بسم الله الرّحمن الرّحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده برق و کامپیوتر

تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مدرس: مسعود عمومی

جلسه یازدهم _ بخش‌های 9.1 و 9.2 کتاب

با سلام خدمت دانشجویان محترم

تبدیل لاپلاس

$$x(t) \longrightarrow \underset{\text{LTI}}{\boxed{h(t)}} \longrightarrow y(t)$$

فرض : $x(t) = e^{st}$ $\quad (s = \sigma + j\omega)$ ورودی نمایی مختلط

$$\Rightarrow y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{s(t-\tau)}\, d\tau = e^{st} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau}_{H(s)}$$

$$= e^{st} \cdot H(s)$$

نتیجه: پاسخ یک سیستم LTI به ورودی نمایی مختلط e^{st}، یک سیگنال نمایی مختلط به شکل $H(s)e^{st}$ است که در آن $H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$ را تبدیل لاپلاس $h(t)$ می‌نامیم. اصطلاحاً به سیگنال‌های نمایی مختلط e^{st}، توابع ویژه سیستم‌های LTI گفته می‌شود.

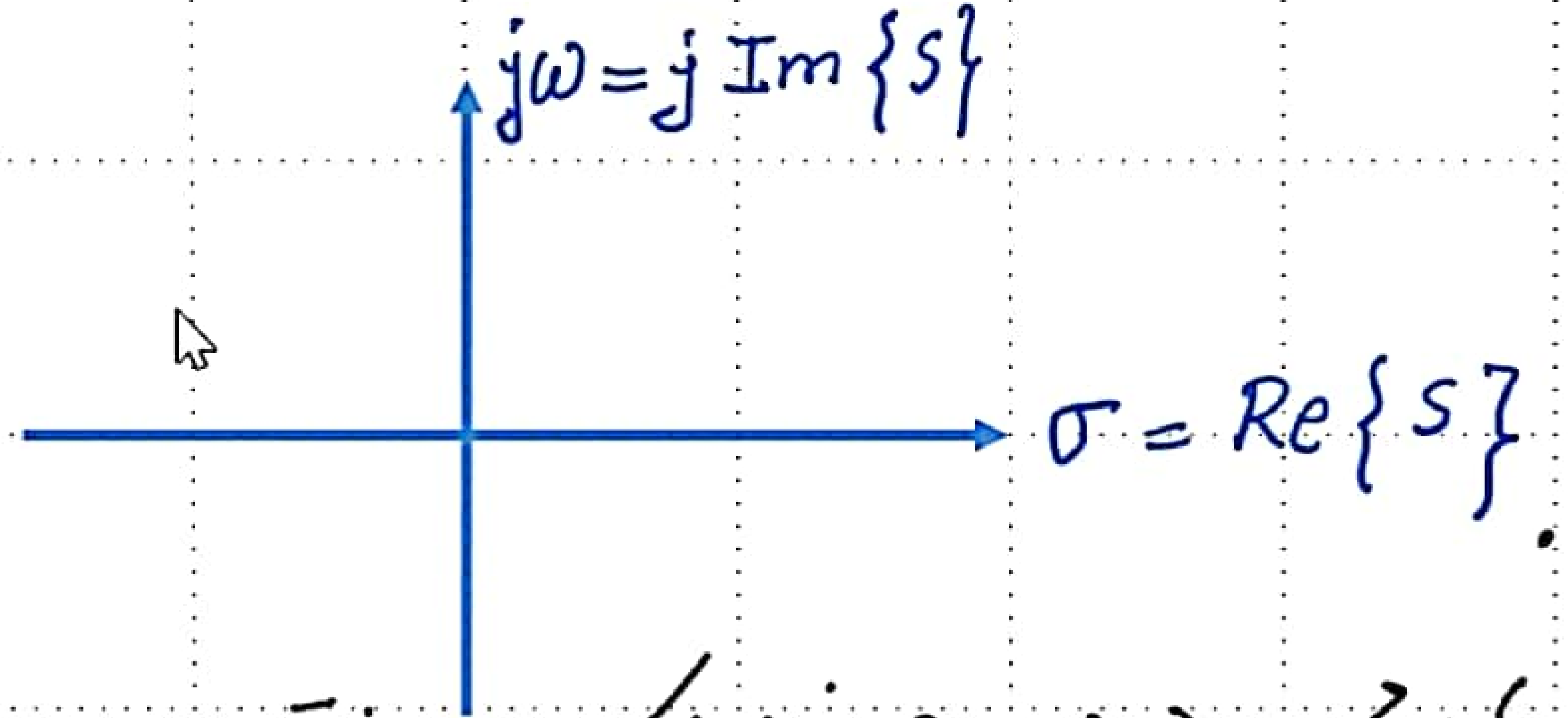
The Laplace transform of a general signal $x(t)$ is defined as **تعریف تبدیل لاپلاس**

$$\boxed{X(s) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}\,dt,}$$

we will sometimes denote the Laplace transform in operator form as $\mathfrak{L}\{x(t)\}$ and denote the transform relationship between $x(t)$ and $X(s)$ as

$$x(t) \overset{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} X(s).$$

نکته ۱: تبدیل لاپلاس $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ ، تابع زمان پیوستهٔ $x(t)$ را به تابع جدید $X(s)$ در حوزهٔ جدیدی به نام حوزهٔ فرکانس مختلط، یعنی $s=\sigma+j\omega$ تبدیل می‌کند.



صفحهٔ فرکانس مختلط

Complex Frequency Plane

واحد s، عکس واحد زمان یعنی $1/sec$ است.

