_1(D, A)$$

$$U_1\left(\left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right), B\right) = \frac{11}{3} > 3 = u_1(D, B)$$

❖ توجه: در مثال فوق، استراتژی D توسط هیچ حرکت خالصی مغلوب نبوده است!

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

- لم: حرکات اکیدا مغلوب، در هیچ تعادل نشِ آمیخته ای، با احتمال مثبت ظاهر نمی شوند (و از جمله، در هیچ تعادل نش خالصی نیز ظاهر نمی شوند)

مثال:

	A	B
C	6,3	2,6
D		
E	1,2	7,5

$$U_1\left(\left(\frac{2}{3},0,\frac{1}{3}\right),A\right)=\frac{13}{3}>2=u_1(D,A)$$

$$U_1\left(\left(\frac{2}{3},0,\frac{1}{3}\right),B\right)=\frac{11}{3}>3=u_1(D,B)$$

پس برای بازیکن اول، نمایه استراتژی آمیخته $\left(\frac{2}{3},0,\frac{1}{3}\right)$ بر اکشن D غلبه دارد.

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

- لم: حرکات اکیدا مغلوب، در هیچ تعادل نشِ آمیخته ای، با احتمال مثبت ظاهر نمی شوند (و از جمله، در هیچ تعادل نش خالصی نیز ظاهر نمی شوند)

اثبات؟

- تعریف حرکات مغلوب (مغلوب شده توسط یک استراتژی آمیخته).

در یک بازی استراتژیک با اولویت های vNM ، می گوییم استراتژی آمیخته α_i از بازیکن iام بر حرکت a_i از این بازیکن غلبه ی اکید دارد اگر برای هر نمایه حرکات a_{-i} از سایر بازیکنان داشته باشیم $U_i(\alpha_i, a_{-i}) > u_i(a_i, a_{-i})$.

$$U_i(\alpha_i, \alpha^*_{-i}) > U_i(a_i, \alpha^*_{-i}) \quad \forall \alpha^*_{-i}$$

$$\exists a'_i \in A_i \text{ such that } \alpha_i(a'_i) \neq 0 \quad \text{and} \quad U_i(a'_i, \alpha^*_{-i}) > U_i(a_i, \alpha^*_{-i})$$

پس a_i نمی تواند در هیچ تعادل نش آمیخته ای ظاهر شود

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

- لم: حرکات اکیدا مغلوب، در هیچ تعادل نشِ آمیخته ای، با احتمال مثبت ظاهر نمی شوند (و از جمله، در هیچ تعادل نش خالصی نیز ظاهر نمی شوند)

به عنوان تمرین، اثبات را به صورت دقیق ریاضی و با جزییات کامل بنویسید

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

➢ تعریف حرکات مغلوب ضعیف (مغلوب شده توسط یک استراتژی آمیخته).

در یک بازی استراتژیک با اولویت های vNM ، می گوییم استراتژی آمیخته α_i از بازیکن iام بر حرکت a_i از این بازیکن، غلبه‌ی ضعیف دارد اگر برای هر نمایه حرکات a_{-i} از سایر بازیکنان، $U_i(\alpha_i,a_{-i}) \geq u_i(a_i,a_{-i})$.

نکته: تعادل نش آمیخته می تواند اکشن مغلوب ضعیف داشته باشد (نتیجه ی مستقیم از همین خاصیت در بازیهای با استراتژی خالص)

اکید

➢ قضیه: هر بازی با اولویت های vNM که در آن هر بازیکن، تعداد متناهی اکشن داشته باشد، حداقل یک تعادل نش استراتژی آمیخته دارد که در آن هیچ بازیکنی، استراتژی مغلوب ~~ضعیف~~ ندارد.

حرکت

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

تعادل در یک جمعیت همگن: بازی متقارن و تعادل نش متقارن

- بازی بین بازیکنان با خصوصیات یکسان
  - ✓ مجموعه اکشن های بازیکنان یکسان است
  - ✓ تابع سود هر بازیکن، مستقل از شماره و هویت بازیکن بوده و فقط تابعی از اکشن آن بازیکن و اکشن سایرین است
- تعریف بازی دو نفره متقارن: یک بازی دو نفره استراتژیک با اولویت های ترتیبی را متقارن گوییم اگر $A_1 = A_2$ و برای هر $x,y \in A_1 = A_2$ داشته باشیم $u_1(a_1,a_2)|_{a_1=x,a_2=y} = u_2(a_1,a_2)|_{a_1=y,a_2=x}$

	A	B
A	q,q	w,e
B	e,w	r,r

	A	B	C
A	q,q	w,e	r,t
B	e,w	y,y	s,d
C	t,r	d,s	f,f

❑ تعادل در جم

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

❑ تعادل در جمعیتهای همگن و بازی های متقارن

- تعریف بازی دو نفره متقارن: یک بازی دو نفره استراتژیک با اولویت های ترتیبی را متقارن vNM می‌نامیم اگر A_1 $= A_2$ و برای هر $x,y \in A_1 = A_2$ داشته باشیم $u_1(a_1,a_2)|_{a_1=x,a_2=y} = u_2(a_1,a_2)|_{a_1=y,a_2=x}$

- تعریف تعادل نش متقارن: یک بازی استراتژیک با اولویت های ترجیحی vNM که مجموعه اکشن بازیکنان یکسان است را در نظر بگیرید. در چنین بازی‌ای، یک نمایه استراتژی α^* را یک تعادل نش متقارن می‌نامیم α^* اگر اولا تعادل نش باشد و ثانیا α_i^* برای همه بازیکنان i یکسان باشد، یعنی α_i^* $.\alpha_1^* = \alpha_2^* = \cdots = \alpha_N^*$

$$\alpha_1^* = \alpha_2^* = \cdots = \alpha_N^*$$

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

- تعادل در جمعیتهای همگن و بازی های متقارن

➢ قضیه: هر بازی با اولویت های vNM متقارن که در آن هر بازیکن، تعداد متناهی اکشن داشته باشد، حداقل یک تعادل نش استراتژی آمیخته متقارن دارد.

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

- تعادل در جمعیتهای همگن و بازی های متقارن

- مثال. گزارش یک جرم به پلیس: n نفر شاهد یک جرم هستند و همه ترجیح می دهند که پلیس از وقوع جرم مطلع شود. هرکس می تواند خود به پلیس تلفن کند یا این که صرفا امیدوار باشد شاهد دیگری به پلیس تلفن کند.

  - c : هزینه تماس به پلیس برای هر فرد.
  - v: ارزش مطلع شدن پلیس، از دید هر فرد.
  - فرض کنیم $v > c$

- سوال: در وضعیت تعادل، انتظار داریم چه رفتاری از این جامعه رخ دهد؟ مثلا اگر تعداد شاهدین زیاد شود، پلیس زودتر خبر می شود؟

Asa - دیده بان کلاسیک | Murder of Kitty Genovese - Wikip | Bystander effect - Wikipedia

en.wikipedia.org/wiki/Murder_of_Kitty_Genovese

Not logged in Talk Contributions Create account Log

Article Talk | Read Edit View history | Search Wikipedia

Murder of Kitty Genovese

From Wikipedia, the free encyclopedia

Coordinates: 40°42′33.98″N 73°49′48.76″W

In the early hours of March 13, 1964, 28-year-old **Kitty Genovese** was stabbed outside the apartment building across the street from where she lived, in an apartment above a row of shops on Austin Street, in the Kew Gardens neighborhood of Queens in New York City.[2][3][4] Two weeks after the murder, *The New York Times* published an article claiming that 38 witnesses saw or heard the attack, but none of them called the police or came to her aid.[5]

The incident prompted inquiries into what became known as the bystander effect or "Genovese syndrome",[6] and the murder became a staple of American psychology textbooks for the next four decades. However, researchers have since uncovered major inaccuracies in the *New York Times* article.

Reporters at a competing news organization discovered in 1964 that the article was inconsistent with the facts, but they were unwilling at the time to challenge *New York Times* editor Abe Rosenthal. In 2007, an article in the *American Psychologist* found "no evidence for the presence of 38 witnesses, or that witnesses observed the murder, or that witnesses remained inactive".[7] In 2016, *The New York Times* called its own reporting "flawed", stating that the original story "grossly exaggerated the number of witnesses and what they had perceived".[8]

Winston Moseley, a 29-year-old Manhattan native, was arrested during a house burglary six days after the murder. While in custody, he confessed to killing Genovese. At his trial, Moseley was found guilty of murder and sentenced to death; this sentence was later commuted to life imprisonment. Moseley died in prison on March 28, 2016, at the age of 81, having served 52 years.[8]

Murder of Kitty Genovese

Date	March 13, 1964
Location	Kew Gardens, Queens, New York City, US
Type	Homicide
Burial	March 16, 1964 Lakeview Cemetery New Canaan, Connecticut, US[1]
Convicted	Winston Moseley
Trial	June 8–11, 1964
Verdict	Guilty
Convictions	Murder
Sentence	Death (commuted to life imprisonment)

Contents [hide]

WIKIPEDIA
e Free Encyclopedia

in page
ntents
atured content
rrent events
ndom article
nate to Wikipedia
kipedia store

eraction
lp
out Wikipedia
mmunity portal
cent changes
ntact page

ols
at links here
lated changes
load file
ecial pages
rmanent link
ge information
kidata item
e this page

Activate Windows
Go to Settings to activate Windows.

ENG 3:07 PM 4/22/2020

Asa - دیده بان کلاسیک | Murder of Kitty Genovese - Wikip | Bystander effect - Wikipedia

en.wikipedia.org/wiki/Bystander_effect

Not logged in Talk Contributions Create account Log

Article Talk | Read Edit View history | Search Wikipedia

VIKIPEDIA
e Free Encyclopedia

in page
ntents
atured content
rrent events
ndom article
nate to Wikipedia
kipedia store

eraction
lp
out Wikipedia
mmunity portal
cent changes
ntact page

ols
at links here
lated changes
load file
ecial pages
rmanent link
ge information
kidata item
e this page

Bystander effect

From Wikipedia, the free encyclopedia

This article is about the psychological phenomenon. For the bystander effect in radiobiology, see Bystander effect (radiobiology).

The **bystander effect**, or **bystander apathy**, is a social psychological claim that individuals are less likely to offer help to a victim when other people are present; the greater the number of bystanders, the less likely it is that one of them will help.

Several factors contribute to the bystander effect, including ambiguity, group cohesiveness, and diffusion of responsibility that reinforces mutual denial of a situation's severity.[1]

A cartoon illustrating the effect. Four people ignore a person lying on the floor, each with their own reason for deciding that no help is required.

Contents [hide]

Activate Windows
Go to Settings to activate Windows.

ENG 3:09 PM 4/22/2020

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

- تعادل در جمعیتهای همگن و بازی های متقارن

- مثال. گزارش یک جرم به پلیس: n نفر شاهد یک جرم هستند و همه ترجیح می دهند که پلیس از وقوع جرم مطلع شود. هرکس می تواند خود به پلیس تلفن کند یا این که صرفا امیدوار باشد شاهد دیگری به پلیس تلفن کند.

  - c : هزینه تماس به پلیس برای هر فرد.
  - v: ارزش مطلع شدن پلیس، از دید هر فرد.
  - فرض کنیم $v > c$

- سوال: در وضعیت تعادل، انتظار داریم چه رفتاری از این جامعه رخ دهد؟ مثلا اگر تعداد شاهدین زیاد شود، پلیس زودتر خبر می شود؟

$v - c$ $(c, c, n, n, \dots, n)$ $v - c \rightarrow 0$

v

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

$(n, n, n, n, \dots)$ $(c, n, n, n, \dots, n)$

$(n, c, n, n, \dots, n)$

call

not call

0 $v - c$

- تعادل در جمعیتهای همگن و بازی های متقارن

  - مثال. گزارش یک جرم به پلیس.
    - c : هزینه تماس به پلیس برای هر فرد. v: ارزش مطلع شدن پلیس، از دید هر فرد. $v > c$
  - در بازی با استراتژی خالص، تعادل نش برابر است با کلیه نمایه اکشن هایی که در آن، فقط و فقط یک نفر به پلیس زنگ می زند.
  - در بازی با استراتژی آمیخته ؟

چون بازی متقارن است، پس حتما یک تعادل نش متقارن دارد

call

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

$$\Big(\underbrace{(p, 1-p)}_{\text{call} \quad \text{no call}}, (p, 1-p) \dots\dots\Big) \longrightarrow \underbrace{(p, p, p \dots, p)}_{n}$$

❑ تعادل در جمعیتهای همگن و بازی های متقارن

➢ مثال. گزارش یک جرم به پلیس.

❖ c : هزینه تماس به پلیس برای هر فرد. v: ارزش مطلع شدن پلیس، از دید هر فرد. $v > c$

➢ در بازی با استراتژی آمیخته ؟

چون بازی متقارن است، پس حتما یک تعادل نش متقارن دارد

- فرض کنید در این تعادل نش متقارن، احتمال تماس از طرف یک نفر برابر p باشد (و احتمال عدم تماس برابر $1-p$)
  - ✓ ادعا ۱: $p \neq 0$
  - ✓ ادعا ۲: $p \neq 1$

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

(call , no call)

$p \neq 0, 1$

$p \qquad 1-p \neq 0$

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

✓ چگونه می توان در یک بازی با استراتژی های آمیخته، نمایه های تعادل نش را یافت؟

❑ تعیین شرایط لازم و کافی برای تعادل نش بودن یک نمایه استراتژی (خواص معادل با تعریف تعادل نش)

❖ قضیه: یک نمایه استراتژی آمیخته α^*، یک تعادل نش است اگر و تنها اگر برای هر بازیکن i، به شرط آن که سایر بازیکنان نمایه استراتژی α^*_{-i} را اتخاذ کرده باشند، دو خاصیت زیر برقرار باشد:

1. به ازاء انتخاب هر اکشنی که در α_i^* با احتمال غیر صفر انتخاب می شود، میانگین سود بازیکن i یکسان باشد
2. به ازاء انتخاب هر اکشنی که در α_i^* با احتمال صفر انتخاب می شود، میانگین سود بازیکن i حداکثر برابر زمانی باشد که یک اکشن با احتمال غیر صفر انتخاب کند.

