



دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده برق و کامپیوتر

بسم الله الرحمن الرحيم

تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مدرس: مسعود عمومی

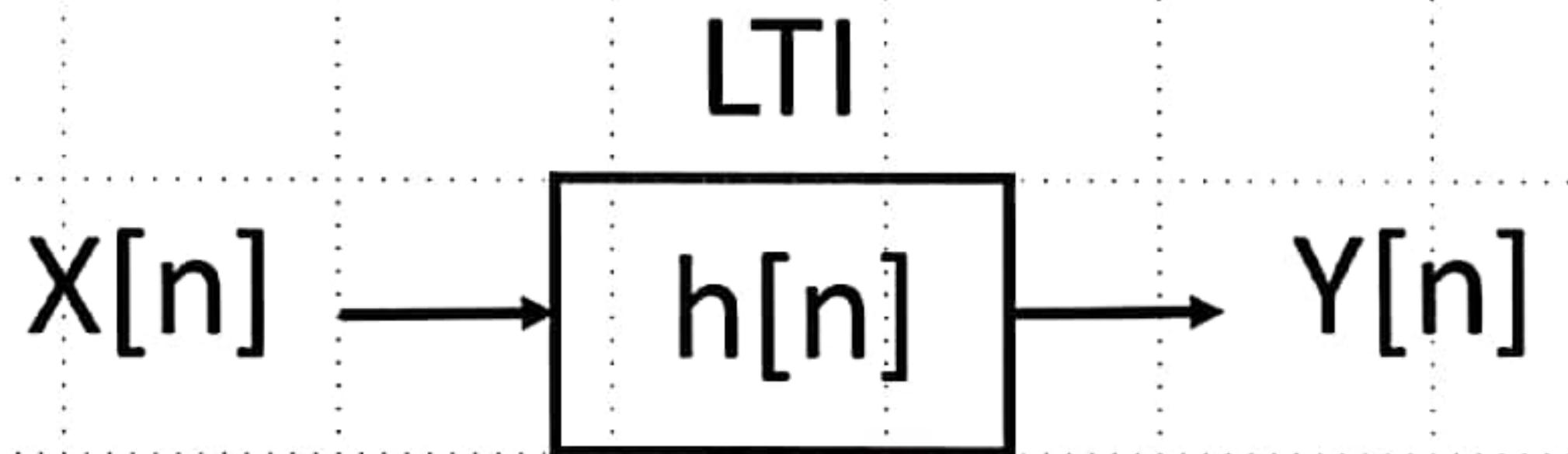
جلسه نوزدهم - بخش‌های 10.1 و 10.2 کتاب

با سلام خدمت دانشجویان محترم

Activate Windows 1

Go to PC settings to activate Windows

Scanned by CamScanner



THE z-TRANSFORM

تبدیل Z

فرض : $x[n] = z^n$ ($z = re^{j\omega}$) ورودی کمی مخلط

$$\Rightarrow y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{n-k} = z^n \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k}$$

$$= z^n \cdot H(z)$$

H(z)

Activate Windows 2

Go to PC settings to activate Windows

سچہ: باعث یک سسَم LTI بِورُورِی کا لی خْلَط بِرُكْل
 h[n] دنبالہ کا لی خْلَط بِرُكْل Z^n دنبالہ کا لی خْلَط بِرُكْل
 h[n] Z^n را بِرُكْل H(z) = $\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}$ دَرَان اس تکه در آن H(z) Z^n
 می نامیں اصطلاح بِرُكْل های کا لی خْلَط بِرُكْل LTI لفَرْجی میوو.

The z -transform of a general discrete-time signal $x[n]$ is defined as

تعريف تبدیل Z

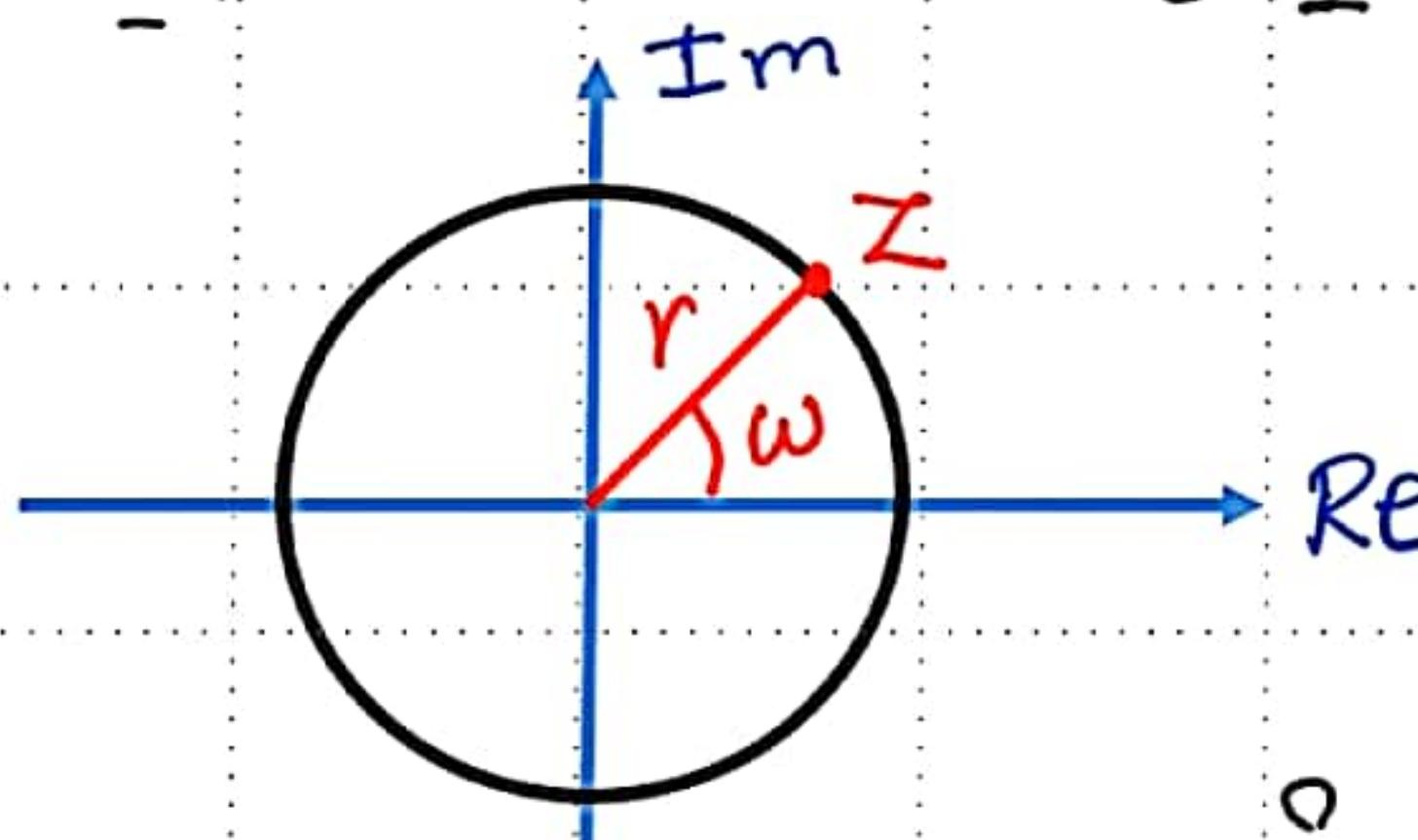
$$X(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n},$$

where z is a complex variable. For convenience, the z -transform of $x[n]$ will sometimes be denoted as $\mathcal{Z}\{x[n]\}$ and the relationship between $x[n]$ and its z -transform indicated as

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z).$$

نکته ۱: تبدیل: $X(z) = Z\{x[n]\}$ ، زمانی سیگنال را به تابع

تبدیل می‌کند. $Z = re^{j\omega}$ یعنی، I مختلط حوزه در حوزه محدودی $X(z)$ دارد.



صفحة Z مختلط

$$\begin{cases} r = |Z| \\ \omega = \angle Z \end{cases}$$

نکته ۲: اگر تبدیل Z مختلط $x[n]$ دایره‌ای به ساعع واحد (رصیغه) می‌سینه سود:

$$r=1 \Rightarrow Z=e^{j\omega} \Rightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = F\{x[n]\}$$

تبدیل محدود که نام تبدیل فوریه لسته تعریف خواهد شد (ساده آینده رس)

$$X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = F\{x(t)\} \iff X(z) = F\{x[n]r^{-n}\}$$

نکته ۳: وجود یا عدم وجود بدل Z برای یک سیگنال رسانه

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\omega})^n$$

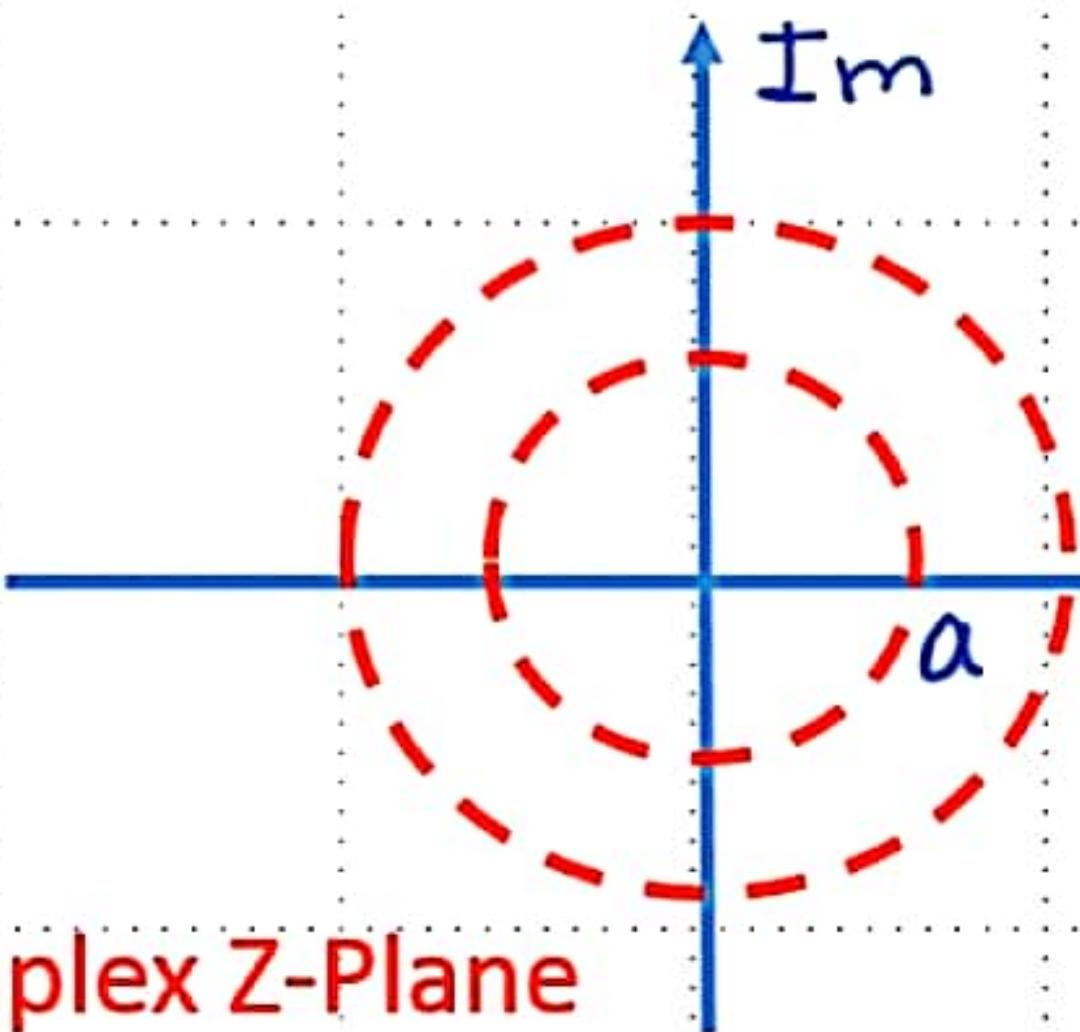
مجموع $x[n]$ لستی به همگردان یا اوگریندن

دارد و لذا معdar $r = |z|$ تعیین نماید.

است. به عبارت دیگر $X(z)$ برای یک سیگنال $x[n]$ ، ممکن است فقط برای محدوده ک

خاص از $|z| = r$ قابل تعریف باشد. به محدوده همگردان بدل Z بالوچه

به معdar r ، ناحیه همگردانی آن لغنه حی می شود.



Complex Z-Plane

$$ROC : |z| > r \quad r = |z| < b \quad 0 < a, b < \infty$$

ناحیه همگرایی تبدیل Z موارد بیرونی خلعه ای

بن دو راه با برگشت سد اعانت داشت، داخل یک را به وبا خارج یک را کره است.

تبدیل Z برخی از سیگنال های مهم

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^{n-n} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az)^{-n} \\ &= \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \end{aligned}$$

اگر $|az| < 1 \Rightarrow |z| > |a|$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\{a^n u[n]\} = \frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad ROC: |z| > |a|$$

(جواب a) $x[n] = -a^n u[-n-1]$ (مسئلہ)

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -a^n u[-n-1] \cdot z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} (az^{-1})^n \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} (az^{-1})^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}z} \\ &= \frac{-a^{-1}z}{1 - a^{-1}z} = \frac{-1}{az^{-1} - 1} = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad \text{کی } |a^{-1}z| < 1 \\ &\Rightarrow |z| < |a| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{Z}\{-a^n u[-n-1]\} = \frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}}, \text{ ROC: } |z| < |a|$$

مثال ٣) نسخة رونالد اخر

$$\begin{cases} \mathbb{Z}\{u[n]\} = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}, \text{ ROC: } |z| > 1 \\ a=1 \Rightarrow \mathbb{Z}\{-u[-n-1]\} = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}, \text{ ROC: } |z| < 1 \end{cases}$$

