موضوع: ________ تاریخ: / /

حدیث خفوای ۹۸۲۶۰۴۱۳ (تکلیف ۶ سیگنال)

سوال ۶ _ الف) تبدیل Z داده شده $2u[\frac{n-2}{4}] + u[\frac{n-1}{2}]$

طبق خواص زیر در تبدیل Z:

$$x[n-n_0] \longleftrightarrow z^{-n_0}X(z)$$

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[r] & n = rk \\ 0 & n \neq rk \end{cases} \longleftrightarrow X(z^k)$$

$$u[\frac{n}{4}] \longleftrightarrow X_1(z^4) = \frac{1}{1-z^{-4}}$$

$$u[\frac{n-2}{4}] \longleftrightarrow z^{-2}X_1(z^4)$$

پس

$$2u[\frac{n-2}{4}] \longleftrightarrow \boxed{2z^{-2}\cancel{X_1(z^4)}} \quad 2z^{-2} \cdot \frac{1}{1-z^{-4}}$$

$$u[\frac{n}{2}] \longleftrightarrow \cancel{X_1(z^2)} \quad \frac{1}{1-z^{-2}} \quad \text{و} \quad u[\frac{n-1}{2}] \longleftrightarrow z^{-1}\cancel{X_1(z^2)} \quad z^{-1} \cdot \frac{1}{1-z^{-2}}$$

$$u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}$$

~~X(z)~~

$$2u[\frac{n-2}{4}] \longleftrightarrow 2z^{-2} \cdot \frac{1}{1-z^{-4}}$$

پس

$$\Rightarrow$$

$$u[\frac{n-1}{2}] \longleftrightarrow z^{-1} \cdot \frac{1}{1-z^{-2}}$$

$$Z\{2u[\frac{n-2}{4}] + u[\frac{n-1}{2}]\} = 2z^{-2} \cdot \frac{1}{1-z^{-4}} + z^{-1} \cdot \frac{1}{1-z^{-2}}$$

جواب

Year : Month : Day : ( )

سوال ٦

ب

طبق رابطه‌ی

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

$$N = 8 \rightarrow a_k = \frac{1}{8} \sum_{n=8} x[n] e^{-jk(\frac{\pi}{4})n}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

$$a_k = \frac{1}{8} \Big(x[-3] e^{-3jk\frac{\pi}{4}} + x[-2] e^{-2jk\frac{\pi}{4}} + x[-1] e^{-jk\frac{\pi}{4}} + x[0] e^{0} + x[1] e^{jk\frac{\pi}{4}} + x[2] e^{2jk\frac{\pi}{4}} + x[3] e^{3jk\frac{\pi}{4}} + x[4] e^{4jk\frac{\pi}{4}} \Big) =$$

$$\frac{1}{8} \Big(\cancel{-e^{-3jk\frac{\pi}{4}}} + \cancel{\frac{3}{2} e^{-jk\frac{\pi}{2}}} + 2e^{-jk\frac{\pi}{4}} + 1 + 2e^{jk\frac{\pi}{4}} + \cancel{\frac{3}{2} e^{jk\frac{\pi}{2}}} - \cancel{e^{3jk\frac{\pi}{4}}} + 0 \Big) =$$

$$\frac{1}{8} \Big(-\big(e^{3jk\frac{\pi}{4}} + e^{-3jk\frac{\pi}{4}} \big) + \frac{3}{2} \big(e^{jk\frac{\pi}{2}} + e^{-jk\frac{\pi}{2}} \big) + 2 \big(e^{jk\frac{\pi}{4}} + e^{-jk\frac{\pi}{4}} \big) + 1 \Big) =$$

$$\frac{1}{8} \Big(1 - \big(2\cos(\tfrac{3k\pi}{4})\big) + 3\cos(\tfrac{k\pi}{2}) + 4\cos(\tfrac{k\pi}{4}) \Big) =$$

$$a_k = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\cos(\frac{3k\pi}{4}) + \frac{3}{8}\cos(\frac{k\pi}{2}) + \frac{1}{2}\cos(\frac{k\pi}{4})$$

جواب

سوال ۲

الف) ①

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] * 2^n u[-n-1]$$

طبق خاصیت کانولوشن در تبدیل z

$$x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{z} X_1(z)X_2(z)$$

پس →

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \rightarrow X_1(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$x_2[n] = 2^n u[-n-1]$$

$$X_2(z) = \frac{-1}{1-2z^{-1}} \quad |z| < 2$$

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{-1}{1-2z^{-1}} = \frac{-1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{-z^2}{(z-\frac{1}{2})(z-2)}}$$

$$\boxed{\frac{1}{2} < |z| < 2}$$

← پس ROC ها را اشتراک می‌گیریم

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}\left(u[n+9] - u[n-9]\right) \Rightarrow$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{-9 \le n \le 9}$$

الف) ②

ROC = کل z به جز $z=\infty$

$$X(z) = \sum_{n=-9}^{9} \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} z^{-n} = \sum_{n=-9}^{0} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{9} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} z^{-n}$$

مقدار دارد

$$= \sum_{n=-9}^{0} (2z^{-1})^n + \sum_{n=0}^{9} \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n = \frac{1-(\frac{1}{2}z)^{10}}{1-(\frac{1}{2}z)} + \frac{1-(\frac{1}{2}z^{-1})^{10}}{1-(\frac{1}{2}z^{-1})}$$

$$\sum_{n=0}^{9} (2z^{-1})^{-n} = \sum_{n=0}^{9} \left(\frac{1}{2}z\right)^n$$

$$= \frac{1-(\frac{1}{2}z)^{10}}{1-\frac{1}{2}z} + \frac{1-(\frac{1}{2}z^{-1})^{10}}{1-(\frac{1}{2}z^{-1})}$$

چون $x[n]$ دنباله‌ای محدود است ← ROC تمام صفحه z بجز احتمالاً $z=0$ و $z=\infty$

$z=\infty$ ← چون $\lim_{z\to\infty} X(z) \to \infty$ پس $z=\infty$ از ROC حذف می‌شود. $z=\frac{1}{2}$

