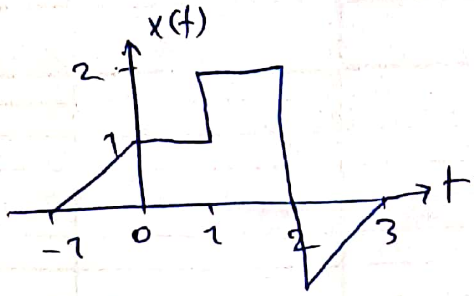
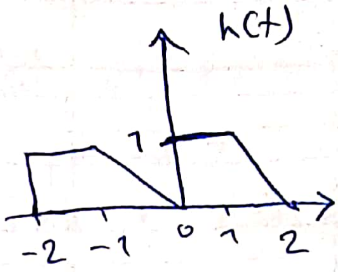
سوال ۱

$x(t)$





$$x(t)=\begin{cases} n-3 & 2<n<3 \\ 2 & 1<n<2 \\ 1 & 0<n<1 \\ n+1 & -1<n<0 \\ 0 & n<-1 \end{cases}$$

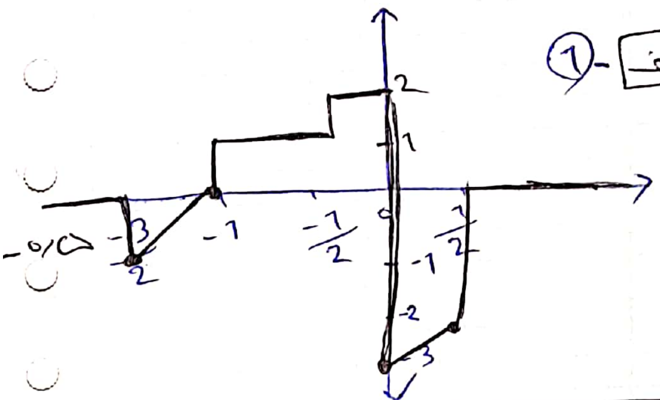
$$h(t)=\begin{cases} \boxed{-n+2} & 1<n<2 \\ 1 & 0<n<1 \\ -n & -1<n<0 \\ 1 & -2<n<-1 \\ 0 & n<-2 \end{cases}$$

الف) $x(2t+2)$

$x(t+2)$ انتقال ۲ واحد به چپ

$$x(t+2)=\begin{cases} n-3 & 0<n<1 \\ 2 & -1<n<0 \\ 1 & -2<n<-1 \\ n+1 & -3<n<-2 \\ 0 & n<-3 \end{cases} \xrightarrow[\text{فشردگی به نسبت ۲}]{x(2t+2)=} \begin{cases} n-3 & 0<n<\frac{1}{2} \\ 2 & \frac{-1}{2}<n<0 \\ 1 & -1<n<\frac{-1}{2} \\ n+1 & \frac{-3}{2}<n<-1 \\ 0 & n<\frac{-3}{2} \end{cases}$$

1- الف



2- الف

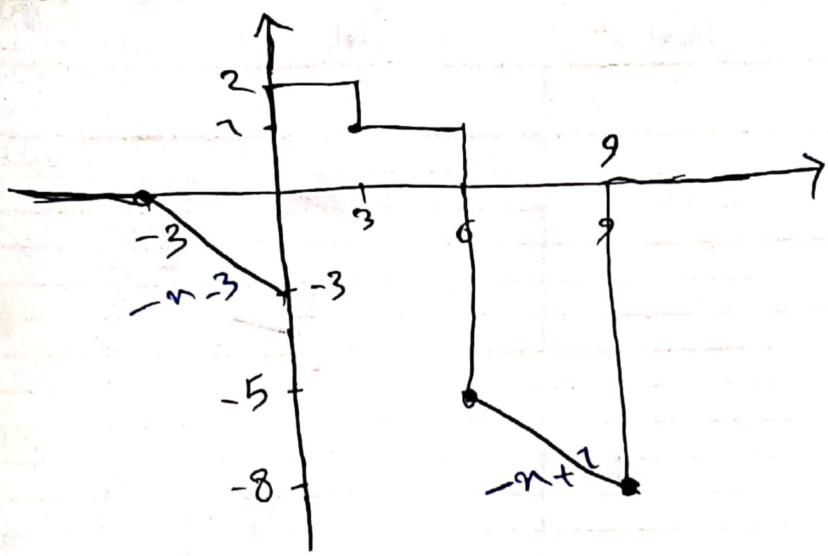
$x(-\frac{t}{3}+2) \leftarrow x(2-\frac{t}{3})$

ابتدا دو واحد به چپ $\leftarrow$ $x(-\frac{t}{3}+2)$

سپس گستردگی با نسبت ۳ و در نهایت وارونی

$$x(\frac{t}{3}+2)=\begin{cases} n-3 & 0<n<3 \\ 2 & -3<n<0 \\ 1 & -6<n<-3 \\ n+1 & -9<n<-6 \\ 0 & n<-9 \end{cases} \xrightarrow{\text{وارونی}} \begin{cases} -n-3 & -3<n<0 \\ 2 & 0<n<3 \\ 1 & 3<n<6 \\ -n+1 & 6<n<9 \\ 0 & n>9 \end{cases}$$

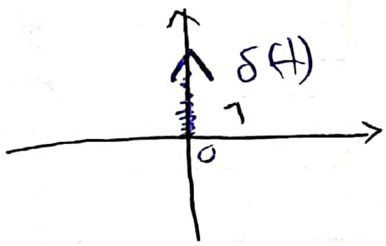
نمودار $\boxed{\text{الف ـ 2}}$



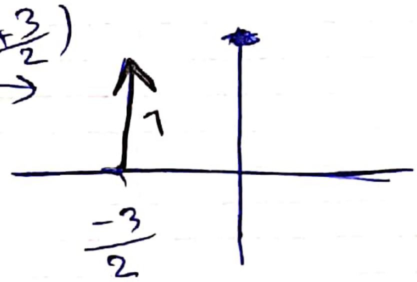
$x(t)\,[\delta(t+\frac{3}{2}) - \delta(t-\frac{3}{2})]$