مثال ٤) $x[n] = \delta[n]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = (1) \cdot z^0 = 1, \forall z$$

$$\Rightarrow \mathbb{Z}\{\delta[n]\} = 1, \forall z$$

مثال

Let us consider a signal that is the sum of two real exponentials:

$$x[n] = 7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n].$$

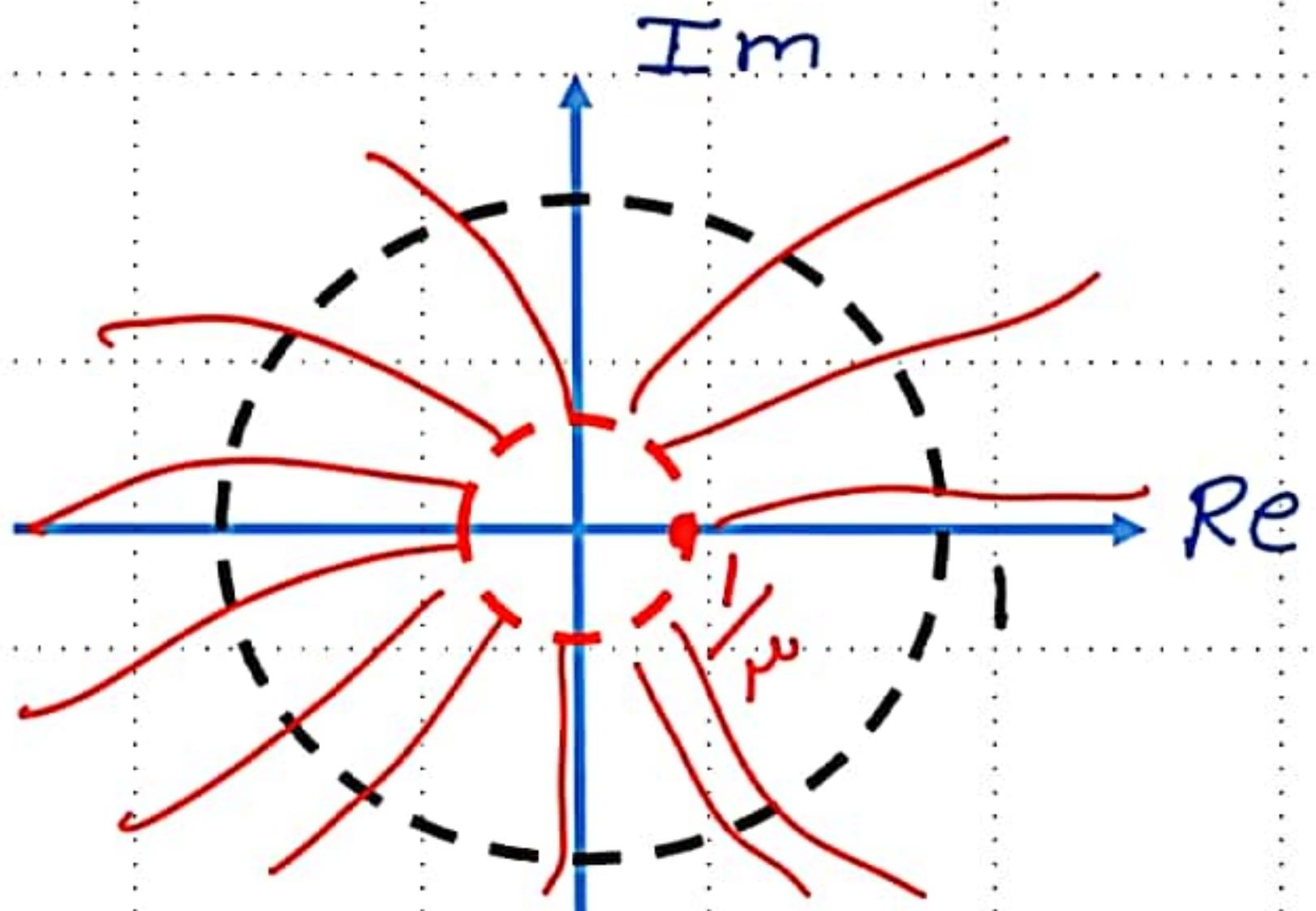
$$\Rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ 7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \right\} z^{-n} = 7 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] z^{-n} - 6 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] z^{-n}$$

$$= 7 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n - 6 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n = \frac{7}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{6}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1 - \frac{3}{2}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}$$

$$= \frac{z(z - \frac{3}{2})}{(z - \frac{1}{3})(z - \frac{1}{2})}.$$

نحوه حمل رای: $|(1/3)z^{-1}| < 1$ and $|(1/2)z^{-1}| < 1$
equivalently, $|z| > 1/3$ and $|z| > 1/2$.

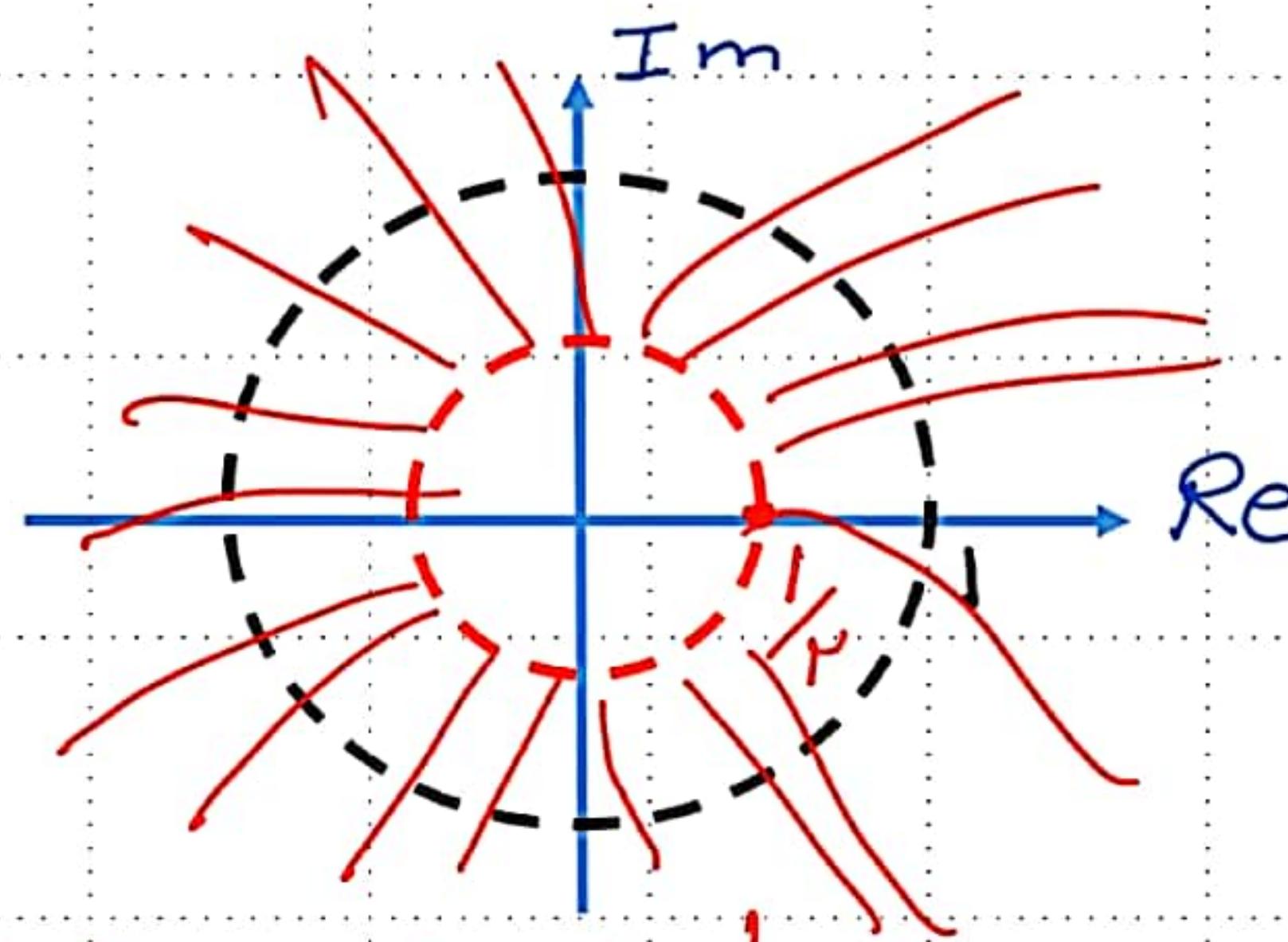
Thus, the region of convergence is $|z| > 1/2$.



$$ROC_1 : |z| > \frac{1}{\mu}$$

نایابی پل اسراک دو ناحیه در شکم:

$$ROC : |z| > \frac{1}{\mu}$$



$$ROC_2 : |z| > \frac{1}{\mu}$$

Let us consider the signal

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) u[n] = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{3}e^{j\pi/4}\right)^n u[n] - \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}\right)^n u[n].$$

$$\Rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{3}e^{j\pi/4}\right)^n u[n] - \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}\right)^n u[n] \right\} z^{-n}$$

$$= \frac{1}{2j} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}e^{j\pi/4}z^{-1}\right)^n - \frac{1}{2j} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2j} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{j\pi/4}z^{-1}} - \frac{1}{2j} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1}} \Rightarrow X(z) = \frac{\frac{1}{3\sqrt{2}}z}{(z - \frac{1}{3}e^{j\pi/4})(z - \frac{1}{3}e^{-j\pi/4})}$$

$$|(1/3)e^{j\pi/4}z^{-1}| < 1 \text{ and } |(1/3)e^{-j\pi/4}z^{-1}| < 1 \Rightarrow$$

$$|z| > 1/3$$

ناحیہ ھمارا ہے:

$a^n u[n]$ تبدیل Z هر ترکیب خطی از روابع کی (حقیقی یا مختلط) نگه دارد:

است که به صورت $\frac{z}{z-a}$ ترکیب خطی از کسرهای ساده یا $a^n u[-n-1]$

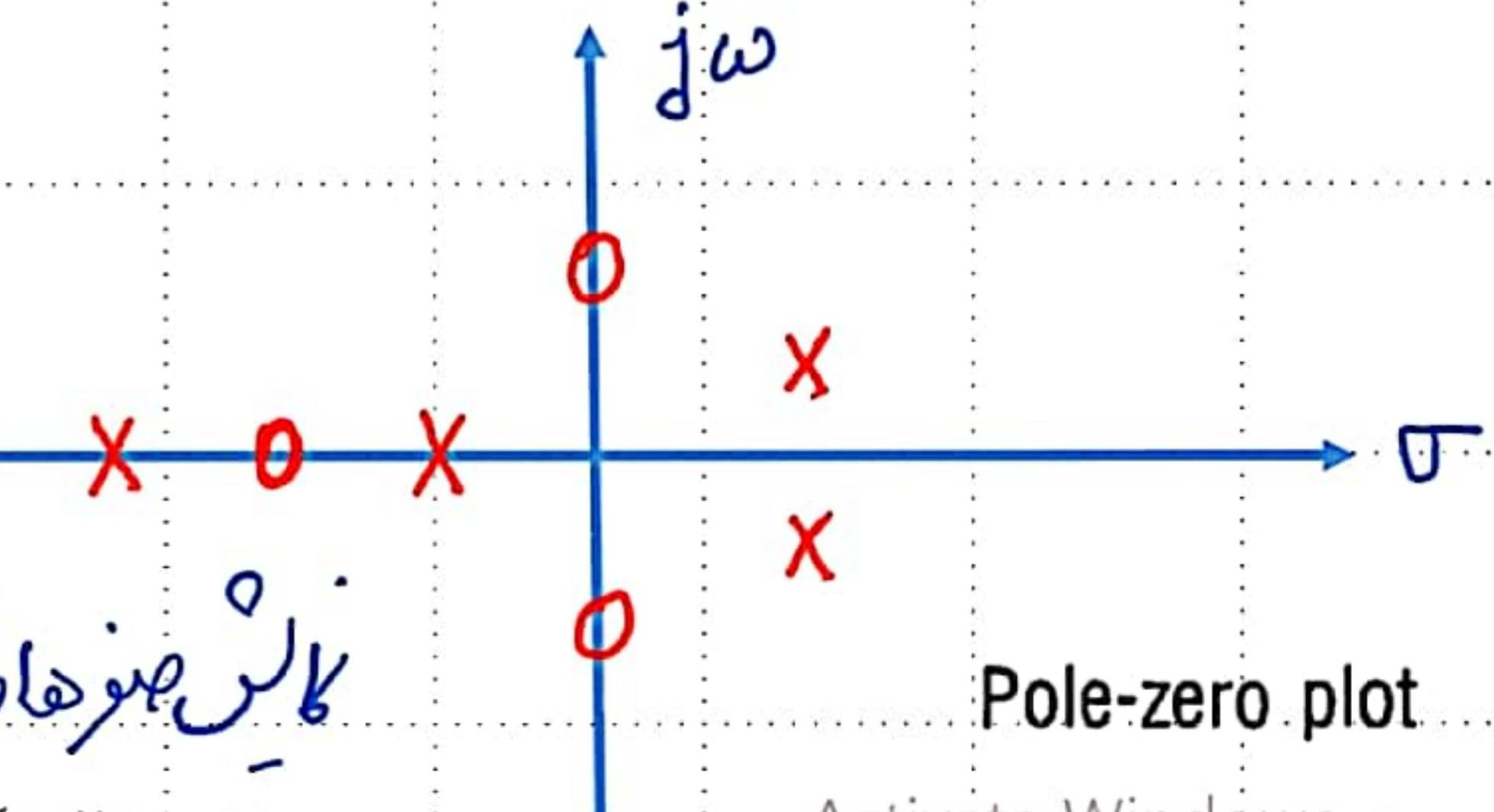
یک کسرگویای $X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ خواهد بود.

(جند جمله ای صورت) و (جند جمله ای مخرج) دارای ضرائب حقیقی هستند.

$X(z)$: صفرهای (Zeros) 0

$X(z)$: عطفهای (poles) X

کالس صفرها و عطفهای (میال)



Pole-zero plot

ناحیه همگرایی در تبدیل Z و خواص آن

In the preceding section, we saw that a complete specification of the Z transform requires not only the algebraic expression for $X(z)$, but also the associated region of convergence.

very different signals can have identical algebraic expressions for $X(z)$

so that their Z transforms are distinguishable *only* by the region of convergence.

In this section, we explore some specific constraints on the ROC for various classes of signals.

Property 1: The ROC of $X(z)$ consists of a ring in the z -plane centered about the origin.

خاصیت اول: خواص آن حلقه هایی به مرکزیت این را دارند

خواص آن حلقه Z است. (جمله ای داشته باشد)

That is, the ROC of the z-transform of $x[n]$ consists of the values of z for which $|x[n]|r^{-n}$ is absolutely summable:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|r^{-n} < \infty.$$

اِن سُرطَنْعَلَتِبِ رَلْتَلی دارد.

Property 2: The ROC does not contain any poles.

خاصیت دوم: برای $X(z)$ های سفرم کردهای گویا، هیچ‌کدام از قطب‌ها درون ROC قرار نمی‌کرند. (چون $X(z)$ در محل قطب‌های بی‌نهایت می‌سود)

Property 3: If $x[n]$ is of finite duration, then the ROC is the entire z -plane, except possibly $z = 0$ and/or $z = \infty$.

خاصیت سوم: برای ROC دنباله‌های با پهنا کی زمانی محدود، کاملاً صنفی Z (ملک احتمال) و با $z=0$ و $z=\infty$ است.

A finite-duration sequence has only a finite number of nonzero values, extending, say, from $n = N_1$ to $n = N_2$, where N_1 and N_2 are finite. Thus, the z-transform is the sum of a finite number of terms; that is,

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n}.$$

For z not equal to zero or infinity, each term in the sum will be finite, and consequently,

$X(z)$ will converge.

مجموع فوَق حَتَّى حَكْرَا خَواهِدِ بُور، اَنْزَلَ

اَنْزَلَ $N_1 < 0$ & $N_2 > 0 \Rightarrow$ مُنْفِي Z مُوجِبُ (اَسْتَو) و مُنْفِي Z مُوجِبُ (اَسْتَو) لذَا مُنْفِي Z مُوجِبُ (اَسْتَو) اَنْزَلَ

اَنْزَلَ $N_1 > 0$ ($N_2 > N_1$) \Rightarrow مُنْفِي Z مُوجِبُ (اَسْتَو) لذَا مُنْفِي Z مُوجِبُ (اَسْتَو) \cap ROC اَنْزَلَ

در جمیع فوچ فرط توان دهای مثبت Z موجود است \Rightarrow اگر $N_2 \leq 0$ ($N_1 < N_2$)

لذا $Z = \infty$ باشد اما ROC حی تواند در $Z = 0$

$$Z\{\delta[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = \delta[0] z^0 = 1, \text{ ROC: } \forall z \quad (\text{سالم})$$

$$Z\{\delta[n-1]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-1] z^{-n} = \delta[-1] z^1 = \frac{1}{z}, \text{ ROC: } \forall z \neq 0$$

$$Z\{\delta[n+1]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n+1] z^{-n} = \delta[1] z^{-1} = z, \text{ ROC: } \forall z \neq \infty$$

Property 4: If $x[n]$ is a right-sided sequence, and if the circle $|z| = r_0$ is in the ROC, then all finite values of z for which $|z| > r_0$ will also be in the ROC.