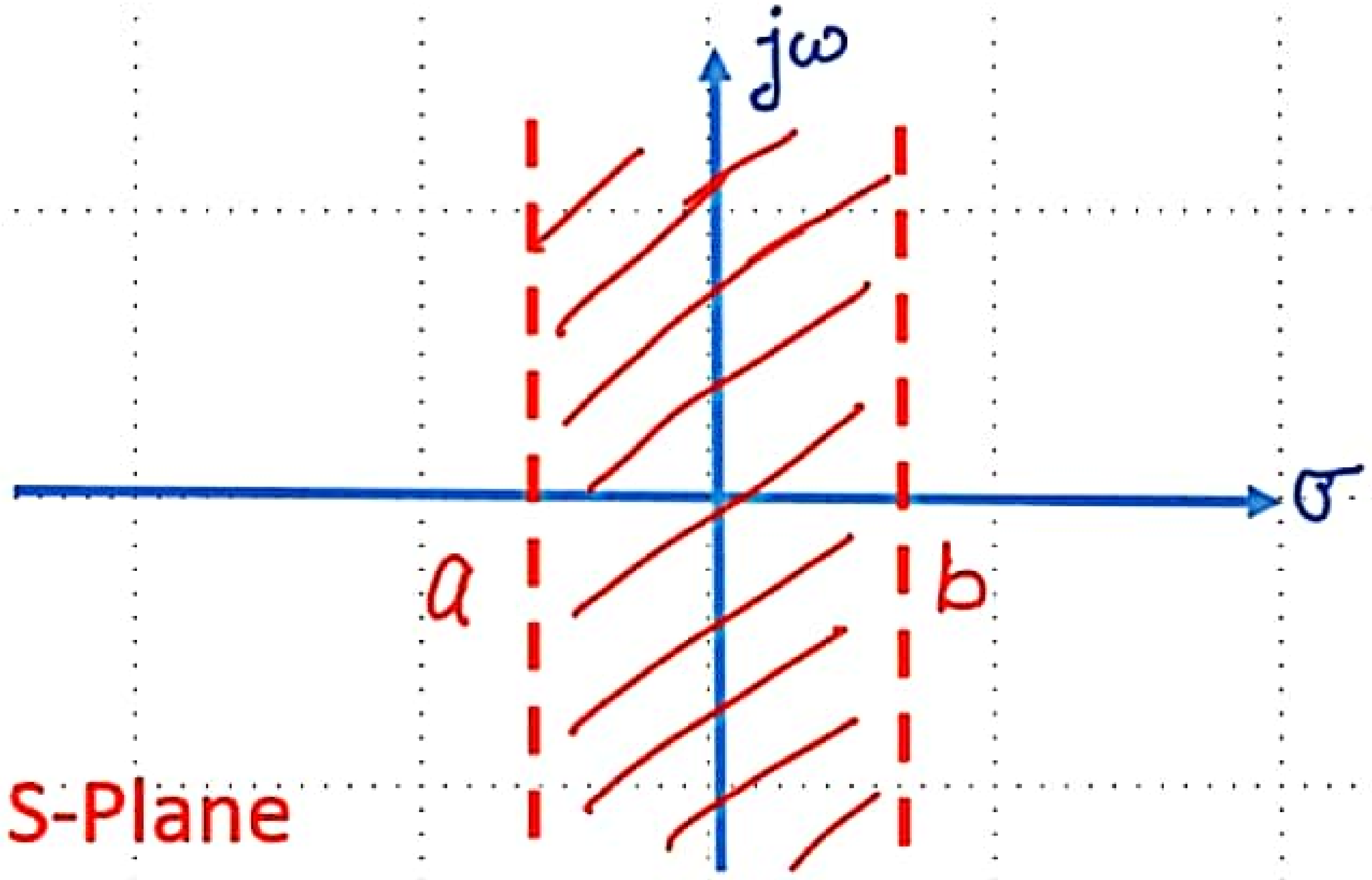
نکته ۲: اگر تبدیل لاپلاس $x(t)$، فقط بر روی محور موهومی در صفحهٔ فرکانس مختلط محاسبه شود:

$$\sigma=0 \Rightarrow s=j\omega \Rightarrow X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt = F\{x(t)\}$$

تبدیل جدیدی به نام تبدیل فوریه تعریف خواهد شد (مباحث آینده درس)

$$X(s)\Big|_{s=j\omega} = X(j\omega) = F\{x(t)\} \iff X(s) = F\{x(t)e^{-\sigma t}\}$$

نکته ۳ : وجود یا عدم وجود تبدیل لاپلاس برای یک سیگنال زمان پیوسته $x(t)$ بستگی به همگرا شدن یا واگرا شدن انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-(\sigma+j\omega)t}\, dt$ دارد و لذا مقدار $\sigma = Re\{s\}$ در میرایی یا رویندگی عبارت $e^{-\sigma t}$ تعیین کننده است. به عبارت دیگر $X(s)$ برای یک سیگنال $x(t)$، ممکن است فقط برای محدوده‌ای خاص از $\sigma = Re\{s\}$ قابل تعریف باشد. به محدوده همگرا شدن تبدیل لاپلاس با توجه به مقدار σ **ناحیهٔ همگرایی** آن گفته می‌شود. Region Of Convergence (ROC)



$$ROC: \quad a < Re\{s\} < b$$

ناحیهٔ همگرایی تبدیل لاپلاس همواره به صورت محدودهٔ نواری به موازات محور موهومی در صفحهٔ s است.

a و b ممکن است محدود و یا بی‌نهایت باشند.

تبدیل لاپلاس برخی از سیگنال‌های مهم

مثال ۱) $x(t) = e^{-at} u(t)$ (a ثابت)

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(t) \cdot e^{-st} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(s+a)t} dt$$

$$= -\frac{1}{s+a} e^{-(\sigma+a+j\omega)t} \Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$ ، اگر $\sigma + Re\{a\} > 0$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{s+a} \quad , \quad RoC: Re\{s\} > -Re\{a\}$$

مثال ۲) $x(t) = -e^{-at}u(-t)$ (a ثابت)

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-at}u(-t)\cdot e^{-st}dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-(s+a)t}dt$$

$$= \frac{1}{s+a} e^{-(\sigma+a+j\omega)t}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{s+a} \quad , \quad \text{اگر} \quad \sigma + Re\{a\} < 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{-e^{-at}u(-t)\} = \frac{1}{s+a} \quad , \quad RoC: Re\{s\} < -Re\{a\}$$

مثال ۳) نتیجهٔ دو مثال اخیر

اگر $a=0 \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s} \quad , \quad Re\{s\} > 0 \\ \mathcal{L}\{-u(-t)\} = \frac{1}{s} \quad , \quad Re\{s\} < 0 \end{cases}$

