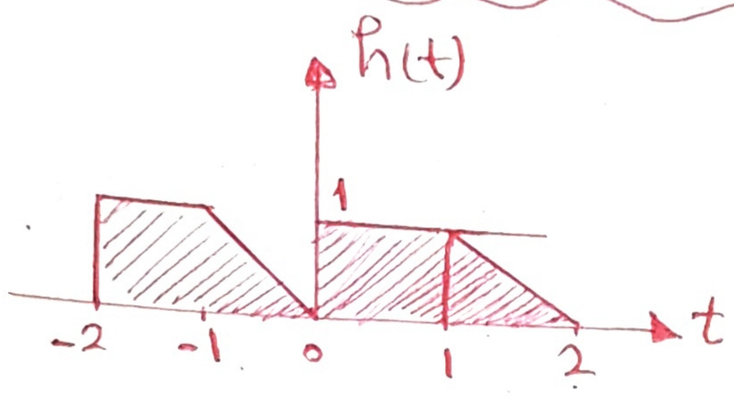
صفحه 1

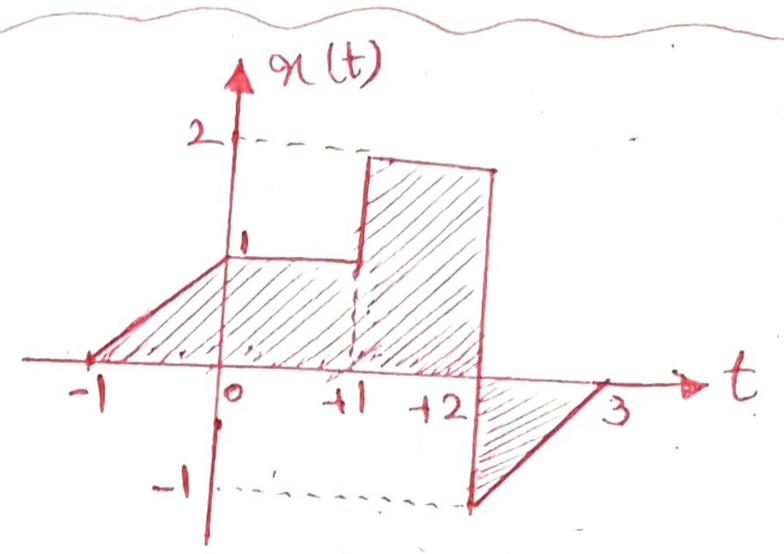
به نام خدا

حل تکلیف سری اول - تجزیه و تحلیل سیگنال ها و سیستم ها

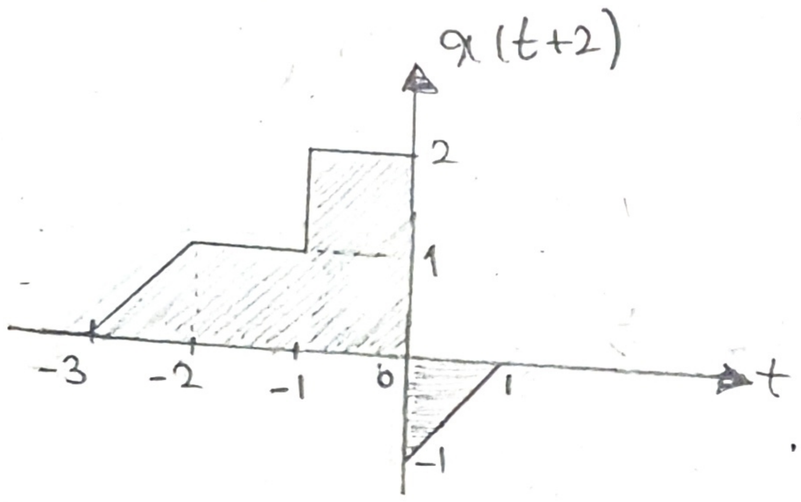
محمدرضا چیاری

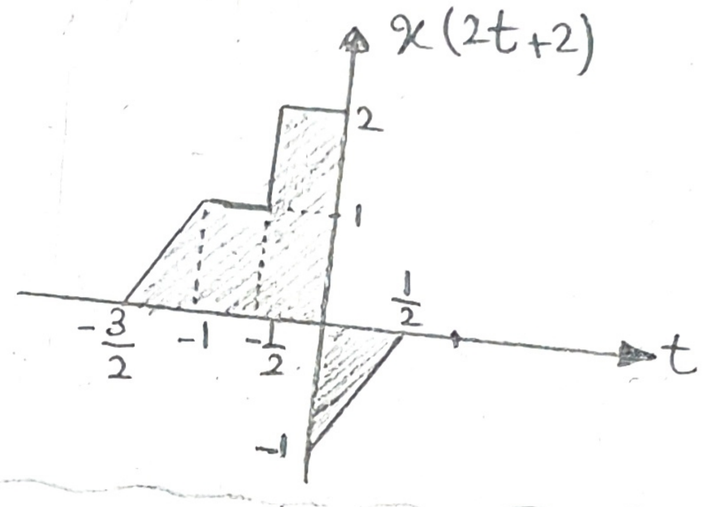
سؤال 1



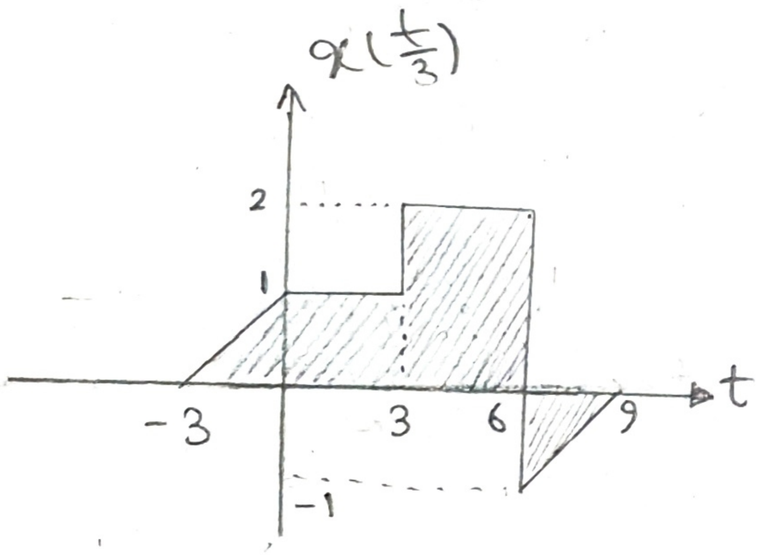


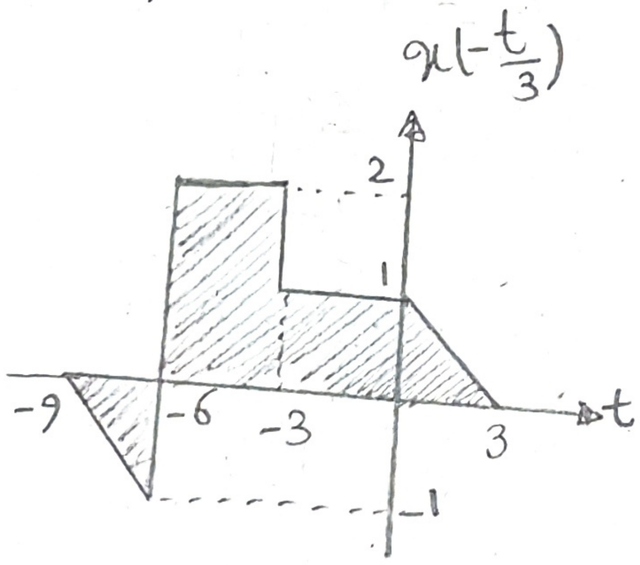
الف-1)

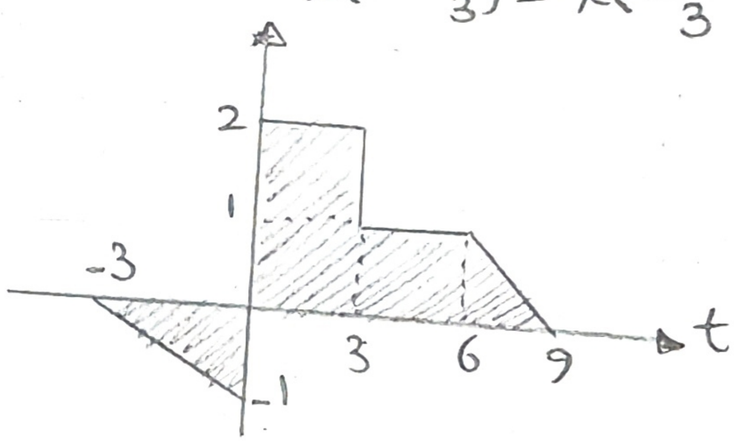




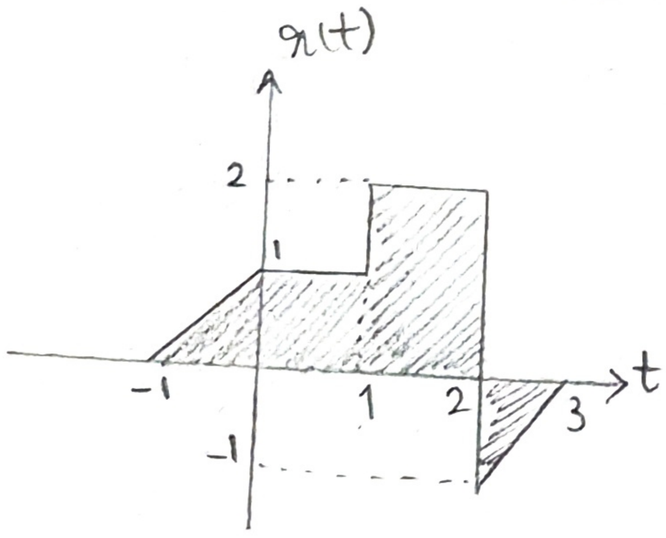
الف-2)



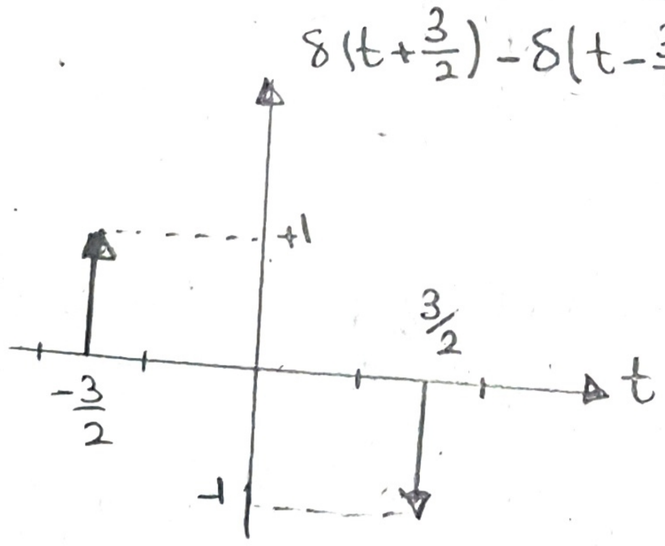




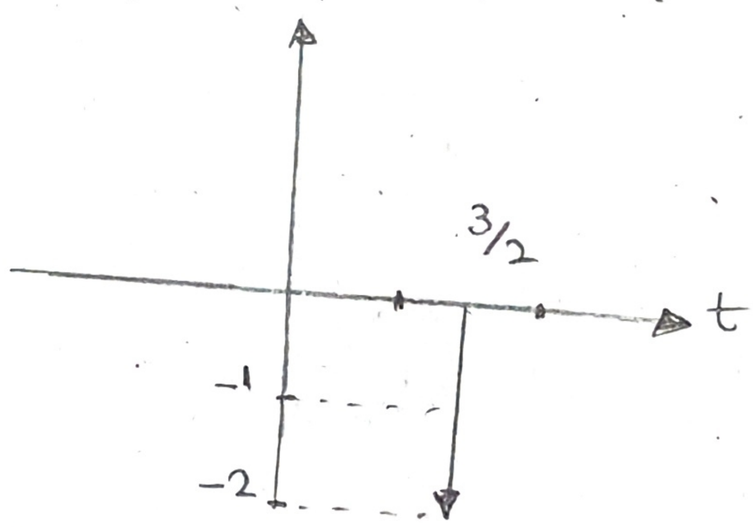
الف-3)