خاصیت چهارم: اگر $x[n]$ یک دنبالہ سمت راستی باشد و دایره $|z| = r_0$ در

آن فرار داشته باشد، همه مقادیر محدود Z که $r_0 < |Z| < ROC$ آن فرار دارند.

ب عبارت دیگر $ROC \subset \{z : z \neq \infty\}$ دنبالہ سمت راستی، همه نقاط خارج از دایره $|z| = r_0$ است.

A right-sided sequence is zero prior to some value of n , say, N_1 . For right-sided sequences in general,

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{\infty} x[n]z^{-n},$$

where N_1 is finite and may be positive or negative.

نکته: قطعاً در ROC لیست چون در $X(z)$ توان های مثبت $\frac{1}{z}$ وجود دارند.

$N_1 > 0$ فرادرد که ROC در صورتی در $|z| = \infty$ باشد.

If the circle $|z| = r_0$ is in the ROC, then $x[n]r_0^{-n}$ is absolutely summable.

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|r_0^{-n} < \infty \Rightarrow \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]|r_0^{-n} < \infty$$

Now consider $|z| = r_1$ with $r_1 > r_0$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]|r_1^{-n} &= \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^n \cdot r_0^{-n} \\ &< \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{N_1} \cdot \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]|r_0^{-n} &< \infty \Rightarrow |z| = r_1 \subset \text{ROC} \\ &\underbrace{}_{< \infty} \quad \underbrace{}_{< \infty} \end{aligned}$$

Property 5: If $x[n]$ is a left-sided sequence, and if the circle $|z| = r_0$ is in the ROC, then all values of z for which $0 < |z| < r_0$ will also be in the ROC.

خاصیت پنجم: اگر $x[n]$ یک دنباله سمت چپی باشد و $|z| = r_0$ بر روی ROC در $|z| = r_0$ قرار دارد، آن‌ها را برای $0 < |z| < r_0$ نیز در ROC قرار دارند.

بر عبارت دیگر، همه مقادیر z که در $|z| < r_0$ قرار داشته باشند، همچنان‌چهار $x[n]$ دنباله‌های سمت چپی، حقیقت نعطای دارند (با این $z \neq 0$ است).

A left-sided sequence is zero after some value of n , say, N_2 . For left-sided sequence

in general,

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{N_2} x[n]z^{-n},$$

where N_2 is finite and may be positive or negative.

مله: $X(z)$ در $|z| = \infty$ قطعاً ROC نیست چون در آن‌ها مثبت z وجود ندارد. $|z| = 0$ در صورتی در ROC قرار دارد که $N_2 \leq 0$.

If the circle $|z| = r_0$ is in the ROC, then $x[n]r_0^{-n}$ is absolutely summable.

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|r_0^{-n} < \infty \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{N_p} |x[n]|r_0^{-n} < \infty$$

Now consider $|z| = r_1$ with $0 < r_1 < r_0$

$$\Rightarrow \frac{r_0}{r_1} > 1$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{N_p} |x[n]|r_1^{-n} &= \sum_{n=-\infty}^{N_p} |x[n| \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^n \cdot r_0^{-n} \\ &< \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{N_p} \cdot \sum_{n=-\infty}^{N_p} |x[n]|r_0^{-n} < \infty \end{aligned}$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{<\infty}$ $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{<\infty}$

$$\Rightarrow |z| = r_1 \subset \text{ROC}$$

Property 6: If $x[n]$ is two sided, and if the circle $|z| = r_0$ is in the ROC, then the ROC will consist of a ring in the z -plane that includes the circle $|z| = r_0$.

خواص سیم:
اگر $|z| = r_0$ دایره و دو سمتی باشد و دنباله $x[n]$ که در نیاز باشد، خارج از صفحه $|z| = r_0$ باشد، آنچه در زیر مذکور است که در نیاز باشد.

قرار دادن $|z| = r_0$ در نیاز باشد، خارج از صفحه $|z| = r_0$ باشد، آنچه در زیر مذکور است که در نیاز باشد.

در بررسی کرد،

$$x[n] = x_R[n] + x_L[n]$$

\downarrow دو سمتی \downarrow سمت راستی

$$\begin{cases} x_R[n] = 0, & \forall n < N_1 \\ x_R[n] \neq 0, & N_1 \leq n < +\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_L[n] = 0, & \forall n > N_2 \\ x_L[n] \neq 0, & -\infty < n \leq N_2 \end{cases}$$

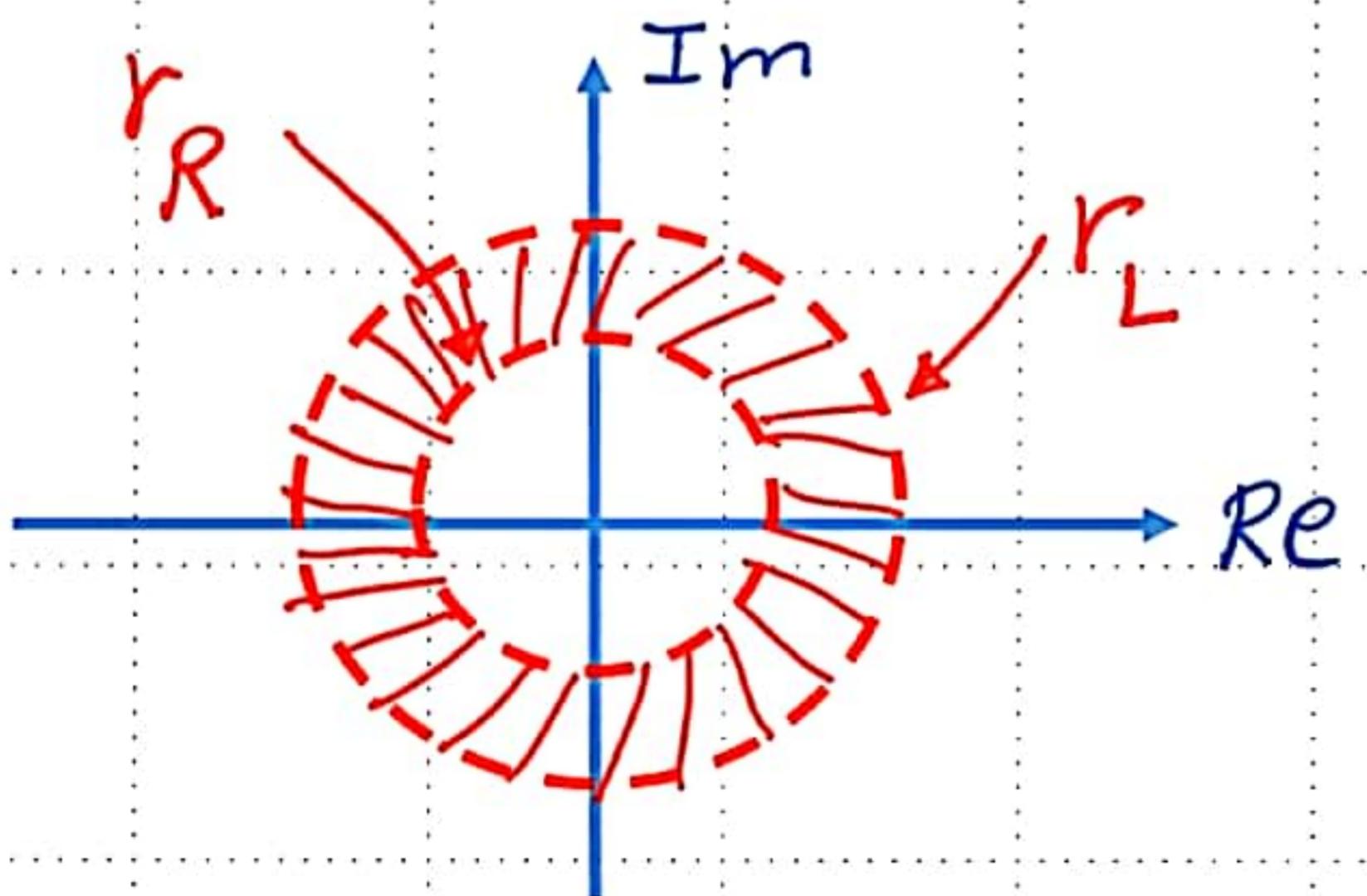
مافرض و جود تبدیل Z برای $x[n]$ داریم:

$$ROC_x = ROC_{x_R} \cap ROC_{x_L} \Rightarrow$$

ناحیه هگل را کی تبدیل Z دنباله دو سمتی

و فصل سرک نعایط خارجی دایره باعث داخل یک دایره ختم برگز آن

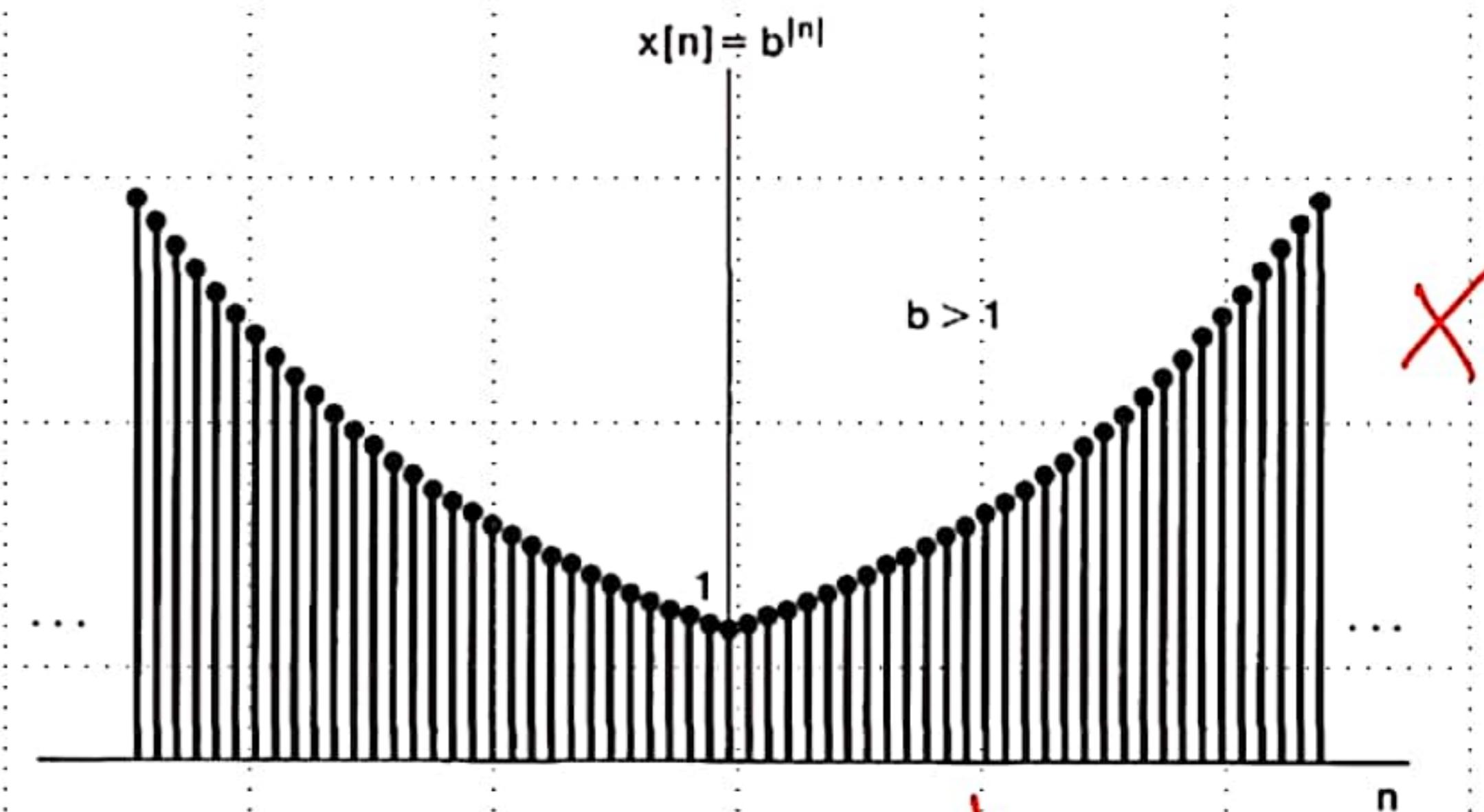
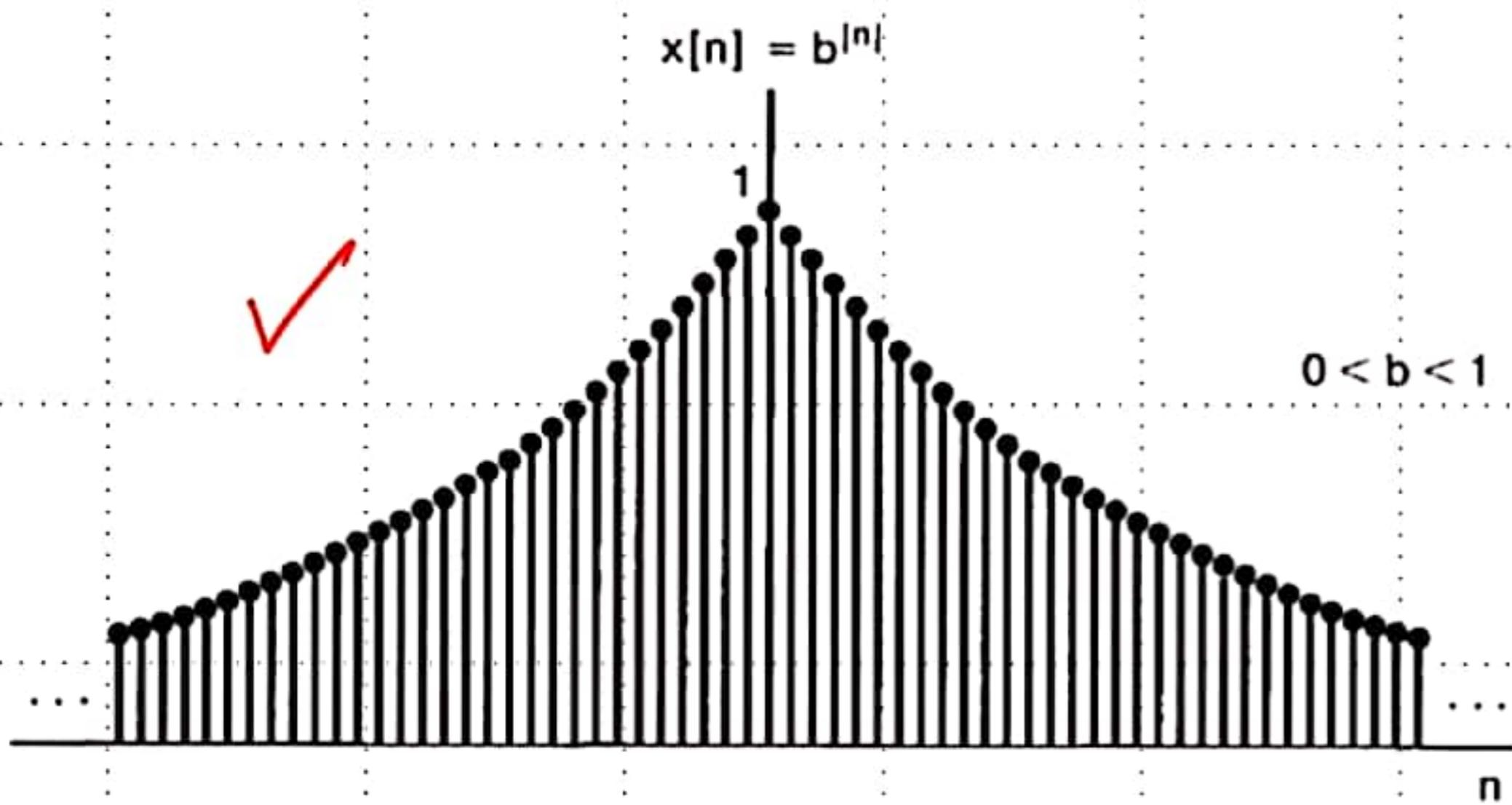
است، که در مورخ و جود به صورت یک حلقة است.



$$r_R < r_L$$

$$x[n] = b^{|n|}, \quad b > 0. \quad \rightarrow \quad x[n] = b^n u[n] + b^{-n} u[-n-1].$$

مثال



$$b^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - bz^{-1}}, \quad |z| > b,$$

$$b^{-n} u[-n-1] \leftrightarrow \frac{-1}{1 - b^{-1}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{b}.$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}} - \frac{1}{1 - b^{-1}z^{-1}} = \frac{b^2 - 1}{b} \frac{z}{(z - b)(z - b^{-1})}, \quad b < |z| < \frac{1}{b}.$$

$0 < b < 1$

مثال

Consider the signal

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1, a > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Then

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n = \frac{1 - (az^{-1})^N}{1 - az^{-1}} = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z - a}.$$

Since $x[n]$ is of finite length, it follows from Property 3 that the ROC includes the entire

z -plane except possibly the origin and/or infinity.