$\boxed{\text{الف ـ ۳}}$

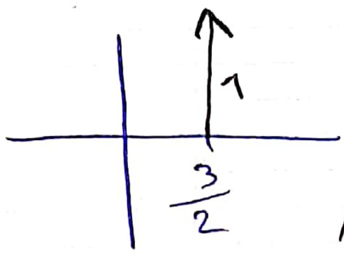
$\delta(t)$



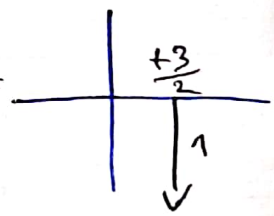
$\xrightarrow{\delta(t+\frac{3}{2})}$



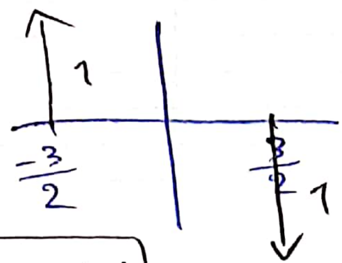
$\delta(t-\frac{3}{2})$



$\xrightarrow{\text{پس}}$ $-\delta(t-\frac{3}{2}) =$



پس $\rightarrow$ $\delta(t+\frac{3}{2}) - \delta(t-\frac{3}{2}) =$



می دانیم $\boxed{x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0)}$

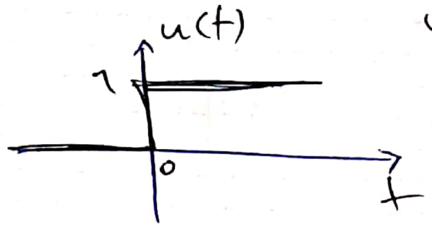
$x(t)\,[\delta(t+\frac{3}{2}) - \delta(t-\frac{3}{2})] = \boxed{\underset{0}{\cancel{x(-\frac{3}{2})}} - \underset{2}{\cancel{x(\frac{3}{2})}}} \Rightarrow$

طبق نمودار $x(t)$ جواب $= 0 - 2 = \boxed{-2}$

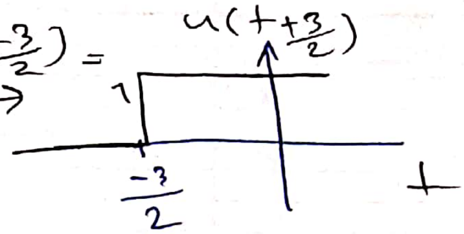
$h(1-t)\,u(t+\frac{3}{2})$

$\boxed{\text{الف ـ ک}}$

$u(t) =$



$u(t+\frac{3}{2}) =$

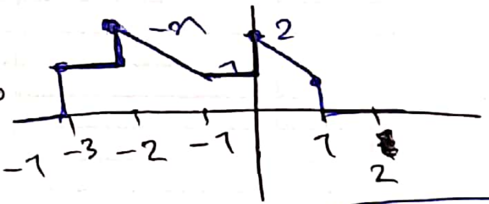


$u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>1 \end{cases}$

$u(t+\frac{3}{2}) = \begin{cases} 0 & t<\frac{-3}{2} \\ 1 & t>\frac{-3}{2} \end{cases}$

$h(1-t) = h(-t+1) \rightarrow$ ابتدا یک واحد به چپ انتقال می‌دهیم و سپس وارونه می‌کنیم

$h(t+1) = \begin{cases} -n+2 & 0<n<1 \\ 1 & -1<n<0 \\ -n & -2<n<-1 \\ 1 & -3<n<-2 \\ 0 & n<-3 \end{cases}$

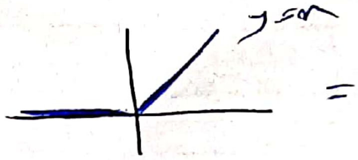


$\boxed{h(t+1)}$

$h(-t+1) = \begin{cases} n+2 & -1<n<0 \\ 1 & 0<n<1 \\ n & 1<n<2 \\ 1 & 2<n<3 \\ 0 & n>3 \end{cases}$

$\boxed{h(-t+1)}$

$\boxed{h(-t+1)\,u(t+\frac{3}{2})} = \begin{cases} 0 & n<\frac{-3}{2} \\ h(-t+1) & n>\frac{-3}{2} \end{cases}$ $\longrightarrow$ الان نمودار جواب همان نمودار $\boxed{h(-t+1)}$ می‌شود.



$$r(t) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ x & x>0 \end{cases}$$

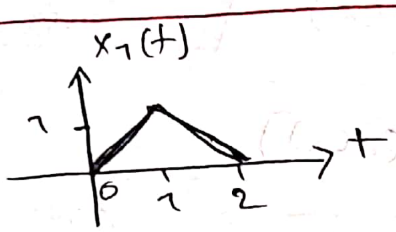
$\boxed{\text{ب}}$

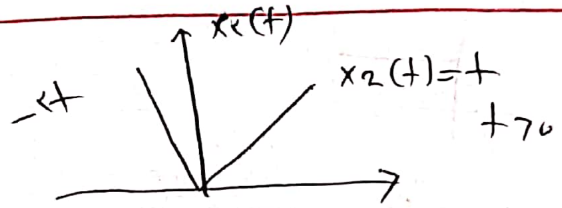
$$\boxed{x(t)} = r(t-1) + u(t) + u(t-1) - 3u(t-2) + r(t-3)$$

$$\boxed{h(t)} = u(t+2) - r(t+\ ) + u(t) - r(t-2)$$

طبق ضابطه‌های $x(t)$, $h(t)$ در قسمت الف ↑

$\boxed{\text{سوال ۲}}$





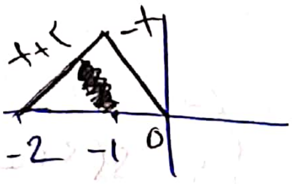
$$x_1(t) = \begin{cases} -t+2 & 1<t<2 \\ t & 0<t<1 \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} t & t>0 \\ -2t & t<0 \end{cases}$$

$$x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t)+x(-t)]$$

طبق رابطه‌های روبرو e

$$x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t)-x(-t)]$$

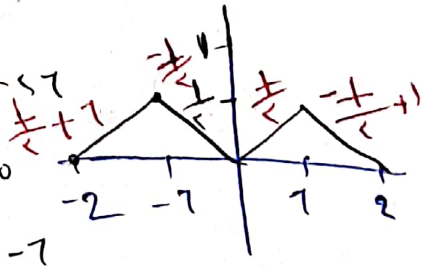
$$x_1(-t) = \begin{cases} t+2 & -2<t<-1 \\ -t & -1<t<0 \end{cases}$$



$$x_e(t) = \begin{cases} -\frac{t}{2}+1 & 1<t<2 \\ \frac{t}{2} & 0<t<1 \\ -\frac{t}{2} & -1<t<0 \\ \frac{t}{2}+1 & -2<t<-1 \end{cases}$$

