صفحه 1

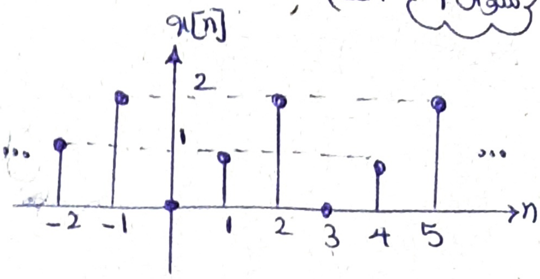
3

به نام خدا

حل تکلیف سری هفتم - درس تجزیه و تحلیل سیگنال ها و سیستم ها

محمدرضا جباری

سوال 1) الف)



$N=3$

! تبدیل فوریه سیگنال های گسسته متناوب ، مانند سیگنال های پیوسته متناوب (به تکلیف سری پنجم رجوع شود) از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right)$$ و $a_k \triangleq$ ضرایب سری فوریه

دوره تناوب اصلی سیگنال $\triangleq N$

به عبارت ساده تر، تبدیل فوریه سیگنال های زمان گسسته متناوب ، صرفا در مضارب فرکانس اصلی سیگنال دارای مقدار بوده و در بقیه نقاط صفر هستند.

پس در ابتدا باید ضرایب سری فوریه سیگنال $x[n]$ را محاسبه کنیم ، می دانیم:

$$a_k = \frac{1}{3}\left(e^{-jk\frac{2\pi}{3}} + 2e^{jk\frac{2\pi}{3}}\right) \equiv \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{3}n}$$

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(e^{-jk\frac{2\pi}{3}} + 2e^{jk\frac{2\pi}{3}}\right)\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{3}\right)} \checkmark$$

ب)

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n+2]$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} u[n+2]$$

$$F\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]\right\} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} \xrightarrow{n \to n+2} F\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} u[n+2]\right\} = \frac{e^{j2\omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

$$X(j\omega) = 9F\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} u[n+2]\right\} = \boxed{\frac{9e^{j2\omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}} \checkmark$$

ج)

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$$

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \rightsquigarrow X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$x[n] = x_1[n] + \frac{1}{2}x_1[-n-1] \rightsquigarrow F\{x_1[-n-1]\} = X_1(e^{-j\omega})e^{j\omega}$$

$$\rightsquigarrow X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) + \frac{1}{2}X_1(e^{-j\omega})e^{j\omega} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{\frac{1}{2}e^{j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}} = \frac{3}{(2-e^{-j\omega})(2-e^{j\omega})}$$

$$= \boxed{\frac{3}{5-4\cos(\omega)}} \checkmark$$

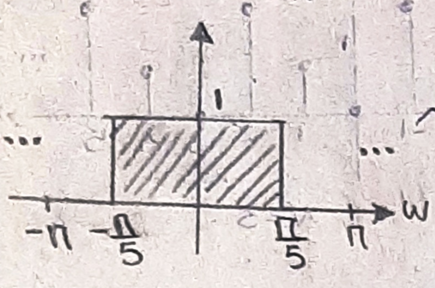
صفحه 2
3

ج)

$$x[n] = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{7n\pi}{2}\right)}{n\pi}$$

$$x[n] = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{5}\right)}{n\pi} \times \cos\left(\frac{7n\pi}{2}\right) = x_1[n]\, x_2[n]$$ رابطه 1

$$X_1(e^{j\omega}) = \Pi\left(\frac{5\omega}{2\pi}\right) \quad \text{و} \quad X_2(e^{j\omega}) = \pi\left[\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)+\delta\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

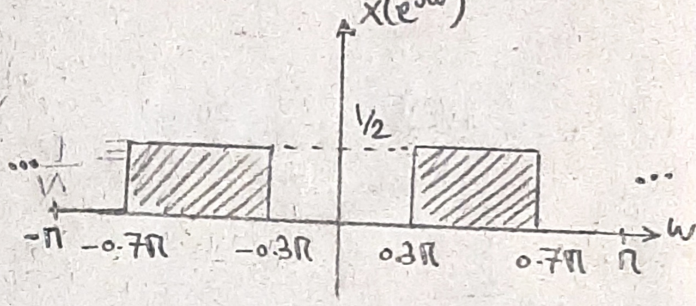


دقت کنید که این پالس مستطیلی متناوب است

کانالوشن متناوب

رابطه 1 $\rightsquigarrow X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\left\{X_1(e^{j\omega}) \circledast X_2(e^{j\omega})\right\} = \frac{1}{2}\left\{X_1\left(e^{j(\omega-\frac{\pi}{2})}\right) + X_1\left(e^{j(\omega+\frac{\pi}{2})}\right)\right\}$