قطب نیست چون با ریشه صورت زده می‌شود. $z=0$ هم در ROC هست چون قطب نیست

سوال ۲ _ الف ۳

$$x[n] = 4^n \cos\left[\frac{n\pi}{2}\right] u[-n-1]$$

$$\cos\left[\frac{n\pi}{2}\right] = \frac{e^{jn\frac{\pi}{2}} - e^{-jn\frac{\pi}{2}}}{2j} \rightarrow x[n] = 4^n \frac{\left(e^{jn\frac{\pi}{2}} - e^{-jn\frac{\pi}{2}}\right)}{2j} u[-n-1]$$

$$= \frac{1}{2j} \cdot \left(4e^{j\frac{\pi}{2}}\right)^n u[-n-1] - \frac{1}{2j} \cdot \left(4e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)^n u[-n-1]$$

$$X(z) = \frac{1}{2j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(4e^{j\frac{\pi}{2}}\right)^n u[-n-1] - \frac{1}{2j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(4e^{-j\frac{\pi}{2}}\right) u[-n-1]$$

$$= \frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{1-\left(4e^{j\frac{\pi}{2}}\right)z^{-1}} - \frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{1-\left(4e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)z^{-1}} =$$

$$\frac{z}{2j\left(z-4e^{j\frac{\pi}{2}}\right)} - \frac{z}{2j\left(z-4e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)} = \frac{1}{2j}\frac{\left[\cancel{z^2} - 4e^{-j\frac{\pi}{2}}z - \cancel{z^2} + 4e^{j\frac{\pi}{2}}z\right]}{\left(z-4e^{j\frac{\pi}{2}}\right)\left(z-4e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)}$$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$= \frac{4z\left(\cancel{e^{j\frac{\pi}{2}} - e^{-j\frac{\pi}{2}}}\right)}{\cancel{2j}\left(z-4e^{j\frac{\pi}{2}}\right)\left(z-4e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)} = \boxed{\frac{4z\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(z-4e^{j\frac{\pi}{2}}\right)\left(z-4e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)}}$$

$$ROC = |z| < \left|4e^{j\frac{\pi}{2}}\right| \text{ and } \underbrace{|z| < \left|4e^{-j\frac{\pi}{2}}\right|}_{4} \rightarrow \boxed{ROC: |z| < 4}$$

جواب

سوال ۲ ب . ب ۲

$$x[n] = 1 + 2\cos\left[\frac{(n+1)\pi}{4}\right] + \sin\left[\frac{n\pi}{4}\right]$$

$$x[n] = 1 + \cancel{2}\left(e^{j\left(\frac{2n+1}{4}\right)\pi} + e^{-j\left(\frac{2n+1}{4}\right)\pi}\right)$$

$$+ \frac{1}{2j}\left(e^{j\left(n\frac{\pi}{4}\right)} - e^{-j\left(n\frac{\pi}{4}\right)}\right) =$$

$$1 + e^{j\pi\left(\frac{n}{2}\right)} e^{j\pi\left(\frac{1}{4}\right)} + e^{-j\left(\frac{n}{2}\right)\pi} \cdot e^{-j\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$+ \frac{e^{j\left(n\frac{\pi}{4}\right)}}{2j} - \frac{e^{-j\left(n\frac{\pi}{4}\right)}}{2j} = ?$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4 \qquad T_2 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$$

ک.م.م $(4,8) = \boxed{8} \rightarrow \boxed{T\ \text{کل} = 8}$ $\quad \omega = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{4}$

باید ضرایب $e^{j\left(\frac{\pi}{4}\right)nk}$ را پیدا کنیم.

$$x[n] = 1 + \frac{1}{2j} e^{j\left(n\frac{\pi}{4}\right)} - \frac{1}{2j} e^{-j\left(n\frac{\pi}{4}\right)} + e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}n}$$

$$+ e^{-j\left(\frac{\pi}{4}\right)} \cdot e^{-j n\frac{\pi}{2}}$$

$a_0 = 1 \quad a_1 = \frac{1}{2j} \quad a_{-1} = \frac{-1}{2j} \quad a_2 = e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)$

$a_{-2} = e^{-j\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-j)$

پس برای a_0 و a_1 و a_{-1} و

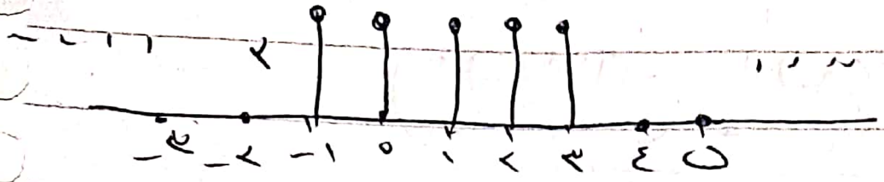
a_2 و a_{-2} ضریب داریم.

Subject:

Year : Month : Day : ( )

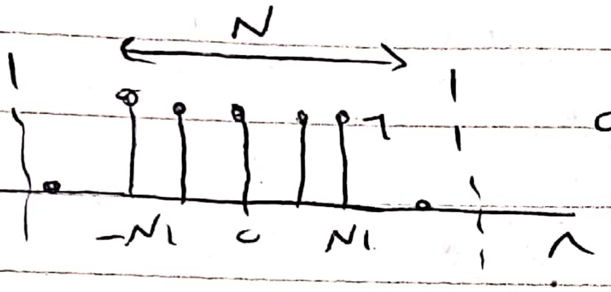
$\boxed{\text{ب - ۲}}$

$N=7 \qquad x[n]=\begin{cases} 2 & -1\le n\le 3 \\ 0 & 4\le n\le 5 \end{cases}$



اگر $x[n]$ را یک واحد به چپ شیفت دهیم ← $x[n+1]$

مثل یک پالس محدود به فرم زیر ۷ تا



$y[n]$

$$a_k=\begin{cases} \dfrac{\frac{1}{N}\sin\left[\dfrac{2\pi k(N_1+\frac{1}{2})}{N}\right]}{\sin\left(\dfrac{\pi k}{N}\right)} & k\neq 0, \pm N, \ldots \\[2ex] \dfrac{2N_1+1}{N} & k=0, \pm N, \pm 2N \end{cases}$$