×

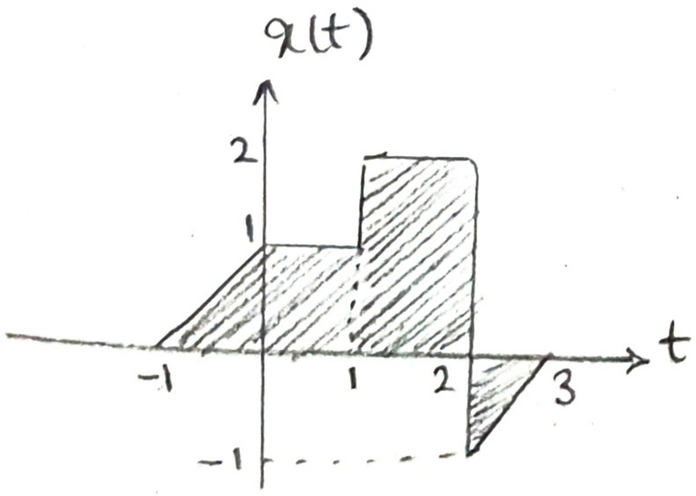


=

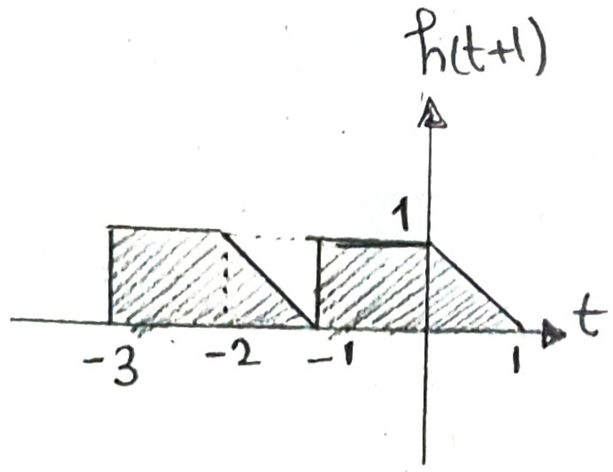


$$f(t)\,\delta(t-t_0) = f(t_0)\,\delta(t-t_0)$$

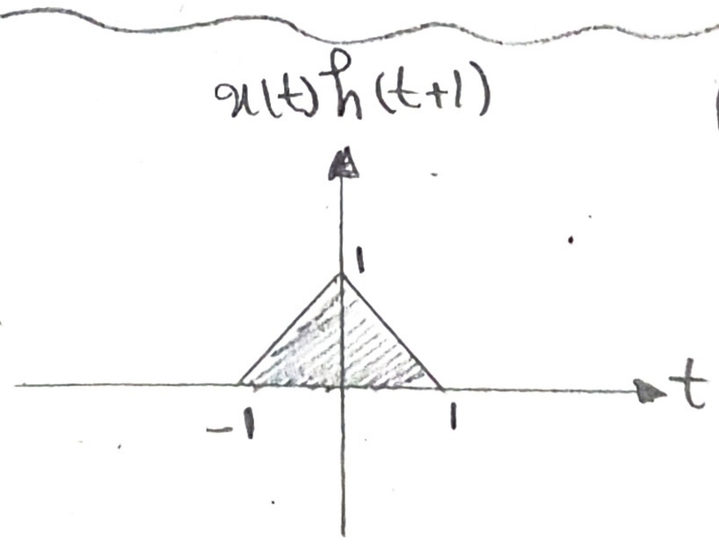
الف-4)



×

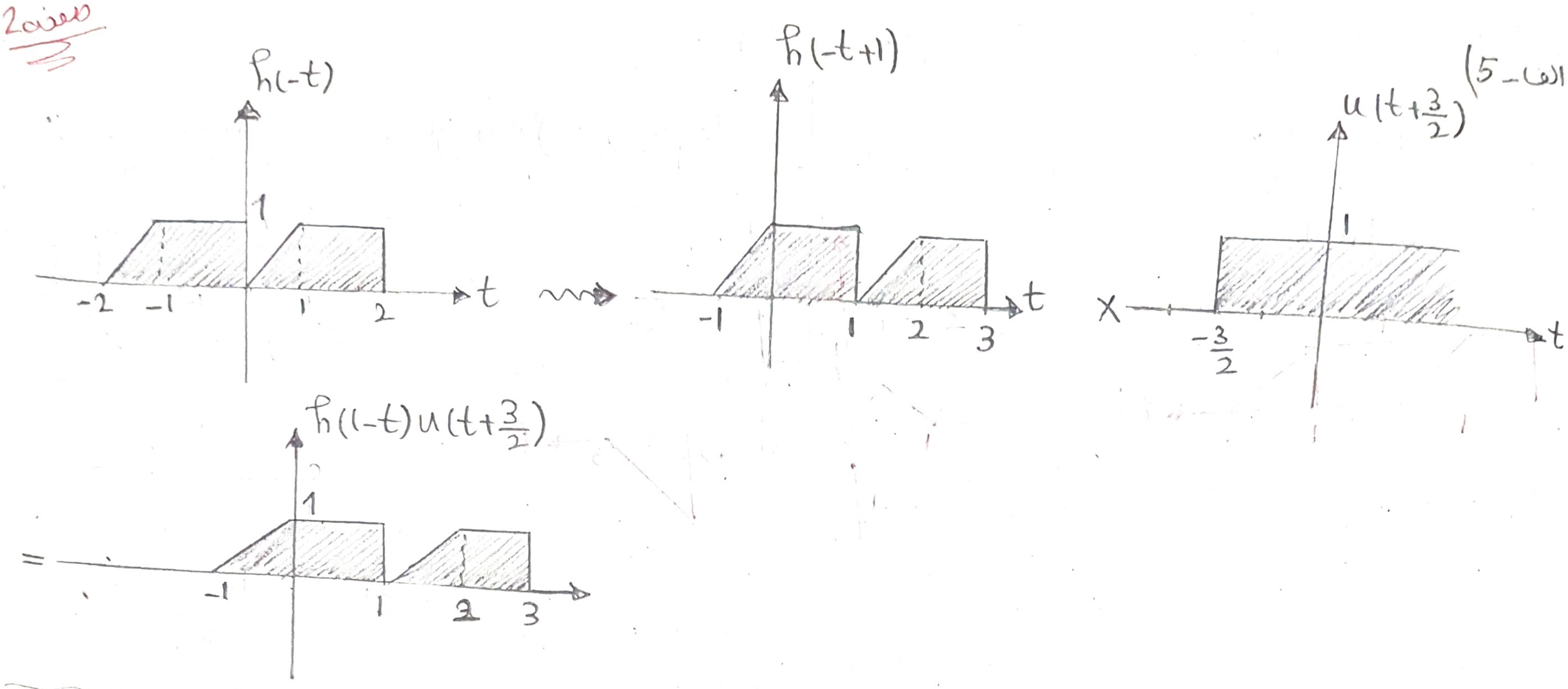


=

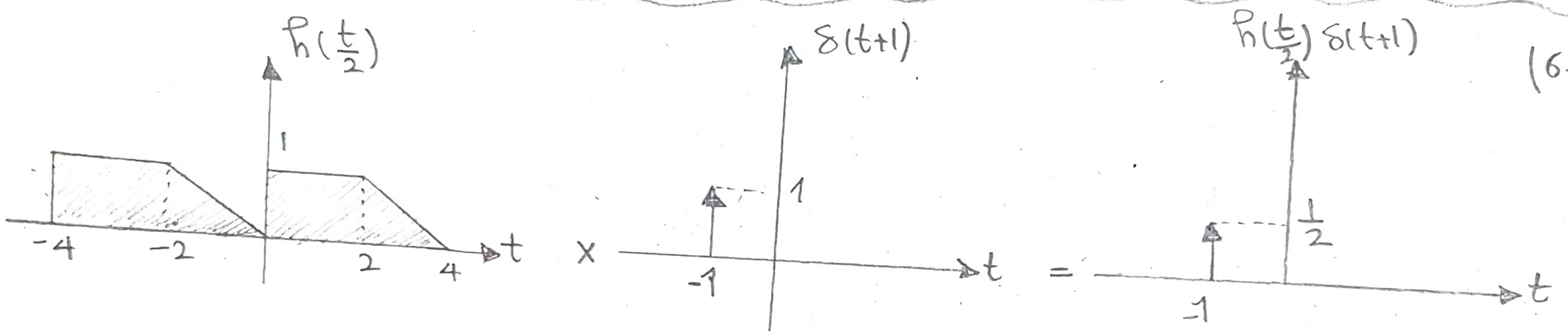


2ساعت

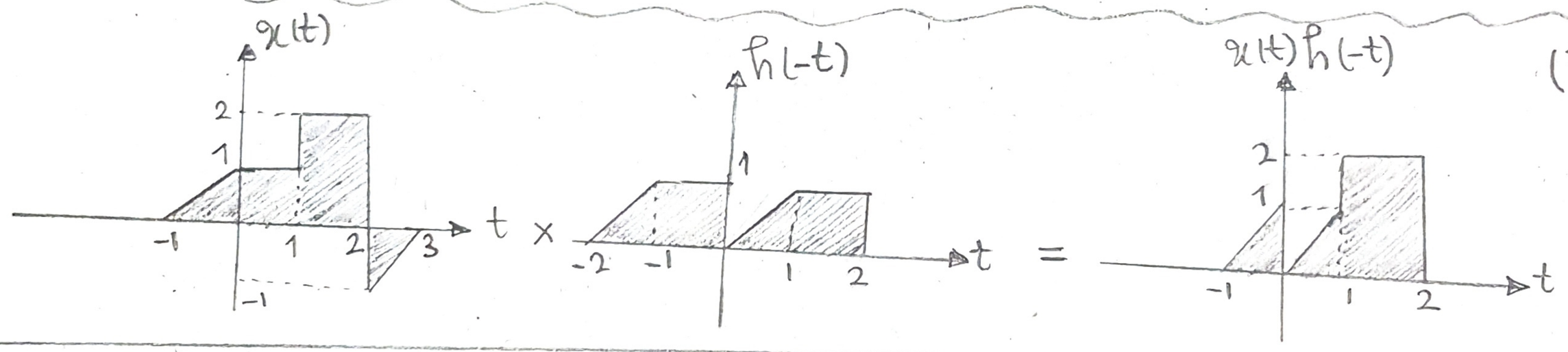
الف-5)



الف-6)



الف-7)



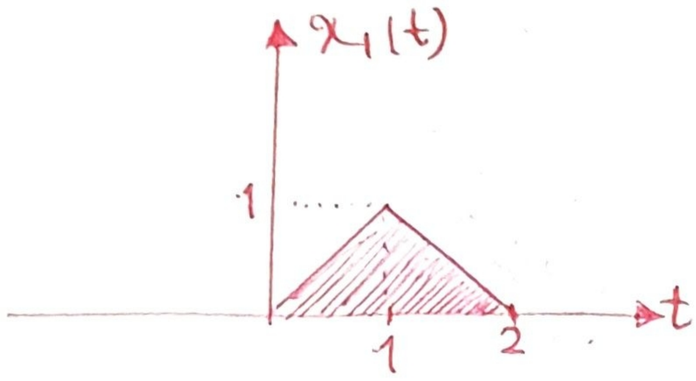
ب)