قسمت زوج

سیگنال $\boxed{x_1}$

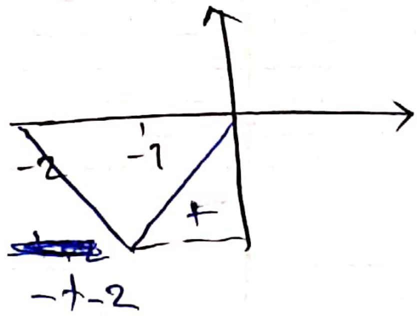


ادامه سوال ۲

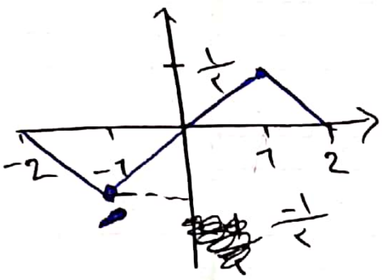
$$x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$

$$x_o(t) = \begin{cases} -\frac{t}{2}+1 & 1<t<2 \\ \frac{t}{2} & 0<t<1 \\ \frac{t}{2} & -1<t<0 \\ -\frac{t}{2}-1 & -2<t<-1 \end{cases}$$

$$-x(-t) = \begin{cases} -t-2 & -2<t<-1 \\ t & -1<t<0 \end{cases}$$



$x_o(t) =$

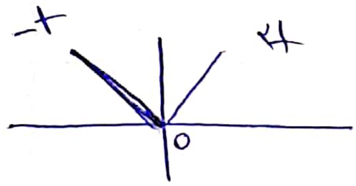


سیگنال اولی ←

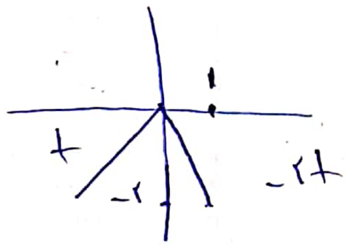
$$x_2(t) = \begin{cases} t & t>0 \\ -2t & t<0 \end{cases}$$

$$x_2(-t) = \begin{cases} -t & t<0 \\ 2t & t>0 \end{cases}$$

سیگنال دوم

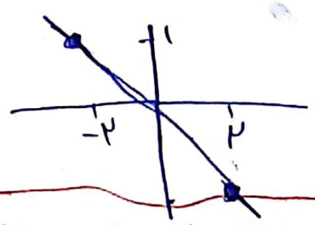


$$-x_2(-t) = \begin{cases} t & t<0 \\ -2t & t>0 \end{cases}$$



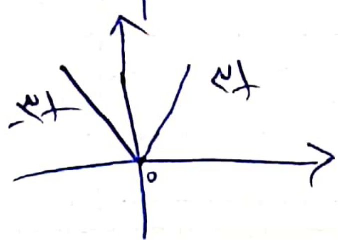
$$x_o(t) = \begin{cases} -\frac{t}{2} & t>0 \\ -\frac{t}{2} & t<0 \end{cases}$$

فرد



$$x_e(t) = \begin{cases} 3t & t>0 \\ -3t & t<0 \end{cases}$$

زوج



$$x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$

$$x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$$

سوال ۲ ب

اثبات $E\{x(t)\} = E\{x_e(t)\} + E\{x_o(t)\}$

$$\boxed{x(t) = x_o(t) + x_e(t)}$$

$$E = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt \longrightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_e(t) + x_o(t)|^2 dt =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x_e(t)|^2 + |x_o(t)|^2 + 2|x_o(t)\, x_e(t)|\, dt =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x_e(t)|^2 dt + \int_{-\infty}^{+\infty} |x_o(t)|^2 dt + 2\underbrace{\cancel{\int_{-\infty}^{+\infty} |x_o(t)\, x_e(t)|\, dt}}_{\text{فرد = زوج × فرد}}^{\text{صفر}} =$$

می‌دانیم انتگرال تابع فرد در یک بازه‌ی متقارن = صفر

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |x_e(t)|^2 dt + \int_{-\infty}^{+\infty} |x_o(t)|^2 dt$$ (سمت چپ = تساوی) $$= E\{x_e(t)\} + E\{x_o(t)\}$$

و همچنین

$$E\{x_e(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_e(t)|^2 dt$$

$$\longrightarrow$$

$$E\{x_o(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_o(t)|^2 dt$$

$$E\{x_e(t)\} + E\{x_o(t)\} = \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |x_e(t)|^2 dt + \int_{-\infty}^{+\infty} |x_o(t)|^2 dt}$$

سمت راست تساوی

سمت چپ و راست تساوی برابرند
$\longrightarrow$ رابطه برقرار است

حالت گسسته $= E = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x_e[n] + x_o[n]|^2$$

ادامه سوال ۲

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |x_e[n]+x_o[n]|^2 =$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |x_e[n]|^2+|x_o[n]|^2+2|x_e[n]x_o[n]| =$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |x_e[n]|^2 + \sum_{-\infty}^{+\infty} |x_o[n]|^2 + 2\underbrace{\cancel{\sum_{-\infty}^{+\infty} |x_e[n]x_o[n]|}}_{0}$$

حاصل ضرب تابع فرد و زوج = فرد و جمع مقادیر تابع فرد در بازه‌ی متقارن = صفر ←

$$= \underbrace{\sum_{-\infty}^{+\infty} |x_e[n]|^2}_{\text{انرژی زوج گسسته}} + \underbrace{\sum_{-\infty}^{+\infty} |x_o[n]|^2}_{\text{انرژی فرد گسسته}} = E\{x_e[n]\} + E\{x_o[n]\}$$

