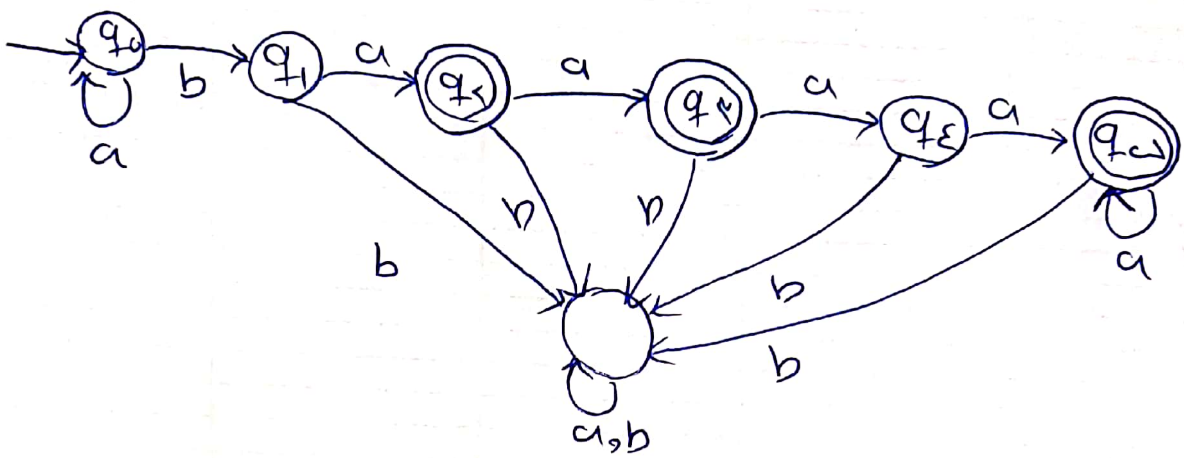
۹۸۱۲۳۴۱۳

تکلیف دوم نظریه - حدیث غفوری

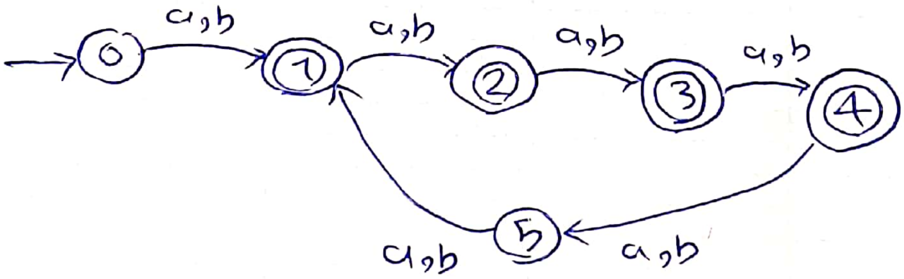
سوال ۶

الف) طراحی یک DFA

$L_1 = \{ b a^n , n \geq 1 , n \neq 3 \}$



$L_2 = \{ w \mid |w| \bmod 5 > 0 \}$ یعنی $5n+1 , 5n+2 , 5n+3 , 5n+4 ,$ ___ $n \geq 0$



طراحی DFA

$L_3 = \{ w w^R v , v, w \in \{a,b\}^* \}$

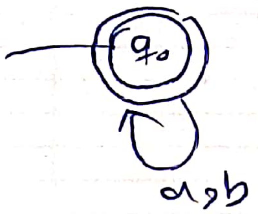
این زبان منظم است چون w ها مقدار $\boxed{\varepsilon}$ هم می‌تواند باشد

مثلاً $w = ab \rightarrow w^R = ba$, $v = aab$

رشته حاصل = abbaaab ⟶ همین رشته را می‌توان فقط حساب کرد که v ها گسترش یافته و همان رشته را گرفته ⟵

$abbaaab \Longrightarrow w = \varepsilon , w^R = \varepsilon , v = abbaaab$

این زبان هم $(a+b)^*$ را نشان می‌دهد



DFA

$(a+b)^*$

$L_4 = \{ v w w^R \mid v, w \in \{a,b\}^+ \}$

اثبات ① شهودی اگر بخواهیم اثبات کنیم در این رشته چون w و v نمی‌توانند $\boxed{\varepsilon}$ باشند و باید حتماً شامل یک حرف یا بیشتر باشند ←