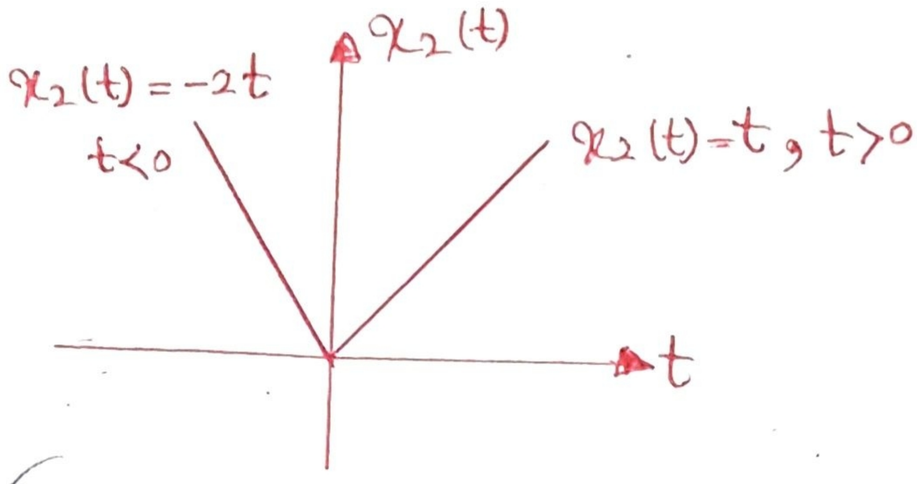
$$x(t) = r(t+1) - r(t) + u(t-1) - 3u(t-2) + r(t-2) - r(t-3)$$

$$h(t) = u(t+2) - r(t+1) + r(t) + u(t) - r(t-1) + r(t-2)$$

3 نمره

سوال 2



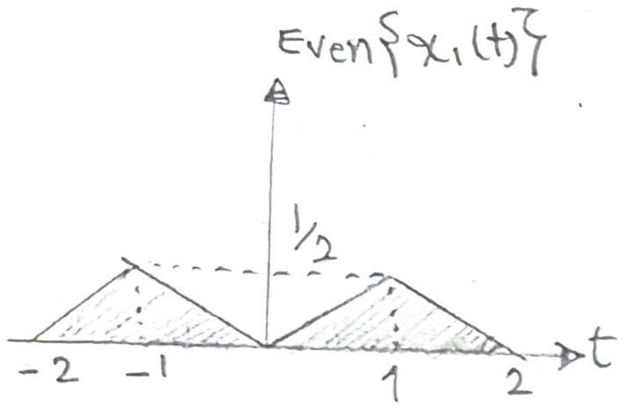


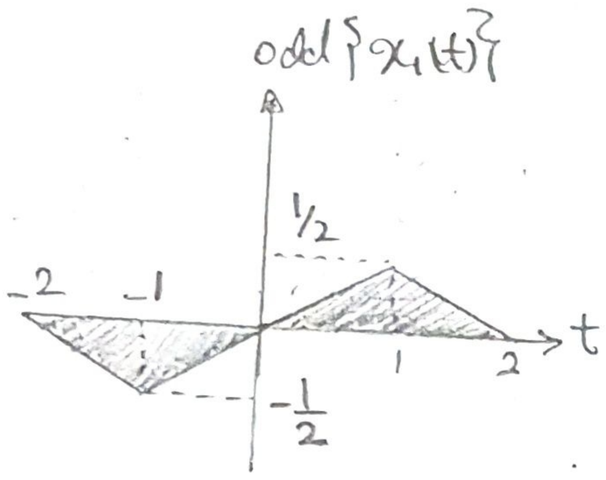
الف)

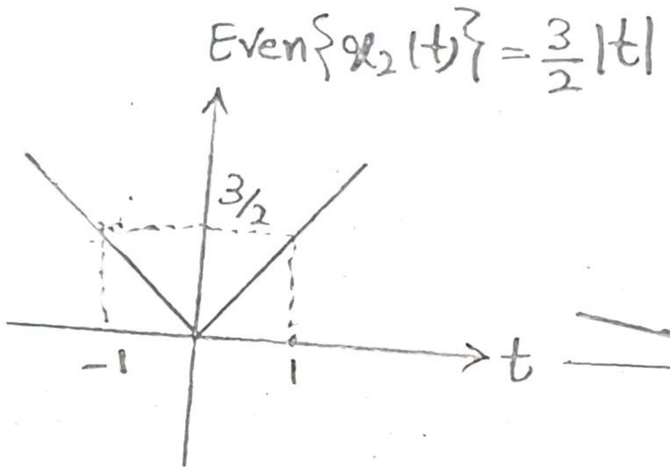
* برای محاسبه قسمت‌های زوج و فرد یک سیگنال از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

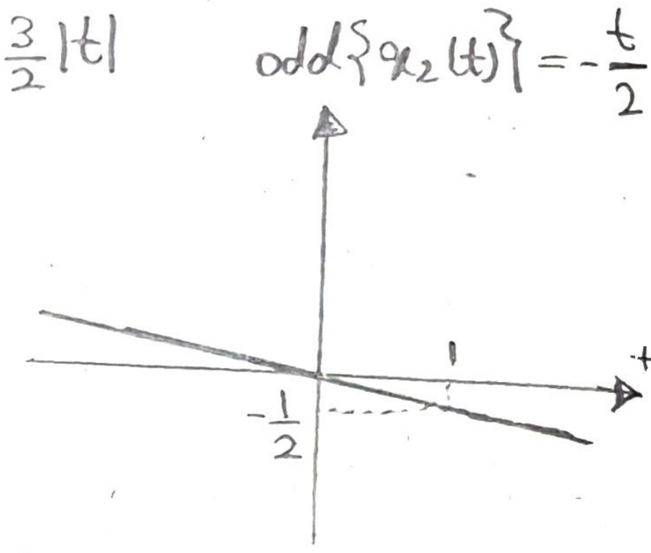
$$x_e(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2} \quad \text{رابطه 1} \qquad x_o(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{2} \quad \text{رابطه 2}$$

بنابراین داریم:









به طور مثال برای محاسبه قسمت‌های زوج و فرد سیگنال $x_2(t)$ داریم:

$$Even\{x_2(t)\} = \frac{x_2(t)+x_2(-t)}{2} = \begin{cases} t \geq 0 \rightsquigarrow Even\{x_2(t)\} = \dfrac{t+(2t)}{2} = \dfrac{3}{2}t \\ t<0 \rightsquigarrow Even\{x_2(t)\} = \dfrac{-2t+(-t)}{2} = -\dfrac{3}{2}t \end{cases}$$

$$odd\{x_2(t)\} = \frac{x_2(t)-x_2(-t)}{2} = \begin{cases} t \geq 0 \rightsquigarrow odd\{x_2(t)\} = \dfrac{t-(+2t)}{2} = -\dfrac{t}{2} \\ t<0 \rightsquigarrow odd\{x_2(t)\} = \dfrac{-2t-(-t)}{2} = -\dfrac{t}{2} \end{cases}$$

! توجه داشته باشید که با توجه به رابطه 1 مقدار سیگنال زوج در نقطه $t=0$ (مبدأ) برابر مقدار سیگنال اصلی در $t=0$ است

و مقدار سیگنال فرد در نقطه $t=0$ برابر صفر است:

$$x_e(t=0) = \frac{x(0)+x(0)}{2} = x(0)$$

$$x_o(t=0) = \frac{x(0)-x(0)}{2} = 0$$

ب)

$$E\{x(t)\} = E\{x_e(t)+x_o(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x_e(t)+x_o(t)\right)^2 dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x_e^2(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x_o^2(t)\,dt + \underbrace{2\int_{-\infty}^{+\infty} x_e(t)x_o(t)\,dt}_{I}$$

$$I = 2\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x(t)+x(-t)}{2}\right)\left(\frac{x(t)-x(-t)}{2}\right)dt \underset{\text{اتحاد مزدوج}}{=} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x^2(t)-x^2(-t)\right]dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt - \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(-t)\,dt}_{-t \triangleq u} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(u)\,du$$

$$= 0 \;\Big]\checkmark$$

$$\rightsquigarrow E\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_e^2(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x_o^2(t)\,dt = E\{x_e(t)\} + E\{x_o(t)\} \;\Big]\checkmark$$

* بله ، در حالت گسسته نیز روابط مشابهی وجود دارد :

$$E\{x[n]\} = E\{x_e[n] + x_o[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[x_e[n]+x_o[n]\right]^2$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_o^2[n] + 2\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_e[n]\,x_o[n]}_{I}$$

$$I = 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\underbrace{\underbrace{x_e[n]}_{\text{زوج}}\,\underbrace{x_o[n]}_{\text{فرد}}}_{\text{فرد}} = \underbrace{\cancel{2x_e[0]\,\underbrace{x_o[0]}_{0}}}_{0} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} x_e[n]\,x_o[n] + 2\underbrace{\sum_{n=-1}^{+\infty} x_e[n]\,x_o[n]}_{\sum_{k=1}^{+\infty} x_e[k]\,x_o[n]}$$

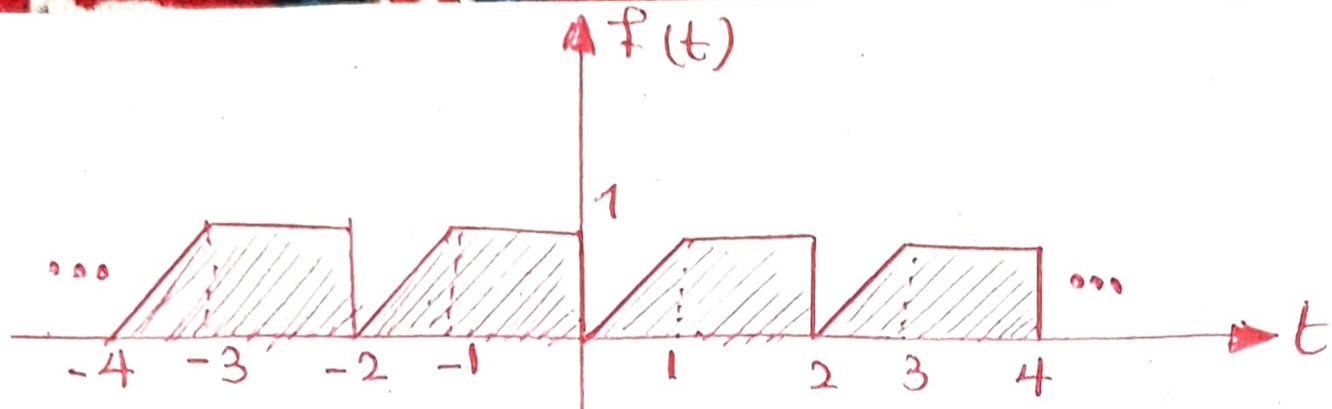
$$= 0 \;\Big]\checkmark$$

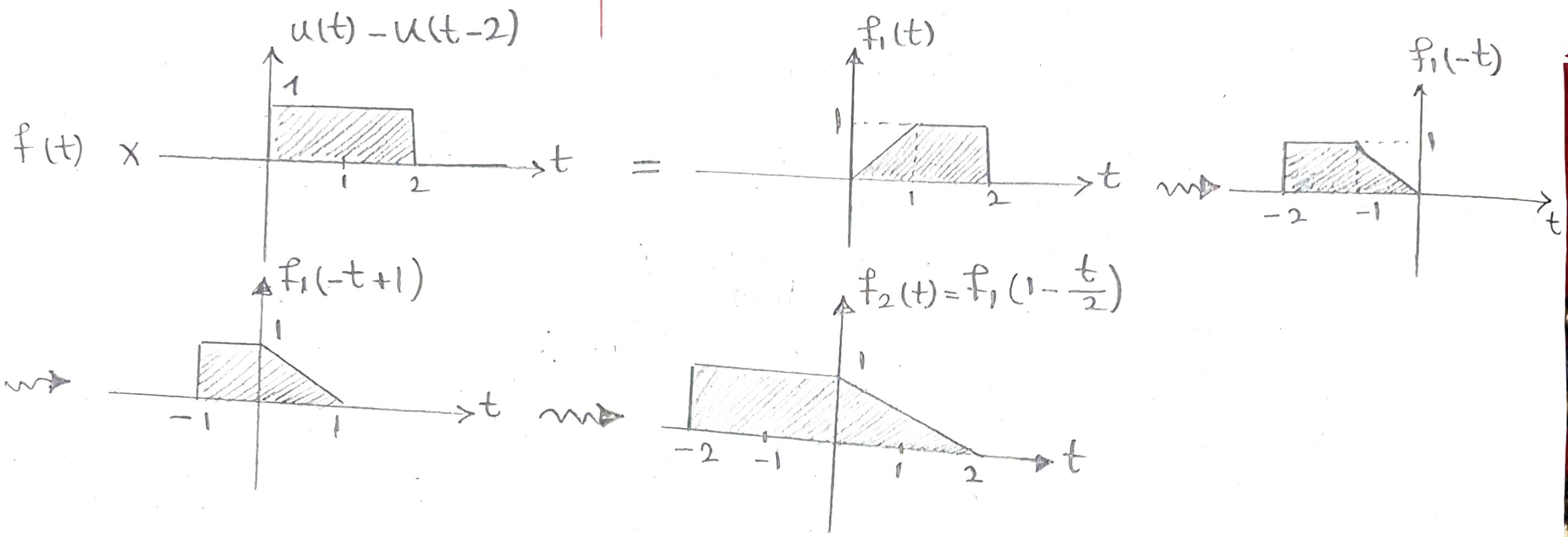
$$\rightsquigarrow E\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_o^2[n] = E\{x_e[n]\} + E\{x_o[n]\} \;\Big]\checkmark$$

! آیا روابط فوق برای توان سیگنال ها نیز برقرار است ؟

5 دقیقه

سؤال 3





$$\int_{-\infty}^{t} f_2(\tau)\,d\tau = \begin{cases} \text{for } t \leq 2: \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \underbrace{f_2(\tau)}_{0}\,d\tau = 0 \\[2ex] \text{for } -2 \leq t \leq 0: \displaystyle\int_{-2}^{t} (1)\,d\tau = t+2 \\[2ex] \text{for } 0 \leq t \leq 2: \underbrace{\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_2(\tau)\,d\tau}_{\text{کل مساحت سیگنال در بازه‌ی قبلی}} + \displaystyle\int_{0}^{t} f_2(\tau)\,d\tau = 2 + \int_{0}^{t} \left(1 - \frac{\tau}{2}\right) d\tau \\[2ex] \qquad = 3 - \frac{1}{4}(t-2)^2 \\[2ex] \text{For } t \geq 2: \underbrace{\displaystyle\int_{-\infty}^{2} f_2(\tau)\,d\tau}_{\text{کل مساحت سیگنال در بازه‌های قبلی}} + \displaystyle\int_{2}^{t} f_2(\tau)\,d\tau = 3 + \int_{2}^{t} 0\,d\tau = 3 \end{cases}$$

سؤال 4

الف) $\cos(t) + \sin(\sqrt{2}\,t)$

حاصل جمع دو سیگنال، در دو صورت یک سیگنال متناوب است که:

اولاً هر کدام از سیگنال ها متناوب باشند؛

ثانیاً نسبت دوره تناوب اصلی دو سیگنال $\left(\frac{T_1}{T_2}\right)$ عددی گویا باشد.