می‌دانیم

$$E\{x_e[n]\} = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x_e[n]|^2$$

$$E\{x_o[n]\} = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x_o[n]|^2$$

پس این رابطه هم برای سیگنال‌های گسسته برقرار است هم پیوسته

سوال ۳

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

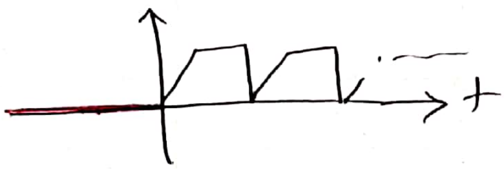
$$u(t-2) = \begin{cases} 1 & t>2 \\ 0 & t<2 \end{cases}$$

$$f_1(t) = f(t)u(t) - f(t)u(t-2)$$

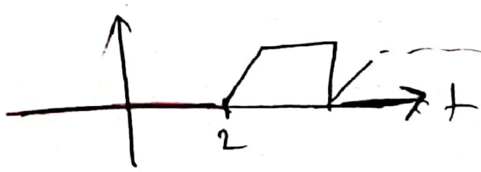
$$f(t)u(t) = \begin{cases} f(t) & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

$$f(t)u(t-2) = \begin{cases} f(t) & t>2 \\ 0 & t<2 \end{cases}$$

=

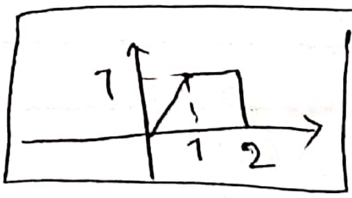


$f(t)u(t)$



$f(t)u(t-2)$

$\rightarrow f_1(t) =$



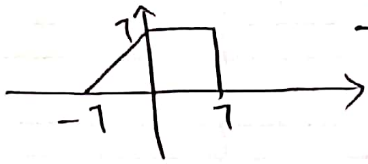
ادامه‌ی سوال ۳

$f_2(t) = f_1(-\frac{t}{2}+1)$

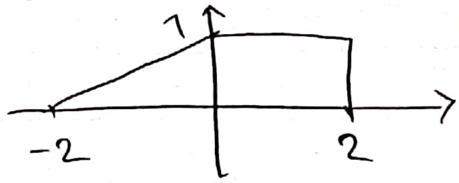
f_1 را یک واحد به چپ انتقال می‌دهیم

سپس با نسبت ۲ کشیده می‌شود و در نهایت وارونه می‌شود

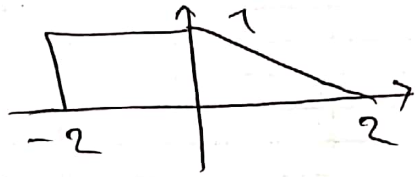
$f_1(t+1)$



$\xrightarrow{f_1(\frac{t}{2}+1)}$



$f(-\frac{t}{2}+1) \longrightarrow$



$$f(-\frac{t}{2}+1) = \begin{cases} 0 & t>2 \\ -\frac{t}{2}+1 & 0<t<2 \\ 1 & -2<t<0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{t} f_2(\tau)d\tau = \cancel{\int_{-\infty}^{-2} 0\, d\tau} + \int_{-2}^{t} 1\, d\tau =$$ برای $-2<t<0$

$$= \boxed{t+2}$$

$$= \int_{-\infty}^{-2} 0\, d\tau + \int_{-2}^{0} 1\, d\tau + \int_{0}^{t} -\frac{\tau}{2}+1\, d\tau$$ برای $0<t<2$

$$\int_0^t -\frac{\tau}{2}\, d\tau + \int_0^t 1\, d\tau$$

$$-\frac{1}{4}t^2 \qquad \boxed{t}$$

$$= 0 + 2 + -\frac{1}{4}t^2 + t =$$

$$\boxed{-\frac{1}{4}t^2 + t + 2}$$

$$\cancel{\int_{-\infty}^{-2} 0\, d\tau} + \int_{-2}^{0} 1\, d\tau + \int_0^2 -\frac{\tau}{2}+1\, d\tau + \cancel{\int_2^t 0\, d\tau}$$ $\boxed{\text{برای } t>2}$

$$= 0 + 2 + (\cancel{-\frac{1}{4}\times(2)^2}) + 2 = \boxed{3}$$

$\qquad -1$

(ز) مثال

$\cos(\frac{\pi}{8} n^3)$

$$\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{8}} = \boxed{16} \longrightarrow \boxed{T=16}$$

(ح) $\sin(n-\pi)$

$$\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \longrightarrow$$ گویا نیست $\rightarrow$ نامتناوب

(ط)

$\cos(\pi^2 n)$

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\pi^2}{2\pi} = \frac{\pi}{2} \longrightarrow$$ گویا نیست $\rightarrow$

$\cos(\pi^2 n)$ متناوب نیست

(ی)

$$[\underbrace{\underbrace{\cos(\tfrac{2\pi t}{3})}_{\text{متناوب}} + 2\underbrace{\sin(\tfrac{16\pi t}{3})}_{\text{متناوب}}}_{} \,]\, \underbrace{\sin(\pi t)}_{T_3}$$

متناوب الف

$T = LCM(T_1, T_2)$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3 \qquad T_2 = \frac{2\pi}{\frac{16\pi}{3}} = \frac{3}{8}$$

$LCM(3, \frac{3}{8}) = 3 \longrightarrow T_{\text{کل}} = LCM(3,2) = \boxed{6}$ جواب

$$T_3 = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

طبق نکته‌ی 6

جمع و ضرب سیگنال‌های متناوب ← متناوب

(ک)

$\cos(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{8\pi}{4}) \Rightarrow T = LCM(T_1, T_2)$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4 \longrightarrow T = LCM(4, 8) = \boxed{8}$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$$

سوال ۴

الف) $\cos(t) + \sin(\sqrt{2}t)$

طبق نکته ← اگر دو سیگنال که متناوب هستند را باهم جمع کنیم یا ضرب کنیم

حاصل آنها متناوب است ← چون $\cos(t)$ و $\sin(\sqrt{2}t)$

متناوب هستند ← جمع آنها هم متناوب است → تناوب جمع آنها برابر ک.م.م تناوب → $T_{کل} = LCM(T_1, T_2)$

$$T_1 = \boxed{2\pi}$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\cancel{2}\pi\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \boxed{\sqrt{2}\pi}$$

→ ک.م.م $\Rightarrow LCM(2\pi, \sqrt{2}\pi) = \boxed{2\pi}$ جواب

ب) $|\cos \frac{4}{3}t| + \sin\frac{3}{4}t$ $\qquad T_{کل} = LCM(T_1, T_2)$

$$\underbrace{|\cos \tfrac{4}{3}t|}_{T_1} + \underbrace{\sin\tfrac{3}{4}t}_{T_2}$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2}\pi \longrightarrow \times\frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{4}\pi}$$

چون قدرمطلق دارد

$$T_2 = \frac{2\pi}{\frac{3}{4}} = \boxed{\frac{8\pi}{3}} \qquad LCM\left(\frac{3}{4}\pi, \frac{8\pi}{3}\right) = \boxed{24\pi}$$

