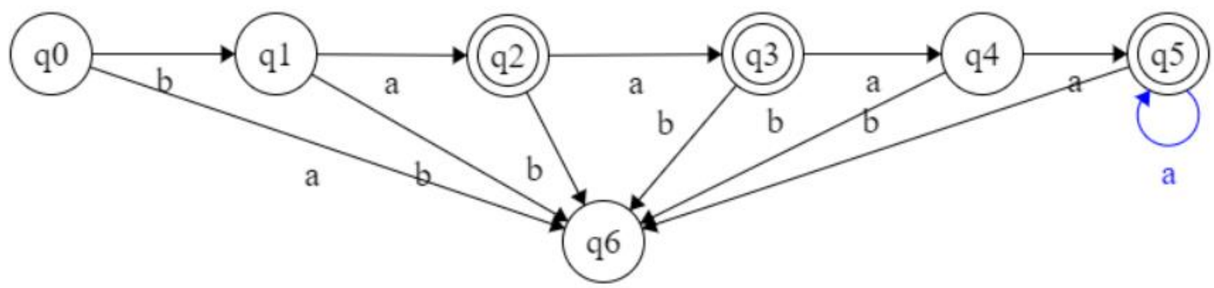
بسمه تعالی

نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها

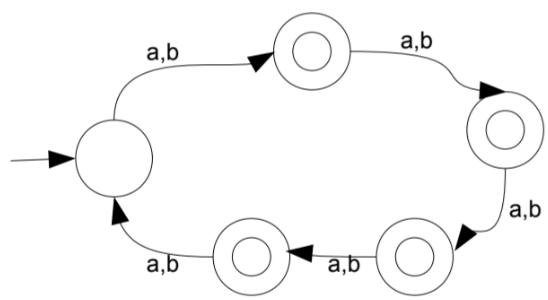
پاسخ تکلیف دوم

۱. در مورد هریک از زبان‌های زیر، در صورت منظم بودن، یک DFA نظیر آن طراحی کنید، و در غیر این صورت، نامنظم بودن آن‌را اثبات کنید. $\Sigma=\{a,b\}$ (منظور از w^R وارون رشته w می‌باشد)

$L_1 = \{ba^n : n \geq 1, n \neq 3\}$

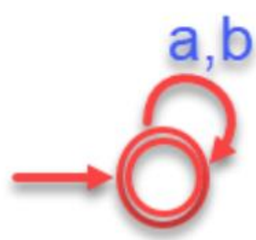


$L_2 = \{w| \ |w| \bmod 5 > 0\}$



$L_3 = \{w\, w^R\, v : v, w \in \{a, b\}^*\}$

اگر w را برابر با λ در نظر بگیریم. زبان L تمام رشته‌ها را میپذیرد، به این ترتیب شکل DFA این زبان به شکل زیر است.



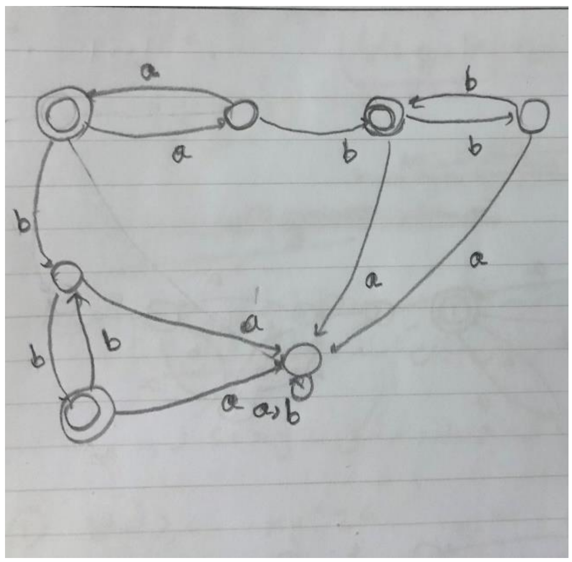
$L4 = \{v\, w\, w^R : v, w \in \{a, b\}^+\}$

این زبان یک زبان نامنظم است زیرا به حافظه‌ی کمکی نیاز دارد.

به دلیل اینکه در این زبان w نمیتواند λ باشد، پس باید حتما شامل رشته‌ای باشد. در این صورت برای به دست آوردن معکوس رشته‌ی w ما نیاز به یک حافظه‌ی کمکی داریم که بتوانیم رشته‌ی wرا (هرچه بود) در آن ذخیره کنیم، و معکوس آن را محاسبه کنیم. به دلیل اینکه نیاز به حافظه‌ی کمکی داریم زبان مورد نظر منظم نمی‌باشد.

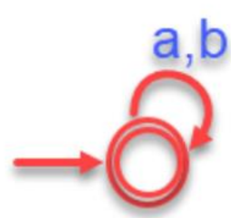
$L5 = \{a^n\, b^m \mid (m+n) \bmod 2 = 0\}$

جمع دو عدد در صورتی زوج است که یا هردو زوج باشند و یا هردو فرد باشند.



$L6 = \{u\, w\, w^R\, v \mid u, v, w \in \{a, b\}^*, |u| \geq |v|\}$

کافی است v و w را برابر با λ در نظر بگیریم. در این صورت زبان L تمام رشته‌ها را میپذیرد، به این ترتیب شکل DFA این زبان به شکل زیر است. (در هر صورت اندازه‌ی u نیز از v بزرگتر و مساوی است زیرا اگر u برابر با λ نیز باشد بازهم از u کوچکتر نیست.)