چون w^R وابسته به w است ← با داشتن w باید سعی کنیم که چند تا a و b داریم تا بتوانیم به همان اندازه رشته‌ی w^R را بسازیم ← برای این کار به حافظه‌ی زیادی نیاز داریم ← زبان منظم نیست

اثبات ② هم

اگر $w = ۱۰ \to w^R = ۰۱$
$v = ۱۰۱۱$
$\to v w w^R = ۱۰۱۱\ ۱۰\ ۰۱$

اگر v گسترش یابد ← چون مقدار w و v باید حداقل a یا b باشد (نمی‌تواند ε باشد) ← در رشته‌ی ۱۰۱۱ ۱۰۰۱

$v = ۱۰۱۱۱۰$ و $w = ۰ , w^R = ۱ \longrightarrow$

این حالت که در زبان نیست و غلط است ← زبان نامنظم است.

اثبات ③ با پمپینگ لم ← فرض می‌کنیم زبان منظم است ← یک p داریم که رشته‌هایی به طول حداقل p را می‌شود پمپ کرد.

$s = a a^p b^p b^p a^p$ ← این رشته توی زبان است و طولش بزرگ‌تر از p است

$|s| = 1 + 4p > p \to$ می‌توانیم تقسیم به سه کنیم

چون $|xy| < p$ و $|y| > 0 \to$ پمپ کنیم (xyz را)

$y = a^k \to xyz = a^{p+1-k} a^k b^p b^p a^p \to$ اگر

$\boxed{k \geq 1}$ که

Scanned by CamScanner

اگر $K=1$ در نظر بگیریم $\quad w = \cancel{a^{p+1-1}}\, a^{p}\ a\ b^{p}\ b^{p}\ a^{p}$

$w = a^{p}\ a^{2}\ b^{p}\ b^{p}\ a^{p}$ → $\boxed{i=2}$ بگذاریم ← اگر در $x y^{i} z$ →

$$\boxed{(a^{p+2}\, b^{p})\,(b^{p}\, a^{p})}$$

← اگر طبق فرم ww^{R} بخواهیم بنویسیم

$$a\,\underbrace{(a^{p+1}\, b^{p})}_{w}\,\underbrace{(b^{p}\, a^{p})}_{w^{R}} \rightarrow \boxed{w \neq w^{R}} \rightarrow$$

در زبان نیست ← فرض خلف باطل ✗ ← زبان نامنظم است

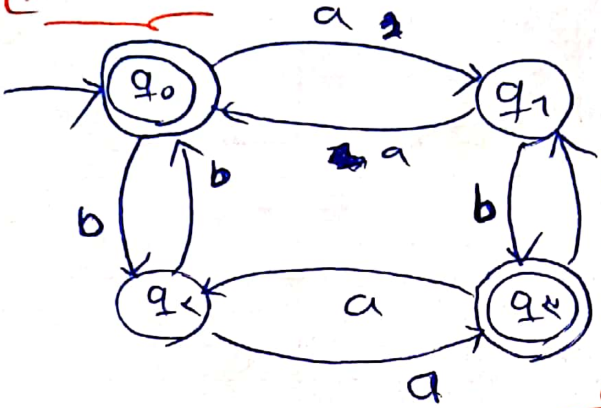
$L5 = \{a^n b^m \mid (m+n) \% 2 = 0\}$

باقی‌مانده $(m+n)$ بر ۲ زمانی صفر است که ← m و n هر دو زوج باشند

~ ~ فرد باشند

پس این زبان منظم است ← یک DFA برای آن می‌کشیم.

m و n زوج باشند.



m و n فرد باشند

$L6 = \{u w w^R v \mid v, w, u \in \{a,b\}^*, |u| \geq |v|\}$

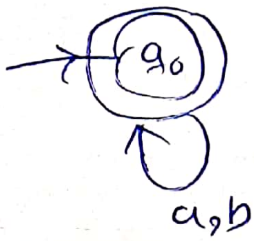
این زبان درصورتی منظم است که w بتواند λ باشد وچون