در نتیجه ← $x[n+1]=2y[n]$

طبق خاصیت شیفت در زمان

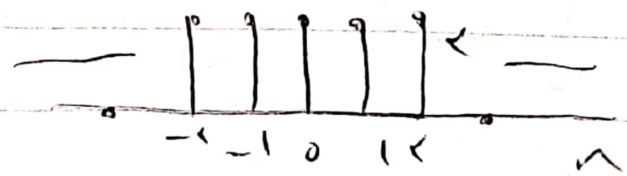
$x[n-n_0] \longleftrightarrow a_k e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n_0}$

$c_k=b_k e^{+jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)}$ ← $n_0=-1$

ما c_k را اینجا می‌یابیم بعد b_k را بدست میاریم ←

$$b_k=\frac{c_k}{e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)}}$$

$N=7$



$-N_1=-2 \qquad N_1=2$

$$c_k=\begin{cases} \dfrac{\frac{2}{7}\sin\left[\dfrac{2\pi k(\cancel{2}\,\frac{5}{2})}{7}\right]}{\sin\left(\dfrac{\pi k}{7}\right)} = \dfrac{\frac{2}{7}\sin\left[\dfrac{5\pi k}{7}\right]}{\sin\left(\dfrac{\pi k}{7}\right)} \\[2ex] \dfrac{2(4+1)}{7}=\dfrac{10}{7} & k=0, \pm N, \pm 2N \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Subject:
Year : Month : Day

$$b_k = \begin{cases} \dfrac{\frac{2}{7}\sin[\frac{5\pi k}{7}]}{(\;)\sin(\frac{\pi k}{7})} \cdot e^{-jk(\frac{2\pi}{7})} & k \neq 0, \pm N, \dots \\[2ex] \dfrac{10}{7} \cdot e^{-jk(\frac{2\pi}{7})} & k = 0, \pm N, \pm 2N \end{cases}$$

ضرایب $x[n]$

جواب

سوال ۲

پ ۳

$$x[n] = \cos[\frac{n\pi}{2}]\cos[\frac{3n\pi}{5}]$$

$$\cos a \times \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$ طبق رابطه ی

$$\to x[n] = \frac{1}{2}\left(\cos(\frac{n\pi}{2} + \frac{3n\pi}{5}) + \cos(\frac{n\pi}{2} - \frac{3n\pi}{5})\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos(\frac{11n\pi}{10}) + \cos(-\frac{n\pi}{10})\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(\frac{11n\pi}{10}) + \cos(\frac{n\pi}{10})\right)$$

$$N_1 = \frac{2\pi}{\frac{11\pi}{10}} \to \frac{20}{11} \qquad N_2 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{10}} \to 20$$

N اصلی ؟ چون هر دو سیگنال متناوب هستند و $\frac{N_1}{N_2}$ هم گویا است ←

$$\mathrm{lcm}(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}) = \frac{\mathrm{lcm}(a,c)}{\gcd(b,d)} \Rightarrow$$

$$\mathrm{lcm}(\frac{20}{11}, 20) = \frac{\mathrm{lcm}(20,20)}{\gcd(11,1)} = 20 \to \boxed{N = 20}$$

$$x[n] = \frac{1}{2}\left(e^{j(\frac{11n\pi}{10})} + e^{-j(\frac{11n\pi}{10})}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{j(\frac{n\pi}{10})} + e^{-j(\frac{n\pi}{10})}\right)$$

باید ضرایب $e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$ را مانند سازیم یعنی ضرایب $e^{jk(\frac{\pi}{10})n}$

$$x[n] = \frac{1}{2}e^{j(\frac{n\pi}{10})} + \frac{1}{2}e^{-j(\frac{n\pi}{10})} + \frac{1}{2}e^{j(\frac{11n\pi}{10})} + \frac{1}{2}e^{-j(\frac{11n\pi}{10})}$$

$a_1 = \frac{1}{2}$ $\quad a_{-1} = \frac{1}{2}$ $\quad a_{11} = \frac{1}{2} = a_1$ $\quad a_{-11} = a_{-1} = \frac{1}{2}$ جواب

سوال ۳

الف –

$x(z) = \ln(1-2z) \qquad |z| < \frac{1}{2}$

① $\dfrac{dX(z)}{dz} = \dfrac{-2}{1-2z}$

طبق خاصیت differentiation در z-domain

$n\,x[n] \xleftrightarrow{z} -z\dfrac{dX(z)}{dz}$ با روخ R

پس به ازای رابطه استفاده کنیم ⇐

$-z \cdot \dfrac{-2}{1-2z} = \dfrac{2z}{1-2z} = \dfrac{-1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \longrightarrow +\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$

چون $|z| < \frac{1}{2}$ است تبدیل وارون یکطرفه

$x[n] = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]}{n}$ پس

سوال ۳

الف ـ ۲

$$X(z)=\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}-2z^{-2}} \qquad 1<|z|<2$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z^{-2}}{-2z^{-2}-z^{-1}+1} \xrightarrow{\times z^{2}} = \frac{1}{z^{2}-z-2}=\frac{1}{(z-2)(z+1)}$$

$$=\frac{A}{(z-2)}+\frac{B}{z+1} \qquad B=\cancel{(z+1)}\cdot\frac{1}{\cancel{(z+1)}(z-2)}\Bigg|_{z=-1}=\frac{-1}{3}$$

$$A=\cancel{(z-2)}\frac{1}{\cancel{(z-2)}(z+1)}\Bigg|_{z=2}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

$$\rightarrow \frac{X(z)}{z}=\frac{1}{3(z-2)}-\frac{1}{3(z+1)} \rightarrow X(z)=\frac{1}{3}\Big(\underbrace{\frac{z}{z-2}}_{|z|<2}-\underbrace{\frac{z}{z+1}}_{|z|>-1}\Big)=$$

$$\boxed{\frac{1}{3}\Big(-(2)^{n}u[-n-1]-(-1)^{n}u[n]\Big)}$$

سمت چپی

جواب

الف ـ ۳

$$X(z)=\frac{16z^{-1}}{(1-z^{-1})^{2}(1+3z^{-1})} \qquad |z|>3$$

$$\frac{16z^{-1}\cdot z^{2}\cdot z}{(z-1)^{2}(z+3)}=\frac{16z^{2}}{(z-1)^{2}(z+3)} \rightarrow \frac{X(z)}{z}=\frac{16z}{(z-1)^{2}(z+3)}=$$