در این صورت دوره تناوب اصلی سیگنال حاصل، برابر با کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) دوره تناوب اصلی دو سیگنال است.

lcm

$x_1(t) = \cos(t) \rightsquigarrow T_1 = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

$x_2(t) = \sin(\sqrt{2}\,t) \rightsquigarrow T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,\pi$

$\rightsquigarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}\,\pi} = \sqrt{2}$ $\rightsquigarrow$ چون $\frac{T_1}{T_2}$ گویا نیست بنابراین سیگنال مجموع نیز متناوب نیست.

ب) $\left|\cos \frac{4}{3}t\right| + \sin \frac{3}{4}t$

دوره تناوب سیگنال $|\cos w_0 t|$ و $|\sin w_0 t|$ نصف دوره تناوب سیگنال های $\cos w_0 t$ و $\sin w_0 t$ بوده و از رابطه $T = \frac{\pi}{w_0}$ بدست می آید. (این موضوع به راحتی از روی شکل سیگنال ها قابل بررسی است)

$x_1(t) = \left|\cos \frac{4}{3}t\right| \rightsquigarrow T_1 = \frac{\pi}{\frac{4}{3}} = \frac{3\pi}{4}$

$x_2(t) = \sin \frac{3}{4}t \rightsquigarrow T_2 = \frac{2\pi}{\frac{3}{4}} = \frac{8\pi}{3}$

$\rightsquigarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{9}{32} \rightsquigarrow$ گویا است

$\rightsquigarrow T = \text{lcm}\left(\frac{3}{4}\pi, \frac{8}{3}\pi\right) = 24\pi$ ✓

برای محاسبه کوچکترین مضرب مشترک (lcm) بین دو کسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ از رابطه زیر می توانیم استفاده کنیم:

$$\text{lcm}\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) = \frac{\text{lcm}(a, c)}{\text{gcd}(b, d)}$$

بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م)

ج) $\text{even}\{\cos(5\pi t)\,u(t)\}$

$$= \frac{\cos(5\pi t)\,u(t) + \cos(-5\pi t)\,u(-t)}{2} = \frac{1}{2}\cos(5\pi t)\,\underbrace{[u(t) + u(-t)]}_{1} = \frac{1}{2}\cos(5\pi t)$$

$T = \frac{2\pi}{w_0} = \frac{2\pi}{5\pi} = \frac{2}{5}$ ✓

اسکیل دامنه سیگنال تأثیری بر دوره تناوب سیگنال ندارد.

7 مهر

د) $\cos(t)\cos(\sqrt{3}t)$

اگر حاصلضرب سیگنال ها را با تشیع، در ابتدا باید به نحوی آن ها را به صورت حاصل جمع بنویسیم:

$$\cos(t)\cos(\sqrt{3}t) = \frac{1}{2}\left[\cos(1+\sqrt{3})t + \cos(1-\sqrt{3})t\right]$$

$$x_1(t) = \cos(1+\sqrt{3})t \rightsquigarrow T_1 = \frac{2\pi}{1+\sqrt{3}}$$

$$x_2(t) = \cos(1-\sqrt{3})t \rightsquigarrow T_2 = \frac{2\pi}{1-\sqrt{3}}$$

$$\rightsquigarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \rightsquigarrow$$ گویا نیست بنابراین سیگنال اصلی متناوب نیست.

ه) $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\cos\left(\frac{t}{2}\right) + e^{-j\pi t^2}\right]\delta(t-k)$

$$x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\cos\left(\frac{t}{2}\right)\delta(t-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\cos\left(\frac{k}{2}\right)\delta(t-k)$$

خاصیت غربالی تابع ضربه

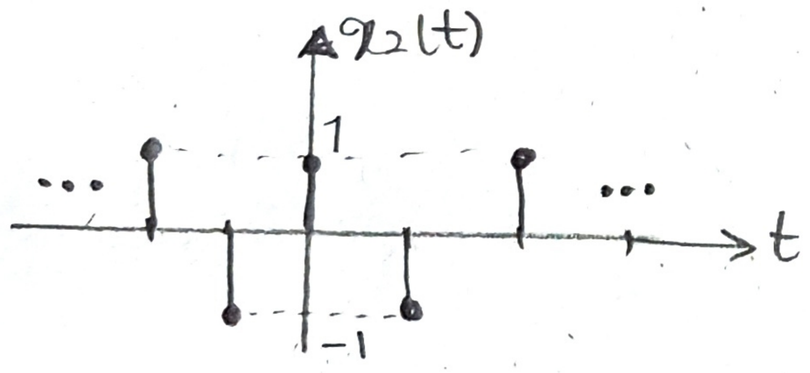
تابع $\cos\left(\frac{k}{2}\right)$ به ازای هیچ مقداری از k متناوب نیست

بنابراین $x_1(t)$ متناوب نخواهد بود. همینجا می توان نتیجه گرفت که سیگنال اصلی نیز متناوب نیست ولی برای تمرین بیشتر تناوب $x_2(t)$ را نیز بررسی می کنیم:

$$x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j\pi t^2}\delta(t-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j\pi k^2}\delta(t-k)$$

$$\cos(\pi k^2) - j\sin(\pi k^2) = (-1)^k$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k\delta(t-k) \rightsquigarrow$$ $x_2(t)$ با دوره تناوب اصلی $T=2$ متناوب است با این حال



چون $x_1(t)$ متناوب نیست لذا سیگنال اصلی متناوب نخواهد بود.

و) $\left[\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right) + 2\sin\left(\frac{16\pi t}{3}\right)\right]\sin(\pi t)$

$$x_1(t) = \cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right)\sin(\pi t) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{5\pi}{3}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)\right] \equiv \frac{1}{2}\left[x_{11}(t) + x_{12}(t)\right]$$

$$T_{11} = \frac{2\pi}{\frac{5\pi}{3}} = \frac{6}{5}, \quad T_{12} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6 \rightsquigarrow \frac{T_{11}}{T_{12}} = \frac{6/5}{6} = \frac{1}{5}$$ گویا است

$$\rightsquigarrow T_1 = \mathrm{lcm}\left(\frac{6}{5}, 6\right) = 6$$

ص ۸۶

$$x_2(t) = 2\sin\left(\frac{16\pi}{3}t\right)\sin(\pi t) = \cos\left(\frac{13\pi}{3}t\right) - \cos\left(\frac{19\pi}{3}t\right) \equiv x_{21}(t) - x_{22}(t)$$

$$T_{21} = \frac{2\pi}{\frac{13\pi}{3}} = \frac{6}{13}, \quad T_{22} = \frac{2\pi}{\frac{19\pi}{3}} = \frac{6}{19} \rightsquigarrow \frac{T_{21}}{T_{22}} = \frac{6/13}{6/19} = \frac{19}{13} \rightsquigarrow$$ گویا است

$$\rightsquigarrow T_2 = \mathrm{lcm}\left(\frac{6}{13}, \frac{6}{19}\right) = 6$$

و دوره تناوب سیگنال اصلی برابر 6 خواهد بود؟

$$T = \mathrm{lcm}(T_1, T_2) = \mathrm{lcm}(6, 6) = 6 \quad \checkmark$$

ز) $\cos\left(\frac{\pi}{8}n^3\right)$

سیگنال $\cos(\omega_0 n^p)$ و $p \in \{1, 2, 3, \dots\}$ متناوب خواهد بود اگر $\frac{\omega_0}{\pi}$ گویا باشد و دوره تناوب اصلی آن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

if $p=1$ $\rightsquigarrow N =$ صورت کسر $\frac{2\pi}{\omega_0}$ که تا حد امکان ساده شده باشد

if $p \geq 2$ $\rightsquigarrow N =$ از تعریف استفاده می‌کنیم و دوره تناوب اصلی کوچکترین مقدار N است که رابطه $x[n] = x[n+N]$ به ازای آن برقرار است. در اینجا $\frac{\pi/8}{\pi}$ گویا است پس داریم:

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}n^3\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}(n+N)^3\right) = \cos\left[\frac{\pi}{8}(n^3 + 3n^2N + 3nN^2 + N^3)\right]$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{8}n^3 + \underbrace{\frac{\pi}{8}(3n^2N + 3nN^2 + N^3)}_{I[n]}\right)$$

برای اینکه تساوی فوق برقرار باشد، عبارت $I[n]$ باید برابر مضارب 2π باشد: $I[n] = 2k\pi$

پس باید N را مقداری قرار دهیم که به ازای تمامی nها، $I[n] = 2k\pi$ برقرار باشد:

$$I[n] = \frac{\pi}{8}N(3n^2 + 3nN + N^2)$$

$$N = 8 \rightsquigarrow I[n] = \pi(3n^2 + 24n + 64) \not\equiv 2k\pi$$

$$N = 16 \rightsquigarrow I[n] = 2\pi(3n^2 + 48n + 256) \equiv 2k\pi \quad \forall n$$

در حالت کلی برای سیگنال $\cos\left(\frac{p}{q}\pi n^k\right)$ درصورت برقرار بودن شرط تناوب، مضارب صحیح q را بررسی می‌نماییم:

$N = q \quad N = 2q \quad \dots \quad N = kq$

به عبارتی دوره تناوب $\cos\left(\frac{p}{q}\pi n^k\right)$ حتماً مضرب q خواهد بود (حداقل $N=q$ و حداکثر $N=kq$).

ادامه

c) $\sin(n-\pi)$

این سیگنال شبیه یافته‌ی $\sin(n)$ است و $\sin(n)$ متناوب نیست چون $\frac{1}{\pi} = \frac{\omega_0}{\pi}$ گویا نیست.

---

b) $\cos(\pi^2 n)$

$\frac{\omega_0}{\pi} = \frac{\pi^2}{\pi} = \pi$ گویا نیست بنابراین سیگنال فوق متناوب نخواهد بود.

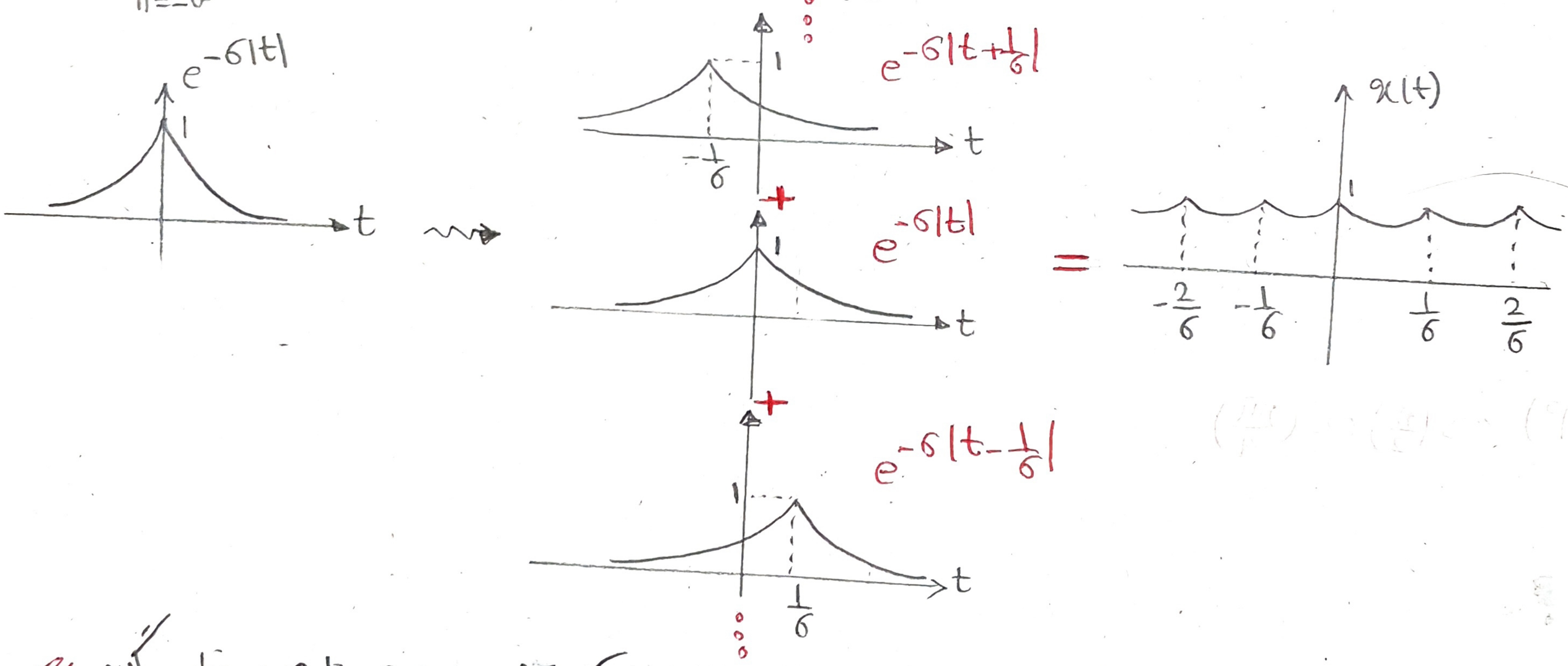
---

5) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{|6t-n|}$

! دوره‌ی تناوب سیگنال $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-|at+bn|}$ برابر $\left|\frac{b}{a}\right|$ است. پس دوره‌ی تناوب این سیگنال برابر $T=\frac{1}{6}$ خواهد بود.