نتیجه: تعادل های نش آمیخته ی nondegenerate هیچ گاه تعادل نش اکید نیستند

ی گیرد.

مان

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

$v - c = v(1-(1-p)^{n-1})$

p

- تعادل در جمعیتهای همگن و بازی های متقارن

➢ مثال. گزارش یک جرم به پلیس.

❖ c : هزینه تماس به پلیس برای هر فرد. v: ارزش مطلع شدن پلیس، از دید هر فرد. $v > c$

➢ پس یک تعادل نش آمیخته وجود دارد که در آن هر بازیکن با احتمال p بین صفر و یک، با پلیس تماس می گیرد.

➢ طبق قضیه‌ی گفته شده، در این تعادل، میانگین سود هر بازیکن به ازاء اکشن های تماس با عدم تماس یکسان است.

$$U_i(call, (p, p, \dots, p)) = v - c$$

$$U_i(not\ call, (p, p, \dots, p)) = 0 \times \Pr\{\text{no one else calls}\} + v \times \Pr\{\text{someone else call}\}$$
$$= 0 + v \times (1 - \underbrace{\Pr\{\text{no one else calls}\}}_{(1-p)^{n-1}}) = v(1 - (1-p)^{n-1})$$

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

تعادل در جمعیتهای همگن و بازی های متقارن

- مثال. گزارش یک جرم به پلیس.
  - c : هزینه تماس به پلیس برای هر فرد. v: ارزش مطلع شدن پلیس، از دید هر فرد. $v > c$

- **پس یک تعادل نش آمیخته وجود دارد که در آن هر بازیکن با احتمال p بین صفر و یک، با پلیس تماس می گیرد.**

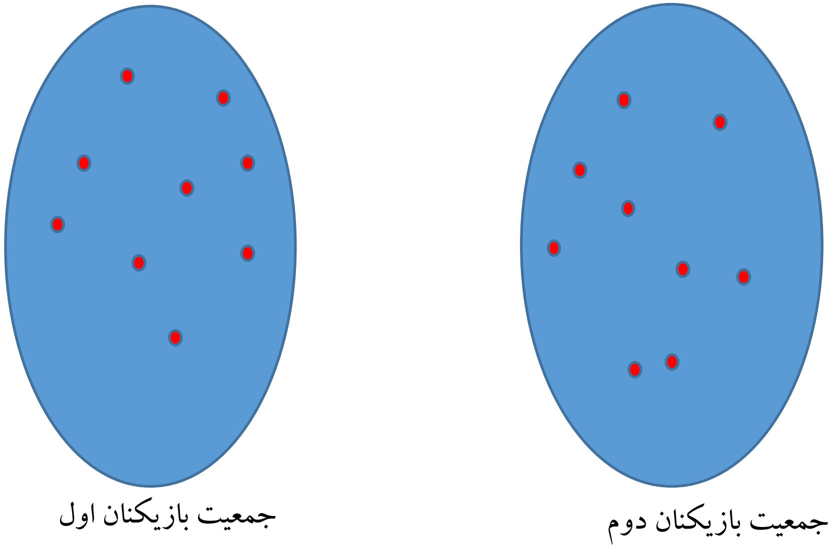
- **طبق قضیه‌ی گفته شده، در این تعادل، میانگین سود هر بازیکن به ازاء اکشن های تماس یا عدم تماس یکسان است.**

$$v - c = v(1-(1-p)^{n-1}) \Rightarrow p = 1 - \sqrt[n-1]{\frac{c}{v}}$$

$$\Pr\{\text{no one calls}\} = (1-p)^n = \left(\frac{c}{v}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

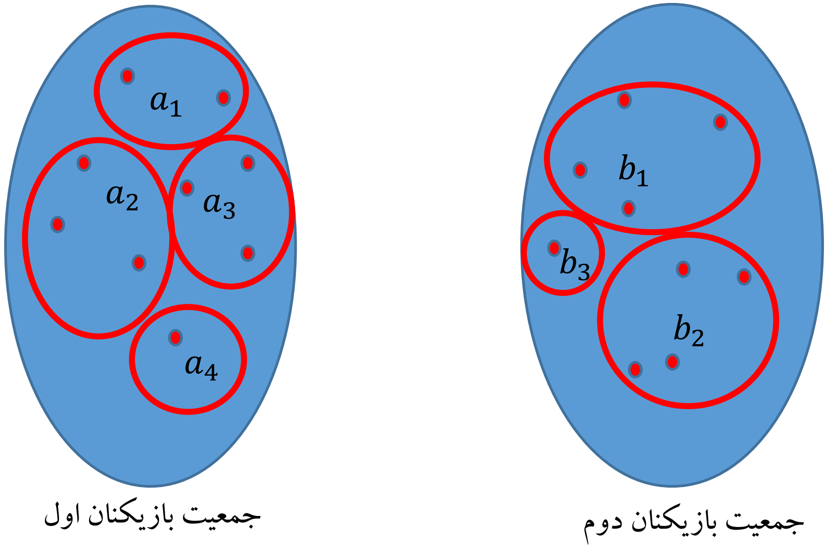
بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

- شکل گیری اطلاعات بازی در بازیکنان و حرکت به سمت تعادل نش؟
  - کسب تجربه از بازی های انجام شده



بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

- شکل گیری اطلاعات بازی در بازیکنان و حرکت به سمت تعادل نش؟
  - کسب تجربه از بازی های انجام شده



بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

- شکل گیری اطلاعات بازی در بازیکنان و حرکت به سمت تعادل نش؟
  - کسب تجربه از بازی های انجام شده
    - حذف اکشن‌های مغلوب
    - یادگیری (Learning)
      - دینامیک بهترین پاسخ (Best Response Dynamics)
      - بازی ساختگی (Fictitious Play)

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

- شکل گیری اطلاعات بازی در بازیکنان و حرکت به سمت تعادل نش؟
  - ✓ دینامیک بهترین پاسخ (Best Response Dynamics)

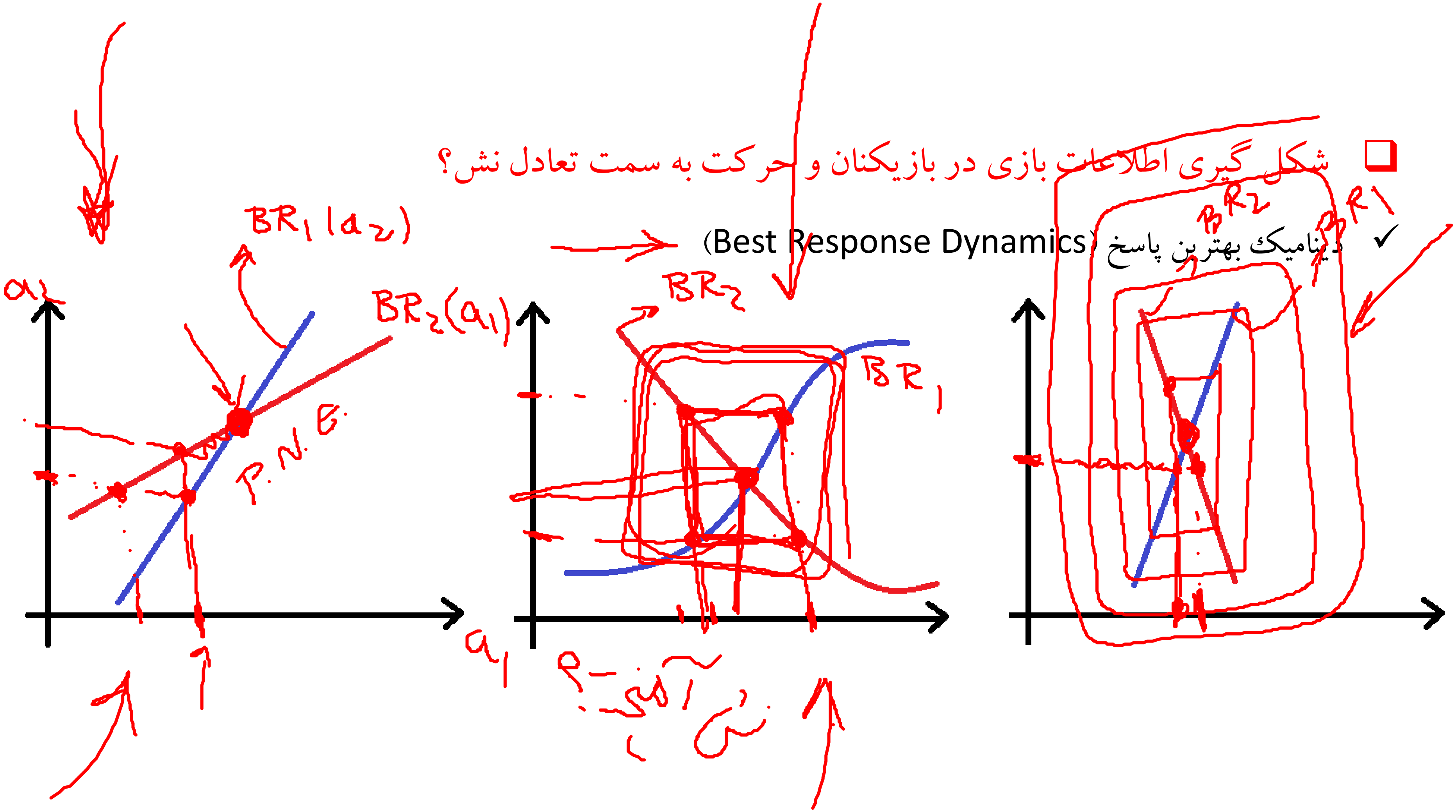
	Q	F
Q	2,2	0,3
F	3,0	1,1

N.E.

	X	Y	Z
A	3,5	1,4	2,2
B	2,4	2,6	3,5
C	2,3	3,5	0,6

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

- شکل گیری اطلاعات بازی در بازیکنان و حرکت به سمت تعادل نش؟
  - ✓ دینامیک بهترین پاسخ (Best Response Dynamics)



بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

- ❑ شکل گیری اطلاعات بازی در بازیکنان و حرکت به سمت تعادل نش؟
  - کسب تجربه از بازی های انجام شده
    - حذف اکشن‌های مغلوب
    - یادگیری (Learning)
      - ✓ دینامیک بهترین پاسخ (Best Response Dynamics)
      - ✓ بازی ساختگی (Fictitious Play)

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

$(0, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3})$

$5 \times \tfrac{2}{3} + 6 \times \tfrac{1}{3} = \tfrac{16}{3}$

- شکل گیری اطلاعات بازی در بازیکنان و حرکت به سمت تعادل نش؟
  - ✓ بازی ساختگی (Fictitious Play)

B Y

C Z

$(0, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3})$

	X	Y	Z
A	3,5	1,4	2,2
B	2,4	2,6	3,5
C	2,3	3,5	0,6

- نکته: در هر بازی دو نفره که هر بازیکن دو اکشن دارد، این فرآیند با شروع از هر نقطه اولیه به یک تعادل نش آمیخته همگرا می شود.

B

B

$4 \times \tfrac{2}{3} + 3 \times \tfrac{1}{3} = \tfrac{11}{3}$

$6 \times \tfrac{2}{3} + 5 \times \tfrac{1}{3} = \tfrac{17}{3}$ ✓

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

- روش سیستماتیک برای یافتن همه استراتژی های آمیخته تعادل نش.

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

✓ چگونه می توان در یک بازی با استراتژی های آمیخته، نمایه های تعادل نش را یافت؟

- تعیین شرایط لازم و کافی برای تعادل نش بودن یک نمایه استراتژی (خواص معادل با تعریف تعادل نش)

❖ قضیه: یک نمایه استراتژی آمیخته α^*، یک تعادل نش است اگر و تنها اگر برای هر بازیکن i، به شرط آن که سایر بازیکنان نمایه استراتژی α^*_{-i} را اتخاذ کرده باشند، دو خاصیت زیر برقرار باشد:

1. به ازاء انتخاب هر اکشنی که در α_i^* با احتمال غیر صفر انتخاب می شود، میانگین سود بازیکن i یکسان باشد.
2. به ازاء انتخاب هر اکشنی که در α_i^* با احتمال صفر انتخاب می شود، میانگین سود بازیکن i حداکثر برابر زمانی باشد که یک اکشن با احتمال غیر صفر انتخاب کند.

نتیجه: تعادل های نش آمیخته ی nondegenerate هیچ گاه تعادل نش اکید نیستند

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

$A_i = \{ \quad \}$

- روش سیستماتیک برای یافتن همه استراتژی های آمیخته تعادل نش.

✓ برای هر بازیکن i یک زیرمجموعه S_i از اکشن‌های آن بازیکن A_i انتخاب کن

✓ به دنبال نمایه‌های استراتژی های آمیخته ای بگرد که برای هر بازیکن i به اکشن های داخل S_i احتمال مثبت و به سایر اکشن ها احتمال صفر نسبت دهد و دو شرط قضیه مزبور را برآورده کند. در صورت وجود جواب، این نمایه استراتژی، تعادل نش آمیخته است.

✓ روال بالا را برای هر زیر مجموعه S_i از هر i تکرار کن.