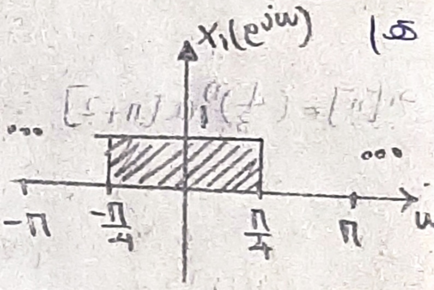
$$= \begin{cases} \frac{1}{2} & \frac{3\pi}{10} \leqslant |\omega| \leqslant \frac{7\pi}{10} \\ 0 & \frac{3\pi}{10} \geqslant |\omega| \text{ و } |\omega| \geqslant \frac{7\pi}{10} \end{cases}$$



ه)

$$x[n] = \left(\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n\pi}\right) * \left(\frac{\sin\left(\frac{(n-8)\pi}{4}\right)}{(n-8)\pi}\right)$$

$$x_1[n] = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n\pi} \rightsquigarrow X_1(e^{j\omega}) = \Pi\left(\frac{2\omega}{\pi}\right) \text{ و } -\pi \leqslant \omega \leqslant \pi$$



$$x_2[n] = x_1[n-8] \rightsquigarrow X_2(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})\, e^{-j\omega 8} \text{ و } -\pi \leqslant \omega \leqslant \pi$$

$$\rightsquigarrow x[n] = x_1[n] * x_2[n] \rightsquigarrow X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})\, X_2(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})\, e^{-j\omega 8} \text{ و } -\pi \leqslant \omega \leqslant \pi$$

و)

$$x[n] = \begin{cases} 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) & -4 \leqslant n \leqslant 4 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

$$x[n] = 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\cdot \Pi\left(\frac{n}{8}\right) \underbrace{=}_{\text{اویلر}} e^{j\frac{n\pi}{3}}\,\Pi\left(\frac{n}{8}\right) + e^{-j\frac{n\pi}{3}}\,\Pi\left(\frac{n}{8}\right) = x_1[n] + x_2[n]$$

پس کافی است نسخه‌های شیفت یافته فرکانسی تبدیل فوریه تابع پالس $\Pi\left(\frac{n}{8}\right)$ را محاسبه کنیم:

$$F\left\{\Pi\left(\frac{n}{8}\right)\right\} = \frac{\sin\left(\frac{9\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

3 تمرین
3

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{\sin\left(\frac{9}{2}\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right)\right)} \quad , \quad X_2(e^{j\omega}) = \frac{\sin\left(\frac{9}{2}\left(\omega+\frac{\pi}{3}\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\left(\omega+\frac{\pi}{3}\right)\right)}$$

$$\rightsquigarrow X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) + X_2(e^{j\omega}) = \boxed{\frac{\cos\left(\frac{9\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{6}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{9\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}} \checkmark$$

سؤال 2) الف) طبق تعریف عکس تبدیل فوریه سیگنال های زمان گسسته داریم:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^{j\omega n}\, d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi/2} e^{-j\pi} e^{j\omega n}\, d\omega$$

به بازه انتگرال دقت کنید. تبدیل فوریه سیگنال های زمان گسسته دوره تناوب 2π متناوب است.

$$= \frac{1}{2\pi jn}\left[1 - e^{-j\frac{n\pi}{2}}\right] + \frac{e^{-j\pi}}{2\pi jn}\left[e^{j\frac{n\pi}{2}} - 1\right] \quad , \quad n \neq 0$$

$$= \boxed{\frac{1}{jn\pi}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right) \quad , \quad n \neq 0} \checkmark$$

و برای $n=0$ داریم $x[n]=0$.