مثال ۴) $x(t) = \cos(\omega_0 t) \cdot u(t)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t) u(t) \cdot e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right] u(t) \cdot e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{j\omega_0 t} u(t)\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-j\omega_0 t} u(t)\} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-j\omega_0} + \frac{1}{s+j\omega_0}\right]$$

$$= \frac{s}{s^2+\omega_0^2} \quad , \quad Re\{s\} > 0$$

$Re\{\pm j\omega_0\} = 0$

مثال ۵) $x(t) = \sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega_0 t) u(t) \cdot e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2j}\left[e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right] u(t) \cdot e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{2j} \mathcal{L}\left\{e^{j\omega_0 t} u(t)\right\} - \frac{1}{2j} \mathcal{L}\left\{e^{-j\omega_0 t} u(t)\right\} = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s - j\omega_0} - \frac{1}{s + j\omega_0}\right]$$

$$= \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \quad , \quad Re\{s\} > 0$$

$Re\{\pm j\omega_0\} = 0$

مثال ۶) $x(t) = \delta(t)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{(0)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \quad , \quad \forall s$$

نکتهٔ مهم: با توجه به تعریف تبدیل لاپلاس براساس انتگرال، این تبدیل یک عملگر خطی است.

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\sum_{K=1}^{N} \alpha_K x_K(t)\right\} = \sum_{K=1}^{N} \alpha_K \mathcal{L}\{x_K(t)\} = \sum_{K=1}^{N} \alpha_K X_K(s)$$

$$X_K(s) = \mathcal{L}\{x_K(t)\}, \quad ROC_K$$ ناحیهٔ همگرایی

$$ROC_{\text{کلی}} = ROC_1 \cap ROC_2 \cap \cdots \cap ROC_N$$

مثال ۷)

In this example, we consider a signal that is the sum of two real exponentials:

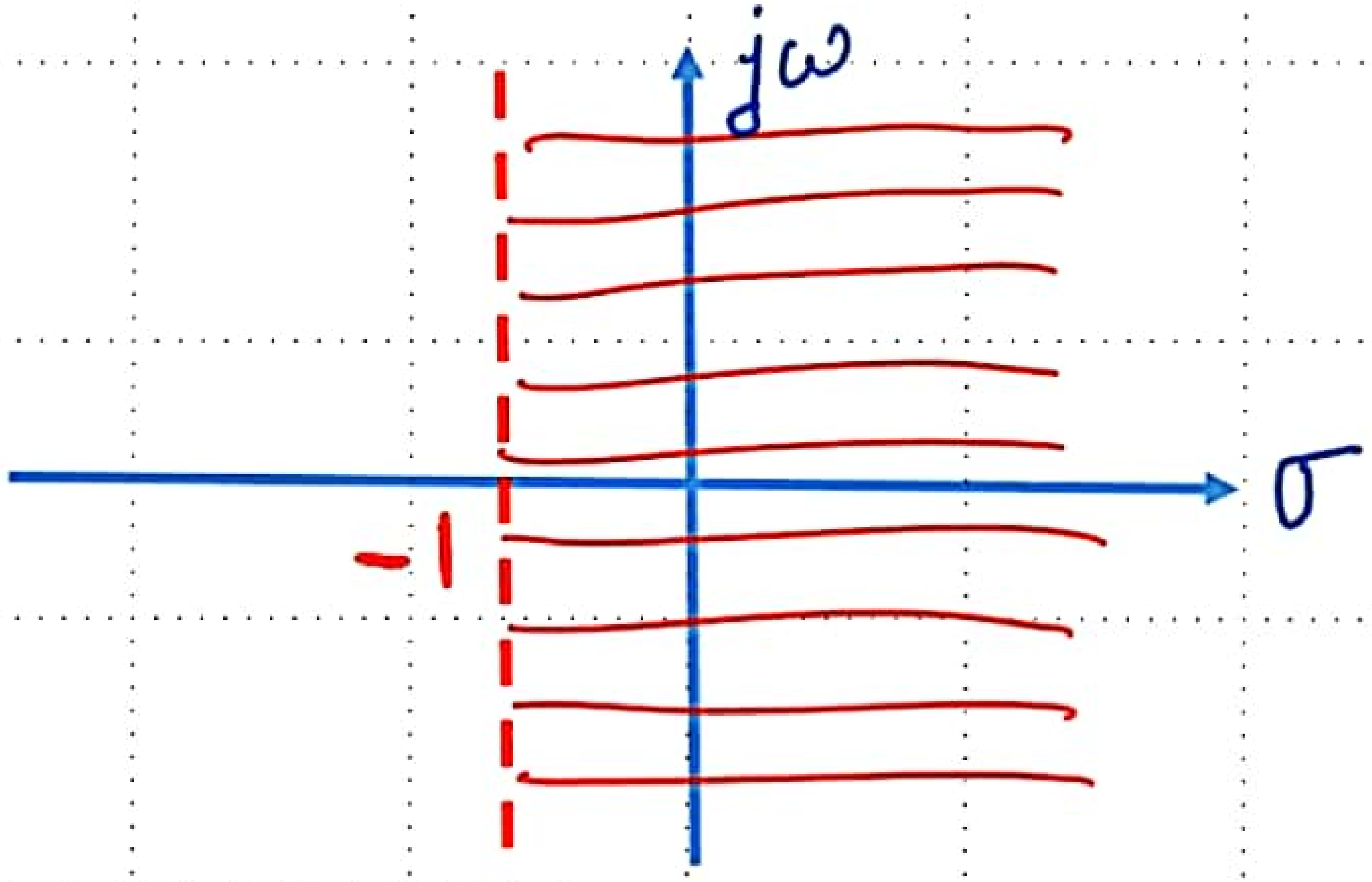
$$x(t) = 3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t).$$

$$e^{-t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+1}, \qquad \Re e\{s\} > -1, \qquad e^{-2t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+2}, \qquad \Re e\{s\} > -2.$$

$$X(s) = \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+1}.$$

$$ROC_1 \cap ROC_2 = \{ s \mid Re\{s\} > -1 \}$$

$$3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{s-1}{s^2+3s+2}, \quad \Re e\{s\} > -1.$$