: بناءً على مقدور است ونعنيه هكذا في بدل Z آن $X(z)$ صفر z است، اما:

$\frac{1}{z}$ نیت، زیرا $X(z)$ قابل توان های سمت $\frac{1}{z}$ است.

$X(z)$ قادر توان های سمت z است.

$$X(z) = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z - a}$$

جزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها _ دکتر عصوی : میر

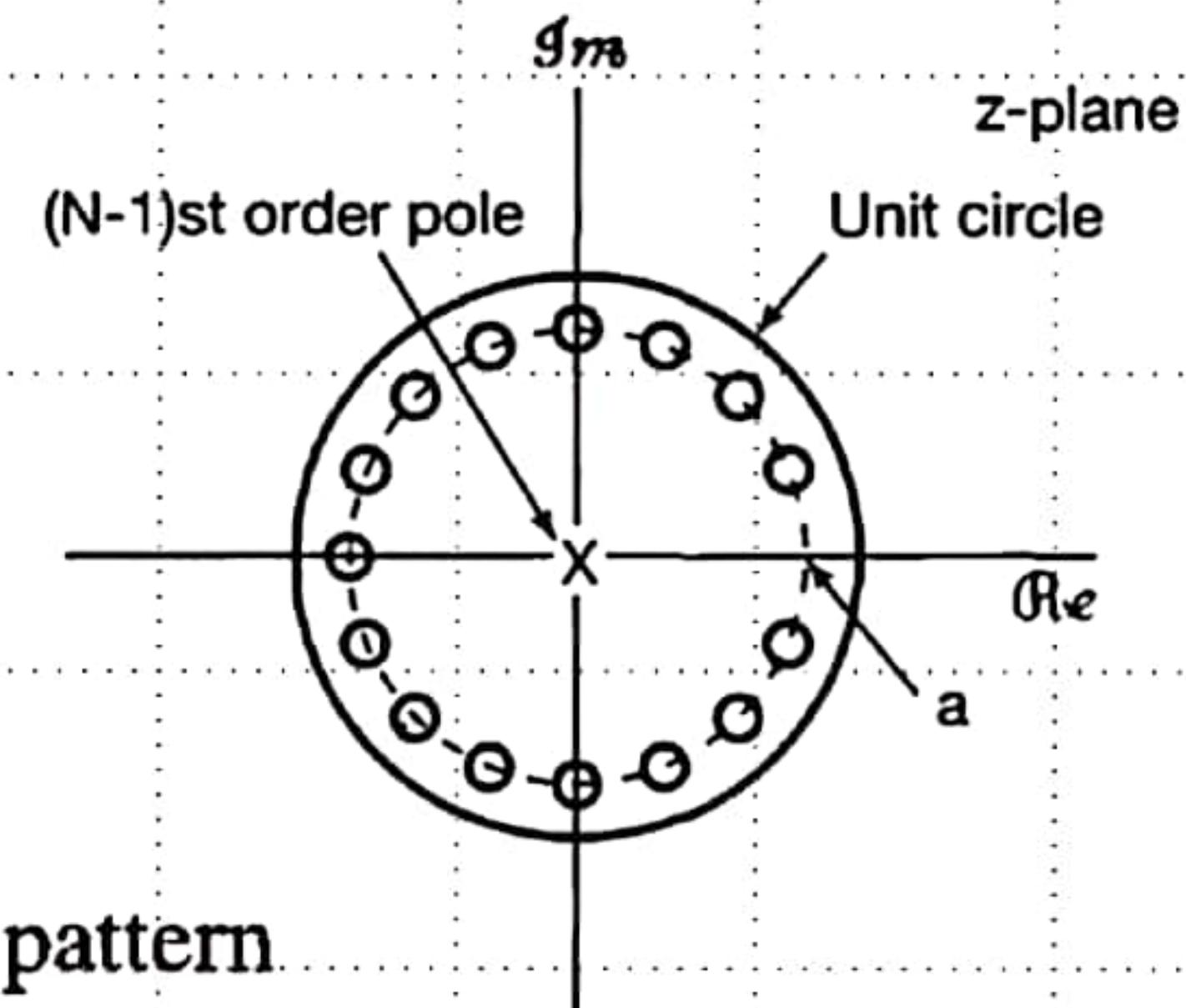
The N roots of the numerator polynomial are at

$$z_k = ae^{j(2\pi k/N)}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

The root for $k = 0$ cancels the pole at $z = a$. Consequently, there are no poles other than at the origin. The remaining zeros are at

$$z_k = ae^{j(2\pi k/N)}, \quad k = 1, \dots, N - 1.$$

This is evident that there is a pole of order $N - 1$ at $z = 0$.



The pole-zero pattern

نکته: با بوجبه ه خواص لغة سده (رسور) ROC نایبراسیا می توان شد که فرستاده:

یک دنباله باستینال زمان گستره باشد و یا در مکان از کاره زیرقرار گیرد:

۱- دنباله با طول محدود است و ROC حجم صفحه زاس متر احتمال نباشد.

۲- دنباله سمت راست است و ROC آن نعاط خارج یک دایره متر احتمال نباشد.

۳- دنباله سمت چپ است و ROC آن نعاط داخل یک دایره متر احتمال نباشد.

۴- دنباله دو سمت است و ROC آن حلقة ای محدودین دور ایه باش کرست نباشد.

در هر صورت نایبراسی همکاری می تواند همچ قطبی از $(Z)X$ را در بگیرد.

Property 7: If the z-transform $X(z)$ of $x[n]$ is rational, then its ROC is bounded by poles or extends to infinity.

خاصیت 7: اگر $X(z)$ عددی باشد، ممکن است محدود بباشد، ممکن است داخل یا خارج از دایره محدود باشد و ممکن است محدود نباشد.

Property 8: If the z-transform $X(z)$ of $x[n]$ is rational, and if $x[n]$ is right sided, then the ROC is the region in the z -plane outside the outermost pole—i.e., outside the circle of radius equal to the largest magnitude of the poles of $X(z)$. Furthermore, if $x[n]$ is causal (i.e., if it is right sided and equal to 0 for $n < 0$), then the ROC also includes $z = \infty$.

خاصیت هشتم: اگر $x[n]$ دنباله‌ای سمیت راستی و $X(z)$ بدل ز آن یک

کسر کویا است، آن ناچیه‌ای خارج از ROC ، دارایه باقیمانده

بزرگ‌ترین قطب $X(z)$ دنباله‌ای علی‌باشد یعنی

برای $n < 0$ صفر باشد $\text{ROC} = \{z : |z| > R\}$.

Property 9: If the z -transform $X(z)$ of $x[n]$ is rational, and if $x[n]$ is left sided, then the ROC is the region in the z -plane inside the innermost nonzero pole—i.e., inside the circle of radius equal to the smallest magnitude of the poles of $X(z)$ other than any at $z = 0$ and extending inward to and possibly including $z = 0$. In particular, if $x[n]$ is anticausal (i.e., if it is left sided and equal to 0 for $n > 0$), then the ROC also includes $z = 0$.

خاصیت سوم: اگر $x[n]$ دنباله‌ای سمیت چوپی و $X(z)$ بدل زد

کسر نباید، آن ناحیه‌ای داخل بینه داره باشاع برابر با اندازه

لوحدت رنقط $X(z)$ است. از طرف دیگر، اگر $X(z)$ دنباله‌ای صریح باشد،

یعنی برای $n > 0$ همی شود، $Z = 0$ بدل زد.

✓ Thus, for right-sided sequences with rational transforms, the poles are all closer to the origin than is any point in the ROC.

✓ Thus, for left-sided sequences, the poles of $X(z)$ other than any at $z = 0$ are farther from the origin than is any point in the ROC.

For a given pole-zero pattern, or equivalently, a given rational algebraic expression $X(z)$, there are a limited number of different ROCs that are consistent with the preceding properties. To illustrate how different ROCs can be associated with the same pole-zero pattern, we present the following example.

Let us consider all of the possible ROCs that can be connected with the function

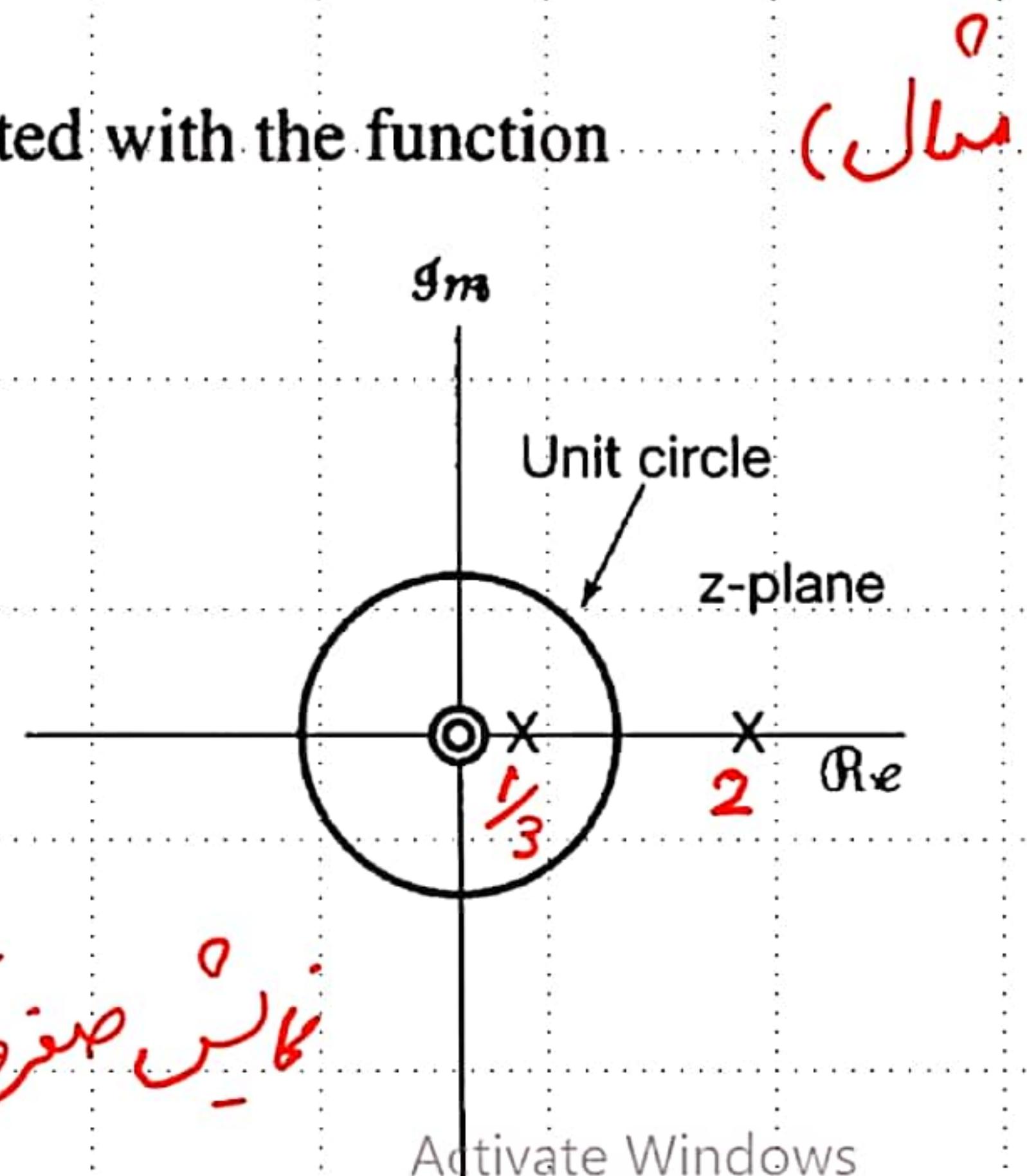
$$X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - 2z^{-1})}$$

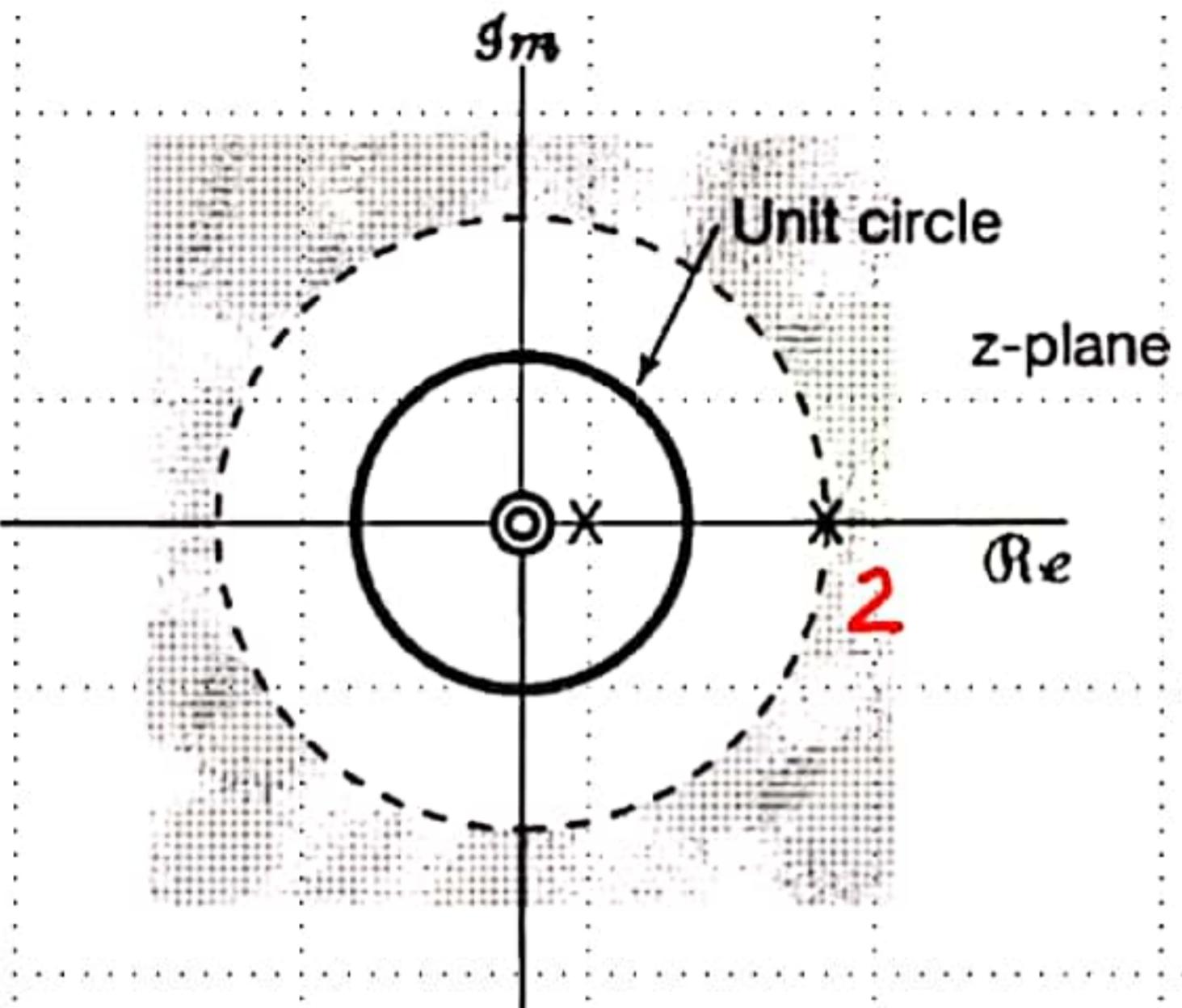
$$X(z) = \frac{z^2}{(z - \frac{1}{3})(z - 2)}$$