2 2

3×3

9

$2^2 - 1 = 3$

زیرفصل ۴.۱۰ کتاب مرجع

2 3

$2^3 - 1 = 7$

$7 \times 7 = 49$

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

- تعادل نش آمیخته در بازی های با مجموعه اکشن پیوسته مقدار

pmf

$U_i(\alpha) = \sum \sum \dots \sum$

$U_i(\alpha) = \dots)da_n \dots da_2 da_1$

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

pdf

✓ چگونه می توان در یک بازی با استراتژی های آمیخته، نمایه های تعادل نش را یافت؟

- تعیین شرایط لازم و کافی برای یک نمایه استراتژی (خواص معادل با تعریف تعادل نش)

❖ قضیه: یک نمایه استراتژی آمیخته α^*، یک تعادل نش است اگر و تنها اگر برای هر بازیکن i، به شرط آن که سایر بازیکنان نمایه استراتژی α^*_{-i} را اتخاذ کرده باشند، دو خاصیت زیر برقرار باشد:

1. به ازاء انتخاب هر اکشنی که در α_i^* با احتمال غیر صفر انتخاب می شود، میانگین سود بازیکن i یکسان باشد.
2. به ازاء انتخاب هر اکشنی که در α_i^* با احتمال صفر انتخاب می شود، میانگین سود بازیکن i حداکثر برابر زمانی باشد که یک اکشن با احتمال غیر صفر انتخاب کند.

نتیجه: تعادل های نش آمیخته ی nondegenerate هیچ گاه تعادل نش اکید نیستند

بازیهای همزمان با استراتژی های آمیخته

- تعادل نش آمیخته در بازی های با مجموعه اکشن پیوسته مقدار

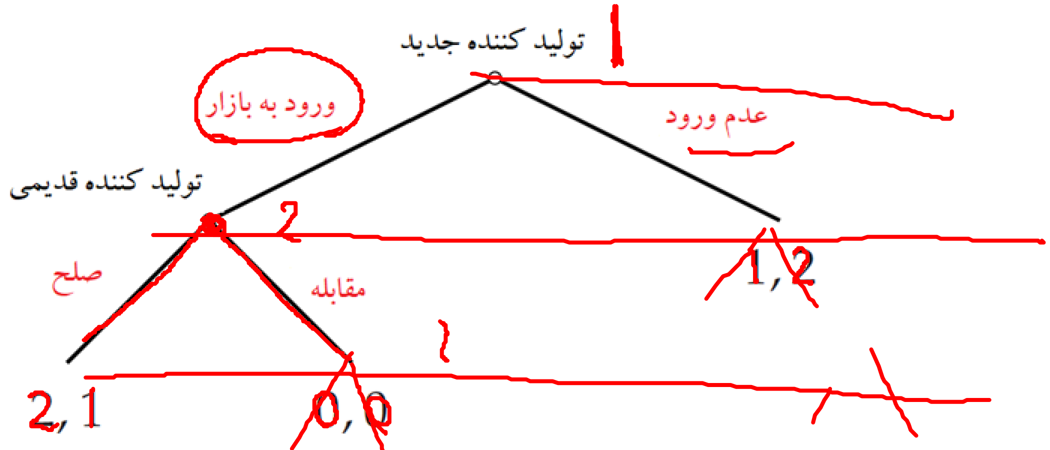
- قضیه: یک نمایه استراتژی آمیخته α^*، یک تعادل نش است اگر و تنها اگر برای هر بازیکن i، به شرط آن که سایر بازیکنان نمایه استراتژی α^*_{-i} را اتخاذ کرده باشند، دو خاصیت زیر برقرار باشد:
  1. α_i^* به هر مجموعه اکشن های a_i که به ازاء آنها $U_i(\alpha_i^*,\alpha^*_{-i}) < U_i(a_i,\alpha^*_{-i})$ باشد، مقدار چگالی احتمال صفر نسبت دهد.
  2. برای هیچ اکشن a_i، نداشته باشیم $U_i(a_i,\alpha^*_{-i}) > U_i(\alpha_i^*,\alpha^*_{-i})$.

زیرفصل ۴.۱۱ کتاب مرجع

Extensive Games بازیهای توسیعی

فرم نرمال

❖ مثال: تولید کننده ای قدیمی به تنهایی در حال تولید یک محصول در بازار است و در انحصار بازار، سود ۲ را کسب می کند. یک تولید کننده جدید، می تواند محصول دیگری تولید کند و سود ۱ به دست آورد. اما تولید کننده جدید می تواند خط تولید را تغییر دهد و همان محصول تولید کننده قدیمی را عرضه کند؛ در این صورت تولید کننده قدیمی می تواند به او اجازه فعالیت دهد اما به دلیل فرسودگی تجهیزات، سودش به ۱ کاهش می یابد و تولید کننده جدید سود ۲ خواهد داشت. در طرف مقابل تولید کننده قدیمی می تواند وارد یک نزاع با تولید کننده جدید شود که در نتیجه آن، سود هر دو نفر ۰ می شود.



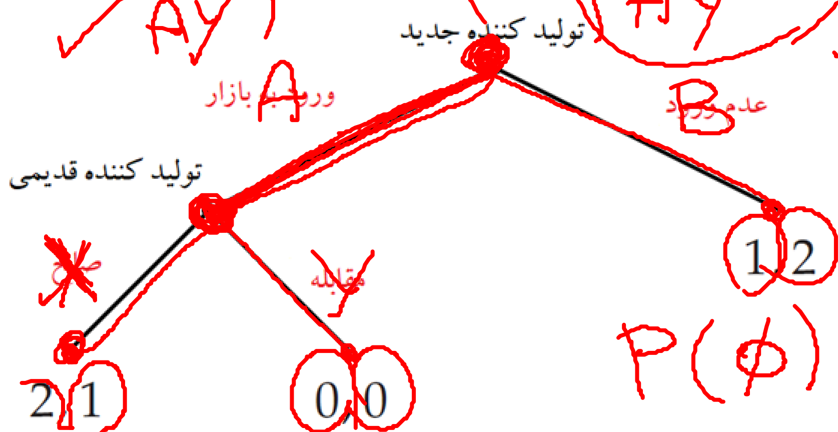
حرکات غیرهمزمان

بازی استراتژیک؟

روش تحلیل و مدل کردن؟

نمایش در فرم استراتژیک (جدول)

Extensive Games بازیهای توسیعی



$AX > B > AY$

$B > AX > AY$

- players
- Terminal histories
- Subhistories
- Proper subhistories
- Player Function
- Action sets
- Preferences
- Pay-off functions

$u_2(AX) = 2$

$u_2(B) = 1$

$u_2(AY) = 0$

$P(\Phi) = 1$ → $A_1 = \{A, B, C, D\}$ $A_2 = \{X, Y\}$

Extensive Games بازیهای توسیعی

$A_3 = \{F, G\}$

$P(A) = ۳$

$P(B) = ۲$

$P(AX) = 1$

root

ریشه

$BX \to 1$

AXA

AXC

$AYF \to ۳$

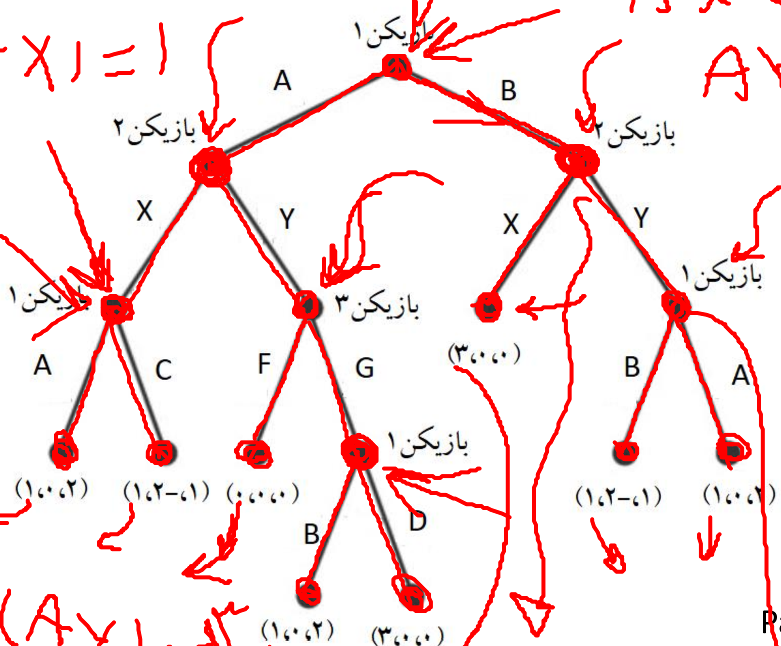
$AYGB$

$AYGD$

BYB

BYA

$\{1, 2, 3\}$



- players
- Terminal histories
- Subhistories
- Proper subhistories
- Player Function
- Action sets
- Preferences
- Pay-off functions as functions of terminal histories

$P(AY) = ۳$

$P(AYG) = 1$

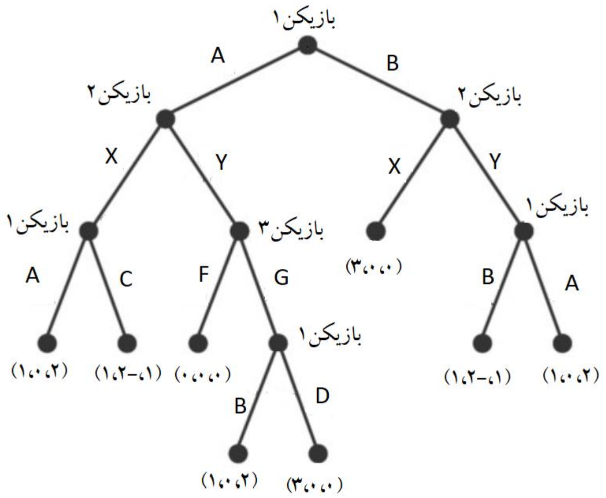
$P(B) = 2$

$P(BY) = 1$

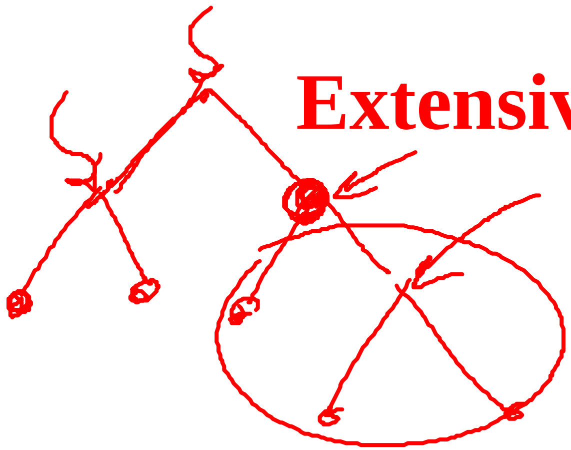
$A_1 = \{\Phi : A, B\ ;\ AX : A, C$

بازیهای توسیعی Extensive Games

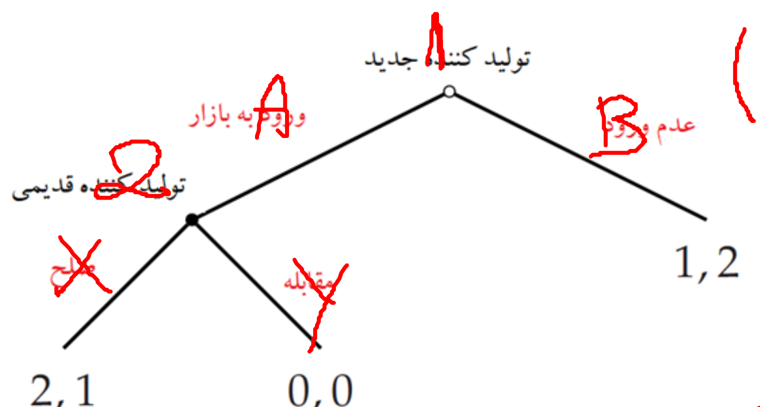
بازیهای توسیعی با اطلاعات کامل
Extensive Games with perfect information



بازیهای توسیعی Extensive Games



- تعریف: یک بازی توسیعی با اطلاعات کامل، عبارت است از
  - ➢ یک مجموعه از بازیکنان؛
  - ➢ یک مجموعه از دنباله های اکشن ها (terminal history ها) به طوری که هیچ زیردنباله ای یک زیردنباله اکید (proper subhistory) از terminal history دیگر نباشد؛
  - ➢ یک تابع که به هر proper subhistory، یک بازیکن نسبت دهد (player function)؛
  - ➢ برای هر بازیکن، اولویت های بین terminal history ها.