ب)

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-j2\omega}}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} = \frac{2/9}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{7/9}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$\boxed{x[n] = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{7}{9}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]} \checkmark$$

ج)

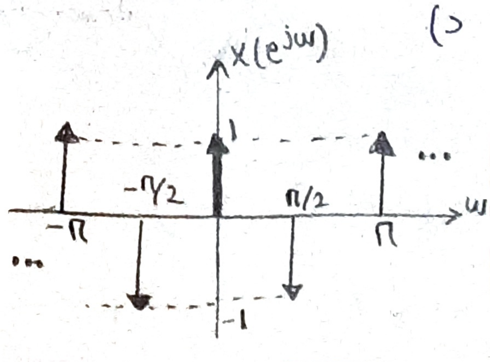
$$X(e^{j\omega}) = \cos^2(\omega) + \sin^2(3\omega)$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{4}\left(e^{j\omega}+e^{-j\omega}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(e^{j3\omega}-e^{-j3\omega}\right)^2 = \frac{1}{4}\left[e^{j2\omega}+e^{-j2\omega}-e^{j6\omega}-e^{-j6\omega}+4\right]$$

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{4}\left[\delta[n+2]+\delta[n-2]-\delta[n+6]-\delta[n-6]+4\delta[n]\right]} \checkmark$$

د)

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \delta\left(\omega - \frac{k\pi}{2}\right)$$



از حل قسمت الف سؤال 1 می‌دانیم که اگر $x[n]$ متناوب باشد، تبدیل فوریه آن دارای ضربه‌هایی در مضارب فرکانس اصلی آن است:

رابطه 1 $\quad X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \rightsquigarrow$ اگر $x[n]$ متناوب باشد

صفحه 4
3

لذا با مقایسه رابطه 1 با صورت سؤال داریم:

$$w_0=\frac{\pi}{2} \rightsquigarrow N=4 \rightsquigarrow a_k=\frac{(-1)^k}{2\pi} = \frac{e^{jk\pi}}{2\pi} = b_k e^{jkw_0 2} \quad , \quad b_k \triangleq F.S\{x_1[n]\} = \frac{1}{2\pi}$$ رابطه 2

می‌دانیم: $\underbrace{F.S}_{\text{ضرایب سری فوریه}}\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-4k]\right\}=\frac{1}{4} \rightsquigarrow F.S\left\{\frac{4}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-4k]\right\}=\frac{1}{2\pi}$

$$\rightsquigarrow x_1[n]=\frac{2}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-4k]$$

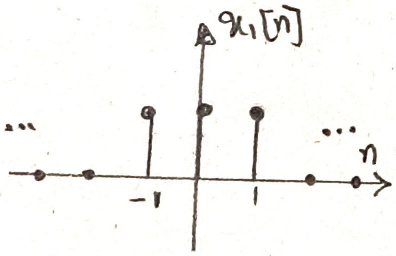
طبق رابطه 2 داریم: $a_k=b_k e^{jkw_0 2} \xrightarrow[\text{سری فوریه}]{\text{عکس}} x[n]=x_1[n+2]$

$$= \boxed{\frac{2}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-2-4k]}$$ ✓

$$X(e^{jw})=\frac{1}{1-e^{-jw}}\left(\frac{\sin(\frac{3w}{2})}{\sin(\frac{w}{2})}\right)+5\pi\delta(w) \quad \text{و} \quad -\pi<w\leq\pi$$ (هـ

از خاصیت «جمع انباره‌ای» در سیگنال‌های زمان گسسته داریم:

$$\text{IF } F\{x[n]\}=X(e^{jw}) \rightsquigarrow F\left\{\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]\right\}=\frac{X(e^{jw})}{1-e^{-jw}}+\pi X(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(w-2k\pi)$$ رابطه 1



$$\xrightarrow{F} X_1(e^{jw})=\frac{\sin(\frac{3w}{2})}{\sin(\frac{w}{2})}$$

$$\xrightarrow{\text{رابطه 1}} F\left\{\sum_{k=-\infty}^{n}x_1[k]\right\}=X_1(e^{jw})=\frac{1}{1-e^{-jw}}\left(\frac{\sin(\frac{3w}{2})}{\sin(\frac{w}{2})}\right)+\pi(3)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(w-2k\pi)$$

و به ازای بازه $-\pi<w\leq\pi$ داریم:

$$X_1(e^{jw})=\frac{1}{1-e^{-jw}}\left(\frac{\sin(\frac{3w}{2})}{\sin(\frac{w}{2})}\right)+3\pi\delta(w)$$ رابطه 2

با مقایسه رابطه 2 با فرم $X(e^{jw})$ در صورت سؤال دیده می‌شود که $2\pi\delta(w)$ کم دارد که معادل سیگنال $x[n]=1 \ , \ \forall n$ در حوزه زمان است. بنابراین داریم:

$$X(e^{jw})=X_1(e^{jw})+2\pi\delta(w)$$

$$\rightsquigarrow x[n]=x_1[n]+1=1+\sum_{k=-\infty}^{n}x_1[n]=\overset{\text{خودتان ساده کنید}}{\dots}=\boxed{1+r[n+2]-r[n-1]}$$ ✓