$$\frac{A_1}{(z+3)}+\frac{B_1}{(z-1)}+\frac{B_2}{(z-1)^{2}} \qquad A_1=(z+3)\cancel{X}(z)\Big|_{z=-3}=\frac{16\times -3}{+16}\quad -3$$

$$\rightarrow \boxed{A_1=-3}$$

$$B_2=(z-1)^{2}X(z)\Big|_{z=1}=\frac{16}{4}=\boxed{4}$$

$$B_1=\frac{d}{dz}\left[(z-1)^{2}X(z)\right]\Big|_{z=1}=\frac{d}{dz}\left(\frac{16z}{z+3}\right)=\frac{16(z+3)-16z}{(z+3)^{2}}=$$

$$\frac{48}{(z+3)^{2}}\Bigg|_{z=1}\rightarrow\frac{48}{16}=\boxed{3}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{-3}{z+3}+\frac{3}{z-1}+\frac{4}{(z-1)^{2}} \rightarrow X(z)=\frac{-3z}{z+3}+\frac{3z}{z-1}+\frac{4z}{(z-1)^{2}}$$

طبق خاصیت مشتق گیری در حوزه z

$$-z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-a}\right)=\frac{az}{(z-a)^{2}} \overset{z}{\longleftrightarrow} na^{n}u[n]$$

ادامه‌ی سوال $\boxed{\text{۴ ـ الف ۳}}$

$$x[n] = -3(-3)^n u[n] + 3(1)^n u[n] + 4n\,u[n] = -3(-3)^n u[n] + 3u[n] + 4n\,u[n]$$

Scanned by CamScanner

سوال ۳ _ ب

Subject:

Year : Month : Day : ( )

ب ـ ج

$$a_k = \cos\left[\frac{8\pi k}{21}\right] = \frac{e^{j(\frac{8\pi}{21}k)} + e^{-j(\frac{8\pi}{21}k)}}{2}$$

طبق خاصیت دوگانی و شیفت در زمان :

$$x[n-n_0] \longleftrightarrow a_k e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n_0}$$

اگر $x[n]=\delta[n]$ با دوره تناوب N داشته باشیم

$$a_k = \frac{1}{N} \qquad a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0} \delta[n]\, e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N}$$

پس چون اینجا $N=21$ است $\frac{2\pi}{\frac{8\pi}{21}} = \frac{21}{4} = \frac{N}{m}$

دوره تناوب اصلی = ۲۱

پس

$$\delta[n-n_0] \longleftrightarrow \frac{1}{N} e^{-jk\omega_0 n_0}$$

$$\frac{1}{2} e^{j(\frac{8\pi}{21}k)} \longleftrightarrow \delta[n-8]$$

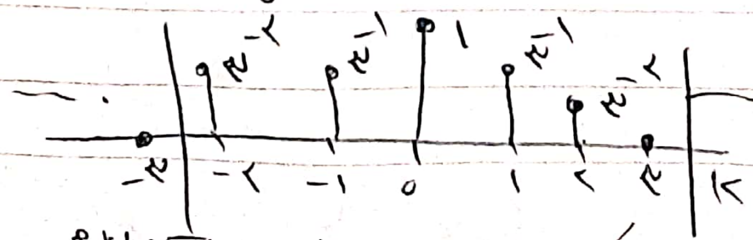
$$\frac{1}{2} e^{-j(\frac{8\pi}{21}k)} \longleftrightarrow \delta[n+8]$$

پس

جواب $x[n] = 21\,\delta[n-8] + 21\,\delta[n+8]$

ب ـ د

$$a_k = \begin{cases} 3^{-|k|} & -2 \le k \le 2 \\ 0 & k=3 \end{cases} \qquad N=6$$



$$x[n] = a_0 e^0 + a_1 e^{j(\frac{2\pi}{N})n} + a_{-1} e^{-j(\frac{2\pi}{N})n} + a_2 e^{2j(\frac{2\pi}{N})n} + a_{-2} e^{-2j(\frac{2\pi}{N})n}$$

در یک دوره تناوب $x[n]$ را بدست میاریم

ادامه‌ی سوال ۳ ـ ب ـ ۲

Subject:
Year: Month: Day: ( )

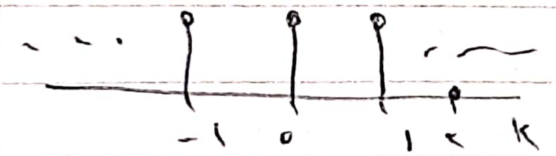
$$x[n] = 1 + \frac{1}{3} e^{j(\frac{2\pi}{N})n} + \frac{1}{3} e^{-j(\frac{2\pi}{N})n} + \frac{1}{9} e^{2j(\frac{2\pi}{N})n} + \frac{1}{9} e^{-2j(\frac{2\pi}{N})n} \xrightarrow[N=6]{}$$

$$\frac{1}{3}\underbrace{\left(e^{j(\frac{\pi}{3})n} + e^{-j(\frac{\pi}{3})n}\right)}_{2\cos(\frac{\pi n}{3})} + \frac{1}{9}\underbrace{\left(e^{j(\frac{2\pi n}{3})} + e^{-j(\frac{2\pi n}{3})}\right)}_{2\cos(\frac{2\pi n}{3})}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \frac{2}{9}\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) = x[n]$$

ب ـ ۳

$N=4 \quad a_k = \begin{cases} 1 & -1 \le k \le 1 \\ 0 & k=2 \end{cases}$ در یک دوره تناوب



$$x[n] = a_0 e^0 + a_1 e^{j(\frac{2\pi}{N})} + a_{-1} e^{-j(\frac{2\pi}{N})} + \cancel{a_2} =$$

$$1 + \underbrace{1 \cdot e^{j(\frac{\pi}{2})n} + 1 \cdot e^{-j(\frac{\pi}{2})n}}_{2\cos(\frac{\pi n}{2})} = 1$$

$N=4$

$$x[n] = 1 + 2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

سوال ۴) الف - ۶)

$y[n] = e^{-jn} x^*[n]$

① طبق خاصیت های زیر و

Scaling in the z-domain و $\quad e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{z} X(e^{-j\omega_0} z)$