In this example, we consider a signal that is the sum of a real and a complex exponential: مثال ۸)

$$x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}(\cos 3t)u(t).$$

Using Euler's relation, we can write $x(t) = \left[e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-(1-3j)t} + \frac{1}{2}e^{-(1+3j)t}\right]u(t),$

$$e^{-2t}u(t) \overset{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+2}, \quad \mathcal{R}e\{s\} > -2,$$

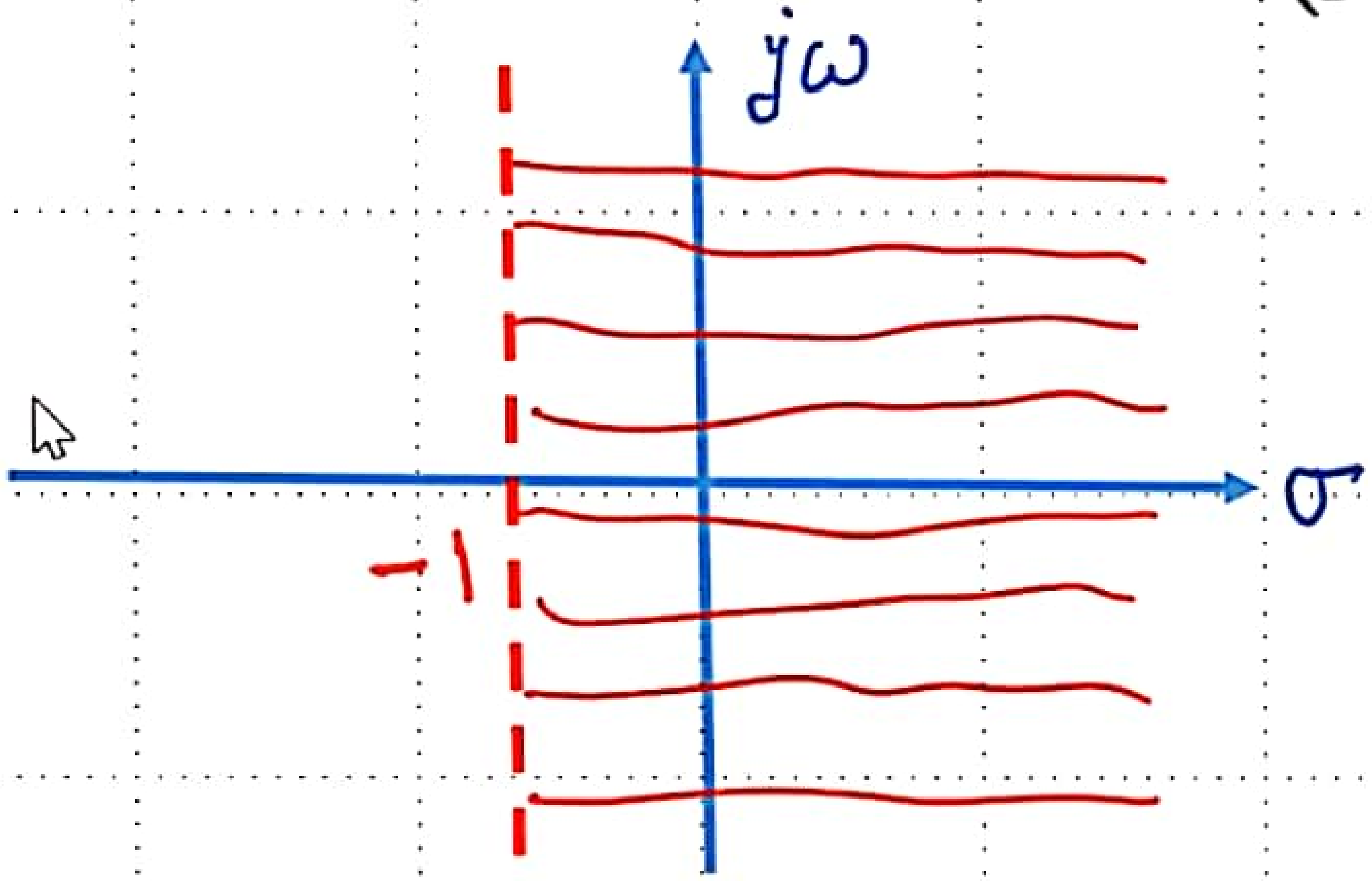
$$e^{-(1-3j)t}u(t) \overset{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+(1-3j)}, \quad \mathcal{R}e\{s\} > -1,$$

$$e^{-(1+3j)t}u(t) \overset{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+(1+3j)}, \quad \mathcal{R}e\{s\} > -1.$$

For all three Laplace transforms to converge simultaneously, we must have $\mathcal{R}e\{s\} > -1$. Consequently, the Laplace transform of $x(t)$ is

$$\frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+(1-3j)}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+(1+3j)}\right), \quad \mathcal{R}e\{s\} > -1,$$

$$e^{-2t}u(t) + e^{-t}(\cos 3t)u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{2s^2 + 5s + 12}{(s^2 + 2s + 10)(s + 2)}, \quad \Re e\{s\} > -1.$$