صفحه 5

سؤال 3

الف) $y[n]=x^*[-n+1]$

$F\{x[n]\}=X(e^{j\omega}) \rightsquigarrow F\{x[n+1]\}=X(e^{j\omega})e^{j\omega} \rightsquigarrow F\{x[-n+1]\}=X(e^{-j\omega})e^{-j\omega}$

$F\{x^*[-n+1]\}=\left(X(e^{+j\omega})e^{+j\omega}\right)^* = \boxed{X^*(e^{j\omega})e^{-j\omega}}$

ب) $y[n]=\dfrac{x[n]+x^*[n]}{2}$

$F\{x[n]\}=X(e^{j\omega}) \rightsquigarrow F\{x[-n]\}=X(e^{-j\omega}) \rightsquigarrow F\{x^*[-n]\}=X^*(e^{j\omega})$

$F\left\{\dfrac{x[n]+x^*[-n]}{2}\right\} = \dfrac{X(e^{j\omega})+X^*(e^{j\omega})}{2} = \dfrac{2Re\{X(e^{j\omega})\}}{2} = \boxed{Re\{X(e^{j\omega})\}}$

ج) $y[n]=x[\frac{-n}{2}]$

$F\{x[n]\}=X(e^{j\omega}) \rightsquigarrow F\{x[-n]\}=X(e^{-j\omega}) \rightsquigarrow F\{x[-\frac{n}{2}]\}=\boxed{X(e^{-j2\omega})}$

د) $y[n]=x[2n-3]$

می‌دانیم: $F\{x[n]\}=X(e^{j\omega}) \rightsquigarrow F\{x[mn]\}=\dfrac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}X\left(e^{j\left(\frac{\omega-2k\pi}{m}\right)}\right)$

$F\{x[n]\}=X(e^{j\omega}) \rightsquigarrow F\{x[n-3]\}=X(e^{j\omega})e^{-j3\omega} \triangleq X_1(e^{j\omega})$ طبق نکته فوق داریم :

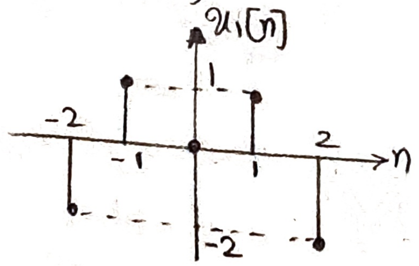
$F\{x[2n-3]\}=\frac{1}{2}X_1(e^{j\frac{\omega}{2}})+\frac{1}{2}X_1(e^{j\frac{\omega-2\pi}{2}})$

$=\boxed{\frac{1}{2}e^{-j\frac{3\omega}{2}}\left[X(e^{j\frac{\omega}{2}})-X(e^{j\frac{\omega-2\pi}{2}})\right]}$

سؤال 4

الف) $X(e^{j0})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]=\boxed{-2}$

ب) $\measuredangle X(e^{j\omega})$



$\rightsquigarrow \measuredangle X_1(e^{j\omega})=0$

می‌دانیم: $x[n]=x_1[n-1] \rightsquigarrow X(e^{j\omega})=X_1(e^{j\omega})e^{-j\omega}$

$\rightsquigarrow \measuredangle X(e^{j\omega})=\underbrace{\measuredangle X_1(e^{j\omega})}_{0}+\measuredangle e^{-j\omega}=\boxed{-\omega}$

صفحه 3

ج) $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw}) e^{jw}\, dw = 2\pi x[1] = 0$ ✓

د) $\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{jw})|^2 dw \underset{\text{رابطه پارسوال}}{=} 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = 2\pi\left[(-2)^2+(1)^2+(1)^2+(-2)^2\right]$

$= 20\pi$ ✓

ه) $\int_{-\pi}^{\pi} X^2(e^{jw})\, dw = 2\pi \{x[n] * x[n]\}\Big|_{n=0} = 2\pi \left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]x[n-k]\right\}\Big|_{n=0}$

$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]x[-k] = 2\pi(1) = 2\pi$ ✓

و) $\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{dX(e^{jw})}{dw}\right|^2 dw$

می‌دانیم : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |nx[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|j\frac{dX(e^{jw})}{dw}\right|^2 dw$ ⟶ رابطه پارسوال برای سیگنال مشتق