پس

$e^{-jn} x[n] \xleftrightarrow{z} X(e^{j} z)$

$\boxed{\omega_0 = -1}$

و طبق خاصیت conjunction و

$x^*[n] \xleftrightarrow{z} X^*(z^*)$

$y_1[n] = x^*[n] \rightarrow Y_1(z) = X^*(z^*)$

$y[n] = e^{-jn} y_1[n] \rightarrow Y(z) = X^*((e^{j}z)^*) = \boxed{X^*(e^{-j}z^*)}$

جواب $\boxed{ROC_1 = ROC_2}$

الف ۲

$$y[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{2}] & n \in even \\ x[\frac{n-1}{2}] & n \in odd \end{cases}$$

$$y[n] = \frac{x[\frac{n}{2}] + x[\frac{n-1}{2}]}{2} + (-1)^n \frac{x[\frac{n}{2}] - x[\frac{n-1}{2}]}{2}$$

$$= \frac{1}{2} x[\frac{n}{2}] + \frac{1}{2} x[\frac{n-1}{2}] + \frac{(-1)^n}{2} x[\frac{n}{2}] - \frac{(-1)^n}{2} x[\frac{n-1}{2}]$$

$= \quad x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[r] & n = rk \\ 0 & n \neq rk \end{cases} \quad X(z^k)$ طبق خاصیت های زیر و

و $\quad x[n-n_0] \xleftrightarrow{z} z^{-n_0} X(z)$

$x[\frac{n-1}{2}] \rightarrow$ اول ۲ برابر شده بعد یک واحد شیفت خورده

$\longrightarrow z^{-1} X(z) \longrightarrow z^{-1} X(z^2)$

$x[\frac{n}{2}] \xleftrightarrow{z} X(z^2)$

و طبق خاصیت $\quad z_0^n x[n] \xleftrightarrow{z} X(\frac{z}{z_0})$

$(-1)^n x[\frac{n}{2}] \xleftrightarrow{z} X(z^2) \longrightarrow X((-z)^2) = \boxed{X(z^2)}$

$(-1)^n x[\frac{n-1}{2}] \longrightarrow z^{-1} X(z^2) \longrightarrow z^{-1} X((-z)^2) \longrightarrow \boxed{z^{-1} X(z^2)}$

ادامه‌ی ٤ _ الف (۲)

$$z\left\{ \frac{1}{2} x\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{1}{2} x\left(\frac{n-1}{2}\right) + \frac{(-1)^n}{2} x\left(\frac{n}{2}\right) - \frac{(-1)^n}{2} x\left(\frac{n-1}{2}\right) \right.$$

$$= \frac{1}{2} X(z^2) + \frac{1}{2} \cancel{z^{-1} X(z^2)} + \frac{1}{2} X(z^2)$$

$$- \frac{1}{2} \cancel{z^{-1} X(z^2)} = \boxed{X(z^2)}$$

جواب

سوال ٤ ـ ب

$y[n] = x^*[\frac{n}{2}]$ ①

طبق ویژگی conjugation ←

$y_1[n] = x^*[n]$ $\quad$ $x^*[n] \longleftrightarrow a^*_{-k}$

$y[n] = y_1[\frac{n}{2}]$ $\quad$ و $\quad$ $x_{(m)}[n] \longleftrightarrow \frac{1}{m} a_k$

پس $\quad$ $y[n] \longleftrightarrow \frac{1}{۲} a^*_{-k}$ $\quad$ جواب

Subject:
Year : Month : Day : ( )

$y[n] = x^*[n-1] + x[-n+1]$ ٤

طبق روابط زیر

① $x^*[n] \longleftrightarrow a^*_{-k}$

② $x[n-n_0] \longleftrightarrow a_k e^{-jk\omega_0 n_0}$

③ $x[-n] \longleftrightarrow a_{-k}$

④ $Ax[n] + By[n] \longleftrightarrow Aa_k + Bb_k$

$x^*[n-1] \longleftrightarrow a^*_{-k} e^{-jk\omega_0}$ پس

$x[n+1] \longleftrightarrow a_k e^{jk\omega_0}$

$x[-n+1] \longleftrightarrow a_{-k} e^{-jk\omega_0}$

$y[n] \longleftrightarrow a^*_{-k} e^{-jk\omega_0} + a_k e^{jk\omega_0}$

جواب

$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\, e^{-jk\omega_0 n}$ الف) سوال ت

موضوع: تاریخ: / /

$N=6 \to$

$a_0 = \frac{1}{6}\sum_{n=6} x[n] = \frac{1}{6}\left(x[-3]+x[-2]+x[-1]+x[0]+x[1]+x[2]\right)$

$= \frac{1}{6}\left(\cancel{2}+1\cancel{-1}+0\cancel{+1}\cancel{+2}\right) = \frac{1}{6}$

$\boxed{a_0 = \frac{1}{6}}$ الف)

ب) طبق رابطه ی پارسوال می دانیم $\sum_{k=0}^{5} |a_k|^2 =$ ب

$\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N\rangle} |a_k|^2$

پس $\sum_{k=0}^{5} |a_k|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=6} |x[n]|^2$

در یک دوره تناوب

$= \frac{1}{6}\left(|x[-3]|^2+|x[-2]|^2+|x[-1]|^2+|x[0]|^2+|x[1]|^2+|x[2]|^2\right)$

$= \frac{1}{6}\underbrace{(4+1+1+0+1+4)}_{11} = \frac{11}{6}$ جواب ب)

$\boxed{\sum_{k=0}^{5} |a_k|^2 = \frac{11}{6}}$

ج) $\sum_{k=-79}^{-74} a_k = ?$

چون ضرایب a_k ۶ دوره تناوب دارند و تکراری می شوند می توان جمع آنها را هم در یک بازه ی دیگر نوشت که با ضربی از دوره تناوب جمع شده

$N=6 \to \sum_{-79}^{-74} a_k = \sum_{-79+78}^{-74+78} a_k = \sum_{-1}^{4} a_k$

$78 = 6\times 13 \to$ ضربی از N

$= \sum_{-1}^{4} a_k = ? = a_{-1}+a_0+a_1+a_2+a_3+a_4$

در امتحانات -

(2.)