۲. برای هریک از زبان‌های زیر، بر روی الفبای $\Sigma=\{0,1\}$، یک عبارت منظم طراحی کنید.

الف) تمام کلماتی که با 01 تمام می‌شوند.

$(0 + 1)^*\, (01)$

ب) تمام کلماتی که تعداد زوجی صفر دارند.

$(00 + 01^*0 + 1)^*$ یا $1^* + (1^*01^*0)^*1^*$

ج) تمام کلماتی که تعداد زیر رشته‌های 00 در آن‌ها دقیقاً دوتا است.

$$(1 + 01)^*00(1 + 101 + (10)^*1)^*00(10 + 1)^*$$

د) تمام کلماتی که شامل زیر رشته‌ی 101 نیست.

$$0^*1^*0^* + 0^*(1^+00^+1^+)^*0^*$$

۳. موارد زیر را اثبات کنید:

الف) زبان $L=\{0^p \mid p \text{ is prime}\}$ نامنظم است.

با استفاده از لم پامپینگ این مسئله را حل میکنیم (n طول تزریق است.) p را اولین عدد اول بزرگتر از n در نظر میگیریم و همچنین فرضیات زیر را داریم:

$$w = 0^p \in L, |w| = p \geq n$$
$$w = xyz = 0^p, |xy| \leq n, |y| \geq 1, x = 0^m, y = 0^k \Rightarrow z = 0^{p-(k+m)} \quad (k \geq 1)$$

رشته تزریق شده برابر است با:

$$xy^iz = 0^m(0^k)^i0^{p-(k+m)} = 0^{p+k(i-1)}$$

حال اگر $i = p + 1$ در نظر گرفته شود، داریم:

$$xy^{(p+1)}z = 0^{p+k(p+1-1)} = 0^{p+kp} = 0^{p(k+1)}$$

با توجه به اینکه $|y| = k$ و $1 \leq k \leq n$ است، پس $p(k+1)$ اول نیست و این رشته در زبان قرار ندارد. پس L نامنظم است.

ب) اگر زبان L منظم باشد، زبان $L-\lambda$ هم منظم است.(λ رشته ی تهی است.)

فرض مسئله این است که زبان L منظم است، و میدانیم که λ نیز منظم است.(به این دلیل که میتوان برای آن یک DFA طراحی کرد و DFA آن یک حالت خالی است، که آن حالت پایانی است.)

پس هم L منظم است و هم λ با این حساب کافی است نشان دهیم که خانواده‌ی زبان‌های منظم تحت عمل تفاضل بسته هستند.

اثبات بسته بودن زبان منظم تحت عمل تفاضل: فرض میکنیم دو زبان $L1$ و $L2$ دو زبان منظم هستند:

یک روش اثبات این است که: میدانیم خانواده‌ی زبانهای منظم تحت عمل متمم و اشتراک بسته هستند. و ما میتوانیم تفاضل را به شکل زیر بنویسیم: $L1 - L2 = L1 \cap \overline{L2}$

$L2$ منظم است پس متمم آن نیز منظم است. از طرفی اشتراک دو زبان منظم، منظم است.

ج) زبان منظم L بر روی الفبای Σ_1 را در نظر بگیرید. نشان دهید زبان $L \cap \Sigma_2^*$ به ازای هر الفبای Σ_2 منظم است.

در اینجا Σ مجموعه‌ای متناهی و ناتهی از علامت‌هایی است که به آن الفبای ورودی میگوییم. و زبان L منظم است، (که روی حروف Σ_1 در نظر گرفته شده است.) از آنجایی که(Σ^* فارغ از الفباهای ورودی) به طور حتم منظم است. بنابراین Σ_2 با هر الفبای ورودی‌ای که دارد، Σ^*_2 نیز منظم است. و به دلیل اینکه خانواده‌ی زبان‌های منظم تحت عمل اشتراک بسته هستند به راحتی میتوان نتیجه گرفت که به ازای هر Σ_2 عبارت $L \cap \Sigma^*_2$ نیز منظم است.

د) زبان $L=\{0^n 1^m \mid gcd\ (m,n) > 1\}$ نامنظم است.

با استفاده از لم پامپینگ این مسئله را حل میکنیم (n طول تزریق است.) p را اولین عدد اول بزرگتر از n در نظر میگیریم و همچنین فرضیات زیر را داریم:

$w=0^p1^p$

$|w|\geq n$ و نیز چون p قطعا ۱ نیست. پس w در زبان است.

$w = xyz\ , |xy| \leq n, |y| \geq 1 \Rightarrow x = 0^m, y = 0^k\ (k \geq 1)$

حال اگر $i = 2$ در نظر گرفته شود، داریم:

$xy^2z = 0^{p+k}1^p$

با توجه به اینکه $|y| = k$ و $1 \leq k \leq n < p$ است، پس $p+1 \leq p+k \leq p+n < p+p$ در نتیجه $gcd(p+k, p)=1$ و این رشته در زبان نیست. پس زبان فوق نامنظم است.

۴. برای زبان $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^*, (na(w) - nb(w)) \bmod 3 = 1\}$ ابتدا یک DFA معرفی کنید. سپس، به کمک آن DFA و رسم مرحله به مرحله، به عبارت منظم نظیر آن برسید.