$(\{1,2\}, \{AX, AY, B\}$

$(P(\emptyset)=1, P(A)=2)$

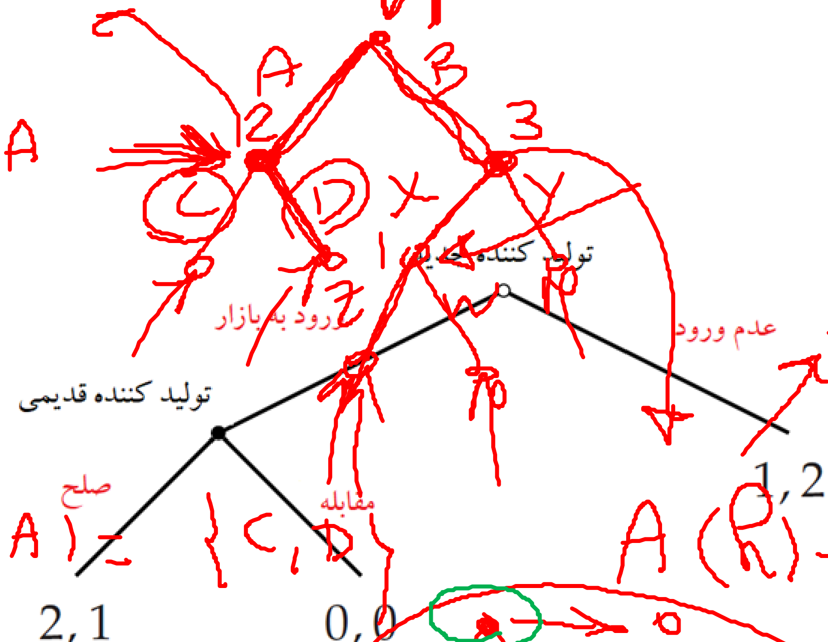
$((AX \succ_1 B \succ_1 AY,\ B \succsim_2 AX \succsim_2 AY))$

$u_1(AX)=2,\ u_1(AY)=0, \ldots$

Extensive Games بازیهای توسیعی

$P(A)=2$

$h=A$



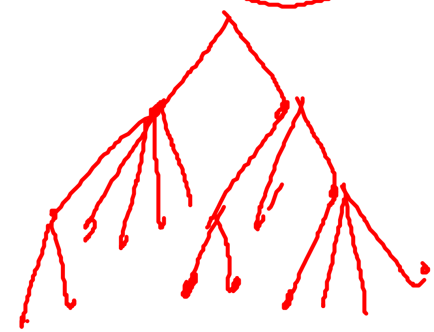
$A(A)=\{C,D\}$

$A(h)=\{X,Y\}$

h $\emptyset$ BX BXZ

- چند نماد و تعریف:
  - h
  - Th
  - $A(h)$
  - $P(h)$
  - horizon and finite/infinite horizon game
  - Finite game

هیستوری



بازیهای توسیعی Extensive Games

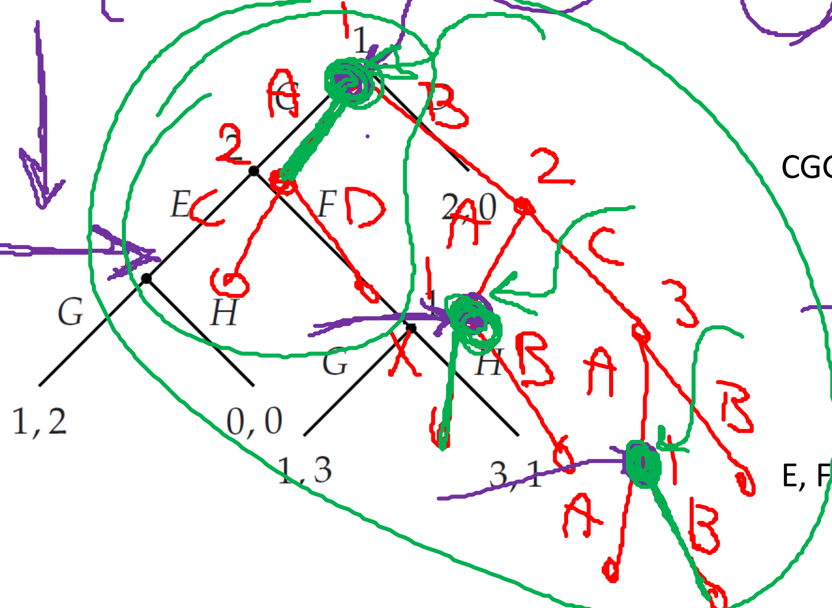
$S(\cdot)$

$S(\emptyset) = B$ $\quad S(BA) = B$

$S(BA) = X$

- **تعریف. استراتژی:**

❑ در یک بازی توسیعی، یک استراتژی برای بازیکن i ام، عبارت است از یک تابع که به هر h که پس از آن، نوبت حرکت بازیکن i است (یعنی $P(h) = i$) یک اکشن از $A(h)$ نسبت دهد.



AXA BXA

- استراتژیهای بازیکن اول:

CGG, CGH, CHG, CHH, DGG, DGH, DHG, DHH,

AXB BBA

ABA BBB

ABB

- استراتژیهای بازیکن دوم:

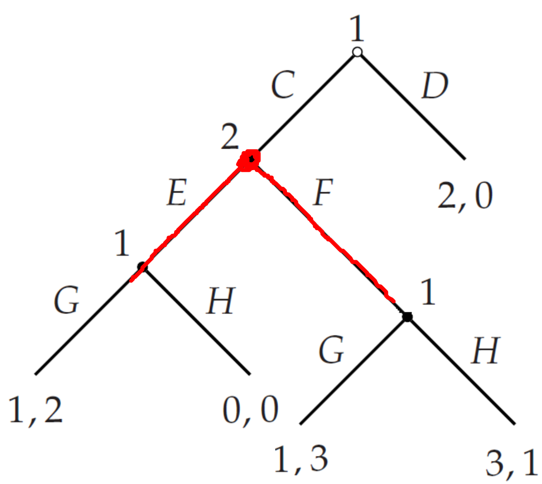
E, F

ABB

بازیهای توسیعی Extensive Games

- **تعریف. استراتژی:**

❑ در یک بازی توسیعی، یک استراتژی برای بازیکن i ام، عبارت است از یک تابع که به هر h که پس از آن، نوبت حرکت بازیکن i است (یعنی $P(h) = i$) یک اکشن از $A(h)$ نسبت دهد.



- استراتژیهای بازیکن اول:

{CGG, CGH, CHG, CHH, DGG, DGH, DHG, DHH}

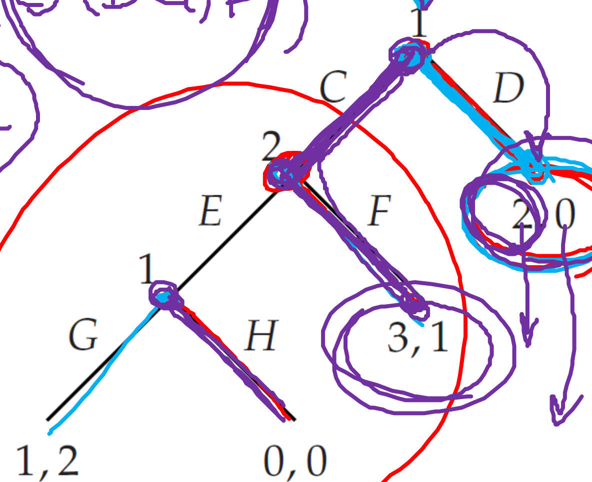
استراتژیهای بازیکن دوم:

E F

Extensive Games بازیهای توسیعی

$\{CG, CH, DG, DH\}$ $\{E, F\}$

$u_1(O(DG,F)) = 2$



s

• **نمایه استراتژی (strategy profile)**: بردار استراتژیهای همه بازیکنان، s

$s = (DH, F)$

(CG, E) (CH, F) (DH, E)
(CG, F) (DG, E) (DH, F)
(CH, E) (DG, F)

• **خروجی (outcome)**: ترمینال هیستوری ناشی از یک نمایه استراتژی، $O(s)$

$u_1(O(s))$ $O(s)$

$O(DG, F) = D$

$O(CH, F) = CF$

بازیهای توسیعی Extensive Games

- تعادل در بازیهای توسیعی
  - ❖ تعادل نش
  - ❖ تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium)

Extensive Games بازیهای توسیعی

$u_i(Th\ )$

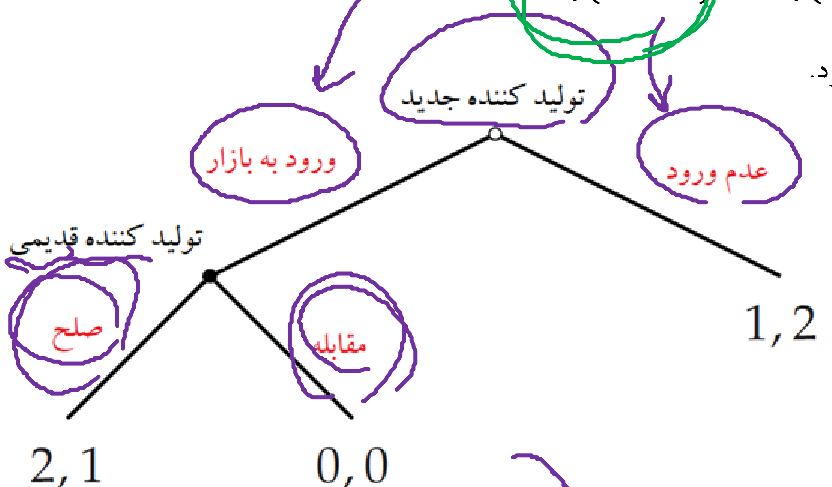
$u_i(s^*)$ $u_i(O(s^*))$

• تعریف. تعادل نش در بازی های توسیعی (با اطلاعات کامل):

❑ نمایه استراتژی s^* را یک تعادل نش گوییم اگر برای هر بازیکن i و هر استراتژی r_i از این بازیکن،

$$u_i(O(s^*)) \geq u_i(O(r_i, s^*_{-i})).$$

به بیان دیگر، هیچ بازیکنی از تغییر استراتژی خود به تنهایی، سود بیشتری نبرد.



	صلح	مقابله
ورود	2,1	0,0
عدم ورود	1,2	1,2

بازیهای توسیعی Extensive Games

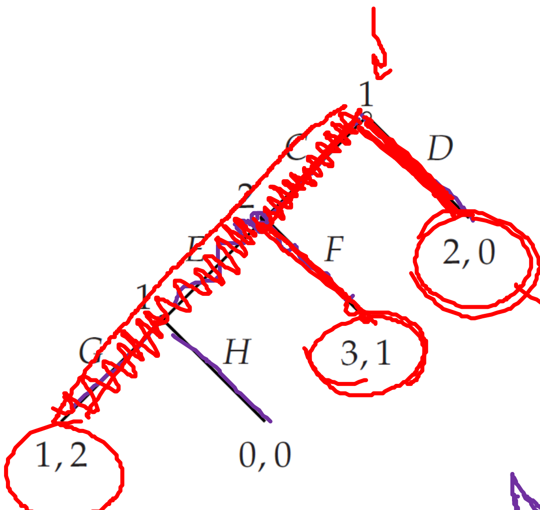
CG
CH
DG
DH

E
F

- **تعریف. تعادل نش در بازی های توسیعی (با اطلاعات کامل):**
  - ❑ نمایه استراتژی s^* را یک تعادل نش گوییم اگر برای هر بازیکن i و هر استراتژی r_i از این بازیکن،

$$u_i\big(O(s^*)\big) \geq u_i\big(O(r_i, s^*_{-i})\big).$$

به بیان دیگر، هیچ بازیکنی از تغییر استراتژی خود به تنهایی، سود بیشتری نبرد.



{DG, E
DH, E
CH, F}

	E	F
CG	1,2	3,1
CH	0,0	3,1
DG	2,0	2,0
DH	2,0	2,0

Extensive Games بازیهای توسیعی

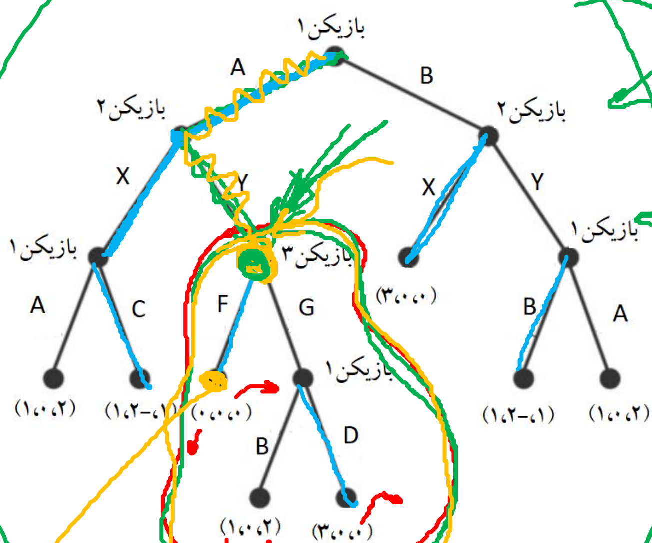
- تعادل در بازیهای توسیعی
  - ❖ تعادل نش
  - ❖ تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium)

$S_3(ACBD, XX, F)$

بازیهای توسیعی Extensive Games

s h $h = AY$

$O_h(s) = AYF$



تعریف نماد:

$O_h(s)$

ابتدا تعریف زیربازی (subgame):

- **تعریف.** فرض کنید Γ یک بازی توسیعی با اطلاعات کامل باشد. برای هر هیستوری غیر ترمینال مانند h، زیربازی $\Gamma(h)$ عبارت است از یک بازی توسیعی با اطلاعات کامل با اجزا زیر:

  - مجموعه بازیکنان: همان مجموعه بازیکنان بازی Γ؛
  - ترمینال هیستوری ها: مجموعه کلیه دنباله اکشن های h' چنان که hh' یک ترمینال هیستوری برای Γ باشد؛
  - تابع بازیکن: $P_{\Gamma(h)}(h') = P_{\Gamma}(hh')$؛
  - اولویت ها: برای هر بازیکن، ترمینال هیستوری h' به ترمینال هیستوری h'' ترجیح دارد اگر و تنها اگر در بازی Γ، ترمینال هیستوری hh' به ترمینال هیستوری hh'' ارجح باشد.