$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{dX(e^{jw})}{dw}\right|^2 dw = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |nx[n]|^2 = 88\pi$ ✓

سؤال 5

الف) $x[n] = (n+4)\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \Rightarrow X(e^{jw}) = \frac{\frac{1}{3}e^{-jw}}{\left(1-\frac{1}{3}e^{-jw}\right)^2} + \frac{4}{1-\frac{1}{3}e^{-jw}}$

$= \frac{4-e^{-jw}}{\left(1-\frac{1}{3}e^{-jw}\right)^2}$

$y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \Rightarrow Y(e^{jw}) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-jw}}$

$\Rightarrow H(e^{jw}) = \frac{Y(e^{jw})}{X(e^{jw})} = \frac{\left(1-\frac{1}{3}e^{-jw}\right)^2}{4\left(1-\frac{1}{4}e^{-jw}\right)^2} = \frac{1+\frac{1}{9}e^{-j2w} - \frac{2}{3}e^{-jw}}{4\left(1-\frac{1}{4}e^{-jw}\right)^2}$

$\Rightarrow h[n] = \frac{1}{4}\left[(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \frac{1}{9}(n-1)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} u[n-2] - \frac{2}{3}n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1]\right]$

$= \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left[\frac{n+1}{16}u[n] + \frac{n-1}{9}u[n-2] - \frac{n}{6}u[n-1]\right]$ ✓

ب) $H(e^{j\omega}) = \dfrac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \dfrac{1+\frac{1}{9}e^{-j2\omega}-\frac{2}{3}e^{-j\omega}}{4+\frac{1}{4}e^{-j2\omega}-2e^{-j\omega}}$

$\rightsquigarrow 4y[n] + \frac{1}{4}y[n-2] - 2y[n-1] = x[n] + \frac{1}{9}x[n-2] - \frac{2}{3}x[n-1]$

ج) $y[n] = \delta[n] - \left(\frac{-1}{3}\right)^n u[n] \rightsquigarrow x[n] = ?$

$$Y(e^{j\omega}) = 1 - \frac{1}{1+\frac{1}{3}e^{-j\omega}} = \frac{\frac{1}{3}e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{H(e^{j\omega})} = \frac{\frac{1}{3}e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{3}e^{-j\omega}} \times \frac{4\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)^2}$$

$$= \frac{4}{3}e^{-j\omega}\left[\frac{A}{1+\frac{1}{3}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} + \frac{C}{\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)^2}\right] \quad \text{where} \begin{cases} A = \frac{49}{4\times 16} \\ B = \frac{13}{16\times 4} \\ C = \frac{1}{32} \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow x[n] = \frac{4}{3}\left[A\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}u[n-1] + B\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}u[n-1] + Cn\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}u[n-1]\right]$$

$$= \frac{1}{16\times 3^n}\left[49(-1)^{n-1} + 13 + 2n\right]u[n-1]$$

د)

درصورت سؤال فرض حقیقی بودن سیستم باید ذکر شود. برای یک سیستم LTI زمان گسسته حقیقی داریم:

if $x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi) \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow y[n] = A\,|H(e^{j\omega_0})|\cos\left(\omega_0 n + \phi + \measuredangle H(e^{j\omega_0})\right)$

لذا با توجه به ورودی و خروجی داده شده در صورت مسئله می‌توان نتیجه گرفت:

$$H(e^{j0}) = 2, \quad \left|H(e^{j\frac{2\pi}{3}})\right| = 1, \quad \measuredangle H(e^{j\frac{2\pi}{3}}) = -\frac{\pi}{2}$$

پس برای ورودی $x_2[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta[n-3m]$ داریم:

$$F.S\{x_2[n]\} = \frac{1}{3} \rightsquigarrow x_2[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

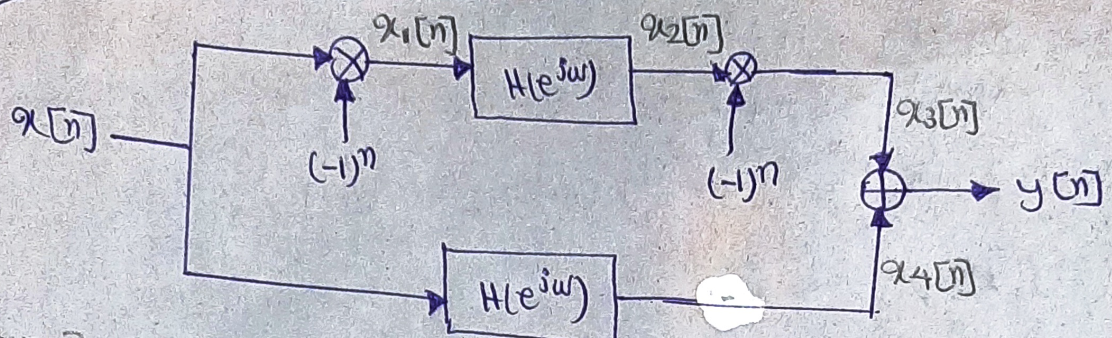
$$= \sum_{k=-1}^{1}\frac{1}{3}e^{jk\frac{2\pi}{3}n} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$$