قطب های $X(z)$ عبارتند از:

$$P_1 = \frac{1}{3}, \quad P_2 = 2$$

نکل صفر و قطب

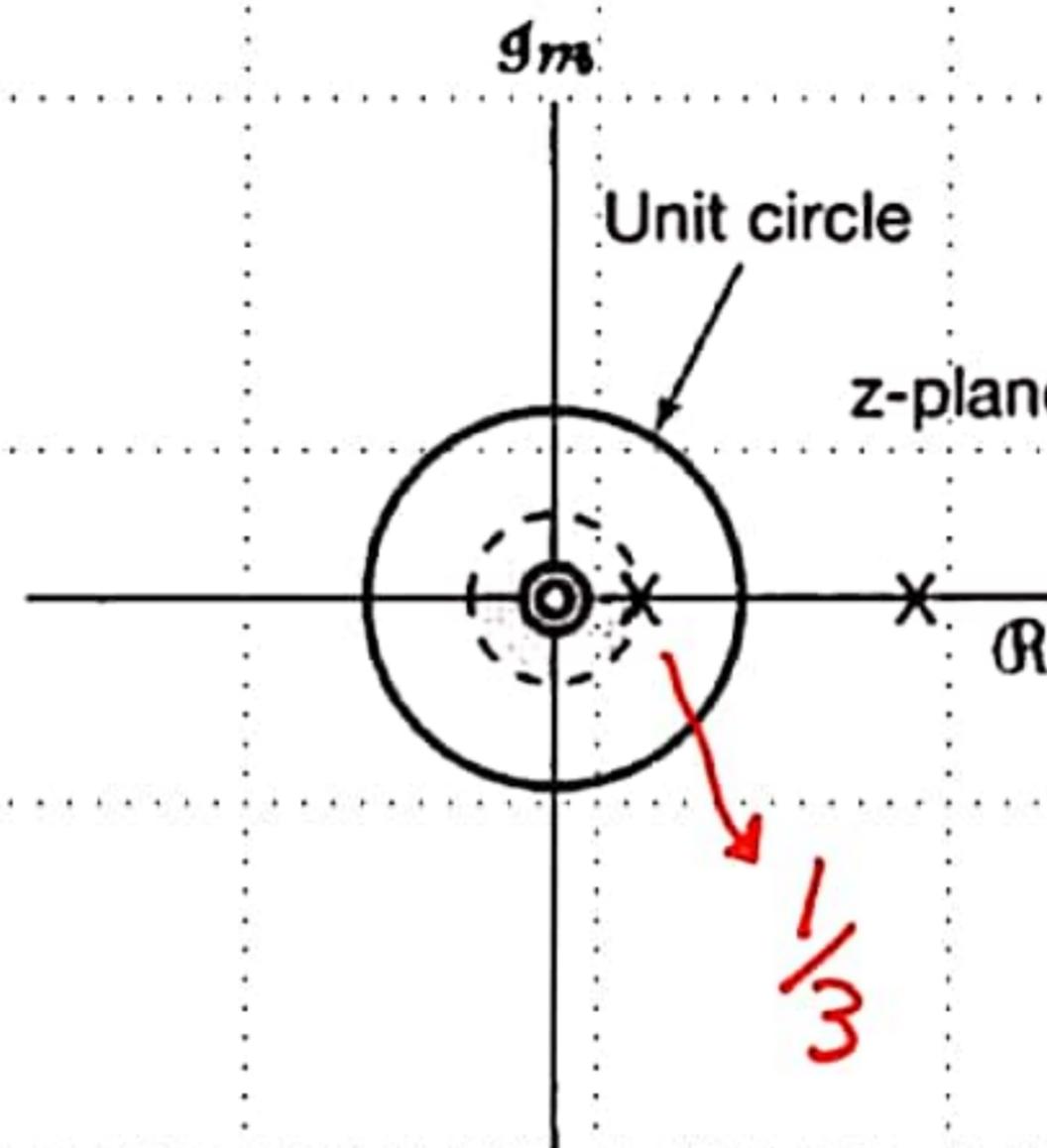




نالِنْ صفر و قطب

و ROC برای دنباله

مخت راستی

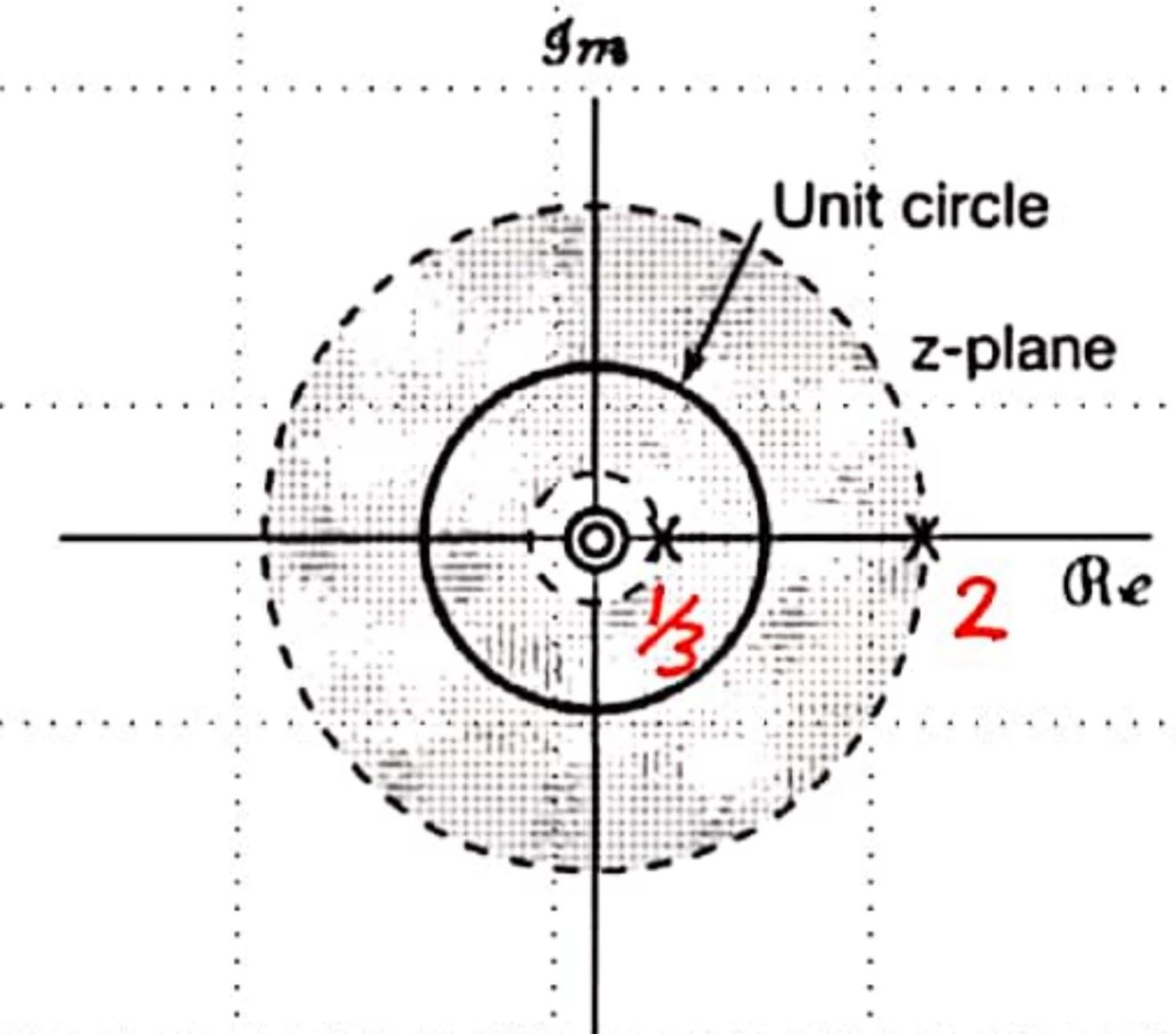


نالِنْ صفر و قطب

و ROC برای دنباله

سمت چپی

تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها _ دکتر عصومی



نالِنْ صفر و قطب

و ROC برای دنباله

دوستی



دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده برق و کامپیوتر

بسم الله الرحمن الرحيم

تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مدرس: مسعود عمومی

جلسه بیستم - بخش‌های 10.3 ، 10.5 و 10.6 کتاب

با سلام خدمت دانشجویان محترم

Activate Windows

Go to PC settings to activate Windows

Scanned by CamScanner

خواص تبدیل Z

Linearity

۱. خطی بودن

If

$$x_1[n] \xleftrightarrow{z} X_1(z), \text{ with ROC} = R_1,$$

and

$$x_2[n] \xleftrightarrow{z} X_2(z), \text{ with ROC} = R_2,$$

then

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{z} aX_1(z) + bX_2(z), \text{ with ROC containing } R_1 \cap R_2.$$

تلہ: ناحیہ گھر اک نہائی سرروط بہر کسی خطی (ولیٹل بالی) سطح پر میں $R_1 \cap R_2$ میں ماند (ساید بزرگتر)

اکٹان توسعه ناچیہ همگرائی (راز مرکب خطی دوستیل میں)

$$x[n] = x_1[n] - x_2[n]$$

$$x_1[n] = a^n u[n]$$

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > a$$

$$X_2(z) = \frac{az^{-1}}{1 - az^{-1}}, |z| > a$$

$$x[n] = \delta[n] \Rightarrow X(z) = 1 \quad \forall z$$

If $x[n] \xleftrightarrow{z} X(z)$, with ROC = R ,

Time Shifting

then

$x[n - n_0] \xleftrightarrow{z} z^{-n_0} X(z)$, with ROC = R , except for the possible addition or deletion of the origin or infinity.

۲. انتقال زمانی

Because of the multiplication by z^{-n_0} , for $n_0 > 0$ poles will be introduced at $z = 0$, which may cancel corresponding zeros of $X(z)$ at $z = 0$. Consequently, $z = 0$ may be a pole of $z^{-n_0}X(z)$ while it may not be a pole of $X(z)$. In this case the ROC for $z^{-n_0}X(z)$ equals the ROC of $X(z)$ but with the origin deleted. Similarly, if $n_0 < 0$, zeros will be introduced at $z = 0$, which may cancel corresponding poles of $X(z)$ at $z = 0$. Consequently, $z = 0$ may be a zero of $z^{-n_0}X(z)$ while it may not be a pole of $X(z)$. In this case $z = \infty$ is a pole of $z^{-n_0}X(z)$, and thus the ROC for $z^{-n_0}X(z)$ equals the ROC of $X(z)$ but with the $z = \infty$ deleted.

اگر $n_0 > 0 \Rightarrow$ میتواند قطب را نہ باند $Z=0 \rightarrow z^{-n_0}X(z)$
 درحالی کہ $X(z)$ قطب $Z=0$ نباید.

اگر $n_0 < 0 \Rightarrow$ میتواند صفر را نہ باند $Z=0 \rightarrow z^{-n_0}X(z)$
 درحالی کہ $X(z)$ قطب $Z=\infty$ نباید.

Scaling in the z-Domain

۳. تغییر مقیاس در حوزه Z

If $x[n] \xleftrightarrow{z} X(z)$, with ROC = R ,

then

$$z_0^n x[n] \xleftrightarrow{z} X\left(\frac{z}{z_0}\right), \text{ with ROC} = |z_0|R,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left\{z_0^n x[n]\right\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_0^n x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(\frac{z}{z_0}\right)^{-n} \\ &= X\left(\frac{z}{z_0}\right) \end{aligned}$$

$$r_l < \left| \frac{z}{z_0} \right| < r_r$$

$$\Rightarrow r_l |z_0| < |z| < r_r |z_0|$$

$$\Rightarrow ROC = |z_0|R$$

این اثبات است.

Activate Windows

Go to PC settings to activate Windows

Scanned by CamScanner

۴. وارونگی زمانی

Time Reversal

If

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z), \text{ with ROC} = R,$$

then

$$x[-n] \xleftrightarrow{z} X\left(\frac{1}{z}\right), \text{ with ROC} = \frac{1}{R}.$$

That is, if z_0 is in the ROC for $x[n]$, then $1/z_0$ is in the ROC for $x[-n]$.

$$\begin{aligned} Z\{x[-n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n] z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \left(\frac{1}{z}\right)^{-m} \\ &= X\left(\frac{1}{z}\right) \\ r_1 < \left|\frac{1}{z}\right| < r_p &\Rightarrow \frac{1}{r_p} < |z| < \frac{1}{r_1} \Rightarrow ROC = \frac{1}{R} \end{aligned}$$

این بات:

Time Expansion

۵. کشیدگی یا انبساط زمانی

However, the discrete-time concept of time expansion—i.e., of inserting a number of zeros between successive values of a discrete-time sequence $x[n]$ —can be defined and does play an important role in discrete-time signal and system analysis.

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{if } n \text{ is a multiple of } k \\ 0, & \text{if } n \text{ is not a multiple of } k \end{cases}$$

has $k - 1$ zeros inserted between successive values of the original signal.

In this case, if $x[n] \xleftrightarrow{z} X(z)$, with ROC = R ,

then

$$x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{z} X(z^k), \quad \text{with ROC} = R^{1/k}.$$



That is, if z is in the ROC of $X(z)$, then the point $z^{1/k}$ is in the ROC of $X(z^k)$. Also, if $X(z)$ has a pole (or zero) at $z = a$, then $X(z^k)$ has a pole (or zero) at $z = a^{1/k}$.

$$Z\{x_{(K)}[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(K)}[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left[\frac{n}{K}\right] z^{-n}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] z^{-mk}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] (z^K)^{-m} = X(z^K)$$

$$r_1 < |z^K| < r_2 \Rightarrow r_1^{1/k} < |z| < r_2^{1/k}$$

$$\Rightarrow ROC = R^{1/k}$$

۶. مزدوج گیری

Conjugation

If $x[n] \xleftrightarrow{z} X(z)$, with ROC = R ,

then $x^*[n] \xleftrightarrow{z} X^*(z^*)$, with ROC = R .

Consequently, if $x[n]$ is real, we can conclude $X(z) = X^*(z^*)$.