$v, w, u \in \{a,b\}^*$ ← w می‌تواند λ باشد

زبان منظم است

وچون w می‌تواند λ باشد ← عبارت منظم نظیر این زبان

$(a+b)^*$ است



سوال ۲

الف) تمام کلماتی که با ۰۱ تمام می‌شوند

$(0+1)^*01$ یا $\boxed{\{0,1\}^*\{01\}}$

ب) تعداد زوج صفر

$\boxed{1^*(01^*01^*)^*}$ یا $(1+01^*0)^*1^*$

ج) تعداد زیررشته‌های ۰۰ دقیقاً ۲ تا

$$1^*(01)^*00(10)^*1^*(01)^*00(10)^*1^*$$

د) رشته‌هایی که زیررشته‌ی ۱۰۱ را ندارند

$$\boxed{0^*(1^*000^*)^*1^*0^*}$$

سوال ۲

الف) زبان $L = \{0^p \mid p \text{ is prime}\}$ نامنظم است.

فرض می‌کنیم اما یک زبان منظم است ← طبق برهان خلف ← فرض خلف = منظم بودن

پس چون منظم است ← باید لم پامپینگ برایش برقرار باشد ← فرض می‌کنیم یک k

داریم که رشته‌های به طول حداقل k را می‌شود pump کرد. ←

k = pumping length

فرض می‌کنیم n یک عدد اول است که حداقل به اندازه‌ی k است.

تضمین می‌شود که n وجود دارد از آن‌جایی که بی نهایت عدد اول داریم.

رشته‌ی $w = 0^n$ که عضوی از $\boxed{L}$ هست را درنظر می‌گیریم.

از آن‌جایی که $|w| \geq k$ است و امکان‌پذیر است که w را به ۳ قسمت

xyz و طبق شرایط لم پامپینگ و تقسیم کرد.

$xyz \rightarrow$
① اگر $i \geq 0 \rightarrow xy^iz$ is in L
② $|xy| \leq k$
③ $|y| > 0$

اگر xy^iz را درنظر بگیریم و طول xy^iz و $n + (i-1)|y|$ است

$\underbrace{|w|}_{xyz}$ طول w یا

طول y^{i-1} → $(i-1) \times |y|$ بار

اگر i را $n+1$ درنظر بگیریم ←

$$n + (i-1)|y| = n + ((n+1-1)|y|) = n + n|y| \longrightarrow$$

فاکتور از n

$\underbrace{n(1+|y|)}_{\text{حاصل ضرب ۲ عدد}}$ ⟶ توان رشته‌ی xy^iz و

یک عدد مرکب (اول نیست) می‌شود ⟵ $(1+|y|) > 1$

و از آن‌جایی هم که باید $|y| > 0$ باشد

→ اول نیست

پس $z^i xy^i z$ جزوی از زبان L نیست ← تناقض با لم ← فرض خلف باطل ←

زبان L نامنظم است.

سوال ۳

ب) اگر L منظم باشد $L-\lambda$ هم منظم است. (λ رشته تهی)

میدانیم λ یک عبارت منظم است و میدانیم که

$$L-\lambda = L\cap\overline{\lambda}$$

چون زبان های منظم تحت عملگر complement و اشتراک بسته هستند و طبق صورت سوال L هم منظم است ←

پس کل زبان ایجاد شده منظم است.

$$\underbrace{L\cap\underbrace{\overline{\lambda}}_{\text{منظم}}}_{\text{منظم}}$$

---

۲) L روی الفبای Σ_1 منظم است.

نشان دهید $L\cap\Sigma_2^*$ به ازای هر الفبای Σ_2 منظم است.

$$L\cap\Sigma_2^* = L-(\overline{\Sigma_2^*})$$

برای بدست آوردن مکمل Σ_2^* می دانیم که

complement of $L\subseteq\Sigma^*$

$$\overline{L}=\Sigma^*-L$$

اگر $L=\Sigma^*$ پس $\overline{\Sigma^*}=\Sigma^*-\Sigma^*=\underset{\text{تهی}}{\varnothing}$

پس مکمل Σ_2^* تهی می شود و می دانیم که $\boxed{L-\varnothing=L}$

پس زبان بدست آمده همان زبان L می شود ← همواره منظم است.