2) $even\{\cos(5\pi t)u(t)\}$

$$T = \frac{2\pi}{5\pi} = \frac{2}{5}$$ دوره تناوب

$u(t) =$ 

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

→ ضرب می‌کنیم

$\cos(5\pi t)u(t)$

ج) $\cos(t)\cos(\sqrt{3}t)$

$$T_{کل} = LCM(T_1, T_2)$$

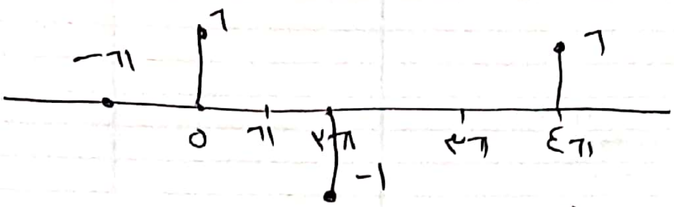
$$T_1 = 2\pi \longrightarrow LCM\left(2\pi, \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi\right) = \boxed{2\pi}$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\frac{t}{2}\right)\delta(t-k\pi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\delta(t-k\pi)$$ $\boxed{\text{سوال ۴ _ ل}}$

$\delta(t-k\pi)$ در $t=k\pi$ ، یک است و در بقیه جاها صفر ←

شکل این را می کشیم →



اگر $k=0 \rightarrow \cos(0)\delta(t) \Rightarrow \delta(0) = 1$

جواب ← $\boxed{T=4\pi}$

$k=1 \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\delta(t-\pi) \rightarrow$ در نقطه ی π ، صفر

$k=2 \rightarrow \cos(\pi)\delta(t-2\pi) \rightarrow$ در نقطه ی 2π ، -1

$k=3 \rightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\delta(t-3\pi) \rightarrow$ 3π ، صفر ~

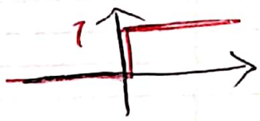
$k=4 \rightarrow \cos(2\pi)\delta(t-4\pi) \rightarrow$ 4π ، 1 ~

$k=5 \rightarrow \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)\delta(t-5\pi) \rightarrow$ 5π ، صفر ~

سوال ۴ _ ج

$even\{\cos(5\pi t)u(t)\}$

① $u(t) =$

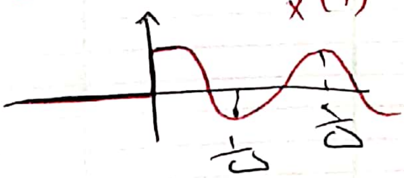


② $\cos(5\pi t)$ تناوب $= \frac{2\pi}{5\pi} = \boxed{\frac{2}{5}}$

حالا

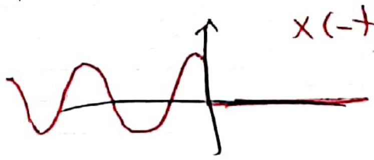
→ ③ $\boxed{u(t)\cos(5\pi t) = x(t)}$

$x(t)$



وارونه نسبت به محور y ها →

$x(-t)$



جمع دو نمودار و تقسیم بر ۲ →

طبق فرمول

$x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$

$x_e(0) = \frac{\cos(0) + \cos(0)}{2} = 1$ $\cos($

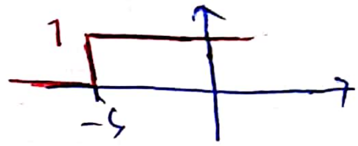
$\boxed{\text{تناوب الف}}$

سوال ب الف-۲

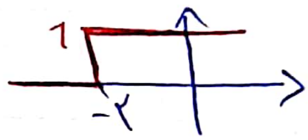
$$\int_1^4 3t^2 u(-3t+6) = \text{ج}$$

$u(t) =$ 

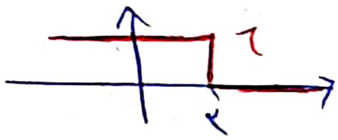
$$= \int_1^2 3t^2 u(-3t+6) +$$

$u(t+6) =$ 

$$\int_2^4 3t^2 \underbrace{\cancel{u(-3t+6)}}_{0} =$$

$u(3t+6) =$ 

$$\int_1^2 3t^2 \underbrace{\cancel{u(-3t+6)}}_{1} =$$

$u(-3t+6) =$ 

$$\int_1^2 3t^2 = \frac{3 \times t^3}{3}\Big|_1^2 = 2^3 - 1 = \boxed{\checkmark}$$

جواب

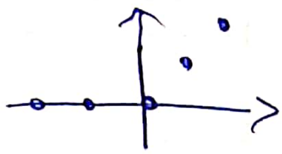
$$\begin{cases} 0 & t>2 \\ 1 & t<2 \end{cases}$$

ب ـ ب)

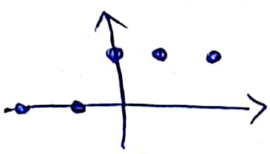
ب ـ ۱)

$$r[u[n]] + r[\delta[n]] + \delta[u[n]]$$

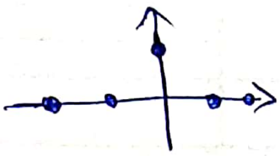
$$r[n] = \begin{cases} 0 & n \leq 0 \\ n & n > 0 \end{cases}$$



$$u[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$$



$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

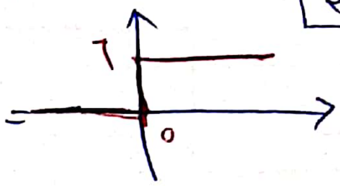


$\boxed{\text{سوال ۵}}$

$\boxed{\text{الف ۲}}$

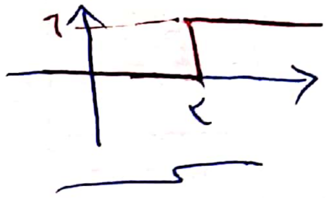
$$\int_1^4 3t^2 u(-3t+6) = ?$$

$u(t) =$



$$\int_1^4 3t^2 u(-3t+6)\,dt =$$

$$\int_1^2 3t^2 \cancel{u(-3t+6)}_{0}\,dt + \qquad u(-3t+6) =$$



$$\int_2^4 3t^2 \underbrace{\cancel{u(-3t+6)}}_{1}\,dt = \int_2^4 3t^2\,dt =$$

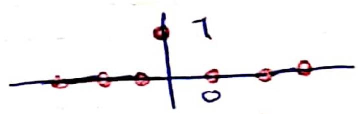
$$\begin{cases} 0 & t<2 \\ 1 & t>2 \end{cases}$$

$$\cancel{3}\times\frac{t^3}{\cancel{3}}\Big|_2^4 = 4^3-2^3 = 64-8 = \boxed{56}$$

$\boxed{\text{الف - ۵}}$

$$\sum_{n=-2}^{5} \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\delta[n-1] =$$