Convolution Property

۷. خاصیت کانولوشن

If $x_1[n] \xleftrightarrow{z} X_1(z)$, with ROC = R_1 ,

and $x_2[n] \xleftrightarrow{z} X_2(z)$, with ROC = R_2 ,

then

$$x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{z} X_1(z)X_2(z), \text{ with ROC containing } R_1 \cap R_2.$$

$$\begin{aligned} Z\{x_1[n] * x_2[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] x_2[n-k] \right) z^{-n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n-k] z^{-\underbrace{(n-k)}_{m}} \right) z^{-k} \\ &= X_2(z) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] z^{-k} = X_1(z) \cdot X_2(z) \end{aligned}$$

لَذَّة: نَاحِيَّةٌ هَمْلَرِيَّةٌ نَهَايِيَّةٌ مَرْبُوطَةٌ بِكَانُولُوسٍ دَوْدَنَالَهٍ بِالْيَسِّ طَافِلٌ (سَادِيَ بِرْلَرَ)

مُمْكِنٌ أَسْتَ (در ابراهیم، $X_2(z)$ ، $X_1(z)$) حَدْفٌ صَفْرٌ وَطَبْعِيُّ الْعَاقَ بِإِفْدَةٍ وَ ROC بِرَأْكَرَ سُودَ.

۸. تفاضل گیری زمانی مرتبه اول

First Difference

If $x[n] \leftrightarrow X(z)$, with ROC = R , $\Rightarrow Z\{x[n] - x[n-1]\} = ?$

$h[n] \triangleq \delta[n] - \delta[n-1]$ باعث ضربه سیستم تفاضل مرتبه اول

$$\Rightarrow H(z) = 1 - z^{-1} \quad \& \quad x[n] * h[n] = x[n] - x[n-1]$$

$$\Rightarrow Z\{x[n] - x[n-1]\} = X(z)H(z) = (1 - z^{-1})X(z) \checkmark$$

جذر دهنان R است، اما اعمال حذف $z=0$ و اضافه $z=\infty$ به آن

و جود دارد.

۹. انباشتگی یک دنباله

Accumulation or Summation

If $x[n] \xleftrightarrow{z} X(z)$, with ROC = R , $\Rightarrow \mathbb{Z} \left\{ \sum_{k=-\infty}^n x[k] \right\} = ?$

$$h[n] = u[n]$$

ابنای سمع خوب

$$y[n] = x[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

$$\Rightarrow Y(z) = X(z) \cdot H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} X(z) \quad \checkmark$$

$$ROC \supset R \cap \{z : |z| > 1\} \quad \checkmark$$

۱. مشتق‌گیری در حوزه Z

If $x[n] \xleftrightarrow{z} X(z)$, with ROC = R , then

$$nx[n] \xleftrightarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz}, \text{ with ROC} = R.$$

If $X(z) = \log(1 + az^{-1})$, $|z| > |a|$,

نمایل

then $nx[n] \xleftrightarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}}$, $|z| > |a|$.

By differentiating, we have converted the z-transform to a rational expression.

Specifically, $a(-a)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{a}{1 + az^{-1}}$, $|z| > |a|$.

Combining this with the time-shifting property yields $a(-a)^{n-1} u[n-1] \xleftrightarrow{z} \frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}}$, $|z| > |a|$.

Consequently, $x[n] = \frac{-(-a)^n}{n} u[n-1]$.

As another example of the use of the differentiation property, consider determining the inverse z -transform for

$$X(z) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|.$$

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|,$$

and hence,

$$na^n u[n] \xleftrightarrow{z} -z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1 - az^{-1}} \right) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|.$$

١١. قضیة مقدار اولیه

The Initial-Value Theorem

If $x[n] = 0, n < 0$, then

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z).$$

This property follows by considering the limit of each term individually in the expression

for the z -transform, with $x[n]$ zero for $n < 0$. With this constraint,

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}.$$

$$X(z) = x[0] + \sum_{n=1}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

$$\Rightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x[0] + \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} x[n] z^{-n} = x[0]$$

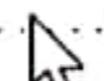
ملحوظہ: از این قضیہ می تو ان براکی درستی آرٹی حسابی بدل Z (بنالرہا) استفادہ منور

جدول خواص تبدیل Z

TABLE 10.1 PROPERTIES OF THE z-TRANSFORM

Section	Property	Signal	z-Transform	ROC
		$x[n]$ $x_1[n]$ $x_2[n]$	$X(z)$ $X_1(z)$ $X_2(z)$	R R_1 R_2
10.5.1	Linearity	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	At least the intersection of R_1 and R_2
10.5.2	Time shifting	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	R , except for the possible addition or deletion of the origin
10.5.3	Scaling in the z-domain	$e^{j\omega_0 n}x[n]$ $z_0^n x[n]$ $a^n x[n]$	$X(e^{-j\omega_0}z)$ $X\left(\frac{z}{z_0}\right)$ $X(a^{-1}z)$	R $z_0 R$ Scaled version of R (i.e., $ a R = \{ a z \}$ for z in R)
10.5.4	Time reversal	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	Inverted R (i.e., $R^{-1} = \{ z^{-1} \}$ where z is in R)
10.5.5	Time expansion	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[r], & n = rk \\ 0, & n \neq rk \end{cases}$ for some integer r	$X(z^k)$	$R^{1/k}$ (i.e., the set of points $z^{1/k}$, where z is in R)
10.5.6	Conjugation	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R

10.5.7	Convolution	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	At least the intersection of R_1 and R_2
10.5.7	First difference	$x[n] - x[n - 1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$	At least the intersection of R and $ z > 0$
10.5.7	Accumulation	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}} X(z)$	At least the intersection of R and $ z > 1$
10.5.8	Differentiation in the z -domain	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	R
10.5.9		<p style="text-align: center;">Initial Value Theorem</p> <p>If $x[n] = 0$ for $n < 0$, then</p> $x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$		



جدول تبدیل Z های مهم

TABLE 10.2 SOME COMMON z-TRANSFORM PAIRS

Signal	Transform	ROC
1. $\delta[n]$	1	All z
2. $u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
3. $-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z < 1$
4. $\delta[n - m]$	z^{-m}	All z , except 0 (if $m \geq 0$) or ∞ (if $m < 0$)
5. $\alpha^n u[n]$	$\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$	$ z > \alpha $
6. $-\alpha^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$	$ z < \alpha $

Activate Windows®

Go to PC settings to activate Windows.

Scanned by CamScanner

$$7. n\alpha^n u[n]$$

$$\frac{\alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$$

$$|z| > |\alpha|$$

$$8. -n\alpha^n u[-n-1]$$

$$\frac{\alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$$

$$|z| < |\alpha|$$

$$9. [\cos \omega_0 n] u[n]$$

$$\frac{1 - [\cos \omega_0] z^{-1}}{1 - [2 \cos \omega_0] z^{-1} + z^{-2}}$$

$$|z| > 1$$

$$10. [\sin \omega_0 n] u[n]$$

$$\frac{[\sin \omega_0] z^{-1}}{1 - [2 \cos \omega_0] z^{-1} + z^{-2}}$$

$$|z| > 1$$

$$11. [r^n \cos \omega_0 n] u[n]$$

$$\frac{1 - [r \cos \omega_0] z^{-1}}{1 - [2r \cos \omega_0] z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

$$|z| > r$$

$$12. [r^n \sin \omega_0 n] u[n]$$

$$\frac{[r \sin \omega_0] z^{-1}}{1 - [2r \cos \omega_0] z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

$$|z| > r$$

$$x[n] = [\cos \omega_0 n] u[n] = \frac{1}{\rho} e^{j\omega_0 n} u[n] + \frac{1}{\rho} e^{-j\omega_0 n} u[n] \quad (\text{حل})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow X(z) &= \frac{1}{\rho} \frac{1}{1 - e^{j\omega_0 z^{-1}}} + \frac{1}{\rho} \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0 z^{-1}}} \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\rho - (e^{j\omega_0} + e^{-j\omega_0}) z^{-1}}{1 - (e^{j\omega_0} + e^{-j\omega_0}) z^{-1} + z^{-2}}, \quad |z| > 1 \\ &= \frac{1 - (\cos \omega_0) z^{-1}}{1 - (\rho \cos \omega_0) z^{-1} + z^{-2}}, \quad |z| > 1 \end{aligned}$$

$$x[n] = [\sin \omega_0 n] u[n] = \frac{1}{\pi j} e^{j\omega_0 n} u[n] - \frac{1}{\pi j} e^{-j\omega_0 n} u[n] \quad (ج)$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{\pi j} \frac{1}{1 - e^{j\omega_0 z^{-1}}} - \frac{1}{\pi j} \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0 z^{-1}}}$$

$$= \frac{1}{\pi j} \frac{(e^{j\omega_0} - e^{-j\omega_0}) z^{-1}}{1 - (e^{j\omega_0} + e^{-j\omega_0}) z^{-1} + z^{-2}}, \quad |z| > 1$$

$$= \frac{(\sin \omega_0) z^{-1}}{1 - (2 \cos \omega_0) z^{-1} + z^{-2}}, \quad |z| > 1$$

تبدیل Z معکوس

The basic inverse Z transform equation:

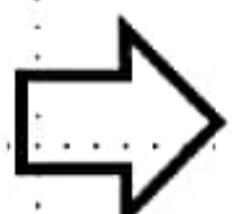
$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(re^{j\omega})(re^{j\omega})^n d\omega.$$

That is, we can recover $x[n]$ from its z-transform evaluated along a contour $z = re^{j\omega}$ in the ROC, with r fixed and ω varying over a 2π interval.

Let us now change the variable of integration from ω to z .

With $z = re^{j\omega}$ and r fixed, $dz = jre^{j\omega}d\omega = jzd\omega$, or $d\omega = (1/j)z^{-1}dz$.

The integration is over a 2π interval in ω , which, in terms of z , corresponds to one traversal around the circle $|z| = r$.



$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z)z^{n-1} dz,$$

انسٹرال کری روی سر را رہا ای جسے درون
ROC درجت منٹی انجام حی سو د.

تبديل Z معکوس کسرهای گویا

However, for the class of rational transforms, the inverse Z transform

can be determined using the technique of partial-fraction expansion

Basically, the procedure consists of expanding the rational algebraic expression into a linear combination of lower order terms.

روش گزینش به کسرهای جزئی

فرض: $X(z)$ به صورت یک کسرگوی است و ROC آن دارمده است.

ایده اصلی: اگر $\frac{X(z)}{z}$ را نه آن قسم به صورت کسرگوی است بوان به صورت جموعی از کسرهای

جزئی و ساده $\frac{A_i}{z - P_i}$ نویست، خواهیم داشت:

$$\frac{X(z)}{z} = \sum_i \frac{A_i}{z - P_i} \Rightarrow X(z) = \sum_i \frac{A_i z}{z - P_i} = \sum_i \frac{A_i}{1 - P_i z^{-1}}$$

دادهای:

$$x[n] = a^n u[n] \iff X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a|.$$

$$x[n] = -a^n u[-n-1] \iff X(z) = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}z} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| < |a|.$$

$$F(z) = \frac{X(z)}{z} = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{K=0}^M b_K z^{M-K}}{\sum_{K=0}^N a_K z^{N-K}}$$

$$M = \deg\{N(z)\}, \quad N = \deg\{D(z)\}$$

اگر $F(z) = \frac{X(z)}{z^M}$ ، $M < N$ بکر نامناسب است.

اگر $D(z)$ بر $N(z)$ متفاوت نامناسب است و باقیمانده $F(z) \cdot M > N$ بکر نامناسب است.

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = Q(z) + \frac{R(z)}{D(z)}$$

خارج قسمت

\downarrow

$\deg\{R(z)\} < \deg\{D(z)\}$

$\frac{R(z)}{D(z)}$ بقایمانده کر نامناسب است.

$$\deg\{Q(z)\} = M - N > 0 \Rightarrow Q(z) = \sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{M-N-k}$$

ترکیبی از ضربه واحد و سُمعت یافته های آن است.

$$\text{مل}: Z^{-1}\{Pz - \Delta z + \gamma\} = P\delta[n+1] - \Delta\delta[n+1] + \gamma\delta[n]$$

در ادامه فرض می کنیم $F(z) = \frac{X(z)}{z}$ بکر مناسب است.

گرسنگرهای جزئی کر مناسب.

حالت اول: قطب‌های $F(z)$ ساده (عیرتکراری) باشند.

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{K N(z)}{(z - P_1)(z - P_2) \dots (z - P_n)} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{z - P_i}, \quad ROC_X$$

هر لدم از کررهای جزئی باستی باوجود بده اندیشه برای $X(z)$ تعیین شود.

$$ROC_1 \cap \dots \cap ROC_n \subset ROC_X$$

P_i : مانده نظر قطب $A_i = (z - P_i) X(z) \Big|_{z=P_i}$

$$Z^{-1} \left\{ \frac{A_i z}{z - P_i} \right\} = Z^{-1} \left\{ \frac{A_i}{1 - P_i z^{-1}} \right\} = \begin{cases} A_i (P_i)^n u[n] \\ -A_i (P_i)^n u[-n-1] \end{cases}, \quad |z| > |P_i|$$

(حل)

$$X(z) = \frac{\mu - \frac{\omega}{\varsigma} z^{-1}}{(1 - \frac{1}{\kappa} z^{-1})(1 - \frac{1}{\mu} z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{\mu} \Rightarrow X(z) = \frac{\mu z - \frac{\omega}{\varsigma} z}{(z - \frac{1}{\kappa})(z - \frac{1}{\mu})}$$

$$\Rightarrow F(z) = \frac{X(z)}{z} = \frac{\mu z - \frac{\omega}{\varsigma}}{(z - \frac{1}{\kappa})(z - \frac{1}{\mu})} = \frac{A_1}{z - \frac{1}{\kappa}} + \frac{A_\mu}{z - \frac{1}{\mu}}$$

$$A_1 = (z - \frac{1}{\kappa})F(z) \Big|_{z=\frac{1}{\kappa}} = 1 \quad \& \quad A_\mu = (z - \frac{1}{\mu})F(z) \Big|_{z=\frac{1}{\mu}} = \mu$$

$$\Rightarrow \frac{X(z)}{N} = \frac{1}{z - \frac{1}{\kappa}} + \frac{\gamma}{z - \frac{1}{\mu}} \Rightarrow X(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{\kappa}} + \frac{\gamma z}{z - \frac{1}{\mu}}$$

$|z| > \frac{1}{\kappa}$ $|z| > \frac{1}{\mu}$

$$\Rightarrow x[n] = \left(\frac{1}{\kappa}\right)^n u[n] + \gamma \left(\frac{1}{\mu}\right)^n u[n]$$

$$ROC: \frac{1}{\kappa} < |z| < \frac{1}{\mu}$$

حمن مثال علی بـ مثال

$$\Rightarrow X(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{\kappa}} + \frac{\gamma z}{z - \frac{1}{\mu}}$$

$|z| > \frac{1}{\kappa}$ $|z| < \frac{1}{\mu}$

$$\Rightarrow x[n] = \left(\frac{1}{\kappa}\right)^n u[n] - \gamma \left(\frac{1}{\mu}\right)^n u[-n-1]$$

حمن میل علی با (میل)

$$ROC: |z| < \frac{1}{\mu}$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{\mu}} + \frac{\gamma z}{z - \frac{1}{\nu}}$$

$|z| < \frac{1}{\mu}$ $|z| < \frac{1}{\nu}$

$$\underline{x[n] = -\left(\frac{1}{\mu}\right)^n u[-n-1] - \nu\left(\frac{1}{\nu}\right)^n u[-n-1]}$$

$$X(z) = \frac{\mu z^\mu + z^\nu - \nu z^\nu + z - \mu}{z^\mu}, \quad 0 < |z| < \infty$$

$$X(z) = \mu z^\mu + z - \nu + z - \nu z^\nu$$

$$\Rightarrow x[n] = \mu \delta[n+\nu] + \delta[n+1] - \nu \delta[n] + \delta[n-1] - \nu \delta[n-\nu]$$

حالت دوم: $F(z)$ نقط تکراری داشته باشد.