با استفاده از یک شکل تقریبی نیز می‌توان این موضوع را بررسی نمود:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-6|t-\frac{n}{6}|} = \dots + e^{-6|t+\frac{1}{6}|} + e^{-6|t|} + e^{-6|t+\frac{1}{6}|} + \dots$$

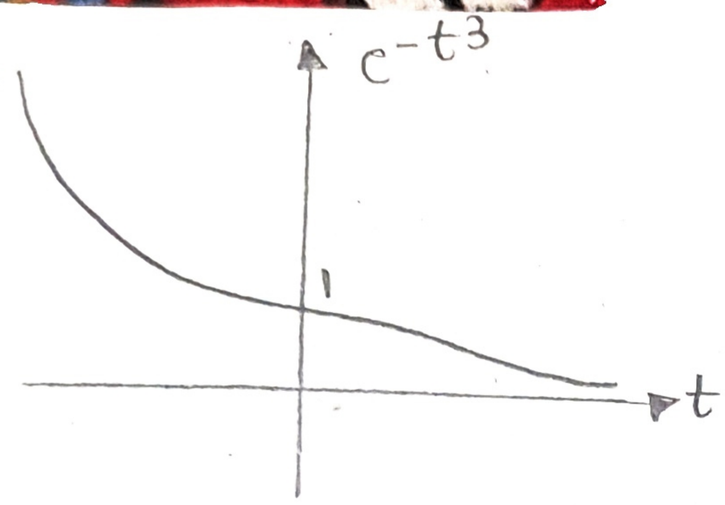


! بنابراین اجبار بوجود آید از کجا بدانیم سیگنال برحسب n است یا t؟! از آنجایی که متغیر n از $-\infty$ تا $+\infty$ مقدار می‌گیرد بنابراین نمی‌تواند متغیر مستقل سیگنال باشد و سیگنال $x(t)$ است.

گ) $x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(t-2n)^3}$

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{(2n-t)^3} = e^{-t^3} + e^{(2-t)^3} + e^{(4-t)^3} + \dots$$

چون نمونه‌های شبیه یافته‌ی سیگنال e^{-t^3} فقط از سمت راست با هم جمع می‌شوند پس مسلماً سیگنال



متناوب خواهد بود.

! اگر رابطه به صورت $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(t-2n)^3}$ باشد دوره‌ی تناوب

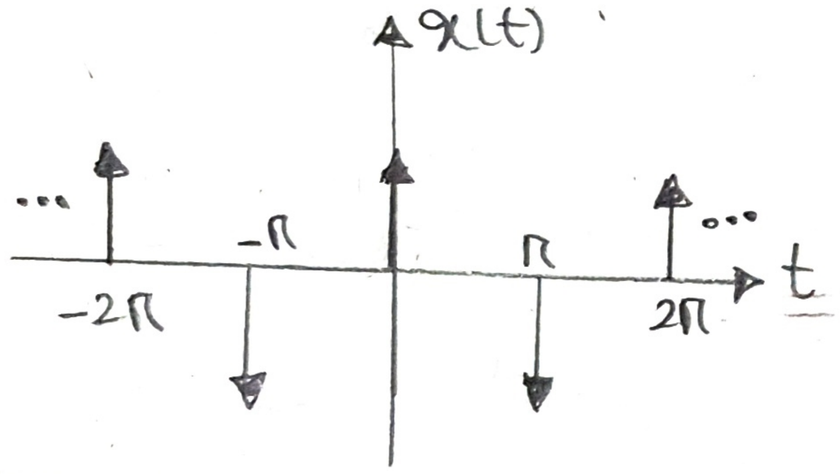
متناوب وجود خواهد داشت:

الف) چون با جمع شدن تمامی شیفت یافته مقدار $x(t)$ بی‌نهایت می‌شود، لذا دوره‌ی تناوب برای سیگنال با دامنه‌ی $+\infty$ قابل تعریف نیست

ب) هرچند دامنه‌ی سیگنال $+\infty$ می‌شود ولی با توجه به سری داده شده، دوره‌ی تناوب برابر $T=2$ خواهد بود.

د) $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \cos\left(\frac{t}{2}\right)\delta(t-k\pi)$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\cos(k\pi)\,\delta(t-k\pi)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k\delta(t-k\pi)=\dots-\delta(t+\pi)+\delta(t)-\delta(t-\pi)+\dots$$



$\rightsquigarrow T=2\pi$ ✓

ر) $\cos\left(\frac{n}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

$$x[n]=\frac{1}{2}\Big[\underbrace{\cos\left(1+\frac{\pi}{4}\right)n}_{x_1[n]}+\underbrace{\cos\left(1-\frac{\pi}{4}\right)n}_{x_2[n]}\Big]$$

از آنجایی که $\frac{1+\frac{\pi}{4}}{\pi}$ و/یا $\frac{1-\frac{\pi}{4}}{\pi}$ گویا نیستند بنابراین سیگنال $x[n]$ متناوب نیست.

سوال 5

صفحه 1

1- الف) $\int_{-\infty}^{+\infty} (t^2+3t-1)\,\delta'(t+1)\,dt$

در حالت کلی رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\,\delta^{(n)}(t-t_0) = \begin{cases} (-1)^n x^{(n)}(t_0) & t_1<t_0<t_2 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

مشتق مرتبه‌ی nام

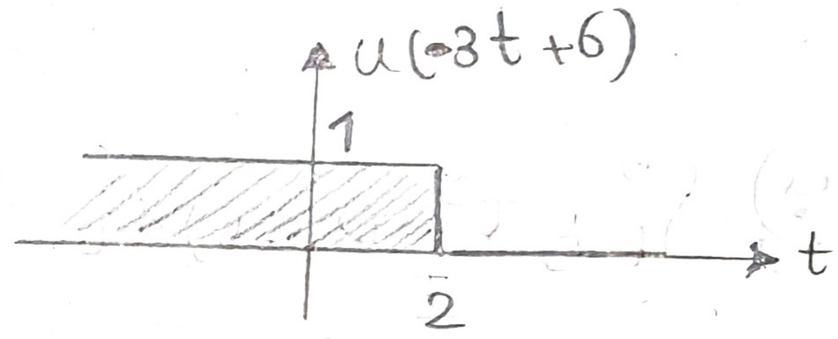
بنابراین داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t^2+3t-1)\,\delta'(t+1)\,dt = (-1)\frac{d}{dt}(t^2+3t-1)\Big|_{t=-1} = -(2t+3)\Big|_{t=-1} = \boxed{-1} \checkmark$$

2- الف) $\int_{1}^{4} 3t^2\,u(-3t+6)\,dt$

در ابتدا باید بازه‌ای که تابع $u(-3t+6)$ برابر 1 است را بدست آوریم:

$-3t+6 \geq 0 \rightsquigarrow 3t \leq 6 \rightsquigarrow t \leq 2$



حال اشتراک این بازه و بازه‌ی انتگرال را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_{1}^{2} 3t^2\,dt = t^3\Big|_{1}^{2} = 8-1 = \boxed{7} \checkmark$$

3- الف) $\int_{-\infty}^{+\infty} (t^2+1)\,\delta''(t-1)\,dt$

از نکته‌ی قسمت الف-1 استفاده می‌کنیم.

$$= (-1)^2 \frac{d^2}{dt^2}(t^2+1)\Big|_{t=1} = \boxed{2} \checkmark$$

4- الف) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)\,\delta^{(n)}(t)\,dt$

$$= (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}(\cos(t))\Big|_{t=0} = \begin{cases} 0 & n \in odd \\ 1 & n=4k \\ -1 & n=4k\pm 2 \end{cases}$$

	$\cos t$
$n=1$	$-\sin t$
$n=2$	$-\cos t$
$n=3$	$\sin t$
$n=4$	$\cos t$
$n=5$	$-\sin t$
	$\vdots$

5- الف) $\sum_{n=-3}^{+5} \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\delta[n-1]$

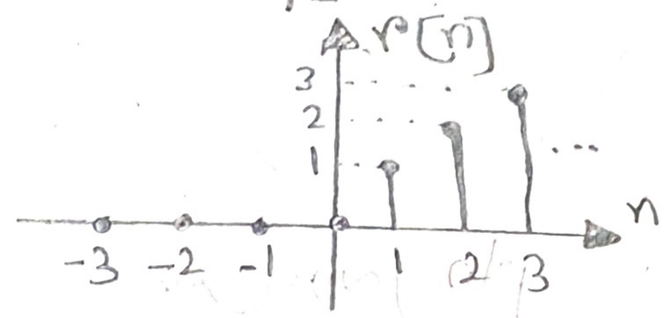
$$= \sum_{n=-3}^{5} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\delta[n-1] = \frac{1}{2}\sum_{n=-3}^{5}\delta[n-1] = \frac{1}{2}\Big[\overset{0}{\cancel{\delta[-4]}} + \overset{0}{\cancel{\delta[-3]}} + \dots + \overset{1}{\cancel{\delta[0]}} + \dots + \underset{0}{\cancel{\delta[4]}}\Big]$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}} \checkmark$$

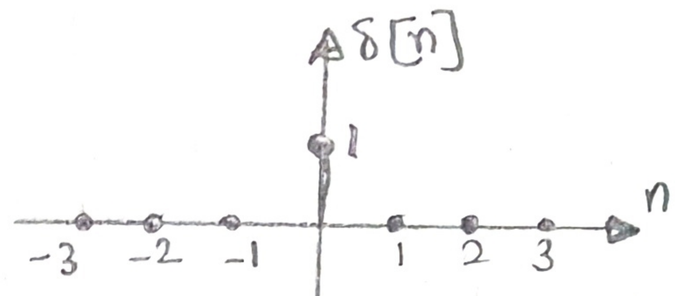
صفحه 12

1-ب) $r[u[n]] + r[\delta[n]] + \delta[u[n]]$

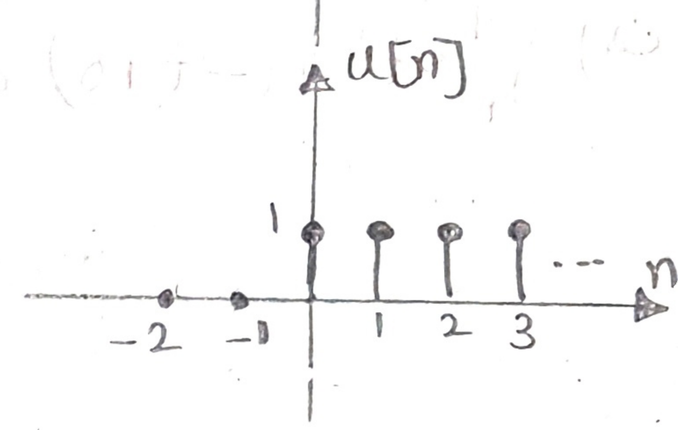
طبق تعریف داریم :



$$r[u[n]] = \begin{cases} r[0] = 0 & \text{for } n<0 \\ r[1] = 1 & \text{for } n \geq 0 \end{cases} = u[n]$$



$$r[\delta[n]] = \begin{cases} r[1] = 1 & \text{for } n=0 \\ r[0] = 0 & \text{for } n \neq 0 \end{cases} = \delta[n]$$



$$\delta[u[n]] = \begin{cases} 0 & \text{for } n \geq 0 \\ 1 & \text{for } n<0 \end{cases} = 1 - u[n]$$

$$\rightsquigarrow u[n] + \delta[n] + 1 - u[n] = 1 + \delta[n]$$ ✓

2-ب) $\int_{t-5}^{5} \tau^2 \delta(2\tau-6)\, d\tau =$

$$= \int_{t-5}^{5} (3)^2 \delta(2\tau-6)\, d\tau = 9\int_{t-5}^{t} \delta(2(\tau-3))\, d\tau = \frac{9}{2}\underbrace{\int_{t-5}^{t} \delta(\tau-3)\, d\tau}_{I}$$