بازیهای توسیعی Extensive Games

❖ **تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium).**

- تعریف: در یک بازی توسیعی با اطلاعات کامل، یک نمایه استراتژی s^* را یک تعادل کامل زیربازی گوییم اگر برای هر بازیکن i، و هر استراتژی r_i از این بازیکن، و هر هیستوری h که پس از آن نوبت بازیکن i است (یعنی $\mathrm{P(h)} = i$) داشته باشیم

$$u_i(O_h(s^*)) \geq u_i(O_h(r_i, s^*_{-i}))$$

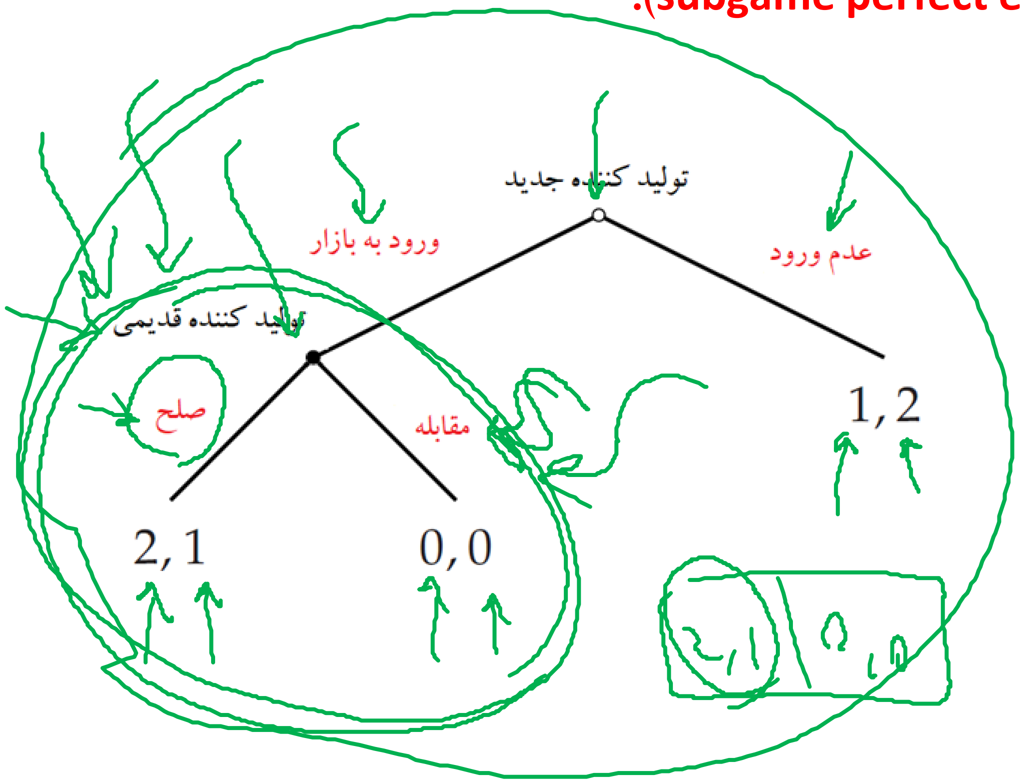
- یک تعادل کامل زیربازی عبارت است از یک نمایه استراتژی s^* با این خاصیت که در هیچ زیربازی، هیچ بازیکن iی با تغییر استراتژی خود از s_i^* نتواند به سود بیشتری دست یابد (زمانی که سایر بازیکنان در s^*_{-i} باقی مانده اند).

- یک تعادل کامل زیربازی عبارت است از یک نمایه استراتژی که در هر زیربازی، تعادل نش ایجاد کند. **(نتیجه: هر تعادل کامل زیربازی یک تعادل نش است)**

بازیهای توسیعی Extensive Games

❖ تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium).

➢ مثال:



	صلح	مقابله
ورود	2,1	0,0
عدم ورود	1,2	1,2

NE

Extensive Games بازیهای توسیعی

(SPE)

تعادل کامل زیربازی

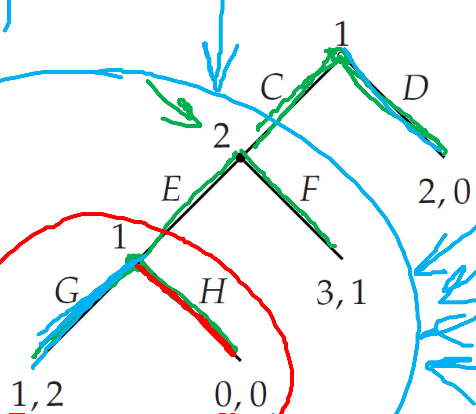
G, E

H, F

	E	F
G	1 2	3 1
H	0 0	3 1

❖ تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium).

➢ مثال:



	E	F
CG	1,2	3,1
CH	0,0	3,1
DG	2,0	2,0
DH	2,0	2,0

(DG, E)

DG, E

بازیهای توسیعی Extensive Games

S P E

❖ **تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium).**

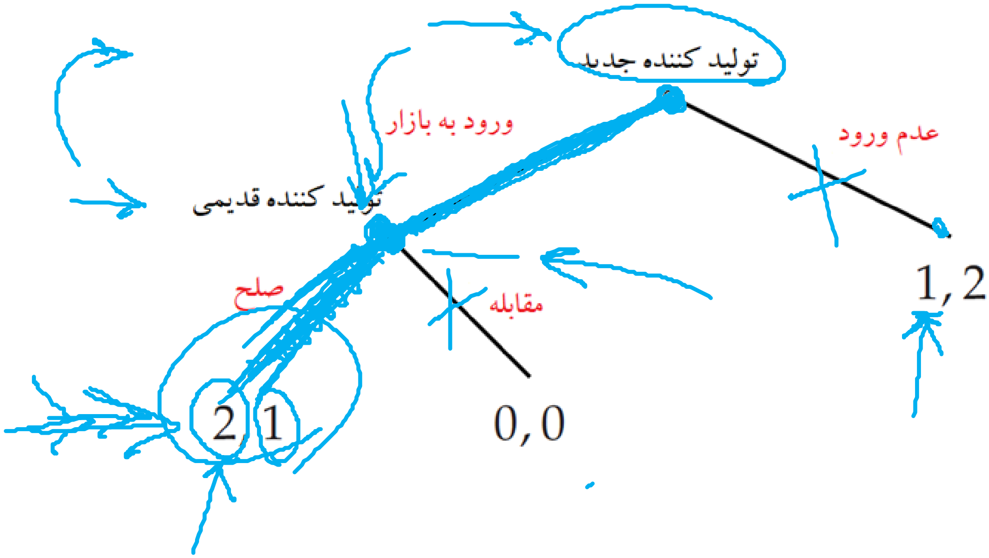
✓ Backward induction procedure = روال استنتاج معکوس = روال استقراء معکوس

قضیه: در هر بازی توسیعی با اطلاعات کامل و افق محدود، مجموعه تعادل های کامل زیربازی برابر است با مجموعه نمایه استراتژی های جدا شده توسط روال backward induction

Extensive Games بازیهای توسیعی

❖ تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium).

✓ Backward induction procedure = روال استنتاج معکوس = روال استقراء معکوس

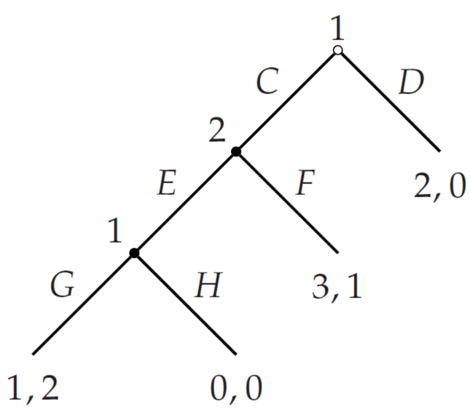


	صلح	مقابله
ورود	2,1	0,0
عدم ورود	1,2	1,2

بازیهای توسیعی Extensive Games

❖ تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium).

✓ Backward induction procedure = روال استنتاج معکوس = روال استقراء معکوس

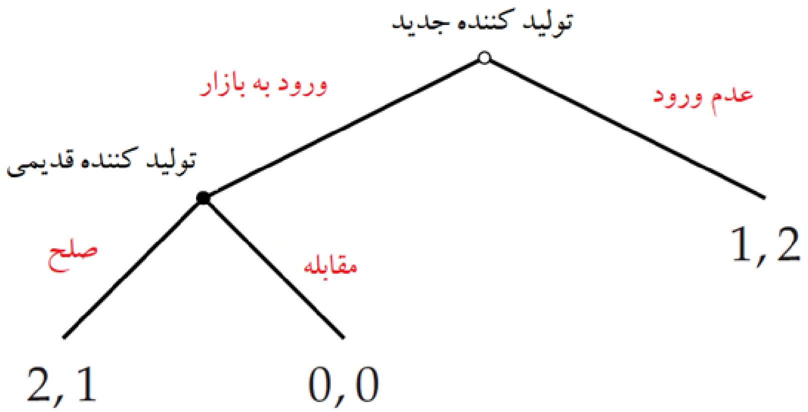


	E	F
CG	1,2	3,1
CH	0,0	3,1
DG	2,0	2,0
DH	2,0	2,0

بازیهای توسیعی Extensive Games

❖ تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium).

تفاوت تعادل نش و تعادل کامل زیر بازی: تفسیر

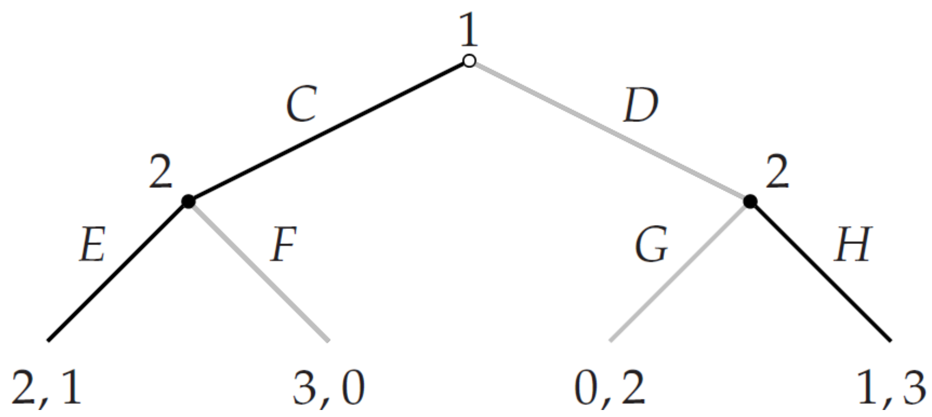


	صلح	مقابله
ورود	2,1	0,0
عدم ورود	1,2	1,2

بازیهای توسیعی Extensive Games

❖ **تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium).**

✓ Backward induction procedure = روال استنتاج معکوس = روال استقراء معکوس



بازیهای توسیعی Extensive Games

❖ **تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium).**

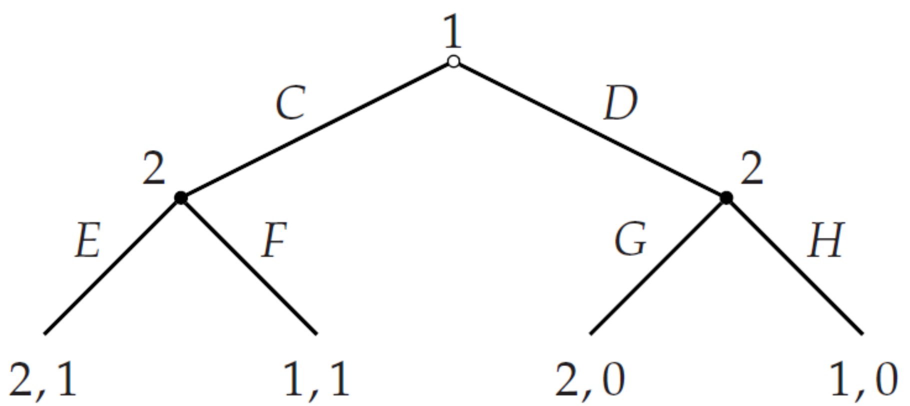
قضیه: هر بازی توسیعی با اطلاعات کامل و متناهی (افق متناهی – مجموعه اکشن‌ها متناهی)، حداقل یک تعادل کامل زیر بازی دارد.

(اثبات ناشی از این نکته است که برای یک بازی متناهی، روال استنتاج معکوس، خوش تعریف است و حتما جواب دارد)

بازیهای توسیعی Extensive Games

❖ تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium).

مثال:



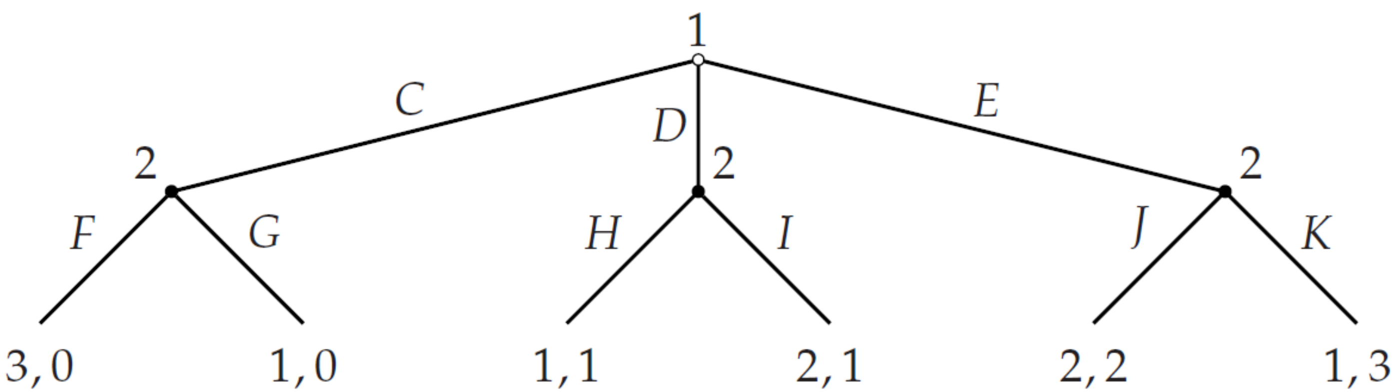
EG, EH, FG, FH

(C,EG), (D,EG), (C,EH), (D,FG), (C,FH), (D,FH)

بازیهای توسیعی Extensive Games

❖ تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium).