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=4} x[n]\, e^{-jk\omega_0 n}$$

$$a_{-1} = \frac{1}{4}\Big(x[0-3]\, e^{-3j\omega_0} + x[-2]\, e^{-2j\omega_0} + x[-1]\, e^{-j\omega_0}$$
$$+ x[0] + x[1]\, e^{j\omega_0} + x[2]\, e^{2j\omega_0}\Big)$$

$$a_0 = \frac{1}{4}\Big(x[-3] + x[-2] \text{———} + x[2]\Big) = \frac{1}{4}$$

$$a_1 = \frac{1}{4}\Big(x[-3]\, e^{3j\omega_0} + x[-2]\, e^{2j\omega_0} + x[-1]\, e^{j\omega_0}$$
$$+ x[0] + x[1]\, e^{-j\omega_0} + x[+2]\, e^{-2j\omega_0}\Big)$$

$$a_2 = \frac{1}{4}\Big(\cancel{x[-3]}^{-2}\, e^{6j\omega_0} + \cancel{x[-2]}^{1}\, e^{4j\omega_0} + \cancel{x[-1]}^{(-1)}\, e^{2j\omega_0}$$
$$+ \cancel{x[0]}^{0} + \cancel{x[1]}^{1}\, e^{-2j\omega_0} + \cancel{x[2]}^{2}\, e^{-4j\omega_0}\Big)$$

$$a_3 = \frac{1}{4}\Big(\cancel{x[-3]}_{-2}\, e^{9j\omega_0} + \cancel{x[-2]}^{1}\, e^{6j\omega_0} + \cancel{x[-1]\, e^{3j\omega_0}}^{(-1)}$$
$$+ \cancel{x[0]}^{0} + \cancel{x[1]\, e^{-3j\omega_0}} + \cancel{x[2]}_{(2)}\, e^{-6j\omega_0}\Big)$$

$$a_4 = \frac{1}{4}\Big(x[-3]\, e^{12j\omega_0} + \cancel{x[-2]}\, e^{8j\omega_0} + \cancel{x[-1]}^{(-1)}\, e^{4j\omega_0} +$$
$$\cancel{x[0]}_{0} + \cancel{x[1]}\, e^{-4j\omega_0} + \cancel{x[2]}_{(2)}\, e^{-8j\omega_0}\Big)$$

موضوع: تاریخ: / /

$a_1 + a_{-1} =$

$$\frac{1}{6}\Big[(e^{3jw_0} + e^{-3jw_0})\,\cancel{x[-3]}^{-2} + (e^{2jw_0} + e^{-2jw_0})\,\cancel{x[-2]}^{1}$$
$$+ (e^{jw_0} + e^{-jw_0})\,\cancel{x[-1]}^{-1} + 2\underset{0}{\cancel{x[0]}} + (e^{jw_0} + e^{-jw_0})\,\cancel{x[1]}^{1}$$
$$+ (e^{2jw_0} + e^{-2jw_0})\,\underset{2}{\cancel{x[2]}} \Big)$$

$$= \frac{1}{6}\Big[-4\cos(3w_0) + 2\cos(2w_0) - \cancel{2\cos(w_0)}$$
$$+ \cancel{2\cos(w_0)} + 4\cos(2w_0) \Big) =$$

$$-\frac{2}{3}\cos(3w_0) + \cos(2w_0)$$ part1

$$a_2 + a_3 + a_4 = \frac{1}{6}\Big[-e^{6jw_0} + 2e^{-6jw_0} + 3e^{-4jw_0}$$
$$- (e^{2jw_0} - e^{-2jw_0})$$
$$- 2e^{9jw_0} - (e^{3jw_0} - e^{-3jw_0}) - 2e^{12jw_0}$$
$$+ e^{8jw_0} + 2e^{-8jw_0} \Big] =$$

$$\frac{1}{6}\Big[\overset{2j\sin(6w_0)}{\cancel{-(e^{6jw_0} - e^{-6jw_0})}} + e^{-6jw_0} + 3e^{-4jw_0}$$
$$- (2j\sin(2w_0)) - 2e^{9jw_0} - (2j\sin(3w_0))$$
$$- 2e^{12jw_0} + 2\cos(8w_0) + e^{-8jw_0} \Big) =$$

$$= \frac{1}{6}\Big[-2j\sin(6w_0) - 2j\sin(2w_0) - 2j\sin(3w_0)$$
$$+ 2\cos(8w_0) + e^{-6jw_0} + 3e^{-4jw_0}$$
$$- 2e^{12jw_0} + e^{-8jw_0} \Big]$$

جواب → B

$$-\frac{2}{3}\cos(3w_0) + \cos(2w_0) - \frac{1}{3}j\sin(6w_0) - \frac{1}{3}j\sin(2w_0)$$
$$- \frac{1}{3}j\sin(3w_0) + \frac{1}{3}\cos(8w_0) + \underset{(1)}{\cancel{e^{-6jw_0}}} + 3e^{-4jw_0}$$
$$- \underset{(-2)}{\cancel{2e^{12jw_0}}} + e^{-8jw_0} + \frac{1}{6}$$

$$-\frac{٢}{٣}\cos(\cancel{٦\pi})^{-1} + \cos\left(\frac{٢\pi}{٣}\right) - \frac{١}{٣} j\, \cancel{\sin(٢٦\pi)}^{0}$$

$$-\frac{١}{٣} j \sin\left(\frac{٢\pi}{٣}\right) - \frac{١}{٣} j\, \cancel{\sin(٦\pi)}^{0} + \frac{١}{٣}\cos\left(\cancel{\frac{٨\pi}{٣}}\right)$$

$$+ ٦ + ٣\left(\cos\left(-\frac{٤\pi}{٣}\right) + j\sin\left(-\frac{٤\pi}{٣}\right)\right) - ٢ \qquad -\frac{١}{٢}$$

$$+\cos\left(-\frac{٨\pi}{٣}\right) + j\sin\left(-\frac{٨\pi}{٣}\right) =$$

$$\cancel{\frac{٢}{٣}} + \left(\cancel{-\frac{١}{٢}}\right) - \cancel{\frac{١}{٣}} j \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \cancel{\frac{١}{٦}} + \cancel{٦}$$