$\delta[n] =$



$$= \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}$$

$$\sum_{n=-2}^{0} \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\cancel{\delta[n-1]}_{0} +$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\delta[0] +$$

$\delta[n-1] =$

$$\sum_{n=2}^{5} \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\cancel{\delta[n-1]}_{0} = \qquad = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & n\neq 1 \end{cases}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\delta[0] = \boxed{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

جواب

Scanned by CamScanner

ادامه‌ی $\boxed{۵-ب-۲}$

$u[n]=1 \rightarrow r[u[n]] = r[1] = 1$ ← $n>0$

$\delta[n]=0 \rightarrow r[\delta[n]] = r[0] = 0$

$\delta[u[n]] = \delta[1] = 0$

جمع $+ = 1+0+0 = \boxed{1}$

$u[n]=1 \rightarrow r[u[n]] = r[1] = 1$ ← $n=0$

$+\ \delta[n]=1 \rightarrow r[\delta[n]] = r[1] = 1$

$\delta[u[n]] = \delta[1] = 0$

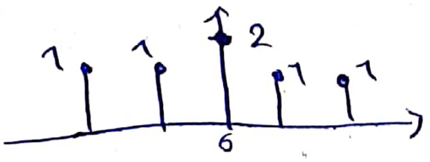
$1+1+0 = \boxed{2}$

$u[n]=0 \rightarrow r[u[n]] = r[0] = 0$ ← $n<0$

$+\ \delta[n]=0 \rightarrow r[0] = 0$

$\delta[u[\cancel{n}]] = \delta[0] = 1$

$0+0+1 = \boxed{1}$



جواب = $\boxed{\begin{matrix} 2 & n=0 \\ 1 & n\neq 0 \end{matrix}}$

جواب ← $\boxed{\delta[n]+1}$ = فرم این شکل

سوال ۴

الف) $y(t) = e^{x(t)}$

① حافظه دار بودن ? این سیستم $\boxed{\text{بدون حافظه}}$ است زیرا خروجی سیستم در هر لحظه از زمان فقط وابسته به ورودی سیستم در همان لحظه است.

② علی بودن ? این سیستم علی است زیرا توانایی پیش بینی آینده ی ورودی خود را ندارد،
و خروجی آن فقط تابعی از ورودی در زمان حال است

③ پایدار بودن ? پایدار است. چون به ازای ورودی محدود ، خروجی محدود می شود.
تنها در صورتی $y(t)$ به بی نهایت میل می کند که $x(t)$ به بی نهایت میل کند

④ تغییرناپذیر با زمان ?

$$y(t) = T\{x(t)\} = e^{x(t)}$$

$$T\{Z_{t_0}\{x(t)\}\} = T\{x(t-t_0)\} = \boxed{e^{x(t-t_0)}} =$$

$$Z_{t_0}\{T\{x(t)\}\} = Z_{t_0}\{\cancel{T\{x(t)\}}\} = \boxed{e^{x(t-t_0)}}$$

$e^{x(t)}$

TI است ← مستقل از زمان است

⑤ خطی بودن ? خطی نیست. طبق این نکته که شرط لازم برای خطی بودن یک سیستم آن است که پاسخ آن به ورودی صفر ، برابر صفر شود

$$T\{0\} = T\{0 \cdot x(t)\} = 0 \cdot T\{x(t)\} = 0$$

اما در اینجا ?

$$e^{0 \cdot x(t)} = e^{0} = \boxed{1} \neq 0 \rightarrow$$ خطی نیست

ب) $\boxed{y(t) = Re\{x(t)\}}$

① حافظه دار بودن ? بدون حافظه است چون در هر لحظه به $x(t)$ فقط وابسته است (به قبل و بعد آن کاری ندارد)

② علی بودن ? علی است چون به آینده و t های بزرگتر از لحظه ی فعلی کاری ندارد

③ پایدار بودن ? پایدار است.

چون در صورتی $y(t)$ به بی نهایت میل می کند که قسمت حقیقی $x(t)$ به بی نهایت میل کند ← اگر قسمت حقیقی $x(t)$ محدود باشد ← $y(t)$ هم محدود می شود
← پایدار می شود

سوال $\boxed{(۶ ـ ب)}$

④ خطی بودن ✓ خطی نیست زیرا

$$y(t) = Re\{x(t)\}$$

$$= Re\{x_r(t) + j x_i(t)\} = x_r(t)$$

طبق شرط خطی بودن ✓ باید

$$T\{a x(t)\} = a T\{x(t)\} \rightarrow$$

اگر $\boxed{a = j}$

$$Re\{j x(t)\} = Re\{j x_r(t) - x_i(t)\} = \boxed{-x_i(t)} \neq j\,\underbrace{Re\{x(t)\}}_{j x_r(t)}$$

$-x_i(t) \neq j x_r(t) \leftarrow$ غیر خطی است

⑤ تغییر ناپذیری بودن ✓

$$y(t) = T\{x(t)\} = Re\{x(t)\}$$

$$T\{Z_{t_0}\{x(t)\}\} = T\{x(t-t_0)\} = Re\{x(t-t_0)\}$$

$$Z_{t_0}\{T\{x(t)\}\} = Z_{t_0}\{Re\{x(t)\}\} = Re\{x(t-t_0)\}$$

$\boxed{ج\_۶}$ ① حافظه دار بودن ✓

$$y(t) = x'(t)$$

حافظه دار است چون بهای مشتق گیری ها فقط به همان لحظه وابسته نیستند و حالت های قبلی دارند ← حافظه دارند.

② علی بودن ✓ علی است چون به قبلی و خودش بستگی دارد و به آینده کاری ندارد

علی است

$x(t) - x(t-\Delta)$ ⟵ Δ

③ پایدار بودن ✓ مثلاً اگر $u(t)$ را به این سیستم بدهیم ← $\delta(t)$ را برمی گرداند

ناپایدار و نامحدود است

در صفر بی نهایت است

ناپایدار و محدود

یعنی کل این سیستم $\boxed{\text{ناپایدار است}}$

④ تغییر ناپذیری با زمان ✓

$$y(t) = T\{x(t)\} = x'(t)$$

$$T\{Z_{t_0}\{x(t)\}\} = T\{x(t-t_0)\} = x'(t-t_0)$$

$$=$$

$$Z_{t_0}\{T\{x(t)\}\} = Z_{t_0}\{x'(t)\} = x'(t-t_0) \rightarrow$$

$\boxed{\text{TI است}}$ ✓

⑤ خطی بودن ✓ شرط ① ✓

$$T\{x_1(t) + x_2(t)\} = T\{x_1(t)\} + T\{x_2(t)\}$$

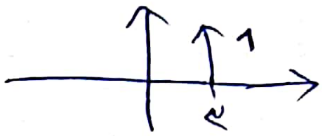
$$(x_1(t) + x_2(t))' = x_1'(t) + x_2'(t)$$ ✓ $\xrightarrow[\text{برقرار است}]{\text{هر دو شرط}}$ خطی است