سوال ۳

(د) زبان $L = \{0^n 1^m \mid \gcd(m,n) > 1\}$ نامنظم است.

فرض می‌کنیم L یک زبان منظم است (فرض خلف) $\leftarrow$ یک p داریم که رشته های به طول حداقل p را می‌شود pump کرد.

اگر یک q که عدد اول است را درنظر بگیریم و فرض کنیم $\boxed{q > p}$ است

و $w = 0^q 1^q$ باشد $\leftarrow$

چون w طولش بیشتر از p است $|w| = 2q > p$

و همچنین داخل زبان L هم هست چون $\gcd(q,q) = q$ و $q > 1$

w را می‌شود pump کرد طوری که به ۳ قسمت $\boxed{xyz}$ تقسیم شود و ۳ شرط لم پامپینگ را ارضا کند

آزمون ۳_ ۲ ①

$w = xyz$

با شرط های $|y|>0$ و $|xy|\le p$ و

xy^iz برای $i\geq 0$ داخل زبان باشد

طبق لم تزریق که می گوید $|y|>0$ و $|xy|\le p$ باشد و طبق این رشته

0^q1^q است ← $y = 0^k$ طوری که $\boxed{1\le k \le p<q}$

اگر این رشته را صفر بار پامپ کنیم ← $xy^0z = xz \to$

$\boxed{0^{q-k}1^q} \to \gcd(q-k, q)=1$

چون تنها شمارنده های q، 1 و $q = q$ و چون $k<q$ است ←

xy^0z داخل زبان L نیست ← $k\geq 1$ و

$\boxed{q-k\neq 1,\quad q-k\neq q}$ ⟶ تناقض داریم پس فرض خلف غلط و زبان نامنظم است.

سوال ٤

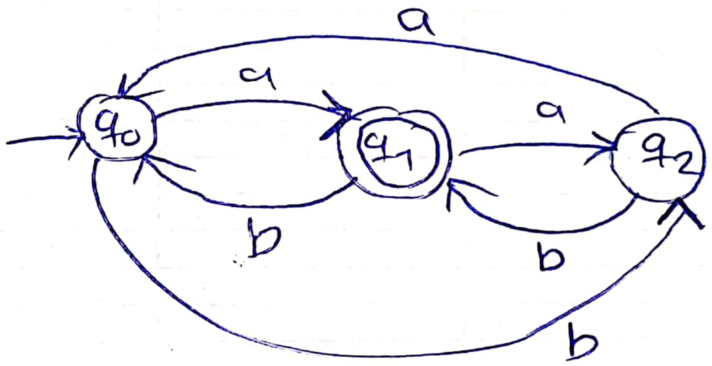
مطلوبست DFA برای زبان:

$L = \{ w \mid w \in \{a,b\}^*, \ (n_a(w) - n_b(w)) \bmod 3 = 1 \}$

(تعداد a ها − تعداد b ها) $\% \ 3 = 1 \rightarrow$

$n_a - n_b = 3n + 1$

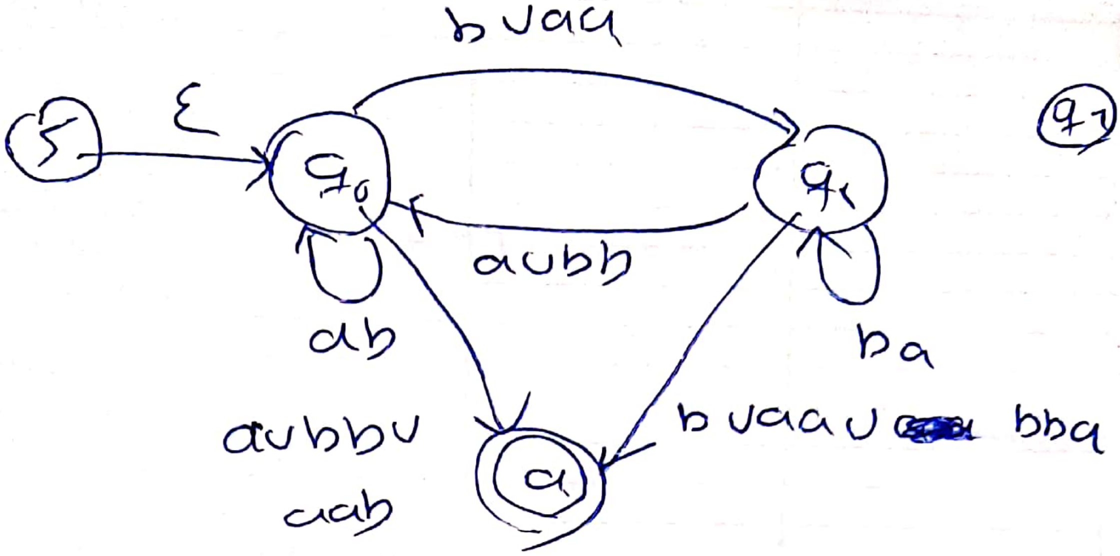
DFA B



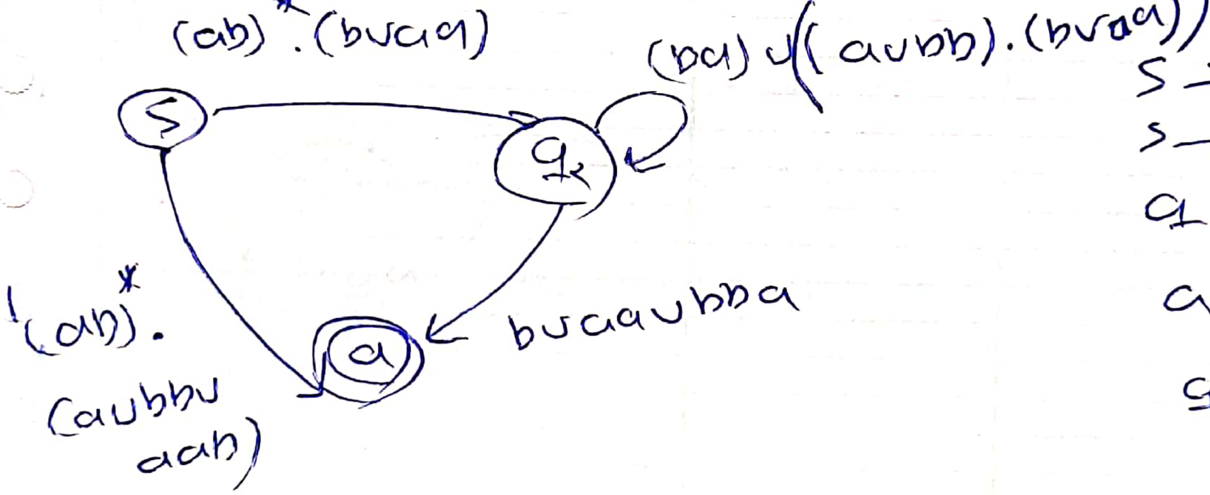
پس عبارت منظم B

$(ab)^*(b \cup aa)\left((ba) \cup ((a \cup bb).(b \cup aa))\right)^* .$
$(b \cup aa \cup bba) \cup ((ab)^* . (a \cup bb \cup aab))$

حذف q1



حذف q0



S → q1

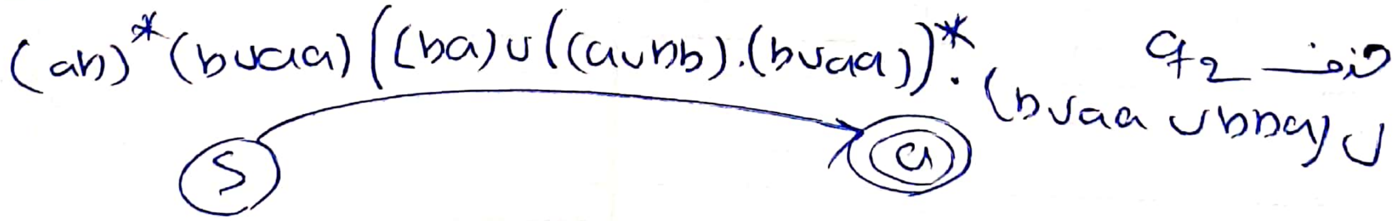
S → a

q1 → q1

a → q1

q1 → a

حذف q2



((ab)*.(aubbuaab))