فرض: فقط نقط تکراری $F(z)$ داردو سایر نقطهای آن ساره‌اند.

$$F(z) = \frac{X(z)}{z} = \frac{KN(z)}{(z-P_1)^{n_1}(z-P_2) \cdots (z-P_r)}, \quad n_1 + r - 1 = N$$

$$= \sum_{i=1}^r \frac{A_i}{z-P_i} + \frac{B_1}{z-P_1} + \frac{B_r}{(z-P_1)^r} + \cdots + \frac{B_{n_1}}{(z-P_1)^{n_1}}$$

$$P_i \text{ مازه نقطه قطب سار}: A_i = (z-P_i)F(z) \Big|_{z=P_i}$$

$$1 \leq i \leq r$$

$$B_{n_1} = (z - P_1)^{n_1} F(z) \Big|_{z=P_1}$$

$$B_{n_1-1} = \frac{d}{dz} [(z - P_1)^{n_1} F(z)] \Big|_{z=P_1}$$

⋮

$$B_r = \frac{1}{(n_1-r)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{n_1-r} [(z - P_1)^{n_1} F(z)] \Big|_{z=P_1}$$

$$B_1 = \frac{1}{(n_1-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{n_1-1} [(z - P_1)^{n_1} F(z)] \Big|_{z=P_1}$$

مازه لظرف طن تکراری

n_1 از مرتبه P_1

$$B_j = \frac{1}{(n_1-j)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{n_1-j} [(z - P_1)^{n_1} F(z)] \Big|_{z=P_1}$$

$1 \leq j \leq n_1$

$$X(z) = \frac{z^r}{(z + \frac{1}{r})^r (z - \frac{1}{r})}, \quad |z| > \frac{1}{r}$$

مثال

$$F(z) = \frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z - \frac{1}{r}} + \frac{B_1}{z + \frac{1}{r}} + \frac{B_r}{(z + \frac{1}{r})^r}$$

$$\checkmark A_1 = (z - \frac{1}{r}) F(z) \Big|_{z=\frac{1}{r}} = \frac{z}{(z + \frac{1}{r})^r} \Big|_{z=\frac{1}{r}} = \dots = \frac{r}{q}$$

$$\checkmark B_r = (z + \frac{1}{r}) F(z) \Big|_{z=-\frac{1}{r}} = \frac{z}{z - \frac{1}{r}} \Big|_{z=-\frac{1}{r}} = \dots = \frac{r}{r}$$

$$\checkmark B_1 = \frac{d}{dz} \left[(z + \frac{1}{r})^r F(z) \right] \Big|_{z=-\frac{1}{r}} = \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{z - \frac{1}{r}} \right] \Big|_{z=-\frac{1}{r}}$$

$$= -\frac{\frac{1}{r}}{(z - \frac{1}{r})^2} \Big|_{z=-\frac{1}{r}} = \dots = -\frac{r}{q}$$

تحزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها نکثر حجمی

Activate Windows 8.1

Go to PC settings to activate Windows

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow \frac{x(z)}{z} = -\frac{\frac{\kappa}{q}}{z - \frac{1}{\kappa}} - \frac{\frac{\kappa}{q}}{z + \frac{1}{\mu}} + \frac{\frac{\mu}{\kappa}}{(z + \frac{1}{\mu})^2}$$

$$\Rightarrow x(z) = -\frac{\frac{\kappa}{q} z}{z - \frac{1}{\kappa}} - \frac{\frac{\kappa}{q} z}{z + \frac{1}{\mu}} + \frac{\frac{\mu}{\kappa} z}{(z + \frac{1}{\mu})^2}, |z| > \frac{1}{\mu}$$

$$\frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| > |a| \xrightarrow{z} a^n u[n]$$

پاراورک :

$$Z\{n x[n]\} = -z \frac{d}{dz} X(z)$$

(ستونه در حوره)

$$\Rightarrow -z \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{z-a} \right] = \frac{az}{(z-a)^2} \xrightarrow{z} n a^n u[n]$$

$$\Rightarrow x[n] = \left(\frac{\kappa}{q}\right) \left(\frac{1}{\mu}\right)^n u[n] - \frac{\kappa}{q} \left(-\frac{1}{\mu}\right)^n u[n] + \frac{\kappa}{\mu} \left(-\frac{1}{\mu}\right)^{n-1} u[n]$$

حاسیہ تبدیل معلوم Z بروں بطری سری نوانی

اگر بتوان $X(z)$ را به صورت سری نوانی پختہ حل طریقہ از ضرائی این بطری

می نوانی رسالہ $x[n]$ را لسخنچہ داد۔ این روں برای $X(z)$ فای کہ بفرمک گویا نہیں تند

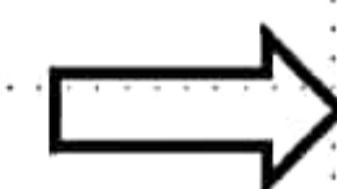
معید است۔

Consider the z-transform $X(z) = \log(1 + az^{-1})$, $|z| > |a|$.

(حل)

With $|z| > |a|$, or, equivalently, $|az^{-1}| < 1$, $X(z)$ can be expanded in a power series using the Taylor's series expansion

$$\log(1 + v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} v^n}{n}, \quad |v| < 1.$$



$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n z^{-n}}{n},$$



$$x[n] = \begin{cases} (-1)^{n+1} \frac{a^n}{n}, & n \geq 1, \\ 0, & n \leq 0 \end{cases}$$



$$x[n] = \frac{-(-a)^n}{n} u[n - 1].$$



دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده برق و کامپیووتر

بسم الله الرحمن الرحيم

تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مدرس: مسعود عمومی

جلسه بیست و یکم - بخش 10.7 کتاب

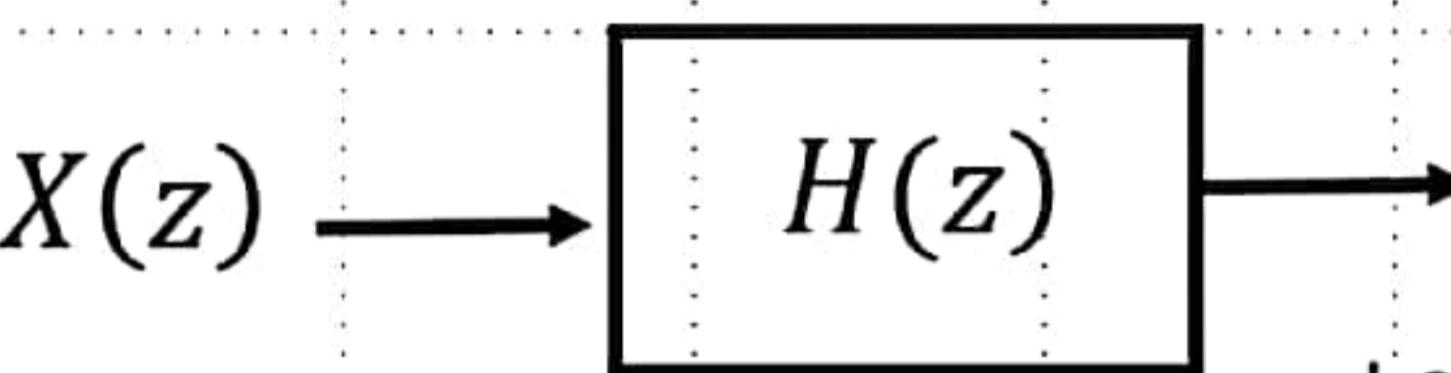
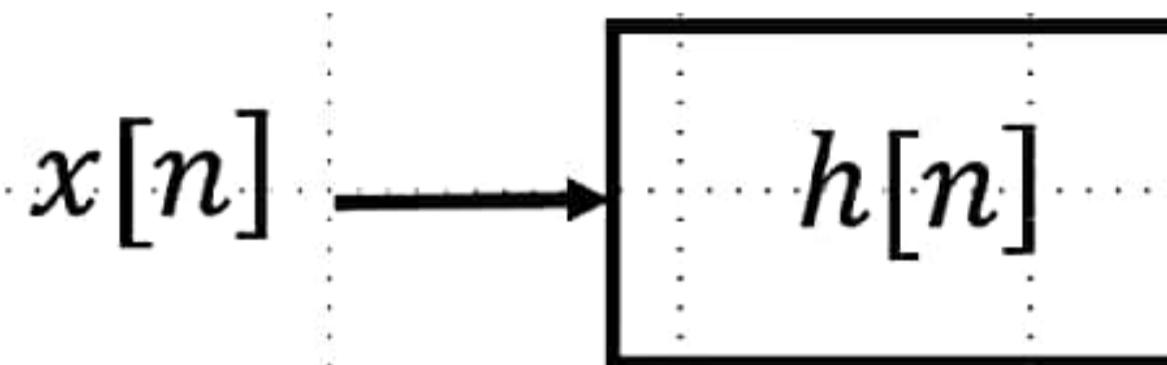
با سلام خدمت دانشجویان محترم

Activate Windows
1

Go to PC settings to activate Windows

Scanned by CamScanner

تحلیل و توصیف سیستم‌های LTI به کمک تبدیل Z



$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

$$H(z) = z\{h[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n}$$

with z in the ROC of $H(z)$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \rightarrow h[n] = z^{-1}\{H(z)\}$$

$H(z)$ is commonly referred to as the system function

تابع سیستم

or, alternatively, the transfer function.

تابع انتقال (تبدیل)

خواص سیستم‌های LTI بر اساس تابع انتقال یا تابع تبدیل) آنها

Many properties of LTI systems can be closely associated with the characteristics of the *system function* in the *Z*-plane.

۱. علیت

A causal LTI system has an impulse response $h[n]$ that is zero for $n < 0$, and therefore is right-sided. For a causal system the power series $H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n}$ does not include any positive powers of z . Consequently, the ROC includes infinity.

A discrete-time LTI system is causal if and only if the ROC of its system function is the exterior of a circle, including infinity.

ناهیهٔ همگرایی در تابع انتقال یک سیستم LTI زمان‌کسرهٔ علی، خارج از یک دایرهٔ مساحتی $|z| = \infty$ (صفحهٔ Z محنت طی است).

نکته:

در دینامیک سیستم LTI زمانگسته علی نه $H(z)$ در آن به صورت یک کسر گویاست.

درجہ صورت کر رکھی تو اندیش از درجہ خروج آن باید، زیرا $\lim_{z \rightarrow \infty} H(z)$ مالیتی

حدود باشد.

همچنین ناچیہ همکاری $H(z)$ خارج را برابر با اندازه در میان قطب z از مردم صفحه z است.

A discrete-time LTI system with rational system function $H(z)$ is causal if and only if:
(a) the ROC is the exterior of a circle outside the outermost pole; and (b) with $H(z)$ expressed as a ratio of polynomials in z , the order of the numerator cannot be greater than the order of the denominator.

Consider a system with system function whose algebraic expression is

$$H(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + z}{z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}}$$

سیستم خیر علی

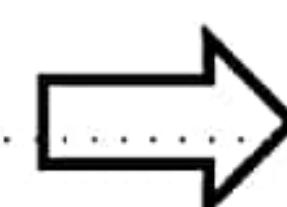
Without even knowing the ROC for this system, we can conclude that the system is not causal, because the numerator of $H(z)$ is of higher order than the denominator.

Consider a system with system function

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - 2z^{-1}}, \quad |z| > 2$$

سیستم علی

$$H(z) = \frac{2 - \frac{5}{2}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 2z^{-1})} = \frac{2z^2 - \frac{5}{2}z}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1},$$



$$h[n] = \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n + 2^n \right] u[n].$$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} H(z) = 2$$

$$I \rightarrow \infty$$

$$h[n] = 0, \quad \forall n < 0$$

سیستم‌های ضدعلی (Anticausal) و شرایط آن

یک سیستم ضدعلی است، اگر $\sum_{n=-\infty}^{-1} h[n] z^{-n} = 0, \forall n < 0$ (رسانیده).

با سخ پرسیده، یک دنباله سمت چپی است و ناحیه همگرایی $H(z)$ داخل یک دایره است.

و $z=0$ را هم شامل می‌سود. به علاوه اگر $H(z)$ به صورت یک لگاریتمی باشد،

ناحیه همگرایی داخل دایره‌ای است که ربع آن برابر با اندازه نزدیک‌ترین قطب $H(z)$ است.

به مبدأ صفحه z است.

$$H(z) = \frac{z}{(z+1)(z-2)} = \frac{-\frac{1}{r}z}{z+1} + \frac{\frac{1}{r}z}{z-2}, |z| < 1$$

مثال) سیستم خدّعلی

$$h[n] = \left[\left(-\frac{1}{r} \right) (-1)^n + \frac{1}{r} (2)^n \right] u[-n-1] = 0, \forall n > 0$$

۲. پایداری

An LTI system is stable if and only if the ROC of its system function $H(z)$ includes the unit circle, $|z| = 1$.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

شرط مطلقاً بعثه بذریور دن باسع ضربه:

شرط لازم و کافی پایداری بد سیستم LTI آن است که $H(z)$ ROC نباشد.

در برگردانه در اینجا باسع واحد (رصفحه Z) باشد.

$$H(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{\rho}} + \frac{z}{z - \rho} = \frac{\rho z^2 - \frac{\omega}{\rho} z}{z^2 - \frac{\omega}{\rho} z + 1}$$

مثال

الف) اگر $|z| > 2$

$$h[n] = \left[\left(\frac{1}{\rho} \right)^n + (\rho)^n \right] u[n]$$

سیم علی و غیر پایدار

ب) اگر $\frac{1}{\rho} < |z| < 2$

$$h[n] = \left(\frac{1}{\rho} \right)^n u[n] - (\rho)^n u[-n-1]$$

سیم غیر علی و پایدار

ج) اگر $|z| < \frac{1}{\rho}$

$$h[n] = - \left[\left(\frac{1}{\rho} \right)^n + (\rho)^n \right] u[-n-1]$$

سیم ضد علی و پایدار

لیستہ میں ایک سیگنال کا LTI سیگنال کی برائی کر کر کوئی
H(z) بھروسے۔

However, if we focus on causal systems, stability can easily be checked by examining the locations of the poles. Specifically, for a causal system with rational system function, the ROC is outside the outermost pole. For this ROC to include the unit circle, $|z| = 1$, all of the poles of the system must be inside the unit circle. That is:

A causal LTI system with rational system function $H(z)$ is stable if and only if all of the poles of $H(z)$ lie inside the unit circle—i.e., they must all have magnitude smaller than 1.