شرط ② ✓ $T\{a x(t)\} = a T\{x(t)\} \rightarrow (a.x(t))' = a x'(t)$ ✓ برقرار

$\boxed{(۲-ب-۵)}$

$$\int_{t-5}^{5} \tau^2 \delta(2\tau-6)\, d\tau$$

$\delta(2\tau-6) =$



می‌دانیم $x(t)\,\delta(2t-6) = x(3)\,\delta(2t-6)$

← الف $x(t) = \tau^2$ ← در انتگرال داده شده

$t = 3 \longrightarrow \boxed{\int_{t-5}^{5} 9\,\delta(2t-6)\,dt}$

$\boxed{\text{اگر } t-5<3} \leftarrow \boxed{t<8} \leftarrow \boxed{\delta(2t-6)=1}$

$\int_{t-5}^{5} 9\,\delta(2t-6)\,d\tau = \int_{t-5}^{5} 9\,d\tau = 9\int_{t-5}^{5} d\tau = 9\times|_{t-5}^{5}$

$= 9(5-\underbrace{(t-5)}_{10-t}) = \boxed{90-9t}$

$\boxed{t-5<5 \;,\; t-5>3}$

$\boxed{8<t<10}$

$\delta(2t-6)=0$

$\int_{t-5}^{5} \tau^2\,\delta(2\tau-6)\,d\tau = 0$ ← و

$\boxed{t>10} \leftarrow t-5>5$

9

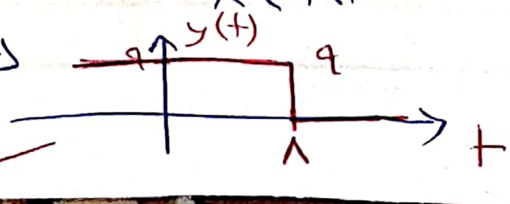
اگر $t-5<3 \rightarrow t<8 \rightarrow$

$$\int_{t-5}^{5} \tau^2\,\delta(2\tau-6)\,d\tau = \int_{t-5}^{5} 9\,\delta(2\tau-6)\,d\tau = \boxed{9}$$

اگر $\boxed{t-5<5 \\ t-5>3}$ و $\underbrace{t-5>5}_{t>10}$ $\longrightarrow \int_{t-5}^{5} \tau^2\,\delta(2\tau-6)\,d\tau = \boxed{0}$

$8<t<10$

$$\text{پس } y = \begin{cases} 9 & t<8 \\ 0 & 8<t<10 \\ 0 & t>10 \end{cases}$$



الف

$\boxed{u(-t+8)}$ ← این نمودار نشان دهنده‌ی

سوال ۶ - ②

$y[n] = x[-|n|]$

① حافظه دار بودن c بله حافظه دارد چون به ازای n باید به $x[-|n|]$ هم دسترسی داشته باشد مثلاً اگر $n=1$ باشد ⟵ $x[-1]$ را هم باید در حافظه اش داشته باشد

② علی بودن c بله علی است چون در هر لحظه c خروجی به $x[-|n|]$ وابسته است و چون $\boxed{-|n|}$ داریم یعنی همواره به گذشته ی n باید دسترسی داشته باشیم و نیازی به آینده نداریم ⟵ علی است.

③ پایدار بودن c

پایدار است

④ تغییر ناپذیری با زمان c

$y[n] = T\{x[n]\} = x[-|n|]$

$T\{Z_{n_0}\{x[n]\}\} = T\{x[n-n_0]\} = x[-|n|-n_0]$ $\neq$

$Z_{n_0}\{T\{x[n]\}\} = Z_{n_0}\{x[-|n|]\} = x[-|n-n_0|]$

پس TI نیست

⑤ خطی بودن c خطی است

Scanned by CamScanner

سوال ۶ ط

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-2k]$$

① حافظه دار بودن: حافظه دار است چون به گذشته و آینده در نقطه ی n ۲ بستگی دارد

$\underbrace{\text{گذشته و آینده}}_{(-\infty \text{ و } +\infty)}$

② علی بودن: ط علی نیست چون به $x[n]$ در زمان آینده (به سمت $+\infty$) بستگی دارد. و در حالتهای خروجی باید حساب شود

③ پایدار بودن ط

④ تغییر ناپذیر با زمان ط

$$y[n] = T\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-2k]$$

سوال ۶ _

c) $y(t) = x(-|t|+\frac{1}{2})$

① حافظه دار بودن ؟ حافظه دار است زیرا به ازای مقادیر t ، $x(-|t|+\frac{1}{2})$ را می خواهد حساب کند ← باید $x(t)$ های را بداند که قبل از t اتفاق افتادند

مثلا اگر $t=4$ ← $x(-|4|+\frac{1}{2})$

$x(-2)$ را باید بدانیم ← حافظه دار است

② علی بودن ؟ این سیستم علی است زیرا خروجی آن فقط تابعی از ورودی در حال یا گذشته است چون $|t|$ داریم

همواره مثبت → $-|t|$ → همواره منفی

پس هر t ای که بدهیم ← جواب را باید در $-|t|+\frac{1}{2}$ که در گذشته ی سیستم است پیدا کنیم

پس علی است.

③ پایدار بودن ؟ پایدار است چون به ازای ورودی ها پایدارهای محدود ، خروجی نیز محدود خواهد شد

④ تغییر ناپذیر با زمان ؟

$$y(t) = T\{x(t)\} = x(-|t|+\frac{1}{2})$$

$$T\{Z_{t_0}\{x(t)\}\} = T\{x(t-t_0)\} = x(-|t|+\frac{1}{2}-t_0)$$

$$Z_{t_0}\{T\{x(t)\}\} = Z_{t_0}\{x(-|t|+\frac{1}{2})\} = x(-|t-t_0|+\frac{1}{2})$$

← $\neq$ مساوی نیستند ← تغییر پذیر است

TIX نیست

⑤ خطی بودن ؟

ه

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{x(t)}{|x(t)|} & x(t) \neq 0 \\ 0 & x(t) = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} 1 & \leftarrow & x(t) > 0 \\ -1 & \leftarrow & x(t) < 0 \\ 0 & \leftarrow & x(t) = 0 \end{array}}$$

(1) حافظه دار بودن ؟ حافظه دار نیست چون در هر لحظه از t ، خروجی به ورودی وابسته است ← اگر در لحظه‌ی t باشیم ← با داشتن $x(t)$ می توانیم خروجی را پیدا کنیم
پس وابسته به زمان های قبل و بعد خودش نیست ← $\boxed{\text{حافظه ندارد}}$

(2) علی بودن ؟ این سیستم علی است زیرا خروجی آن تابعی از ورودی در زمان حال (t) است ولی به آینده وابسته نیست

(3) پایدار بودن ؟ پایدار است چون به ازای ورودی های محدود، خروجی محدود می شود.