غریبالی

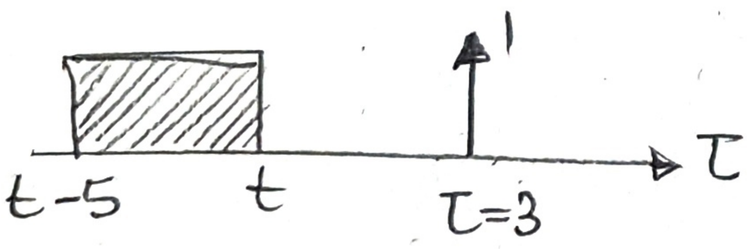
رابطه‌ی روبرو را به یاد داشته باشید :

$$\int_a^b \delta(\tau-t_0)\, d\tau = u(b-t_0) - u(a-t_0)$$

بنابراین داریم :

$$= \frac{9}{2}\left[u(t-3) - u(t-8)\right]$$ ✓

روش دوم : با استفاده از استدلال شهودی نیز می‌توان حاصل انتگرال I را حساب کرد. شکل زیر را در نظر بگیرید :



if $t<3 \rightsquigarrow I=0$ ضربه خارج از بازه‌ی انتگرال‌گیری است

if $t>3,\ t-5<3 \rightsquigarrow$ ضربه درون بازه‌ی انتگرال‌گیری قرار می‌گیرد

$\rightsquigarrow 3<t<8 \rightsquigarrow I=1$

if $t-5>3 \rightsquigarrow t>8 \rightsquigarrow$ ضربه خارج از بازه‌ی انتگرال‌گیری خواهد بود

$\rightsquigarrow I=0$

صفحه 13

الف) $y(t) = e^{x(t)}$

سؤال 6

* بررسی خطی بودن

شرط لازم و کافی برای خطی بودن یک سیستم این است که خاصیت همگنی و جمع پذیری را برآورده کند:

همگنی: $T(a x(t)) = a T(x(t))$

جمع پذیری: $T(x_1(t) + x_2(t)) = T(x_1(t)) + T(x_2(t))$

این دو خاصیت به صورت خلاصه جمع آثار نامیده می‌شود:

$$T(a x_1(t) + b x_2(t)) = a_1 T(x_1(t)) + a_2 T(x_2(t))$$

پس از رابطه فوق استفاده می‌کنیم:

$$T(a x_1(t) + b x_2(t)) = e^{a x_1(t) + b x_2(t)} = e^{a x_1(t)} e^{b x_2(t)} \neq a e^{x_1(t)} + b e^{x_2(t)}$$

$$= a T(x_1(t)) + b T(x_2(t)) \quad \times$$

بنابراین این سیستم خطی نیست.

شرط لازم برای خطی بودن سیستم این است که پاسخ به ورودی صفر آن، صفر باشد:

if $x(t) = 0 \rightsquigarrow y(t) = 0 \quad \forall t$

اما از این نکته نیز می‌توان استفاده نمود:

if $x(t) = 0 \rightsquigarrow y(t) = e^0 = 1 \neq 0$

ولذا سیستم فوق شرط لازم خطی بودن را ندارد پس خطی نیست.

* بررسی تغییر ناپذیر بودن با زمان

شرط لازم و کافی برای تغییر ناپذیر با زمان بودن سیستم این است که پاسخ سیستم به ورودی شیفت یافته با خروجی شیفت یافته‌ی سیستم یکسان باشد:

پاسخ به ورودی شیفت یافته: $T\{x(t-t_0)\}$ ⇝ در رابطه سیستم کل آرگومان ورودی را همان t_0 می‌کنیم

خروجی شیفت یافته: $y(t-t_0)$ ⇝ در رابطه سیستم هرجا t وجود دارد به $t-t_0$ تبدیل می‌کنیم

$$T\{x(t-t_0)\} = e^{x(t-t_0)}$$

$$y(t-t_0) = e^{x(t-t_0)}$$

$$\rightsquigarrow T\{x(t-t_0)\} = y(t-t_0)$$

بنابراین سیستم تغییر ناپذیر با زمان (TI) است

* بررسی حافظه دار بودن سیستم

سیستم بدون حافظه است که مقدار خروجی در هر لحظه، به مقدار ورودی یا خروجی در لحظات دیگر وابسته نباشد.

در سیستم فوق نیز خروجی در هر لحظه t_0 صرفاً به مقدار ورودی در لحظه t_0 وابسته است پس سیستم بدون حافظه است

* بررسی علی بودن

سیستم علی است که خروجی در هر لحظه، به مقدار ورودی در لحظه‌های بعد وابسته نباشد.

چون خروجی سیستم فوق در هر لحظه صرفاً به مقدار ورودی در همان لحظه وابسته است، پس سیستم علی است

اگر سیستم بدون حافظه باشد حتماً علی است ولی عکس آن درست نیست.

* بررسی پایداری

سیستمی را پایدار می‌گویند که به ازای همه‌ی ورودی‌های کران‌دار (محدود)، خروجی کران‌دار (محدود) باشد.

$$\forall t: |x(t)| < \infty \longrightarrow \forall t: |y(t)| < \infty$$

واضح است که در سیستم فوق نیز تا زمانی که ورودی کران‌دار باشد، خروجی نیز کران‌دار خواهد:

$$\text{if } |x(t)| < M \rightsquigarrow |y(t)| = |e^{x(t)}| < N \ , \ N < \infty$$

ب) $Re\{x(t)\}$

* بررسی خطی بودن

$$\text{if } a \in \text{complex Number} \rightsquigarrow T\{ax(t)\} \neq aT\{x(t)\}$$

سیستم خطی نیست چون خاصیت همگنی را ندارد.

* بررسی TI بودن

$$T\{x(t-t_0)\} = Re\{x(t-t_0)\}$$
$$y(t-t_0) = Re\{x(t-t_0)\}$$
$$\rightsquigarrow T\{x(t-t_0)\} = y(t-t_0)$$

سیستم TI است.

* بررسی حافظه‌دار بودن

چون مقدار خروجی در هر لحظه‌ی t_0 صرفاً به مقدار ورودی در همان لحظه وابسته است، سیستم بدون حافظه است.

* بررسی علی بودن

سیستم علی است چون سیستم بدون حافظه است و خروجی به مقدار ورودی در لحظه‌های بعد وابسته نیست.

* بررسی پایداری

سیستم پایدار است چون تا زمانی که سیگنال ورودی محدود (کران‌دار) باشد، قسمت حقیقی آن نیز باید محدود باشد.

صفحه 15

ج) $y(t) = x'(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$

*بررسی خطی بودن

$$T\{ax_1(t)+bx_2(t)\} = \frac{d}{dt}\left(ax_1(t)+bx_2(t)\right) = a\frac{dx_1(t)}{dt} + b\frac{dx_2(t)}{dt}$$

$$= aT\{x_1(t)\} + bT\{x_2(t)\} \rightsquigarrow$$

سیستم خطی است

*بررسی TI بودن

$$T\{x(t-t_0)\} = \frac{dx(t-t_0)}{dt} \rightsquigarrow T\{x(t-t_0)\} = y(t-t_0)$$

$$y(t-t_0) = \frac{dx(t-t_0)}{dt}$$

سیستم TI است

*بررسی حافظه دار بودن

با استفاده از تعریف مشتق نتیجه می‌گیریم سیستم حافظه دار است:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \begin{cases} \dfrac{x(t)-x(t-\Delta t)}{\Delta t} & \text{Backward Difference} \\ \text{یا} & \\ \dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} & \text{Forward Difference} \end{cases}$$

*بررسی علی بودن

براساس تعریف Backward Difference، سیستم مشتق‌گیر یک سیستم علی محسوب می‌شود درحالی که براساس تعریف Forward Difference غیرعلی خواهد بود چون برای محاسبه‌ی مشتق در لحظه‌ی t به مقداری از ورودی در آینده نیاز خواهیم داشت.

*بررسی پایداری

سیستم ناپایدار است زیرا در نقاط ناپیوستگی سیگنال ورودی، در خروجی ضربه تولید می‌شود که مقدار آن نامحدود است

$$u(t) \longrightarrow \boxed{d/dt} \longrightarrow \delta(t)$$

د) $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)x(\tau+t)\,d\tau$

*بررسی خطی بودن

$$T\{ax(t)\} = a^2\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)x(t+\tau)\,d\tau \neq aT\{x(t)\}$$

سیستم خاصیت همگنی را ندارد پس خطی نیست.

*بررسی TI بودن

$$T\{x(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau-t_0)x(\tau+t-t_0)\,d\tau$$

$$\rightsquigarrow T\{x(t-t_0)\} \neq y(t-t_0)$$

$$y(t-t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)x(\tau+t-t_0)\,d\tau$$

سیستم TI نیست.

*بررسی حافظه دار بودن

برای محاسبه‌ی خروجی در هر لحظه به مقدار ورودی در همه‌ی لحظات نیاز داریم ($x(\tau)$) پس سیستم حافظه دار است

* بررسی علی بودن

برای محاسبه‌ی خروجی در لحظه‌ی t به ورودی در لحظه‌ی $t+\tau$ نیاز داریم پس سیستم علی نیست.

* بررسی پایداری

if $x(t)=A \rightsquigarrow y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} A^2 d\tau = +\infty$

به ازای ورودی ثابت خروجی نامحدود می‌شود پس سیستم پایدار نیست

ه) $y(t) = x(-\sqrt{|t|})$

* بررسی خطی بودن

! عملیات روی آرگومان های ورودی سیگنال ورودی (جمع، ضرب، جذر، توان دو و...) در خطی نبودن سیستم تأثیری ندارند.

پس سیستم خطی است.

* بررسی TI بودن

$T\{x(t-t_0)\} = x(-\sqrt{|t|}-t_0)$

$y(t-t_0) = x(-\sqrt{|t-t_0|})$

$\rightsquigarrow T\{x(t-t_0)\} \neq y(t-t_0)$

سیستم TI نیست.

* بررسی حافظه دار بودن

خروجی در لحظه‌ی $t=-4$ به مقدار ورودی در لحظه‌ی -2 وابسته است پس سیستم حافظه دار است:

$y(t=-4) = x(-2)$

* بررسی علی بودن

با استدلال مشابه قسمت قبل، خروجی سیستم در لحظه‌ی $t=-4$ به ورودی در لحظه‌ی بعد یعنی 2 وابسته است پس سیستم غیرعلی است.

* بررسی پایداری

! در بررسی پایداری سیستم ها، آرگومان ورودی تأثیری در بررسی نخواهد داشت.

if $|x(t)| < A \rightsquigarrow \underbrace{|x(-\sqrt{|t|})|}_{|y(t)|} < A$

پس سیستم فوق پایدار است.

و) $y(t) = \begin{cases} \dfrac{x(t)}{|x(t)|} & x(t) \neq 0 \\ 0 & x(t)=0 \end{cases}$

* بررسی خطی بودن

$T\{ax(t)\} = \begin{cases} \dfrac{ax(t)}{|ax(t)|} & ax(t) \neq 0 \\ 0 & ax(t)=0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x(t)}{|x(t)|} & a>0, x(t)\neq 0 \\ -\dfrac{x(t)}{|x(t)|} & a<0, x(t)\neq 0 \\ 0 & x(t)=0 \end{cases} \neq aT\{x(t)\}$

سیستم غیرخطی است

Homework 3

! در حالت کلی تمامی سیستم های گسسته غیرخطی هستند. (ممکن است شرط همگنی برقرار شود ولی شرط جمع پذیری برقرار نخواهد شد)

! در سیستم های چند مناجمله ای اگر شرط ها بدون ورودی ($x(t)$) یا خروجی ($y(t)$) باشند، سیستم غیرخطی است.

$$T\{x(t-t_0)\} = \begin{cases} \dfrac{x(t-t_0)}{|x(t-t_0)|} & x(t-t_0) \neq 0 \\ 0 & x(t-t_0) = 0 \end{cases}$$

$$y(t-t_0) = \begin{cases} \dfrac{x(t-t_0)}{|x(t-t_0)|} & x(t-t_0) \neq 0 \\ 0 & x(t-t_0) = 0 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow T\{x(t-t_0)\} = y(t-t_0)$

*بررسی TI بودن

سیستم TI است

*بررسی حافظه دار بودن

سیستم بدون حافظه است.