$$\rightsquigarrow y_2[n] = \frac{1}{3}H(e^{j0}) + \frac{2}{3}\left|H(e^{j\frac{2\pi}{3}})\right|\cos\left(\frac{2n\pi}{3} + \measuredangle H(e^{j\frac{2\pi}{3}})\right)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$$

صفحه ۸

سوال ۵



د)

$* F\{x[n]\} = X(e^{j\omega}) \rightsquigarrow F\{x_1[n]\} = F\{(-1)^n x[n]\} = F\{e^{jn\pi} x[n]\} = X(e^{j(\omega-\pi)})$

$* F\{x_2[n]\} = F\{x_1[n] * h[n]\} = F\{x_1[n]\} H(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)}) H(e^{j\omega})$

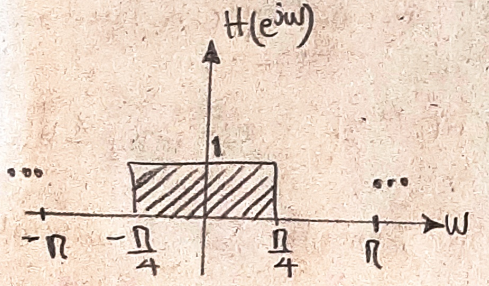
$* F\{x_3[n]\} = F\{(-1)^n x_2[n]\} = F\{e^{jn\pi} x_2[n]\} = X(e^{j\omega}) H(e^{j(\omega-\pi)})$

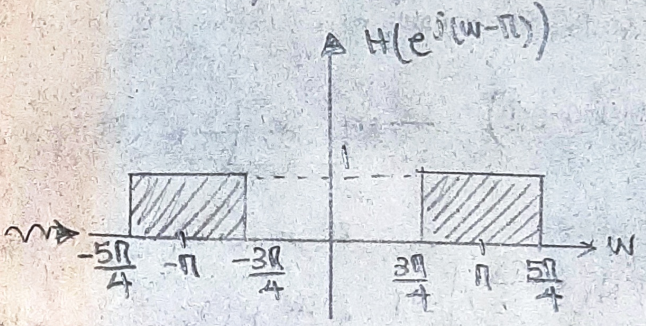
$* F\{x_4[n]\} = F\{x[n]\} H(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega})$

$\rightsquigarrow y[n] = x_3[n] + x_4[n]$

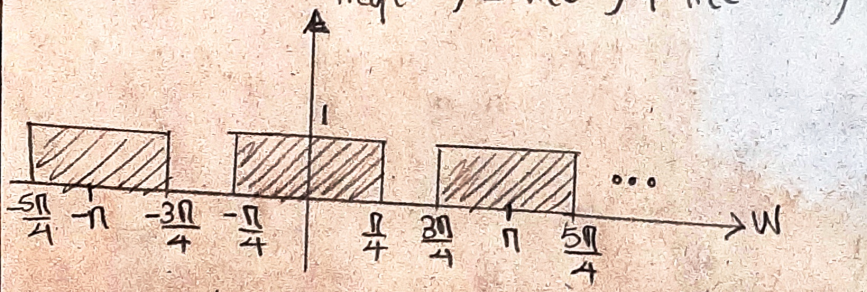
$\rightsquigarrow Y(e^{j\omega}) = F\{x_3[n]\} + F\{x_4[n]\} = X(e^{j\omega}) \underbrace{\left[H(e^{j(\omega-\pi)}) + H(e^{j\omega})\right]}_{H_{eq}(e^{j\omega})}$

ج) با توجه به پاسخ فرکانسی داده شده در صورت سوال داریم:





$H_{eq}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) + H(e^{j(\omega-\pi)})$



پس سیستم کل معادل یک فیلتر میان گذر ایده‌آل با فرکانس‌های قطع $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ است.