$$-\frac{\sqrt{٣}}{٦} j$$

$$+٣\left(\frac{١}{٢} + j\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)\right) \cancel{-٢} \cancel{-\frac{١}{٢}} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} j =$$

$$-\frac{٤\sqrt{٣}}{٢} j$$

$$\frac{٤}{٦} - \frac{١}{٦} \cancel{-\frac{٣}{٦}} - \frac{٩}{٦} \cancel{+\frac{٩}{٦}} - \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} j - \frac{\sqrt{٣}}{٢} j$$

$$-٢\sqrt{٣} j$$

$$-\frac{\sqrt{٣}}{٦} j$$

$$= \boxed{-\frac{١٣}{٦}\sqrt{٣} j}$$

جواب ٢٠

سوال ۴ (الف)

$$y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]$$

از دو طرف تبدیل z می گیریم

$$Y(z)-\frac{3}{4}z^{-1}Y(z)+\frac{1}{8}z^{-2}Y(z)=X(z)$$

$$\Rightarrow$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}=\frac{1}{\left(1-\frac{z^{-1}}{2}\right)\left(1-\frac{z^{-1}}{4}\right)}$$

$$h[n]=Z^{-1}\{H(z)\}=\ ?$$

$$H(z)=\frac{A}{\left(1-\frac{z^{-1}}{2}\right)}+\frac{B}{1-\frac{z^{-1}}{4}}\qquad A=\left(1-\frac{z^{-1}}{2}\right)H(z)\Big|_{z=2}$$

$$\rightarrow A=\frac{1}{1-\cancel{\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}}}=2\qquad B=\left(1-\frac{z^{-1}}{4}\right)H(z)\Big|_{z=4}$$

$$B=\frac{1}{\underset{-1}{1-\cancel{2}}}=-1\quad\rightarrow\quad H(z)=\frac{2}{1-\frac{z^{-1}}{2}}-\frac{1}{1-\frac{z^{-1}}{4}}\Rightarrow$$

$$h[n]=Z^{-1}\left\{\frac{2}{1-\frac{z^{-1}}{2}}-\frac{1}{1-\frac{z^{-1}}{4}}\right\}=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]$$

جواب (الف) را [illegible]

تاریخ: / /

سوال ۶ _ ب) طبق رابطه‌ی تبدیل z ها

$$x[n] * y[n] \xleftrightarrow{z} X(z)Y(z)$$

پس

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

$$H(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{z^{-1}}{2}\right)\left(1-\frac{z^{-1}}{4}\right)} \quad \text{و} \quad Z\{u[n]\} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$|z|>1$$

$$\rightarrow Y(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})\left(1-\frac{z^{-1}}{2}\right)\left(1-\frac{z^{-1}}{4}\right)} = \frac{A}{1-z^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{z^{-1}}{2}} + \frac{C}{1-\frac{z^{-1}}{4}}$$

$$A = (1-z^{-1})Y(z)\Big|_{z^{-1}=1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{3}{4}$$

$$B = \left(1-\frac{z^{-1}}{2}\right)Y(z)\Big|_{z^{-1}=2} = \frac{1}{(1-2)\left(1-\frac{1}{2}\right)} = -2$$

$$C = \left(1-\frac{z^{-1}}{4}\right)Y(z)\Big|_{z^{-1}=4} = \frac{1}{(1-4)(1-2)} = \frac{1}{3}$$

$$-3 \qquad -1$$

$$\rightarrow \boxed{Y(z) = \frac{\frac{8}{3}}{1-z^{-1}} + \frac{-2}{1-\frac{z^{-1}}{2}} + \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{z^{-1}}{4}}}$$

$$y[n] = \frac{8}{3}u[n] - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

جواب

$$H(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{z^{-1}}{2}\right)\left(1-\frac{z^{-1}}{4}\right)}$$

ج) پاسخ سیستم به $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ برابر

$y_1[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n H\left(\frac{1}{3}\right)$ است

$$H\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\underbrace{\left(1-\cancel{\frac{3}{2}}\right)}_{-\frac{1}{2}}\underbrace{\left(1-\cancel{\frac{3}{4}}\right)}_{\frac{1}{4}}} = -8$$

$\longrightarrow \boxed{y_1[n] = -8\left(\frac{1}{3}\right)^n}$ جواب

پاسخ به $\left(\frac{2}{3}\right)^n + 5$ ، $x_2[n] = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 5(1)^n \leftarrow$

$$y_2[n] = \left(\frac{2}{3}\right)^n H\left(\frac{2}{3}\right) + 5H(1)$$

$$H\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{\underbrace{\left(1-\cancel{\frac{3}{4}}\right)}_{\frac{1}{4}}\underbrace{\left(1-\cancel{\frac{3}{8}}\right)}_{\frac{5}{8}}} = \frac{32}{5} \qquad H(1) = \frac{1}{\underbrace{\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)}_{\frac{1}{2}}\underbrace{\left(1-\cancel{\frac{1}{4}}\right)}_{\frac{3}{4}}} = \frac{8}{3}$$

$y_2[n] = \frac{32}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{40}{3}$ جواب

Scanned by CamScanner

سوال ۴-۲

$$x[n] = \sin\left[\frac{n\pi}{4}\right] + 3\cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{4}\right]$$

$$N_1 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8 \qquad N_2 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$$

دوره تناوب اصلی

$$\rightarrow N = \boxed{8}$$

$$x[n] = \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{\pi}{4}n} - e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right) + \frac{3}{2}\left(e^{j\frac{(2n+1)\pi}{4}} + e^{-j\frac{(2n+1)\pi}{4}}\right)$$

$$= \frac{e^{j\frac{\pi}{4}n}}{2j} - \frac{e^{-jn\frac{\pi}{4}}}{2j} + \frac{3}{2}e^{j\frac{2n\pi}{4}} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$+ \frac{3}{2}e^{-j\frac{2n\pi}{4}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} \Rightarrow$$ ضرایب $e^{jk\frac{\pi}{4}n}$ را تعیین می‌کنیم

$$= \frac{1}{2j} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}n} - \frac{1}{2j}e^{-jn\frac{\pi}{4}} + \frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{2jn\frac{\pi}{4}}$$

$$+ \frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j\frac{2n\pi}{4}} \rightarrow$$

$$\boxed{a_1 = \frac{1}{2j}} \,,\quad \boxed{a_{-1}} = \frac{-1}{2j} \qquad \boxed{a_2} = \frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$\boxed{a_{-2}} = \frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