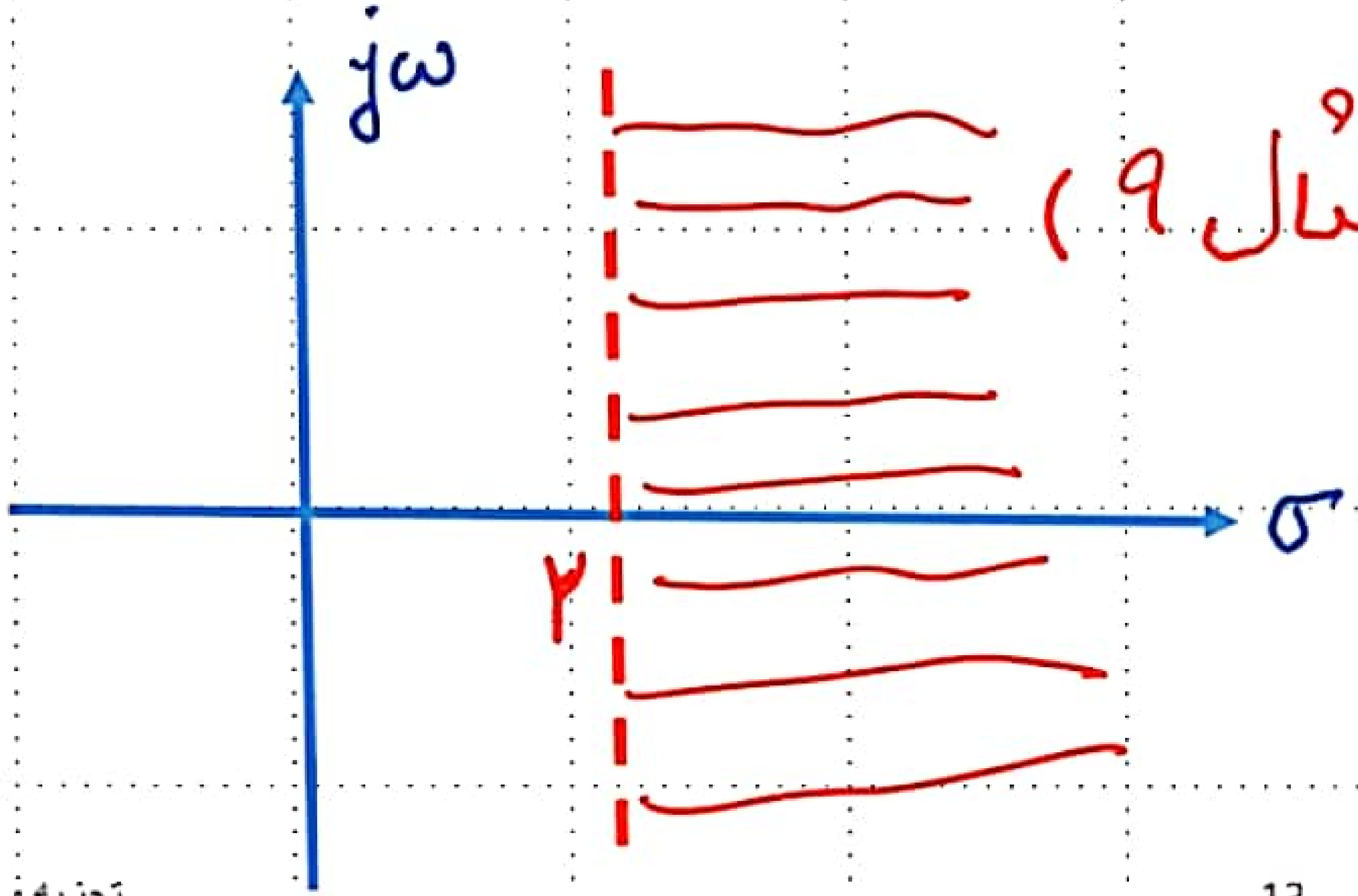


$$x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t).$$

$$X(s) = 1 - \frac{4}{3}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{s-2}, \quad \Re e\{s\} > 2,$$

$$X(s) = \frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)}, \quad \Re e\{s\} > 2,$$

مثال ۹)