*بررسی علی بودن

سیستم علی است

*بررسی پایداری

اگر ورودی کران دار باشد خروجی نیز کران دار است پس سیستم پایدار است.

---

j) $y(t) = \dfrac{\sin(x(t)+2t)}{x(t-1)}$

*بررسی خطی بودن

$$T\{ax(t)\} = \frac{\sin(ax(t)+2t)}{ax(t-1)} \neq aT\{x(t)\}$$

سیستم غیرخطی است

*بررسی TI بودن

$$T\{x(t-t_0)\} = \frac{\sin(x(t-t_0)+2t)}{x(t-1-t_0)}$$

$$y(t-t_0) = \frac{\sin(x(t-t_0)+2(t-t_0))}{x(t-t_0-1)}$$

$\rightsquigarrow T\{x(t-t_0)\} \neq y(t-t_0)$

سیستم TI نیست.

*بررسی حافظه دار بودن

سیستم حافظه دار است چون طبق عبارت درون مخرج، خروجی در لحظه $t=0$ به ورودی در لحظه -1 وابسته است

*بررسی علی بودن

سیستم علی است.

*بررسی پایداری

سیستم ناپایدار است چون اگر $x(t-1)$ در لحظه‌ای صفر شود درحالی که صورت لزوماً صفر نمی‌شود و مقدار خروجی نامحدود می‌شود.

---

c) $y[n] = x[-|n|]$

*بررسی خطی بودن

سیستم خطی است

$T\{x[n-n_0]\} = x[-|n|-n_0]$

$y[n-n_0] = x[-|n-n_0|]$ $\rightsquigarrow T\{x[n-n_0]\} \neq y[n-n_0]$

*بررسی TI بودن

سیستم TI نیست

اگر آرگومان ورودی غیر از t یا n باشد، سیستم حتماً تغییر پذیر با زمان خواهد بود.

$y[+1] = x[-1]$ $\rightsquigarrow$

*بررسی حافظه دار بودن

سیستم حافظه دار است.

$y[$

*بررسی علی بودن

خروجی به آینده ورودی وابسته نیست پس سیستم علی است

*بررسی پایداری

سیستم پایدار است.

---

b) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-2k]$

$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[\frac{n}{2}]\,\delta[n-2k] = x[\frac{n}{2}] \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-2k]}_{\text{یک قطار ضربه با دوره تناوب } N=2} = \begin{cases} x[\frac{n}{2}] & n=2k \\ 0 & o.w \end{cases}$

غیرخطی

$= x_{(2)}[n]$

*بررسی خطی بودن ← سیستم خطی است

*بررسی TI بودن ← چون آرگومان ورودی $\frac{n}{2}$ است پس سیستم TI نیست.

$y[4] = x[2]$

$y[-4] = x[-2]$

*بررسی حافظه دار بودن ← سیستم حافظه دار است؛

*بررسی علی بودن ← سیستم غیرعلی است؛

*بررسی پایداری ← سیستم پایدار است.

صفحه ۹

ک) $y[n] = \begin{cases} x[n+1] & n \in even \\ x[n-1] & n \in odd \end{cases}$

* بررسی خطی بودن ← سیستم خطی است

* بررسی TI بودن ← سیستم TI نیست

$T\{x[n-n_0]\} = \begin{cases} x[n+1-n_0] & n \in even \\ x[n-1-n_0] & n \in odd \end{cases}$

$y[n-n_0] = \begin{cases} x[n+1-n_0] & n-n_0 \in even \\ x[n-1-n_0] & n-n_0 \in odd \end{cases}$ $\rightsquigarrow T\{x[n-n_0]\} \neq y[n-n_0]$

! در حالت کلی، در سیستم های چند ضابطه ای اگر شرط ها بر روی n یا t باشند، سیستم تغییر پذیر با زمان است.

* بررسی حافظه دار بودن ← سیستم حافظه دار است:

$y[3] = x[2]$

$y[4] = x[5]$

* بررسی علی بودن ← سیستم غیر علی است:

* بررسی پایداری ← سیستم پایدار است.

ل) $y[n] = \dfrac{n^3 x[n]}{3n^2 - 36}$

* بررسی خطی بودن ← سیستم خطی است.

* بررسی TI بودن ← سیستم TI نیست.

* بررسی حافظه دار بودن ← سیستم بدون حافظه است

* بررسی علی بودن ← سیستم علی است

* بررسی پایداری ← سیستم پایدار است

ه) $y[n] = x[n \bmod 27]$

* بررسی خطی بودن ← سیستم خطی است

* بررسی TI بودن ← سیستم TI نیست

* بررسی حافظه دار بودن ← سیستم حافظه دار است

* بررسی علی بودن ← سیستم غیر علی است

* بررسی پایداری ← سیستم پایدار است

صفحه 20

سؤال 7

الف) $y(t) = t^2 x(2t+1)$

شرط لازم برای وارون پذیری یک سیستم این است که ورودی همه زمان‌ها و همه مقادیر ورودی به خروجی منتقل شوند و هیچ مقدار ورودی حذف نگردد.

این سیستم مقادیر ورودی را در لحظه زمانی $t=0$ حذف می‌کند پس این سیستم وارون پذیر نیست.

ب) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) e^{\tau} d\tau$

با تغییر t از $-\infty$ تا $+\infty$ متغیر انتگرال کل بازه $-\infty$ تا $+\infty$ را پوشش می‌دهد ولذا ورودی همه زمان‌ها در ساختن خروجی نقش خواهند داشت و همچنین همه مقادیر ورودی نیز به خروجی منتقل می‌شوند. پس سیستم شرط لازم معکوس پذیری را دارد.

شرط لازم و کافی برای معکوس پذیری یک سیستم آن است که بتوان $x(t)$ را به صورت تابع ریاضی بدون ابهام از $y(t)$ بدست آورد.

از دو طرف رابطه سیستم نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

می‌دانیم $\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(\tau)d\tau = b'(t) f(b(t)) - a'(t) f(a(t))$

$\rightsquigarrow y'(t) = x(t)e^{t} - (0)(x(-\infty)e^{-\infty}) = x(t)e^{t} \rightsquigarrow x(t) = y(t)e^{-t}$

از آنجایی که ورودی به صورت بدون ابهام از روی خروجی محاسبه شد، پس سیستم معکوس پذیر است.

ج) $y(t) = \begin{cases} x(t) & x(t)<0 \\ x^2(t) & x(t)\geq 0 \end{cases}$

در ابتدا شرط لازم را بررسی می‌کنیم:

1- تمامی مقادیر ورودی به خروجی منتقل می‌شوند. مقادیر ورودی کوچکتر از صفر توسط ضابطه اول و مقادیر ورودی که بزرگتر از صفر هستند توسط ضابطه دوم به خروجی منتقل می‌شوند.

2- همچنین ورودی همه زمان‌ها نیز به خروجی منتقل می‌شوند

در سیستم‌های چند ضابطه‌ای زمان پیوسته یا زمان گسسته، اگر شرط‌ها بر روی مقادیر ورودی باشد (روی $x(t)$) شرط لازم و کافی برای معکوس پذیری سیستم این است که پس از نوشتن ورودی برحسب خروجی‌ها، اولاً شرط‌های بدست آمده مکمل هم باشند؛ ثانیاً شرط‌های بدست آمده برحسب خروجی با هم تداخل و همپوشانی نداشته باشند.

هفته 21

لذا در ابتدا ورودی را برحسب خروجی می‌نویسیم:

ضابطه اول: $y(t)=x(t)\ ,\ x(t)<0 \rightsquigarrow x(t)=y(t)\ ,\ x(t)<0$

ضابطه دوم: $y(t)=x^2(t)\ ,\ x(t)\geq 0 \rightsquigarrow x(t)=\pm\sqrt{y(t)}\ ,\ x(t)\geq 0$

با توجه به شرط $x(t)\geq 0$ غیرقابل قبول است

$\rightsquigarrow x(t)=\sqrt{y(t)}\ ,\ x(t)\geq 0$

تا به اینجا رابطه ورودی برحسب خروجی‌ها بدون ابهام بازنویسی شد. حال به سراغ بررسی شرط‌ها می‌رویم:

1- شرط‌ها مکمل هم هستند و همه مقادیر ورودی در شرط‌ها پوشش داده می‌شوند. ✓

2- شرط‌ها برحسب خروجی نیز با هم تداخل و هم پوشانی ندارند. ✓

$$\begin{cases} x(t)=y(t)\ ,\ x(t)<0 \rightarrow y(t)<0 \\ x(t)=\sqrt{y(t)}\ ,\ x(t)\geq 0 \rightarrow \sqrt{y(t)}\geq 0 \rightsquigarrow y(t)\geq 0 \end{cases}$$

شرط‌ها را برحسب خروجی می‌نویسیم

بنابراین سیستم داده شده معکوس‌پذیر است.

د) $y[n]=x^2[n]$

! سیستم وارون‌پذیر است که به ازای ورودی‌های متفاوت، خروجی‌های متفاوت بدهد:

if $x_1[n]\neq x_2[n] \longrightarrow y_1[n]\neq y_2[n]$.

در سیستم فوق داریم:

$x_1[n]=-2 \rightsquigarrow y_1[n]=4$

$x_2[n]=2 \rightsquigarrow y_2[n]=4$

پس این سیستم وارون‌پذیر نیست.

ه) $[n]=\begin{cases} x[n-2] & n\geq 2 \rightsquigarrow \\ 0 & n=1 \rightsquigarrow \\ x[n] & n\leq 0 \rightsquigarrow \end{cases}$

مقادیر $x[0]$، $x[1]$ و ... از طریق این ضابطه به خروجی منتقل می‌شوند

مقدار $x[1]$ بین از این ضابطه به خروجی منتقل می‌شود

مقادیر $x[2]$ و $x[1]$ و ... از طریق این ضابطه به خروجی منتقل می‌شوند

بنابراین ورودی عمر زمان‌ها و عمر مقادیر ورودی به خروجی منتقل می‌شوند و شرط لازم برقرار است.

! در سیستم‌های چند ضابطه‌ای زمان پیوسته یا زمان گسسته، اگر شرط‌ها بر روی مقادیر زمان n یا t باشند، شرط لازم و کافی

برای معکوس‌پذیری سیستم این است که پس از نوشتن ورودی برحسب خروجی‌ها به صورت بدون ابهام، شرط‌های به دست آمده برحسب ورودی‌ها مکمل هم باشند.

لذا داریم:

ضابطه اول: $y[n]=x[n-2]\ ,\ n\geq 2 \xrightarrow{n\to n+2} x[n]=y[n+2]\ ,\ n+2\geq 2$ ($n\geq 0$)

ضابطه دوم: $y[n]=0\ ,\ n=1$

ضابطه سیستم : $y[n]=x[n]\ ,\ n\leq 0 \rightsquigarrow x[n]=y[n]\ ,\ n\leq 0$

$$\rightsquigarrow x[n]=\begin{cases} y[n+2] & n\geq 0 \\ 0 & n=0 \\ y[n] & n<0 \end{cases}$$

رابطه ورودی برحسب خروجی به صورت بدون ابهام بدست آمده و شرط‌های زمانی بدست آمده مکمل هم هستند و کل زمان را پوشش می‌دهند. بنابراین سیستم معکوس پذیر است.

و) $y[n]-|y[n-1]|=x[n]$

$x[n]=y[n]-|y[n-1]|$

شرط لازم برقرار بوده و ورودی به صورت بدون ابهام برحسب خروجی قابل نوشتن است پس سیستم معکوس پذیر است.

سوال 8

الف) و ب)

سیستم 1 : $y(t)=\left[x^2(t)-2x(t)x(t-1)+x^2(t-1)\right]^{1/2}=\left[(x(t)-x(t-1))^2\right]^{1/2}$

$=|x(t)-x(t-1)|$

*بررسی خطی بودن

$T\{ax_1(t)+bx_2(t)\}=|ax_1(t)+bx_2(t)-ax_1(t-1)-bx_2(t-1)|$

$=|a[x_1(t)-x_1(t-1)]+b[x_2(t)-x_2(t-1)]|$

$\neq a|x_1(t)-x_1(t-1)|+b|x_1(t)-x_2(t-1)|=aT\{x_1(t)\}+bT\{x_2(t)\}$

سیستم خطی نیست.