پس اینا ضرایب غیر صفر $x[n]$ هستند ← ضرایب غیر صفر $y[n] = ?$

$$b_1 = a_1 H\left(e^{j\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2}\right)\left(1 - \frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{4}\right)}$$

$$b_{-1} = a_{-1} H\left(e^{-j\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{-1}{2j\left(1 - \frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{2}\right)\left(1 - \frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{4}\right)}$$

موضوع: تاريخ: /   /

$$b_{٢} = a_{٢}\, H\left(e^{\frac{\text{ت}\,\text{ط}}{٢}}\right) = \frac{٣\, e^{\frac{\text{ت}\,\text{ط}}{٤}}}{٢\left(١ - \frac{e^{-\frac{\text{ت}\,\text{ط}}{٢}}}{٢}\right)\left(١ - \frac{e^{-\frac{\text{ت}\,\text{ط}}{٢}}}{٤}\right)}$$

$$b_{-٢} = a_{-٢}\, H\left(e^{-\frac{\text{ت}\,\text{ط}}{٢}}\right) = \frac{٣\left(e^{-\frac{\text{ت}\,\text{ط}}{٤}}\right)}{٢\left(١ - \frac{e^{\frac{\text{ت}\,\text{ط}}{٢}}}{٢}\right)\left(١ - \frac{e^{\frac{\text{ت}\,\text{ط}}{٢}}}{٤}\right)}$$

$\boxed{\text{سوال ۷}}$

الف)

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1+kz^{-1}+z^{-2}} \xrightarrow{\frac{\times z^2}{\times z^2}} \frac{z}{z^2+kz+1}$$

شرط پایداری برای سیستم های LTI علی با تابع سیستم به صورت کسر گویا ، اندازه‌ی همه قطب‌های $H(z)$ کمتر از ۱ باشد تا درون دایره با شعاع واحد قرار گیرند

قطب های این تابع ، $\Delta = k^2-4$ ، $x_1 = \frac{-k \pm \sqrt{\Delta}}{2}$

$|x_1|<1$ و $|x_2|<1$ ، $x_2 = \frac{-k-\sqrt{\Delta}}{2}$

$$\to \left|\frac{-k+\sqrt{\Delta}}{2}\right| < 1 \to |-k+\sqrt{\Delta}| < 2 \to$$

$$k^2 - 2k\sqrt{\Delta} + \Delta < 4 \to \Delta < 2k\sqrt{\Delta} \to \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} < k$$

$$\frac{\Delta}{2\sqrt{\Delta}} < k$$

حالت ① $\left|\frac{-k-\sqrt{\Delta}}{2}\right| < 1 \to |-k-\sqrt{\Delta}| < 2 \to k^2+2k\sqrt{\Delta}+\Delta < 4$

$$k^2+2k\sqrt{k^2-4} + k^2-4 < 4 \to \cancel{2}k^2+\cancel{2}k\sqrt{k^2-4} < \cancel{8}\,4$$

$$k\sqrt{k^2-4} < 4-k^2 \xrightarrow[\text{به توان ۲}]{\text{۲ طرف}} k^2(k^2-4) < \cancel{k^4} - 8k^2 + 16$$

$$\cancel{k^4} - 4k^2$$

$$4k^2 < 16 \to k^2 < 4 \to \boxed{-2<k<2}$$

حالت ② $|-k+\sqrt{k^2-4}| < 2 \to \cancel{k^2} + k^2-4 - 2k\sqrt{k^2-4} < 4$

$$2k^2 - 2k\sqrt{k^2-4} < 8$$

$$k^2 - k\sqrt{k^2-4} < 4 \to k^2-4 < k\sqrt{k^2-4} \to$$

$$\cancel{k^4} - 8k^2 + 16 < k^2(k^2-4)$$

$$\cancel{k^4} - 4k^2$$

$$16 < 4k^2 \to 4 < k^2 \to k>2 \text{ یا } k<-2$$

چون باید ریشه های (اندازه) کمتر از ۱ باشد ← باید هم $-2<k<2$ باشد هم $k>2$ یا $k<-2$ که امکان ندارد ← نمی‌تواند هم علی باشد هم پایدار.

سوال ۷ ب آ

$$G(z) = H(z)\, H^*(z^*)$$

$$h_1^*[n] \xleftrightarrow{z} H_1^*(z^*)$$

$$h_1[n] * h_2[n] \xleftrightarrow{z} H_1(z)\, H_2(z)$$

$$g[n] = h[n] * h^*[n]$$

کانولوشن یک تابع با مزدوج خودش

در مزدوج گیری که ROC تفاوتی نمی کند در کانولوشن هم حداقل اشتراک R1 و R2

چون R1 = R2 الف ← حداقل R باید در ROC باشد ←

پس سیستم حاصل هم علی الف هم پایدار

سوال ۲ ب

$G(z) = H(z^{-1})$

$g[n] = h[-n]$ طبق خاصیت Time reversal

وارون در حوزه زمان اتفاق می‌افتد

چون $h[n]$ علی و پایدار بوده ← در حوزه‌ی z

$|z| > a$ و $a<1$

$h[n]$ علی است ← برای $n<0$ ، $h[n]=0$

$h[-n]$ علی نیست و ضد علی است چون برای $n>0$ ← $h[-n]=0$

چون $H(z)$ پایدار است ← $z=1$ باید در ROC باشد و چون

$H(\frac{1}{z})$ را می‌خواهیم چک کنیم به ازای $z=1$ ، $H(1)$ را داریم که

باز هم در ROC هست ← پایدار است

ب ۳

$G(z) = H(-z)$

$g[n] = (-1)^n h[n]$ ← $h[n]$ علی است

برای $n<0$ ، $h[n]=0$ است

پس $g[n]$ هم علی می‌باشد چون فقط $(-1)^n$ در آن ضرب شده

$|z|=1$ در ROC ، $H(z)$ هست

و $|z|=|-z|$ ← در $H(-z)$ ، دایره با شعاع واحد وجود دارد

و پایدار است