(4) تغییر ناپذیر با زمان ؟

$$y(t) = T\{x(t)\} = \begin{cases} \dfrac{x(t)}{|x(t)|} & x(t) \neq 0 \\ 0 & x(t) = 0 \end{cases}$$

$$T\{ Z_{t_0}\{x(t)\}\} = T\{x(t-t_0)\} = \begin{cases} \dfrac{x(t-t_0)}{|x(t-t_0)|} & x(t-t_0) \neq 0 \\ 0 & x(t-t_0) = 0 \end{cases}$$

$$Z_{t_0}\{T\{x(t)\}\} = Z_{t_0}\{\text{ضابطه‌ی تابع}\} = \begin{cases} \dfrac{x(t-t_0)}{|x(t-t_0)|} & x(t-t_0) \neq 0 \\ 0 & x(t-t_0) = 0 \end{cases}$$

TI است ← مساوی شدند ←

(5) خطی بودن ؟

سوال ۶

ن) $$y(t) = \frac{\sin(x(t)+2t)}{x(t-1)}$$

① حافظه دار بودن ← بله حافظه دار است چون $x(t-1)$ را باید داشته باشیم
یعنی ~~...~~ t به $t-1$ هم نیاز داریم ← حافظه دار است
در زمان

② علی بودن ← بله علی است چون در هر لحظه خروجی به $x(t)$ و $x(t-1)$ بستگی دارد و
به آینده وابسته نیست

③ پایدار بودن ← $-1 < \sin(x(t)+2t) < 1$ است و اگر $x(t-1)$ هم
محدود باشد مثلا $u(t-1)$ ← $\frac{\text{محدود}}{\text{محدود}} =$ محدود
این در شرایطی است که مخرج صفر نشود
اما چون $x(t-1)$ صفر می‌شود و صفر هم محدود است ← در حالت کلی این
سیستم ناپایدار است.

ناپایدار است

④ تغییر ناپذیر با زمان ←

$$y(t) = T\{x(t)\} = \frac{\sin(x(t)+2t)}{x(t-1)}$$

$$T\{Z_{t_0}\{x(t)\}\} = T\{x(t-t_0)\} = \frac{\sin(x(t-t_0)+2t)}{x(t-1-t_0)}$$

$=$

$$Z_{t_0}\{T\{x(t)\}\} = Z_{t_0}\left\{\frac{\sin(x(t)+2t)}{x(t-1)}\right\} = \frac{\sin(x(t-t_0)+2t)}{x(t-t_0-1)}$$

پس TI است ✓

$\boxed{\text{سوال ۷}}$

الف) $y(t) = t^2 x(2t-1)$ ← اگر $t=0$ باشد ← $y(t)=0$ می‌شود

در نتیجه از روی خروجی که صفر شده نمی‌توانیم تشخیص بدهیم

که x (ورودی) چه بوده (به ازای مقادیر مختلف x اگر $t=0$ شود،

y صفر می‌شود ←

این یعنی نقض می‌شود

$$\boxed{y_2(t)=y_1(t) \not\to x_2(t)=x_1(t) \quad \text{نقض می‌شود} \times}$$

از خروجی نمی‌توانیم ورودی را پیدا کنیم

$\boxed{\leftarrow \text{وارون ناپذیر}}$

ب) $y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, e^{\tau}\, d\tau$

طبق رابطه‌ی: $y(t)=\int_{g(t)}^{h(t)} f(t)\,dt \Rightarrow y'(t)=h'(t)f(t)-g'(t)f(t)$

$\to y'(t)=(t)'(x(t)e^{t})-0=\boxed{x(t)e^{t}}$

$\to x(t)=\frac{y'(t)}{e^{t}} \longrightarrow$ $\boxed{\text{وارون پذیر است} \checkmark}$

e^{t} هم هرگز صفر نمی‌شود

ج) $y(t)=\begin{cases} x(t) & x(t)<0 \\ x^2(t) & x(t)\geq 0 \end{cases}$

$y(t)=x^2(t) \to$

$w(t)=\pm\sqrt{y(t)} \xrightarrow[\text{چون}]{} \boxed{w(t)=+\sqrt{y(t)}} \longrightarrow$

چون $x(t)$ باید مثبت باشد (طبق شرط ضابطه که گفته $x(t)\geq 0$)

وارون پذیر است

در $x<0$ هم $w(t)=y(t)$ ←

وارون پذیر است ← $\begin{cases} y(t) & x<0 \\ \sqrt{y(t)} & x\geq 0 \end{cases}$

د) $y[n] = x^2[n]$

اگر $x[n]$ ها اندازه یکسان ولی علامت متفاوت داشته باشند

$x[n] = \pm 2 \longrightarrow y[n] = 4 \longrightarrow$

به ازای دو تا x یک y ایجاد شد ← از خروجی نمی‌توانیم ورودی را

تشخیص دهیم ← وارون پذیر نیست.

$$y_2[n] = y_1[n] \not\Rightarrow x_2[n] = x_1[n]$$

~~ه) به ازای $n=1 \rightarrow y[n]=0$~~

~~$y[n] = \begin{cases} x[n-2] & n \geq 2 \\ 0 & n=1 \\ x[n] & n \leq 0 \end{cases}$~~

~~پس $y[1]=0$ به ازای $x[1]$ های مختلف y ها صفر می‌شود~~

~~پس به ازای ... از خروجی نمی‌توانیم ورودی را تشخیص دهیم ← ... ← وارون ناپذیر~~

ه) $y[n] = \begin{cases} x[n-2] & n \geq 2 \\ 0 & n=1 \\ x[n] & n \leq 0 \end{cases}$ وارون پذیر است

مطابق الف

$w[n] = y[n+2] \quad n \geq 1$

$\quad\quad\; y[n] \quad n < 1$