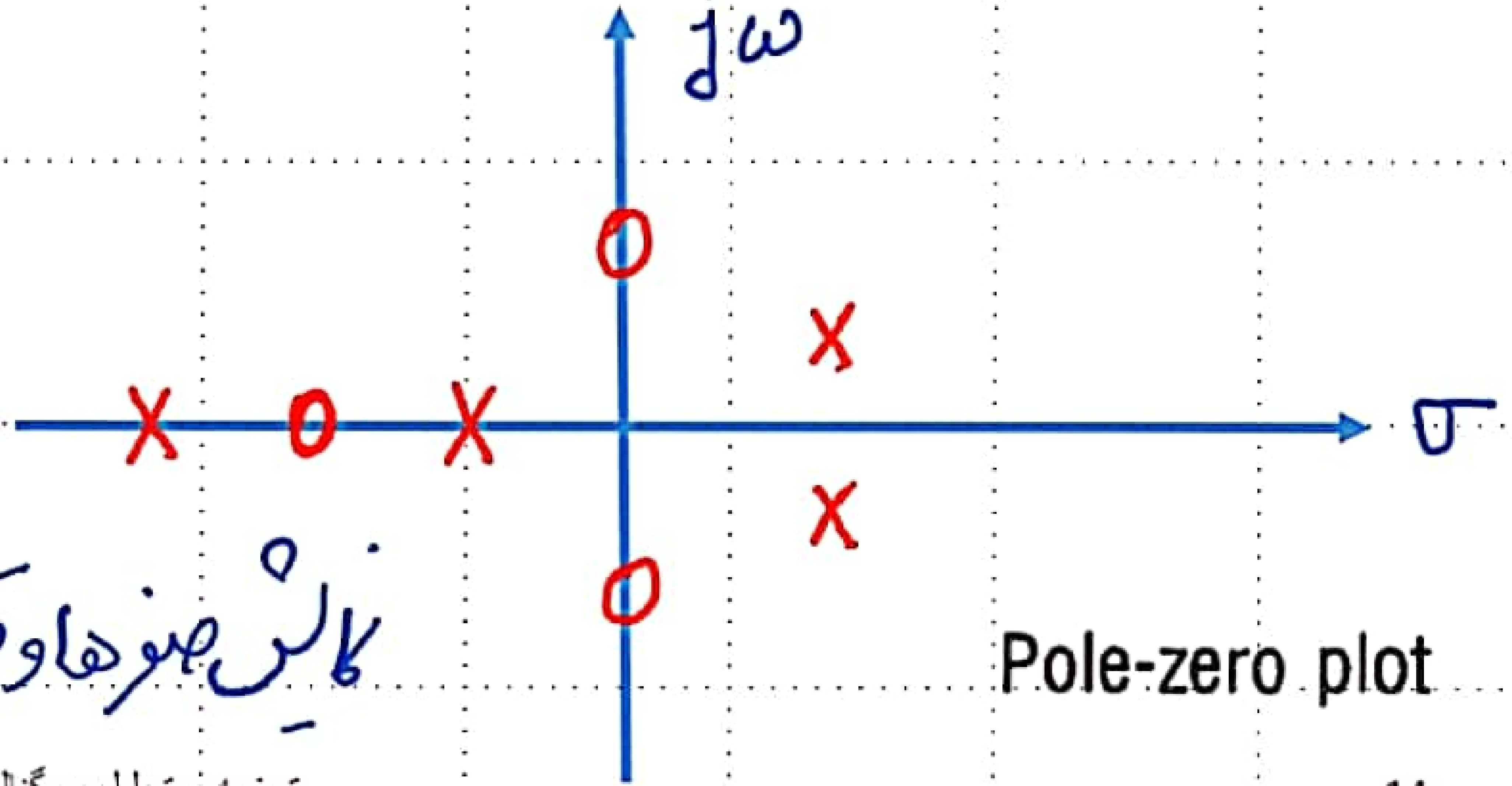


نکته مهم: تبدیل لاپلاس هر ترکیب خطی از توابع نمایی (حقیقی یا مختلط) $e^{-at}u(t)$ یا $e^{-at}u(-t)$ به صورت ترکیب خطی از کسرهای ساده‌ی $\frac{1}{s+a}$ است که به صورت یک کسر گویای $X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$ تبدیل خواهد شد.

$N(s)$ (چندجمله‌ای صورت) و $D(s)$ (چندجمله‌ای مخرج) دارای ضرائب حقیقی هستند.

ریشه‌های $N(s)$: صفرهای $X(s)$ (zeros) o

" $D(s)$: قطب‌های $X(s)$ (poles) X



Pole-zero plot

نمایش صفرها و قطب‌های $X(s)$ (مثال)

ناحیهٔ همگرایی در تبدیل لاپلاس و خواص آن

In the preceding section, we saw that a complete specification of the Laplace transform requires not only the algebraic expression for $X(s)$, but also the associated region of convergence.

very different signals can have identical algebraic expressions for $X(s)$,

so that their Laplace transforms are distinguishable *only* by the region of convergence.

In this section, we explore some specific constraints on the ROC for various classes of signals.

Property 1: The ROC of $X(s)$ consists of strips parallel to the $j\omega$-axis in the s-plane.

خاصیت اول : ROC در تبدیل لاپلاس همواره به صورت نوارهایی موازی با محور $j\omega$ در صفحهٔ S است.

That is, the ROC of the Laplace transform of $x(t)$ consists of those values of s for which $x(t)e^{-\sigma t}$ is absolutely integrable:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|e^{-\sigma t}\,dt < \infty.$$

این شرط فقط به σ بستگی دارد.

Property 2: For rational Laplace transforms, the ROC does not contain any poles.

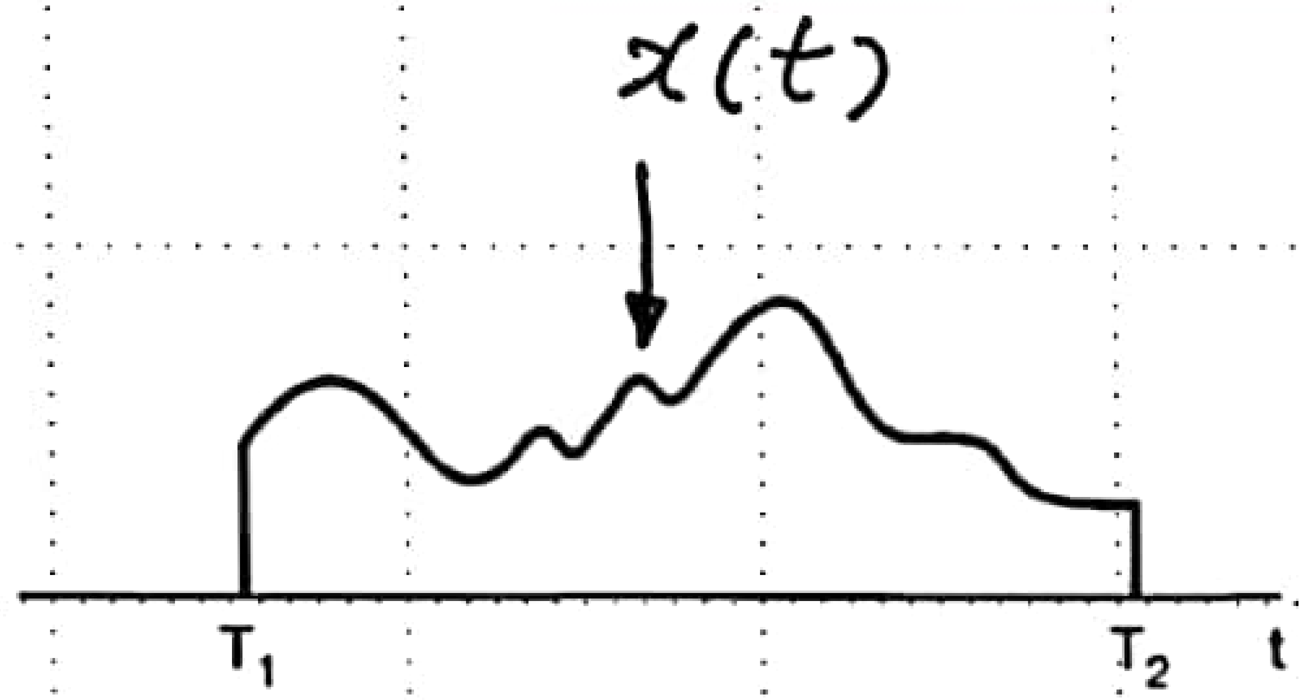
خاصیت دوم: برای $X(S)$ های به فرم کسرهای گویا، هیچکدام از قطب ها درون ROC قرار نمی گیرند. (چون $X(S)$ در محل قطب ها بی نهایت می شود)

Property 3: If $x(t)$ is of finite duration and is absolutely integrable, then the ROC is the entire s-plane.

خاصیت سوم: ROC برای سیگنال های با پهنای زمانی محدود و مطلقاً انتگرال پذیر، تمام صفحهٔ S است.