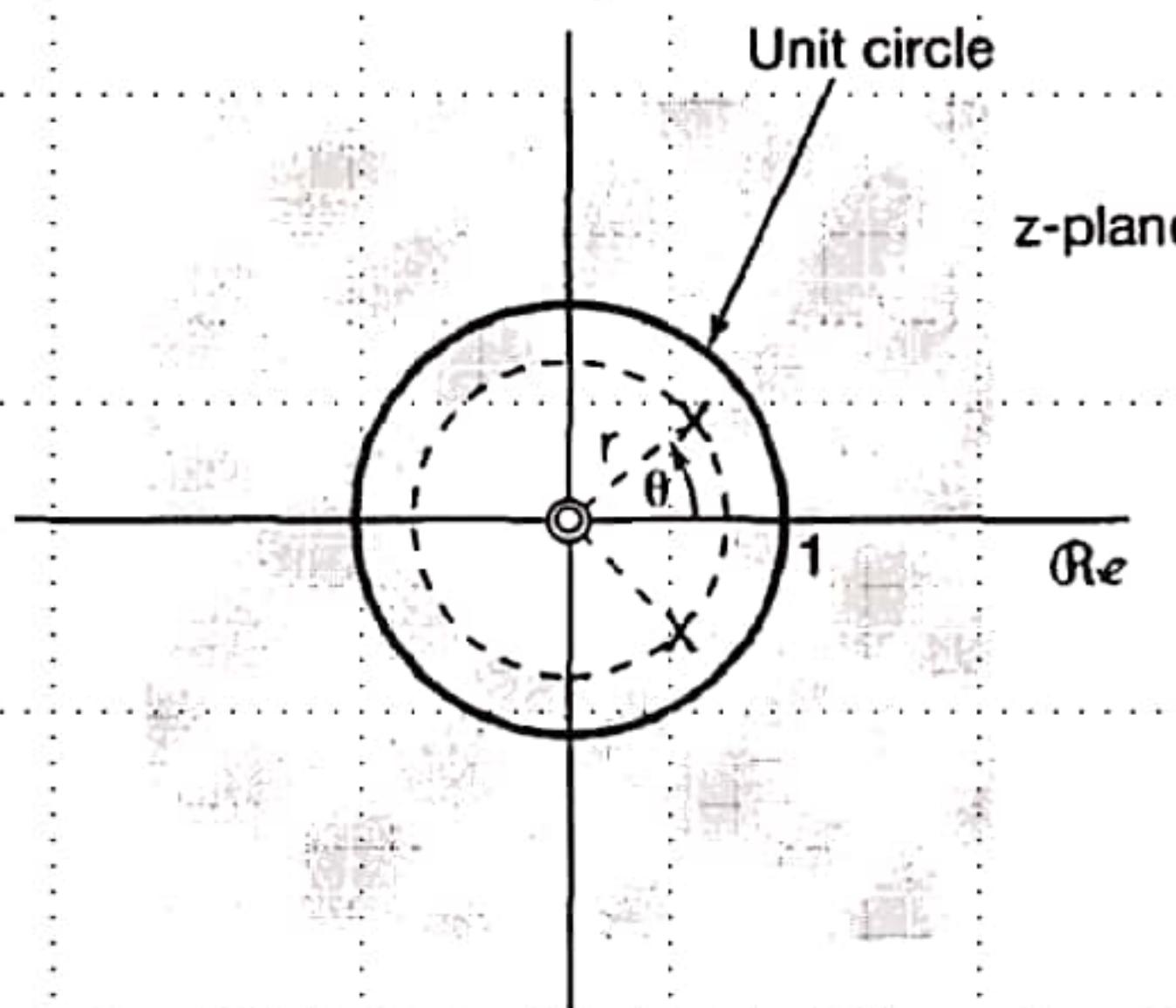
مسئلہ

The system function for a second-order system with complex poles was given in

$$H(z) = \frac{1}{1 - (2r\cos\theta)z^{-1} + r^2z^{-2}},$$

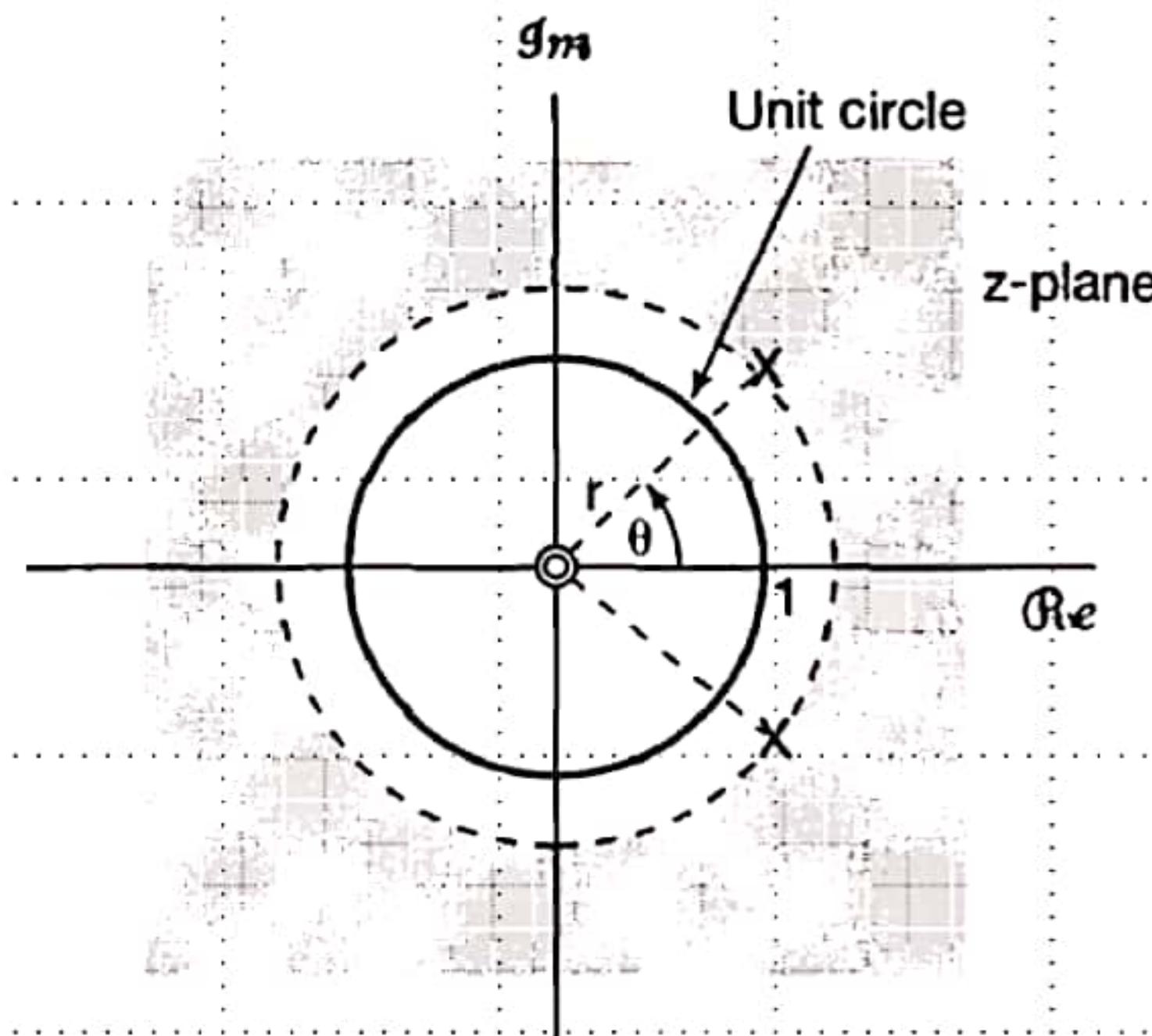
$$H(z) = \frac{z^r}{(z - re^{j\theta})(z - re^{-j\theta})}$$

$r < 1$
سمیع
باید از
-



بفرض علی یورن

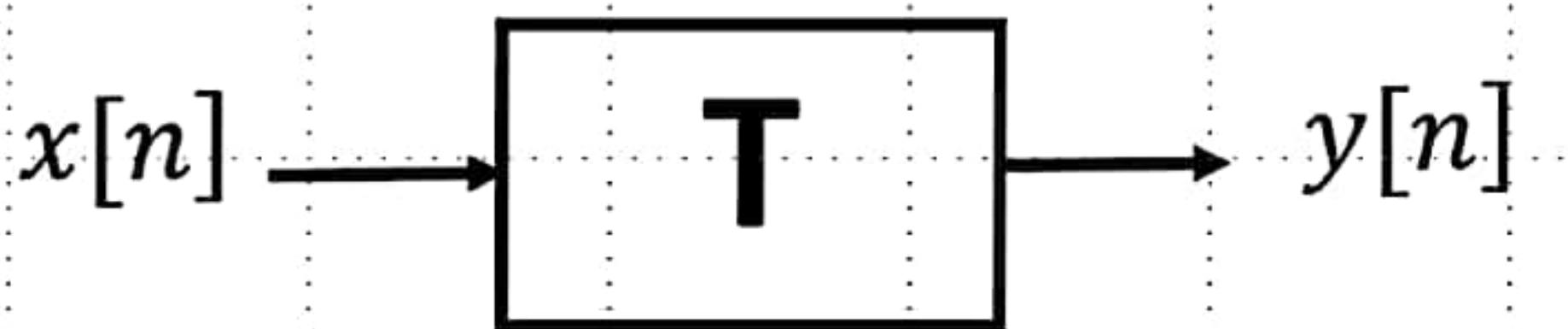
$$P_1 = re^{j\theta}, P_2 = re^{-j\theta}$$



$r > 1$
سمیع
باید از
-

تابع سیستم در سیستم‌های LTI توصیف شده توسط

معادلات تفاضلی خطی با ضرائب ثابت



$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k].$$

\xrightarrow{Z}

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z),$$

$$\xrightarrow{} H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}.$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} &= 0 \\ \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} &= 0 \end{aligned} \quad \xrightarrow{} H(z)$$

$$H(z) = z\{h[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n}$$

$$h[n] = z^{-1}\{H(z)\}$$

معارلهٔ تَعاضُلی لَوْصِفِ لَنْدَه سِیم و (رَسْتَجِهٌ نَابِعٌ (H(z) بِهٖ هَنَالی اَطْلَاعَی (رَمُورَه)

نَاحِيَهٔ حَمَلَرَایِ نَمَنِ دَهَه . بِرَاسِکُوسْ وَرِرْلَهَاکِ عَلَیِّ / نَخِرَ عَلَیِّ / رَضِدَ عَلَیِّ وَ پَادِارِ رَنَانِدِهَه .

بُودَن سِیمِ حِی لَوانِ ROC را تعیین کرده و با سُعَيْ ضَرِبَهٔ [n] را به دست آورَه .

سؤال

Suppose that we are given the following information about an LTI system:

1. If the input to the system is $x_1[n] = (1/6)^n u[n]$, then the output is

$$y_1[n] = \left[a\left(\frac{1}{2}\right)^n + 10\left(\frac{1}{3}\right)^n \right] u[n],$$

where a is a real number.

2. If $x_2[n] = (-1)^n$, then the output is $y_2[n] = \frac{7}{4}(-1)^n$.

$H(z)$ را بحث -

مطلوب تعریف : ۱) معادله انتقالی -

۲) معادله تغاضلی توافق کننده سیستم

- ورکسای پایداری و عملیات سیستم

The z -transforms of the signals specified in the first piece of information are

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{6}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{6}, \quad Y_1(z) = \frac{a}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{10}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{(a+10) - (5 + \frac{a}{3})z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{2}.$$

it follows that the algebraic expression for the system function is

$$H(z) = \frac{Y_1(z)}{X_1(z)} = \frac{[(a+10) - (5 + \frac{a}{3})z^{-1}][1 - \frac{1}{6}z^{-1}]}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}.$$

Furthermore, we know that the response to $x_2[n] = (-1)^n$ must equal $(-1)^n$ multiplied by the system function $H(z)$ evaluated at $z = -1$.

$$\rightarrow \frac{7}{4} = H(-1) = \frac{[(a+10) + 5 + \frac{a}{3}][\frac{7}{6}]}{(\frac{3}{2})(\frac{4}{3})}. \rightarrow a = -9 \quad \checkmark$$

$$\rightarrow H(z) = \frac{(1 - 2z^{-1})(1 - \frac{1}{6}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}, \rightarrow H(z) = \frac{1 - \frac{13}{6}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}},$$

$$\rightarrow H(z) = \frac{z^2 - \frac{13}{6}z + \frac{1}{3}}{z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}}.$$
✓

لینیون برای ROC

Also, from the convolution property, we know that the ROC of $Y_1(z)$ must include at least the intersections of the ROCs of $X_1(z)$ and $H(z)$. Examining the three possible ROCs for $H(z)$ (namely, $|z| < 1/3$, $1/3 < |z| < 1/2$, and $|z| > 1/2$), we find that the only choice that is consistent with the ROCs of $X_1(z)$ and $Y_1(z)$ is $|z| > 1/2$.

$$ROC_H \cap ROC_{X_1} \subset ROC_{Y_1}$$



$$|z| > \frac{1}{2}$$



$$|z| > \frac{1}{2}$$

$$Y_1(z) = H(z)X_1(z)$$

$$\Rightarrow ROC_H : |z| > \frac{1}{2}$$

Since the ROC for the system includes the unit circle, we know that the system is stable.

$$|z|=1 \subset ROC_H \Rightarrow$$

نحوه پایه سیم

$$H(\infty) = 1 \Rightarrow z = \infty \subset ROC_H$$

نحوه علی سیم

$$H(z) = \frac{1 - \frac{13}{6}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}},$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$



$$y[n] - \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = x[n] - \frac{13}{6}x[n-1] + \frac{1}{3}x[n-2].$$

Consider a stable and causal system with impulse response $h[n]$ and rational system

function $H(z)$. Suppose it is known that $H(z)$ contains a pole at $z = 1/2$ and a zero

somewhere on the unit circle. The precise number and locations of all of the other poles

and zeros are unknown.

با وجود به اطلاعات فوق درباره سیستم LTI معروف، درست هر کدام از موارد زیر بررسی می‌شود:

الف) $\text{ROC} \cap H(z)$ مساحت باشد

ج) می‌توان سیستم پایدار و علی است، ناحیه حمله $H(z)$ خارج از دایره $|z| = 1$ و در برگردانه

د) دایره $|z| = 1$ است، درست حد $H(z)$ در برگردانه

ب) برای معادلی از ω ، $H(e^{j\omega}) = 0$ است ✓

چون $H(re^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) = 0$ صفر دارد لینه بروک (ایردهی مساعی واحد)

برای حداقل یک معادلی از ω برقرار است.

ج) $[h[n]]$ دارای دوره زمانی محدود است ؟ ✗

(درین صورت لازم است ناحیه همگرایی $H(z)$ حمۀ صفحه Z (متراحتاً $z = \infty$ و $z = 0$)

باید در صورتی که طبق فرض $H(z)$ در $z = 1$ قطب دارد و قطب نمی تواند درون

واقع شود.

یک دنبالهٔ حقیقی است $h[n]$ ()

اگر $Z = \bar{z}$ آن‌جا $H(z) = H^*(\bar{z}^*)$ بود. لیکن اگر $Z = \bar{z}$ قطب باشد.

آن‌جا $H(z) = H^*(\bar{z})$ هم قطب با صفر آن‌است. اطلاعات داره (رباره

سیستم برای راسی آزماشی این گزاره‌ها نیست.

✓ پاسخ ضریب یک سیستم بازدار و علی است $g[n] = n(h[n]*h[n])$ ()

$$G(z) = -Z \frac{d}{dz} H(z) = -YZ H(z) H'(z)$$

همه قطب‌های $G(z)$ در همان موقعیت قطب‌های $H(z)$ (درون (ایره واحد) فرار (ارند)

البته حمل است که $G(z)$ آن قطب را ندارد.

در هر صورت قطب‌های $G(z)$ خم رون (ایر برعایع واحد فرازی گردند).

چون $n < 0$ خم برای $g[n] = n h[n] * h[n]$ پس $h[n] = 0$ ، $n < 0$ صفر

است و سیستم با برعایع ضرب $[n]$ علی است.

موقعیت قطب‌های $G(z)$ و علی بودن $g[n]$ سازم آن است که ناحیه هگرای آن

دایره برعایع واحد را شامل نمود، پس سیستم باید رام خست.