مثال:



FHK, FIK, GHK,
GIK

(C,FHK), (C,FIK), (C,GHK), (D,GHK), (E,GHK), (D,GIK)

بازیهای توسیعی Extensive Games

❖ **چند مثال ساده (اما مهم):**

1. بازی اولتیماتوم (اتمام حجت).

الف. بازیکنان: دو نفر 1 و 2؛

ب. ترمینال هیستوری ها: مجموعه دنباله های (x, Z) که در آن، x عددی حقیقی در بازه $[0, c]$ است و Z یکی از دو مقدار Y یا N (به معنی قبول یا رد پیشنهاد نفر اول) است؛

ج. تابع بازیکنان: $P(\emptyset) = 1$ و $P(x) = 2$ برای هر x؛

د. ترجیحات (اولویت‌ها): با توابع سود زیر نشان داده می شوند:

$$u_1(x, N) = u_2(x, N) = 0,$$
$$u_1(x, Y) = c - x, \qquad u_2(x, Y) = x,$$

بازیهای توسیعی Extensive Games

❖چند مثال ساده (اما مهم):

1. بازی اولتیماتوم (اتمام حجت).

- ✓ بازی افق محدود است و در نتیجه برای یافتن نقاط تعادل کامل زیربازی، الگوریتم استنتاج معکوس قابل استفاده است.
- ✓ چون در مرحله اول، تعداد اکشنهای ممکن برای بازیکن نامحدود است، پس بازی نامحدود است و ممکن است تعادل کامل زیر بازی وجود نداشته باشد.
- ✓ چون در مرحله اول، تعداد اکشنهای ممکن برای بازیکن نامحدود است، نمایش درختی برای بازی ممکن نیست

بازیهای توسیعی Extensive Games

❖چند مثال ساده (اما مهم):

1. بازی اولتیماتوم (اتمام حجت).

حل:

بازیهای توسیعی Extensive Games

❖چند مثال ساده (اما مهم):

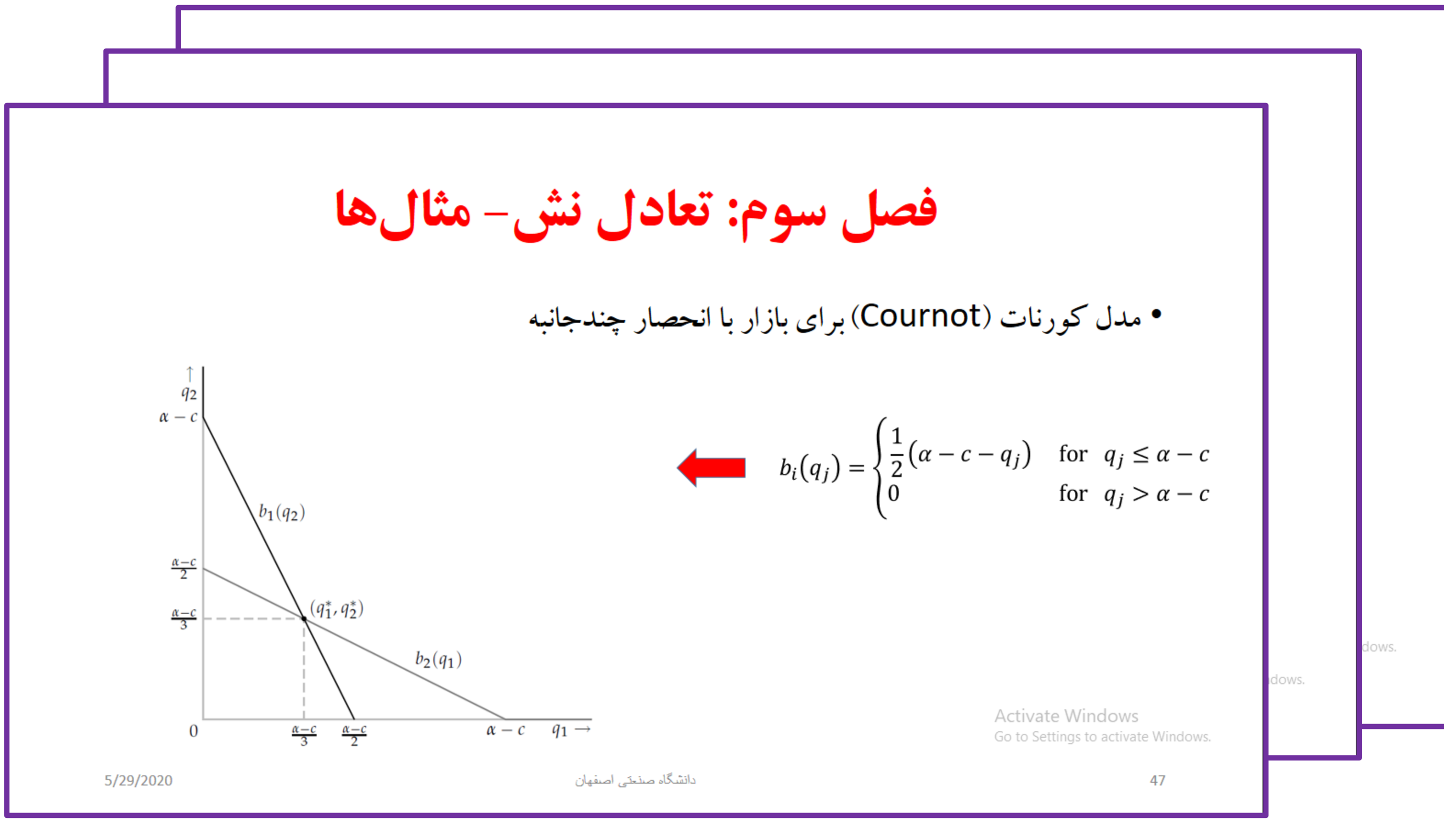
2. مدل استکلبرگ (Stackelberg) برای بازار دوجانبه.

بازیهای توسیعی Extensive Games

❖چند م

2. م

بازی



بازیهای توسیعی Extensive Games

❖چند مثال ساده (اما مهم):

2. مدل استکلبرگ (Stackelberg) برای بازار دوقطبی.

الف. بازیکنان: دو تولیدکننده 1 و 2؛

ب. ترمینال هیستوری ها: مجموعه دنباله‌های (q_1,q_2) که در آن‌ها، q_i عددی نامنفی و نشان دهنده میزان تولید هر تولید کننده است؛

ج. تابع بازیکنان: $P(\emptyset) = 1$ و $P(q_1) = 2$ برای هر q_1؛

د. ترجیحات (اولویت‌ها): با توابع سود $\pi_i(q_1,q_2) = q_i(P(q_1 + q_2) - c)$ نشان داده می شوند.

بازیهای توسیعی Extensive Games

❖ چند مثال ساده (اما مهم):

2. مدل استکلبرگ

فصل سوم: تعادل نش- مثال‌ها

- مدل کورنات (Cournot) برای بازار با انحصار چندجانبه

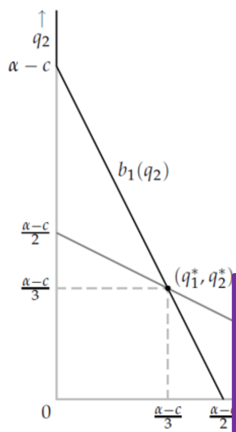
$$b_i(q_j) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha - c - q_j) & \text{for} \quad q_j \leq \alpha - c \\ 0 & \text{for} \quad q_j > \alpha - c \end{cases}$$

❖چند مثال

2. مدل

فصل سوم: تعادل نش – مثال‌ها

• مدل کورنات (Cournot) برای بازار با انحصار چندجانبه



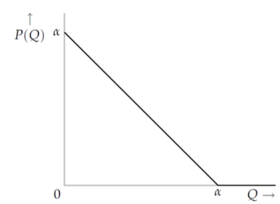
$$b_i(q_j) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha - c - q_j) & \text{for } \; q_j \le \alpha - c \\ 0 & \text{for } \; q_j > \alpha - c \end{cases}$$

فصل سوم: تعادل نش – مثال‌ها

• مدل کورنات (Cournot) برای بازار با انحصار چندجانبه

$$P(Q), \triangleq \begin{cases} \alpha - Q & for\ Q \le \alpha \\ 0 & for\ Q > \alpha \end{cases}$$

$$C_i(q_i) = cq_i, \qquad c < \alpha$$



$$\pi_i(q_1, q_2) = q_i(P(q_1 + q_2) - c) = \begin{cases} q_i(\alpha - q_1 - q_2 - c) & \text{for } \; q_1 + q_2 \le \alpha \\ -cq_i & \text{for } \; q_1 + q_2 > \alpha \end{cases}$$

$)^2,$

Else $\quad \Longrightarrow u_1$

بازیهای توسیعی Extensive Games

❖چند مثال ساده (اما مهم):

3. چانه زنی دوطرفه.

فروشنده ای کالایی در اختیار دارد که از نظرش ۱۰۰ تومان ارزش دارد و خریداری به او مراجعه نموده است که آن کالا برای او ۱۵۰ تومان ارزش دارد. فرض کنید به طور معمول فرآیند زیر برای معامله رخ می دهد: فروشنده از خریدار می خواهد که قیمت پیشنهادی خود را اعلام کند. اگر مورد پذیرش فروشنده بود، معامله با همان قیمت انجام می شود؛ اما اگر فروشنده نپذیرفت، آنگاه فروشنده قیمت خود را اعلام می کند. اگر خریدار پذیرفت معامله با این قیمت انجام می شود و اگر نپذیرفت، معامله ای انجام نمی شود .

(برای سادگی فرض کنید در شرایط تساوی منفعت، افراد معامله را انجام می دهند)

استراتژی پایدار فروشنده و خریدار چیست؟

بازیهای توسیعی Extensive Games

❖چند مثال ساده (اما مهم):

3. چانه زنی دوطرفه.

الف. بازیکنان: خریدار1 و فروشنده2؛

ب. ترمینال هیستوری‌ها: مجموعه دنباله‌های (x,Yes) ، $(x,\text{No},y,\text{Yes})$ و $(x,\text{No},y,\text{No})$ که در آن، x و y اعداد حقیقی هستند؛

ج. تابع بازیکنان: خریدار $= P(\emptyset)$ ، فروشنده $= P(x)$ برای هر x، فروشنده $= P(x,\text{No})$ برای هر x، $P(x,\text{No},y)$

خریدار $=$ برای هر x و y؛

د. ترجیحات (اولویت‌ها): با توابع سود

$$u_1(x,Yes) = 150 - x, \qquad u_2(x,Yes) = x - 100$$

$$u_1(x,No,y,No) = u_2(x,No,y,No) = 0$$

$$u_1(x,No,y,Yes) = 150 - y, \qquad u_2(x,No,y,Yes) = y - 100$$

بازیهای توسیعی Extensive Games

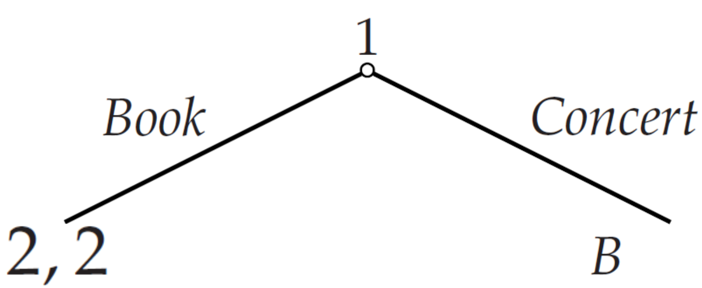
❖ **چند مثال ساده (اما مهم):**

3. چانه زنی دوطرفه.

تعمیم و توسعه‌ی بازیهای توسیعی

تعمیم و توسعه‌ی بازیهای توسیعی

مثال: دو نفر باید تفریح روز خود را با روال زیر تعیین کنند:
ابتدا نفر اول تعیین می کند که در خانه کتاب بخوانند یا به کنسرت بروند. در صورت کتابخوانی، منفعت هر نفر برابر ۲ است. اما اگر بخواهند به کنسرت بروند، دو انتخاب باخ یا استراوینسکی را دارند که به صورت همزمان رخ می دهد و ترجیحات این دو نفر روی انتخاب نوع کنسرتها، مشابه بازی BoS است.
تعادل چنین بازی چگونه تعریف و تعیین می شود؟

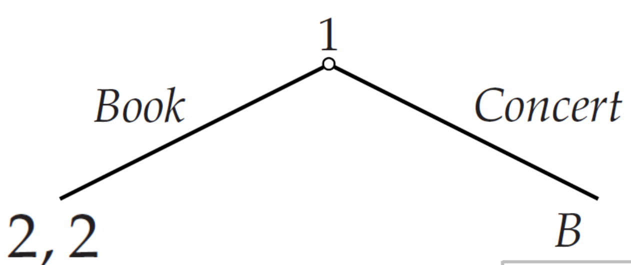


	B	S
B	3, 1	0, 0
S	0, 0	1, 3

تعمیم و توسعه‌ی بازیهای توسیعی

تعریف. بازی توسیعی با اطلاعات کامل و حرکات همزمان عبارت است از

- یک مجموعه از بازیکنان؛
- یک مجموعه از دنباله های اکشن ها (terminal history ها) به طوری که هیچ زیردنباله ای یک زیردنباله اکید (proper subhistory) از terminal history دیگر نباشد؛
- یک تابع که به هر proper subhistory، یک مجموعه از بازیکن‌ها نسبت دهد (player function)؛
- برای هر بازیکن، اولویت های بین terminal history ها.
- برای هر proper subhistory مانند h، و هر بازیکن مانند i که در h نوبت حرکت دارد، یک مجموعه از اکشن های ممکن که با $A_i(h)$ نمایش می‌دهیم.