Suppose that $x(t)$ is absolutely integrable, so that

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)|\, dt < \infty.$$



For $s = \sigma + j\omega$ to be in the ROC, we require that $x(t)e^{-\sigma t}$ be absolutely integrable, i.e.,

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma t}\, dt < \infty.$$

اگر $\sigma = 0 \Rightarrow \int_{T_1}^{T_2} |x(t)|\, dt < \infty \Rightarrow$ ROC شامل محور $j\omega$ است. ✓

اگر $\sigma > 0 \Rightarrow \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma t}\, dt < e^{-\sigma T_1} \int_{T_1}^{T_2} |x(t)|\, dt < \infty \Rightarrow$ ROC شامل نیم صفحهٔ راست s است. ✓

اگر $\sigma < 0 \Rightarrow \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma t}\, dt < e^{-\sigma T_2} \int_{T_1}^{T_2} |x(t)|\, dt < \infty \Rightarrow$ ROC شامل نیم صفحهٔ چپ s است. ✓

مثال) سیگنال با پهنای زمانی محدود

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & 0 < t < T \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \quad X(s) = \int_0^T e^{-at} e^{-st}\, dt = \frac{1}{s+a}\left[1 - e^{-(s+a)T}\right].$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{s \to -a} X(s) = \lim_{s \to -a} \left[\frac{\frac{d}{ds}\left(1 - e^{-(s+a)T}\right)}{\frac{d}{ds}(s+a)} \right] = \lim_{s \to -a} T e^{-aT} e^{-sT},$$

$$\Rightarrow \quad X(-a) = T.$$

$s=-a$ ریشهٔ صورت و مخرج $X(s)$ است و قطب $X(s)$ نیست.

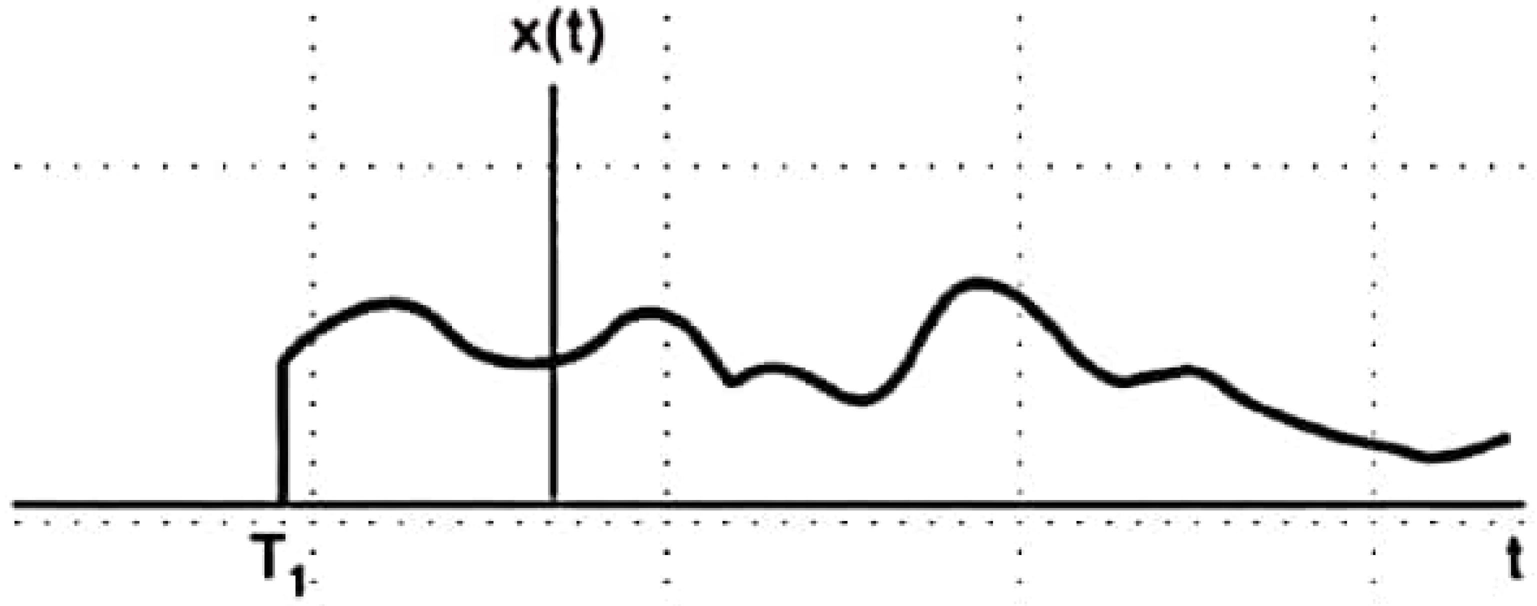
$X(s)$ قطبی ندارد و تمام صفحهٔ s ناحیهٔ همگرایی آن است.