*بررسی TI بودن

$T\{x(t-t_0)\}=|x(t-t_0)-x(t-1-t_0)|$

$y(t-t_0)=|x(t-t_0)-x(t-1-t_0)| \rightsquigarrow T\{x(t-t_0)\}=y(t-t_0)$

سیستم TI است

$y(0)=|x(0)-x(-1)|$

*بررسی حافظه دار بودن ⇐ سیستم حافظه دار است

*علی بودن ⇐ سیستم علی است چون خروجی در هر لحظه به ورودی بعد از آن لحظه وابسته نیست.

*پایداری ⇐ سیستم پایدار است

سیستم 2 : $y(t)=x(t)\cos w_0 t$

*بررسی خطی بودن

$T\{ax_1(t)+bx_2(t)\}=[ax_1(t)+bx_2(t)]\cos w_0 t$

$=ax_1(t)\cos w_0 t+bx_2(t)\cos w_0 t=aT\{x_1(t)\}+bT\{x_2(t)\}$

پس سیستم خطی است

*بررسی TI بودن

$T\{x(t-t_0)\} = x(t-t_0)\cos w_0 t$

$y(t-t_0) = x(t-t_0)\cos w_0 (t-t_0)$ $\rightsquigarrow T\{x(t-t_0)\} \neq y(t-t_0)$

سیستم TI نیست

*بررسی حافظه دار بودن ← سیستم بدون حافظه است

*بررسی علی بودن ← سیستم علی است

*بررسی پایداری ← سیستم پایدار است

if $|x(t)| < M \rightsquigarrow |y(t)| = |x(t)\cos w_0 t| \leq |x(t)| \leq M$

since $|\cos w_0 t| \leq 1$

ج) اگر دو سیستم خطی و تغییر ناپذیر با زمان (LTI) با هم سری شوند سیستم حاصل LTI است.

اتصال دو سیستم تغییر پذیر با زمان الزاماً تغییر پذیر با زمان نیست و سیستم می‌تواند تغییر ناپذیر با زمان باشد.

اتصال دو سیستم غیرخطی الزاماً غیرخطی نیست و سیستم حاصل می‌تواند خطی باشد.

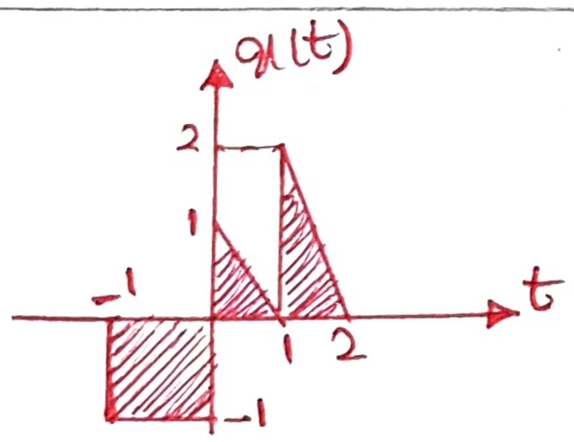
$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{system1}} \longrightarrow \boxed{\text{system2}} \longrightarrow y(t) = |x(t) - x(t-1)|\cos w_0 t$

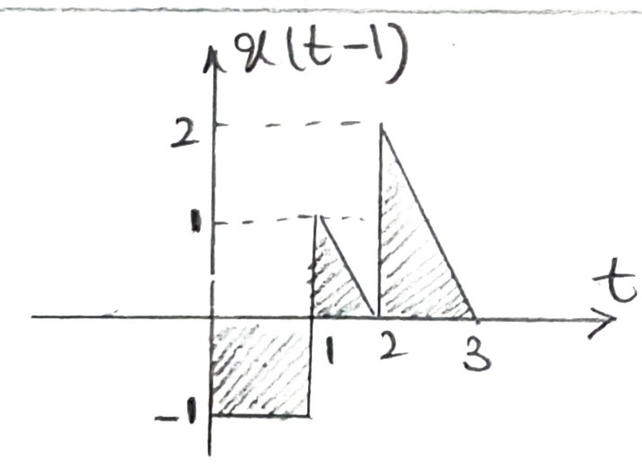
سیستم غیرخطی و تغییر پذیر با زمان است

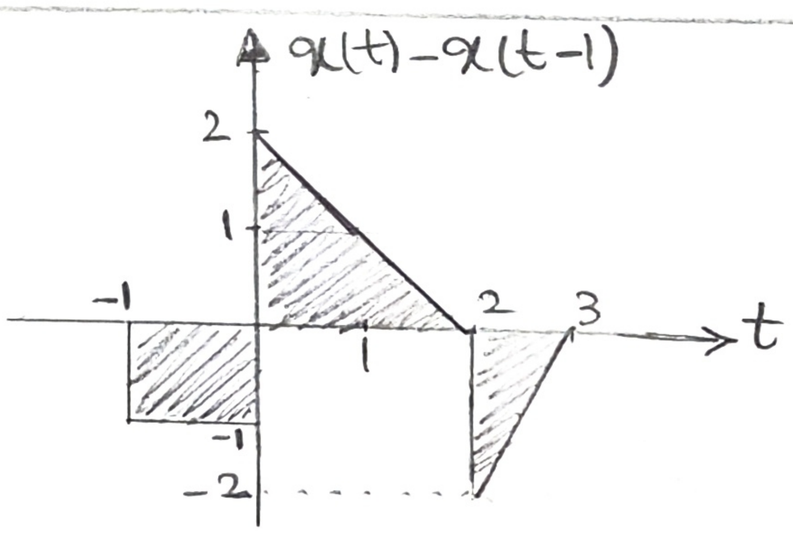
$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{system2}} \longrightarrow \boxed{\text{system1}} \longrightarrow y(t) = |x(t)\cos w_0 t - x(t-1)\cos w_0 (t-1)|$

سیستم غیرخطی و تغییر پذیر با زمان است

د)

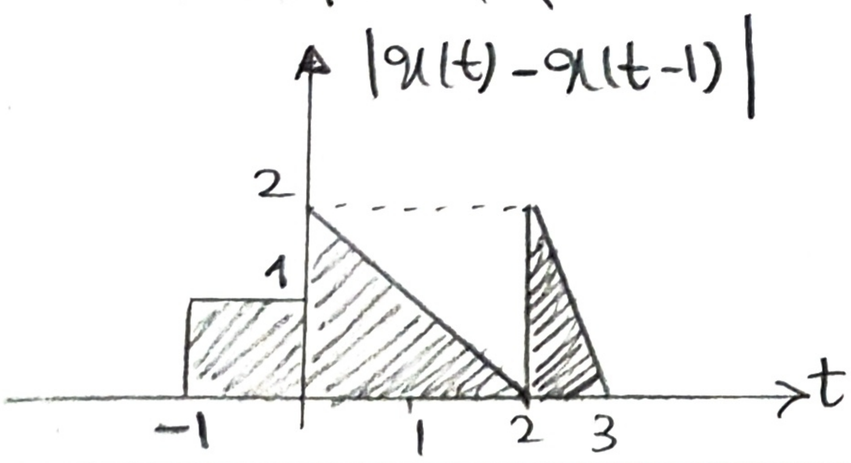




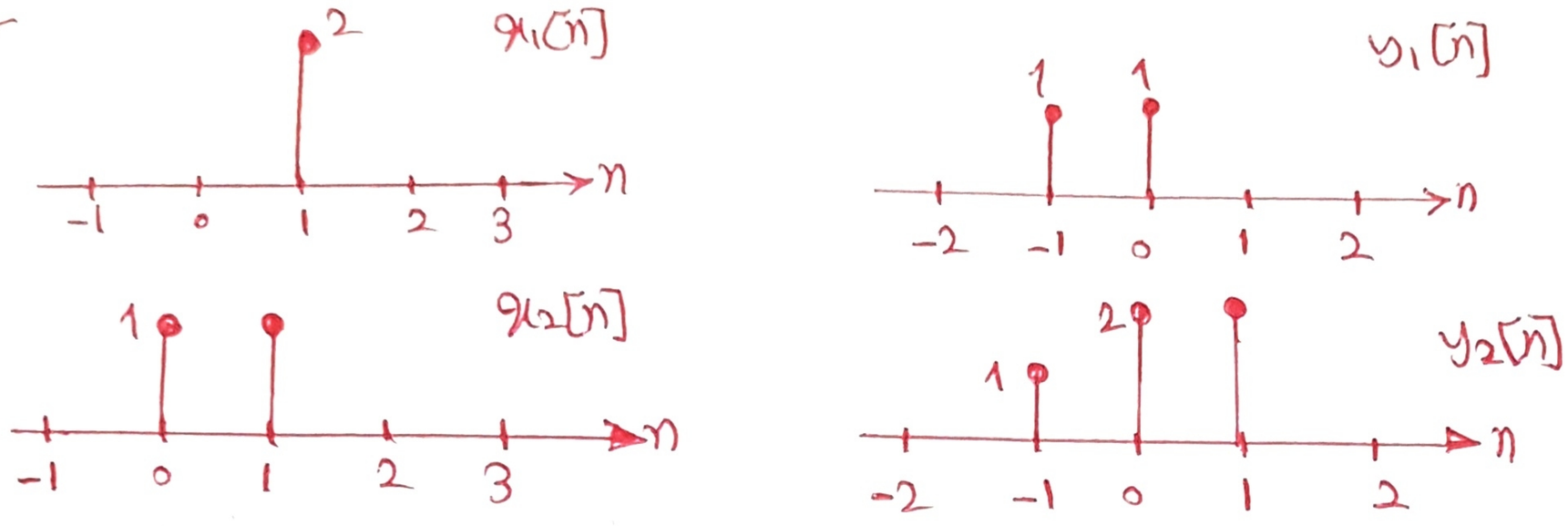


$$x(t) = \begin{cases} -1 & -1 \leq t \leq 0 \\ -t+1 & 0 \leq t \leq 1 \\ -2t+4 & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 & 0 \leq t \leq 1 \\ -t+2 & 1 \leq t \leq 2 \\ -2t+6 & 2 \leq t \leq 3 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} -1 & -1 \leq t \leq 0 \\ -t+2 & 0 \leq t \leq 1 \\ -t+2 & 1 \leq t \leq 2 \\ -2t+6 & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$



سؤال 6



در یک سیستم خطی و تغییر ناپذیر با زمان (LTI) اگر ورودی ترکیب خطی و انتقالی از ورودی یا ورودی های دیگر باشد، خروجی آن نیز برابر ترکیب خطی و انتقالی از خروجی های مربوطه است:

$$\text{if } x(t) = a x_1(t-t_1) + b x_2(t-t_2) + \cdots \xrightarrow[\text{LTI}]{\text{سیستم}} y(t) = a y_1(t-t_1) + b y_2(t-t_2) + \cdots$$

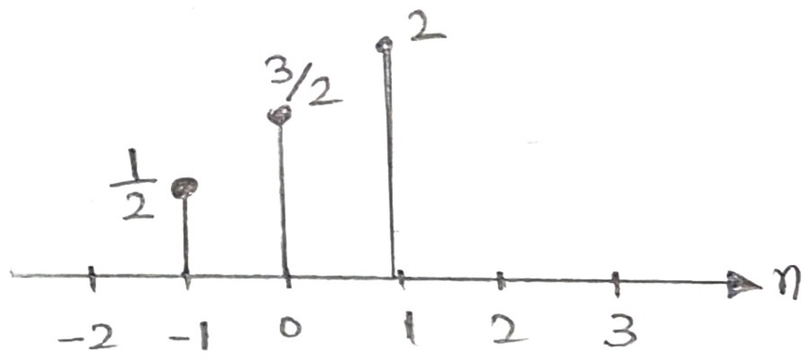
ورودی $x_2[n]$ را می توان به صورت روبرو بر حسب $x_1[n]$ نوشت:

$$x_2[n] = \frac{1}{2} x_1[n] + \frac{1}{2} x_1[n+1]$$

اگر سیستم بخواهد LTI باشد، رابطه $y_2[n] = \frac{1}{2} y_1[n] + \frac{1}{2} y_1[n+1]$ باید بین خروجی ها برقرار باشد. اما چون این رابطه برقرار نیست بنابراین سیستم فوق LTI نیست. اما سه حالت امکان پذیر است:

1- سیستم خطی است ولی تغییر پذیر با زمان است؛ در این حالت پاسخ به ورودی ضربه قابل محاسبه است:

$$\delta[n] = x_2[n] - \frac{1}{2} x_1[n] \rightsquigarrow \underbrace{h[n]}_{\text{پاسخ به ورودی ضربه}} = y_2[n] - \frac{1}{2} y_1[n]$$



2- سیستم غیر خطی ولی تغییر ناپذیر با زمان است؛ در این حالت با توجه به اطلاعات مسأله پاسخ ضربه قابل محاسبه نیست.

3- سیستم غیر خطی و تغییر پذیر با زمان است؛ پاسخ ضربه قابل محاسبه نیست

موفق باشید

محمدرضا جبار