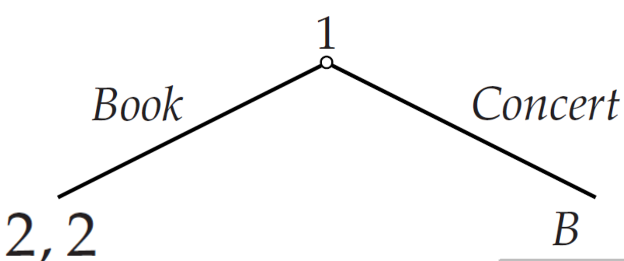


	B	S
B	3, 1	0, 0
S	0, 0	1, 3

تعمیم و توسعه‌ی بازیهای توسیعی

تعریف. **استراتژی:**

- در یک بازی توسیعی با اطلاعات کامل و حرکات همزمان، یک استراتژی برای بازیکن i ام، عبارت است از یک تابع که به هر h که پس از آن، نوبت حرکت بازیکن i است (یعنی $i \in P(h)$) یک اکشن از $A_i(h)$ نسبت دهد.



	B	S
B	3, 1	0, 0
S	0, 0	1, 3

For player 1:
- Book, B
- Book, S
- Concert, B
- Concert, S

For player2:
- B
- S

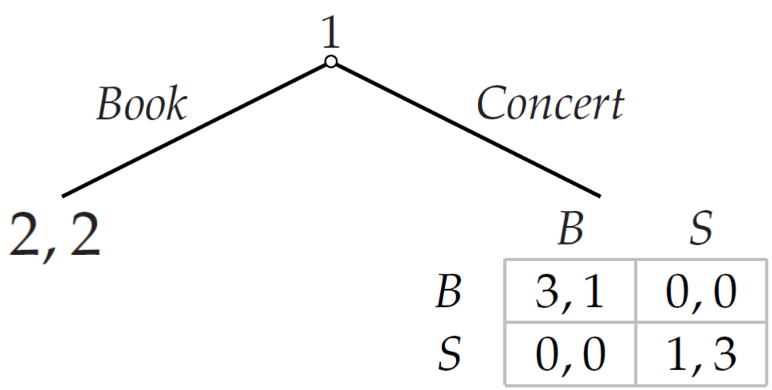
تعمیم و توسعه‌ی بازیهای توسیعی

• **تعریف. تعادل نش در بازی های توسیعی با اطلاعات کامل و حرکات همزمان:**

❑ نمایه استراتژی s^* را یک تعادل نش گوییم اگر برای هر بازیکن i و هر استراتژی r_i از این بازیکن،

$$u_i\big(O(s^*)\big) \geq u_i\big(O(r_i, s^*_{-i})\big).$$

به بیان دیگر، هیچ بازیکنی از تغییر استراتژی خود به تنهایی، سود بیشتری نبرد.



	B	S
(Concet,B)	3,1	0,0
(Concert,S)	0,0	1,3
(Book,B)	2,2	2,2
(Book,S)	2,2	2,2

تعمیم و توسعه‌ی بازیهای توسیعی

- **تعریف. تعادل کامل زیربازی در بازی های توسیعی با اطلاعات کامل و حرکات همزمان:**

❑ یک نمایه استراتژی s^* را یک تعادل کامل زیربازی گوییم اگر برای هر بازیکن i، و هر استراتژی r_i از این بازیکن، و هر هیستوری h که پس از آن نوبت بازیکن i است (یعنی $i \in P(h)$) داشته باشیم

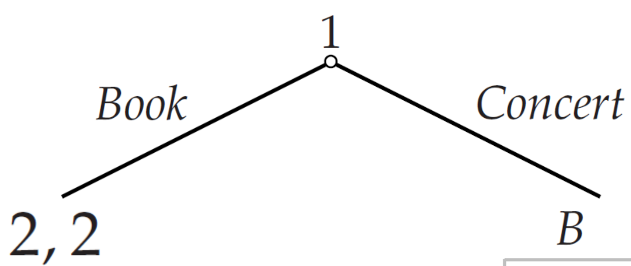
$$u_i(O_h(s^*)) \geq u_i(O_h(r_i, s_{-i}^*))$$

❑ یک تعادل کامل زیربازی عبارت است از یک نمایه استراتژی s^* با این خاصیت که در هیچ زیربازی، هیچ بازیکن iای با تغییر استراتژی خود از s_i^* نتواند به سود بیشتری دست یابد (زمانی که سایر بازیکنان در s_{-i}^* باقی مانده اند).

❑ یک تعادل کامل زیربازی عبارت است از یک نمایه استراتژی که در هر زیربازی، تعادل نش ایجاد کند. **(نتیجه: هر تعادل کامل زیربازی یک تعادل نش است)**

تعمیم و توسعه‌ی بازیهای توسیعی

- تعادل کامل زیربازی و روال استنتاج معکوس



	B	S
B	3, 1	0, 0
S	0, 0	1, 3

- وجود تعادل کامل زیربازی در هر بازی متناهی؟

تعمیم و توسعه‌ی بازیهای توسیعی

تمرین تحویلی. دو بازیکن هر یک سکه‌ای در اختیار دارند و به طور هم‌زمان باید یک روی سکه (شیر یا خط) را نشان دهند. در مرحله دوم، بسته به آن که سکه‌ها شیر یا خط شده‌اند به صورت زیر، حرکت بعدی (مرحله دوم) انجام می‌شود و بازی خاتمه می‌یابد:

- اگر هر دو یک رو را نشان دهند، بازی معمای زندانی بین دو نفر انجام می شود با تابع سود جدول ۱۳.۱ کتاب مرجع
- اگر نفر اول شیر و نفر دوم خط را نشان دهد، بازی باخ–استراوینسکی بین دو نفر انجام می شود با تابع سود جدول ۱۶.۱ کتاب مرجع
- اگر نفر اول خط و نفر دوم شیر را نشان دهد، بازی شکار گوزن بین دو نفر انجام می شود با تابع سود جدول ۱۸.۱ کتاب مرجع

مطلوب است یافتن کلیه نمایه استراتژی‌های تعادل کامل زیر بازی.

بازی های ائتلافی
Coalitional Games

بازی های ائتلافی Coalitional Games

- وضعیتی در فضای رقابتی که در آن چند بازیکن با یکدیگر برای رسیدن به سود بیشتر، همکاری کرده و تشکیل یک ائتلاف می‌دهند.
  - بازی غیرهمکارانه Non-cooperative و بازی همکارانه Cooperative

- در صورت امکانِ تعامل و تماس بین بازیکنان، به چه شرطی یک همکاری (ائتلاف) پایدار شکل می گیرد؟

- در حالت کلی، پایداری یک ائتلاف به سایر ائتلاف ها هم بستگی دارد، اما در این درس فرض می کنیم که منفعت بازیکنان در هر ائتلاف فقط به خود آن ائتلاف وابسته است.

بازی های ائتلافی Coalitional Games

$j = \{1,2\}$ $N = \{1,2,3\}$ $N = \{1,2,3\}$

❑ **مثال ۱:** سه شکارچی ۱، ۲ و ۳ به شکار رفته اند. هر کدام به تنهایی می تواند یک خرگوش با ارزش ۲ را شکار کند، اما اگر دو نفر از آنها با یکدیگر همکاری کنند، می‌توانند یک قوچ با ارزش ۶ را شکار کنند و به هر صورت توافقی تقسیم کنند؛ و اگر سه نفر با یکدیگر همکاری کنند، می‌توانند یک گوزن با ارزش ۷ را شکار کنند و به هر صورت توافقی تقسیم کنند. آیا همکاری رخ خواهد داد؟ چگونه؟

Coalition ائتلاف

$S \subset N$

Grand coalition ائتلاف بزرگ (فراگیر)

$N \to \{\{1,2\},\{3\}\}$

Transferable payoff سود قابل انتقال

Worth of coalition ثروت (ارزش) ائتلاف

پایداری ائتلاف؟؟؟

❑ اگر در مثال فوق ارزش گوزن، به جای ۷، برابر با ۱۲ باشد، چه طور؟

بازی های ائتلافی Coalitional Games

- **مثال ۲:** سه شکارچی ۱، ۲ و ۳ به شکار رفته اند. هر کدام به تنهایی می تواند یک خرگوش با ارزش ۲ را شکار کند، اما اگر دو نفر از آنها با یکدیگر همکاری کنند، می‌توانند یک قوچ با ارزش ۶ را شکار کنند و شکارچی با شماره‌ی کمتر، ۷۰٪ و شکارچی دیگر، ۳۰٪ از آن را تصاحب می‌کنند؛ و اگر سه نفر با یکدیگر همکاری کنند، می‌توانند یک گوزن با ارزش ۷ را شکار کنند و شکارچی ۱، ۴۰٪ و شکارچی‌های ۲ و ۳ هر کدام ۳۰٪ از آن را تصاحب می کنند. آیا همکاری رخ خواهد داد؟ چگونه؟

{{1},{2},{3}} I
2 2 2

II {{1,2},{3}}
4.2 1.8 2

{{1,3},{2}}
4.2 1.8 2

{{1,2,3}}
2.8 2.1 2.1

{{2,3},{1}}
4.2 1.8 2

بازی های ائتلافی Coalitional Games

❑ تعریف بازیهای ائتلافی **با سود قابل انتقال**: یک بازی ائتلافی با سود قابل انتقال مشتمل است بر:

- یک مجموعه از بازیکنان (معمولا با نماد N نمایش می‌دهیم)،

- یک تابع که به هر زیر مجموعه غیرتهی از بازیکنان (که به آن ائتلاف گوییم و معمولا با نماد S نمایش می‌دهیم)، یک مقدار حقیقی نسبت می دهد (که به آن، ارزش/ثروت ائتلاف گوییم و به این تابع، تابع ارزش/ثروت ائتلاف‌ها گوییم).

$$\langle N, v\rangle$$

$v:$ مجموعه زیرمجموعه‌های N $\longrightarrow R$

بازی های ائتلافی Coalitional Games

❑ تعریف. یک بازی ائتلافی **با سود قابل انتقال** را چسبنده (cohesive) گوییم اگر برای هر افراز

... ,$S_K\}$

بازی های ائتلافی Coalitional Games

❑ مثال: سه شکارچی ۱، ۲ و ۳ به شکار رفته اند. هر کدام به تنهایی می تواند یک خرگوش با ارزش ۲ را شکار کند، اما اگر دو نفر از آنها با یکدیگر همکاری کنند، می‌توانند یک قوچ با ارزش ۶ را شکار کنند و به هر صورت توافقی تقسیم کنند؛ و اگر سه نفر با یکدیگر همکاری کنند، می‌توانند یک گوزن با ارزش ۷ را شکار کنند و به هر صورت توافقی تقسیم کنند. آیا همکاری رخ خواهد داد؟ چگونه؟

✓ **اگر بازی چسبنده نباشد، ائتلاف بزرگ قابل شکل گیری نیست (اثبات به عنوان تمرین)**

❖ **در بازی ائتلافی با سود قابل انتقال و چسبنده، چه زمانی (با چه تقسیم سودی) یک ائتلاف بزرگ شکل می گیرد؟**

❑ اگر در مثال فوق ارزش گوزن، به جای ۷، برابر با ۱۲ باشد، چه طور؟

2

بازی های ائتلافی Coalitional Games

- اگر ائتلاف S شامل اعضا $\{a_1, a_2, \dots, a_M\}$ باشد آنگاه سود بازیکنان داخل ائتلاف، برداری از اعداد حقیقی نامنفی به صورت $(x_{a_1}, x_{a_2}, \dots, x_{a_M})$ است چنان که $\sum_{a_k \in S} x_{a_k} = v(S)$.

لذا چنین بردارهایی را بردار سود شدنی برای S (S-feasible payoff vector) می‌نامیم.

- برای ائتلاف بزرگ به چنین برداری، یک نمایه سود شدنی (feasible payoff profile) گوییم.

- تعریف هسته (Core) در یک بازی ائتلافی با سود قابل انتقال: هسته عبارت است از مجموعه نمایه سود شدنی های $(x_a)_{a \in N}$ با این خاصیت که هیچ ائتلاف S و بردار سود شدنی برای S مانند $(y_a)_{a \in S}$ وجود نداشته باشد چنان که $y_a \geq x_a$ برای هر $a \in S$.

(به طور معادل، برای هر ائتلاف غیرفراگیر S و بردار سود شدنی برای S مانند $(y_a)_{a \in S}$، برای حداقل یک عضو S داشته باشیم $y_a < x_a$)

❑ به طور معادل، هیچ مجموعه ای از بازیکنان برای خروج از ائتلاف توافق نداشته باشند

بازی های ائتلافی Coalitional Games

هسته ای

$\{3\} \to 2$

❑ مثال: سه شکارچی ۱، ۲ و ۳ به شکار رفته اند. هر کدام به تنهایی می تواند یک خرگوش با ارزش ۲ را شکار کند، اما اگر دو نفر از آنها با یکدیگر همکاری کنند، می‌توانند یک قوچ با ارزش ۶ را شکار کنند و به هر صورت توافقی تقسیم کنند؛ و اگر سه نفر با یکدیگر همکاری کنند، می‌توانند یک گوزن با ارزش ۷ را شکار کنند و به هر صورت توافقی تقسیم کنند. آیا همکاری رخ خواهد داد؟ چگونه؟

$\{\{1,2,3\}\} \to (x_1, x_2, x_3)$ $\quad x_i \geq 0$

$x_1 + x_2 + x_3 = 7$

$S = \{1,2\} \quad v(S) = 6 \to (3,3)$

$S' = \{1,3\} \to (3,3)$

$S'' = \{2,3\} \to (3,3)$

$x_1 \geq 3$ یا $x_2 \geq 3$

$x_1 \geq 3$ یا $x_3 \geq 3$

$x_2 \geq 3$ یا $x_1 \geq 3$

حل ندارد

$3 \ngeq$

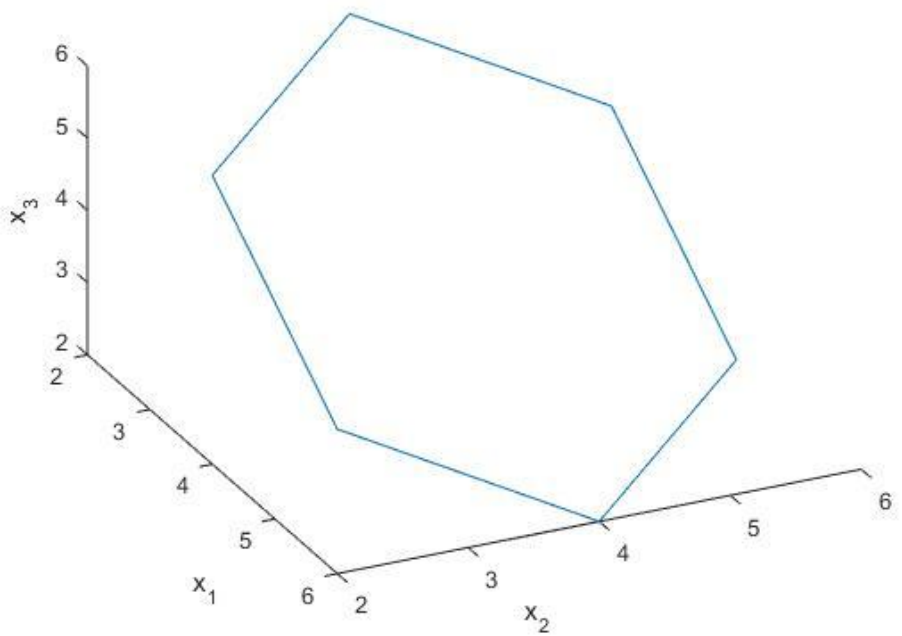
❑ اگر در مثال فوق ارزش گوزن، به جای ۷، برابر با ۱۲ باشد، چه طور؟

بازی های ائتلافی Coalitional Games

- مثال: سه شکارچی ۱، ۲ و ۳ به شکار رفته اند. هر کدام به تنهایی می تواند یک خرگوش با ارزش ۲ را شکار کند، اما اگر دو نفر از آنها با یکدیگر همکاری کنند، می‌توانند یک قوچ با ارزش ۶ را شکار کنند و به هر صورت توافقی تقسیم کنند؛ و اگر سه نفر با یکدیگر همکاری کنند، می‌توانند یک گوزن با ارزش ۷ را شکار کنند و به هر صورت توافقی تقسیم کنند. آیا همکاری رخ خواهد داد؟ چگونه؟
- اگر در مثال فوق ارزش گوزن، به جای ۷، برابر با ۱۲ باشد، چه طور؟

بازی های ائتلافی Coalitional Games

- مثال: سه شکارچی ۱، ۲ و ۳ به شکار رفته اند. ....
- اگر در مثال فوق ارزش گوزن، به جای ۷، برابر با ۱۲ باشد، چه طور؟



بازی های ائتلافی Coalitional Games

- نکته: در یک بازی ائتلافی با سود قابل انتقال، یک ائتلاف S می‌تواند بر بردار تخصیص سود $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ از ائتلاف بزرگ غلبه کند (یعنی ائتلاف بزرگ با آن تخصیص سود را بشکند) اگر و تنها اگر ارزش آن ائتلاف (یعنی $v(S)$) بیشتر از مجموع سود بازیکنانِ عضو آن ائتلاف در ائتلاف بزرگ باشد؛ به عبارت دیگر

$$v(S) \geq \sum_{j \in S} x_j$$

- به طور معادل، نمایه سود شدنیِ $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ در هسته است اگر و تنها اگر برای هر ائتلاف S، مجموع سود بازیکنان S در زمان ائتلاف بزرگ، حداقل به اندازه ارزش ائتلاف باشد؛ به عبارت دیگر

$$v(S) < \sum_{j \in S} x_j \qquad \text{for all } S$$

بازی های ائتلافی Coalitional Games

- **مثال ۲:** سه شکارچی ۱، ۲ و ۳ به شکار رفته اند. هر کدام به تنهایی می تواند یک خرگوش با ارزش ۲ را شکار کند، اما اگر دو نفر از آنها با یکدیگر همکاری کنند، می‌توانند یک قوچ با ارزش ۶ را شکار کنند و شکارچی با شماره‌ی کمتر، ۷۰٪ و شکارچی دیگر، ۳۰٪ از آن را تصاحب می‌کنند؛ و اگر سه نفر با یکدیگر همکاری کنند، می‌توانند یک گوزن با ارزش ۷ را شکار کنند و شکارچی ۱، ۴۰٪ و شکارچی‌های ۲ و ۳ هر کدام ۳۰٪ از آن را تصاحب می کنند. آیا همکاری سه نفره رخ خواهد داد؟ چگونه؟

بازی های ائتلافی Coalitional Games

- **مثال ۲:** سه شکارچی ۱، ۲ و ۳ به شکار رفته اند. هر کدام به تنهایی می تواند یک خرگوش با ارزش ۲ را شکار کند، اما اگر دو نفر از آنها با یکدیگر همکاری کنند، می‌توانند یک قوچ با ارزش ۶ را شکار کنند و شکارچی با شماره‌ی کمتر، ۷۰٪ و شکارچی دیگر، ۳۰٪ از آن را تصاحب می‌کنند؛ و اگر سه نفر با یکدیگر همکاری کنند، می‌توانند یک گوزن با ارزش ۷ را شکار کنند و شکارچی ۱، ۴۰٪ و شکارچی‌های ۲ و ۳ هر کدام ۳۰٪ از آن را تصاحب می کنند. آیا همکاری سه نفره رخ خواهد داد؟ چگونه؟

بازی های ائتلافی Coalitional Games

- تعریف بازیهای ائتلافی(شاید با سود غیر قابل انتقال). یک بازی ائتلافی مشتمل است بر:
  - یک مجموعه از بازیکنان (که معمولا با نماد N نمایش می دهیم)،
  - برای هر زیر مجموعه غیرتهی از بازیکنان (که ائتلاف گفته می شود و با معمولا با نماد S نشان داده می شود)، یک مجموعه از حرکت‌ها (actions) (که معمولا با نماد a_S نشان داده می شود).
  - برای هر بازیکن، اولویت‌ها بین همه اکشن‌های همه‌ی ائتلاف‌هایی که آن بازیکن در آن ائتلاف هست. (معمولا یا مقادیر عددی سود بازیکنان نشان داده می شود)

- اکشن ها در بند دوم می توانند با چگونگی تقسیم دست‌آورد ائتلاف بین اعضای جایگزین شوند (به آن S-allocation گوییم)؛ و در این صورت بند آخر قابل حذف است (در واقع بند دوم و سوم با هم بیان شده اند).

بازی های ائتلافی Coalitional Games

❑ مثال. $N = \{1,2,3\}$

$\{1,2,3\} \Longrightarrow (5,4,3) \quad , \quad \{1,2,3\} \Longrightarrow (2,1,5) \quad , \quad \{1,2,3\} \Longrightarrow (2,5,6) \quad ,$

$\{1,2\} \Longrightarrow (2,2) \quad ,$

$\{1,3\} \Longrightarrow (4,2) \quad , \quad \{1,3\} \Longrightarrow (1,4) \quad ,$

$\{2,3\} \Longrightarrow (4,1) \quad , \quad \{2,3\} \Longrightarrow (4,5) \quad ,$

$\{1\} \Longrightarrow (1) \quad ,$

$\{2\} \Longrightarrow (1) \quad ,$

$\{3\} \Longrightarrow (0)$

بازی های ائتلافی Coalitional Games

❑ در بازی ائتلافی، در بسیاری اوقات به دنبال شرایطی هستیم که ائتلاف بزرگ شکل گیرد؛ یعنی همه بازیکنان با یکدیگر همکاری کنند.

❑ **تعریف بازی ائتلافی چسبنده**. یک بازی ائتلافی را چسبنده گوییم اگر برای هر افراز $\{S_1, S_2, \ldots, S_K\}$ از کلیه بازیکنان و هر ترکیب از اکشن ها $(a_{S_1}, a_{S_2}, \ldots, a_{S_K})$، برای ائتلاف بزرگ یک اکشن a_N داشته باشیم با این خاصیت که این اکشن برای هر بازیکن حداقل به خوبی اکشن متناظر آن بازیکن در $(a_{S_1}, a_{S_2}, \ldots, a_{S_K})$ باشد.

❑ **اثبات کنید که برای بازی با سود قابل انتقال، این تعریف با تعریف چسبندگی در آن بازیها یکسان است**

بازی های ائتلافی Coalitional Games

❑ مثال. $N = \{1,2,3\}$

$\{1,2,3\} \Longrightarrow (5,4,3) \quad , \quad \{1,2,3\} \Longrightarrow (2,1,5) \quad , \quad \{1,2,3\} \Longrightarrow (2,5,6) \quad ,$

$\{1,2\} \Longrightarrow (2,2) \quad ,$

$\{1,3\} \Longrightarrow (4,2) \quad , \quad \{1,3\} \Longrightarrow (1,4) \quad ,$

$\{2,3\} \Longrightarrow (4,1) \quad , \quad \{2,3\} \Longrightarrow (4,5) \quad ,$

$\{1\} \Longrightarrow (1) \quad ,$

$\{2\} \Longrightarrow (1) \quad ,$

$\{3\} \Longrightarrow (0)$

بازی های ائتلافی Coalitional Games

- **تعریف هسته**. هسته‌ی یک بازی ائتلافی عبارت است از مجموعه اکشن‌های a_N از ائتلاف بزرگ با این خاصیت که برای هیچ ائتلافی هیچ اکشنی وجود نداشته باشد که همه بازیکنان آن ائتلاف، آن اکشن را به a_N ترجیح دهند.

- نکته۱: ممکن است برای یک بازی، چنین اکشنی وجود نداشته باشد. در این حالت **نمی‌گوییم** که هسته وجود ندارد، بلکه میگوییم هسته مجموعه تهی است
- نکته۲: اگر یک بازی چسبنده نباشد آنگاه هسته‌ی آن تهی است.
  - **آیا می توانید مثالی بزنید که یک بازی چسبنده باشد اما هسته‌ی آن تهی باشد؟**

بازی های ائتلافی Coalitional Games

- مثال. $N = \{1,2,3\}$

$\{1,2,3\} \Longrightarrow (5,4,3) \quad , \quad \{1,2,3\} \Longrightarrow (2,1,5) \quad , \quad \{1,2,3\} \Longrightarrow (2,5,6) \quad ,$

$\{1,2\} \Longrightarrow (2,2) \quad ,$

$\{1,3\} \Longrightarrow (4,2) \quad , \quad \{1,3\} \Longrightarrow (1,4) \quad ,$

$\{2,3\} \Longrightarrow (4,1) \quad , \quad \{2,3\} \Longrightarrow (4,5) \quad ,$

$\{1\} \Longrightarrow (1) \quad ,$

$\{2\} \Longrightarrow (1) \quad ,$

$\{3\} \Longrightarrow (0)$

بازی های ائتلافی Coalitional Games

- مثال. یک کارفرما می‌خواهد کارگاه خود را با تعدادی کارگر راه‌اندازی کند. تعداد کارگران در منطقه، $m = 2$ نفر است. سود حاصل از کارگاه به صورت $f(k+1)$ است که در آن، k تعداد کارگرانی است که در کارگاه کار می‌کنند و $f(.)$ تابعی صعودی است و $f(0) = 0$. کارفرما می‌تواند سود را به هر شکل دلخواه بین کارگران توزیع کند. چگونه دستمزد بدهد که هر دو کارگر برای او کار کنند؟

- مجموعه بازیکنان: کارفرما، کارگر۱، کارگر۲

- هر ائتلاف که شامل کارفرما نباشد، منجر به سود صفر برای هر کارگر می شود.

  ائتلافِ فقط شامل کارفرما ، منجر به سود $f(1)$ برای کارفرما می شود.

  در هر ائتلاف شامل کارفرما و فقط یک کارگر، کلیه تخصیص سودهای به فرم $(x, f(2) - x)$ ممکن هستند که در آنها، $0 \le x \le f(2)$ و x سود کارگر است.

  در ائتلاف بزرگ (کارفرما و هر دو کارگر)، کلیه تخصیص سودهای به فرم $(x_1, x_2, f(3) - x_1 - x_2)$ ممکن هستند که در آنها، $0 \le x_i$ و $x_1 + x_2 \le f(3)$ و x_i سود کارگر iام است.

Coalitional Games بازی های ائتلافی

پایان