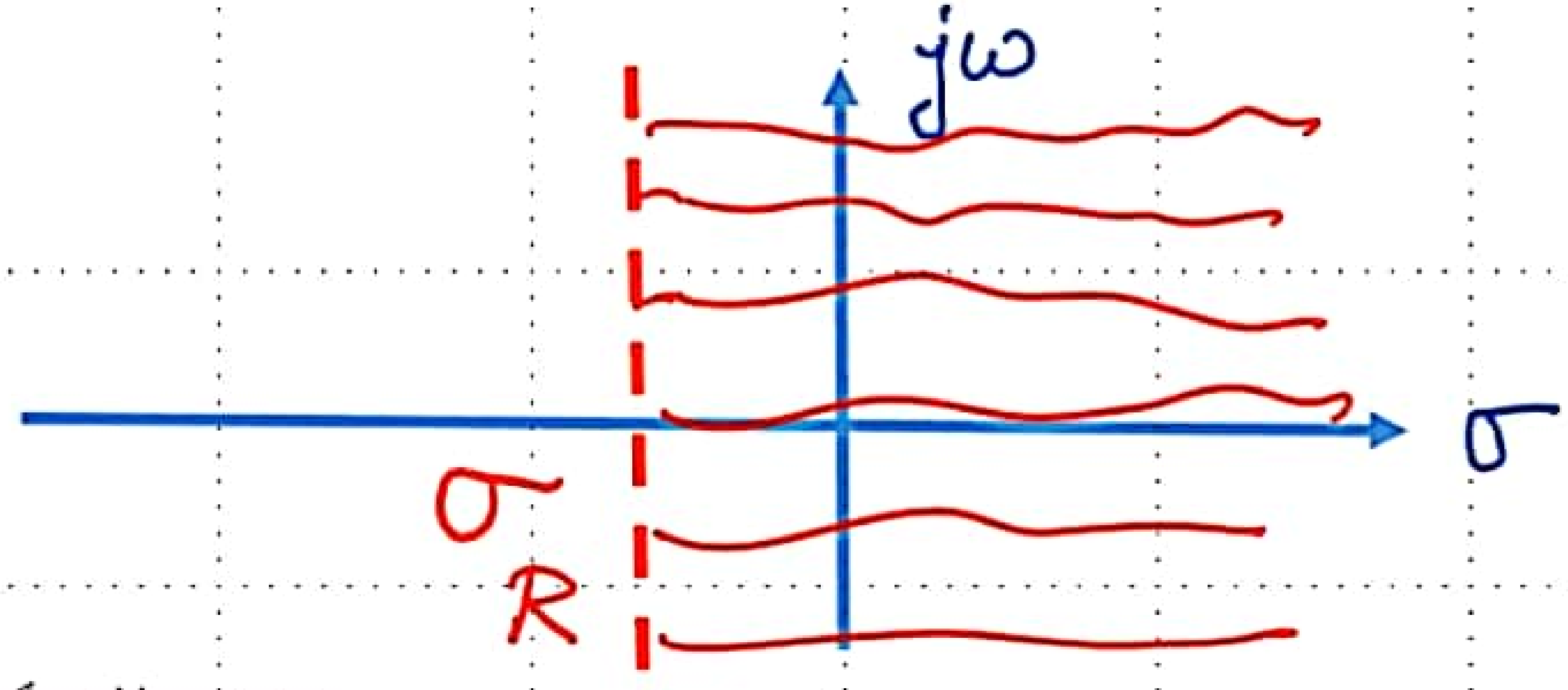
Property 4: If $x(t)$ is right sided, and if the line $\mathcal{R}e\{s\} = \sigma_0$ is in the ROC, then all values of s for which $\mathcal{R}e\{s\} > \sigma_0$ will also be in the ROC.

خاصیت چهارم: اگر $x(t)$ یک سیگنال سمت راستی باشد و خط $Re\{s\} = \sigma_0$ در ROC آن قرار داشته باشد، همهٔ مقادیر s که $Re\{s\} > \sigma_0$ نیز در ROC آن قرار دارند.

به عبارت دیگر ROC سیگنالهای سمت راستی، نیم صفحه‌ای سمت راستی است.

A *right-sided* signal is a signal for which $x(t) = 0$ prior to some finite time T_1





right-half plane.

suppose that the Laplace transform converges for some value of σ, which we denote by σ_0. Then

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} \, dt < \infty,$$

or equivalently, since $x(t)$ is right sided,

$$\int_{T_1}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} \, dt < \infty.$$

we can say that with $\sigma_1 > \sigma_0$,

$$\int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} \, dt = \int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t} \, dt$$

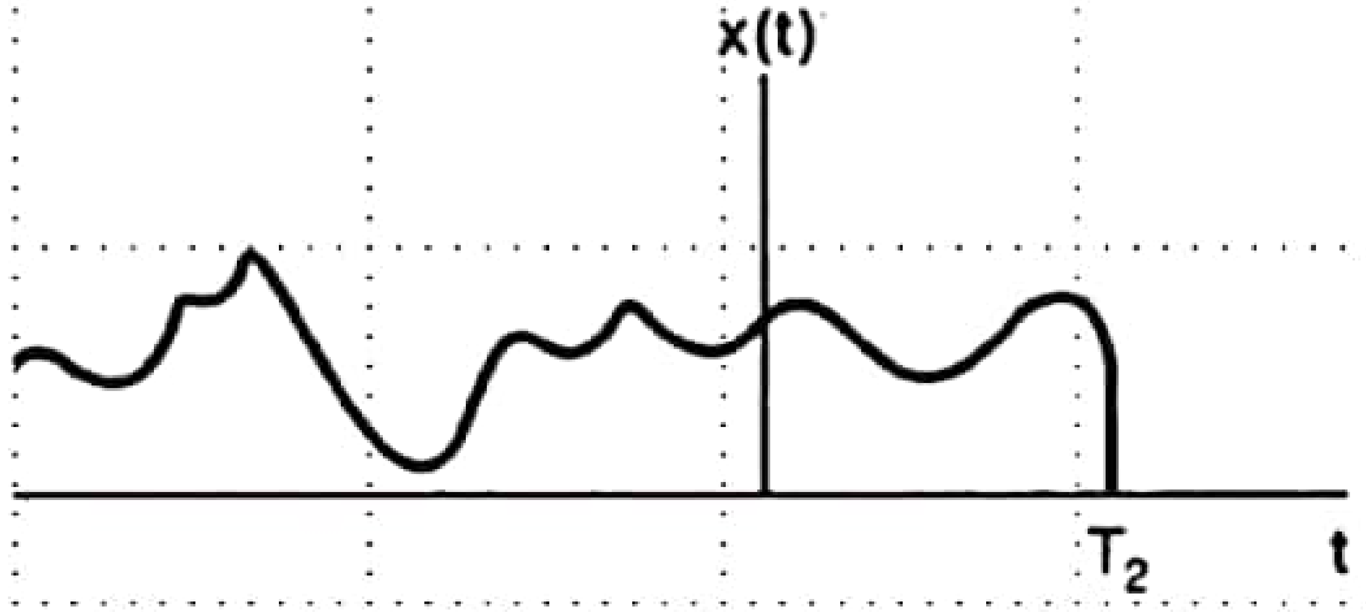
$$\leq \underbrace{e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)T_1}}_{< \infty} \underbrace{\int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} \, dt.}_{< \infty} \quad < \infty$$

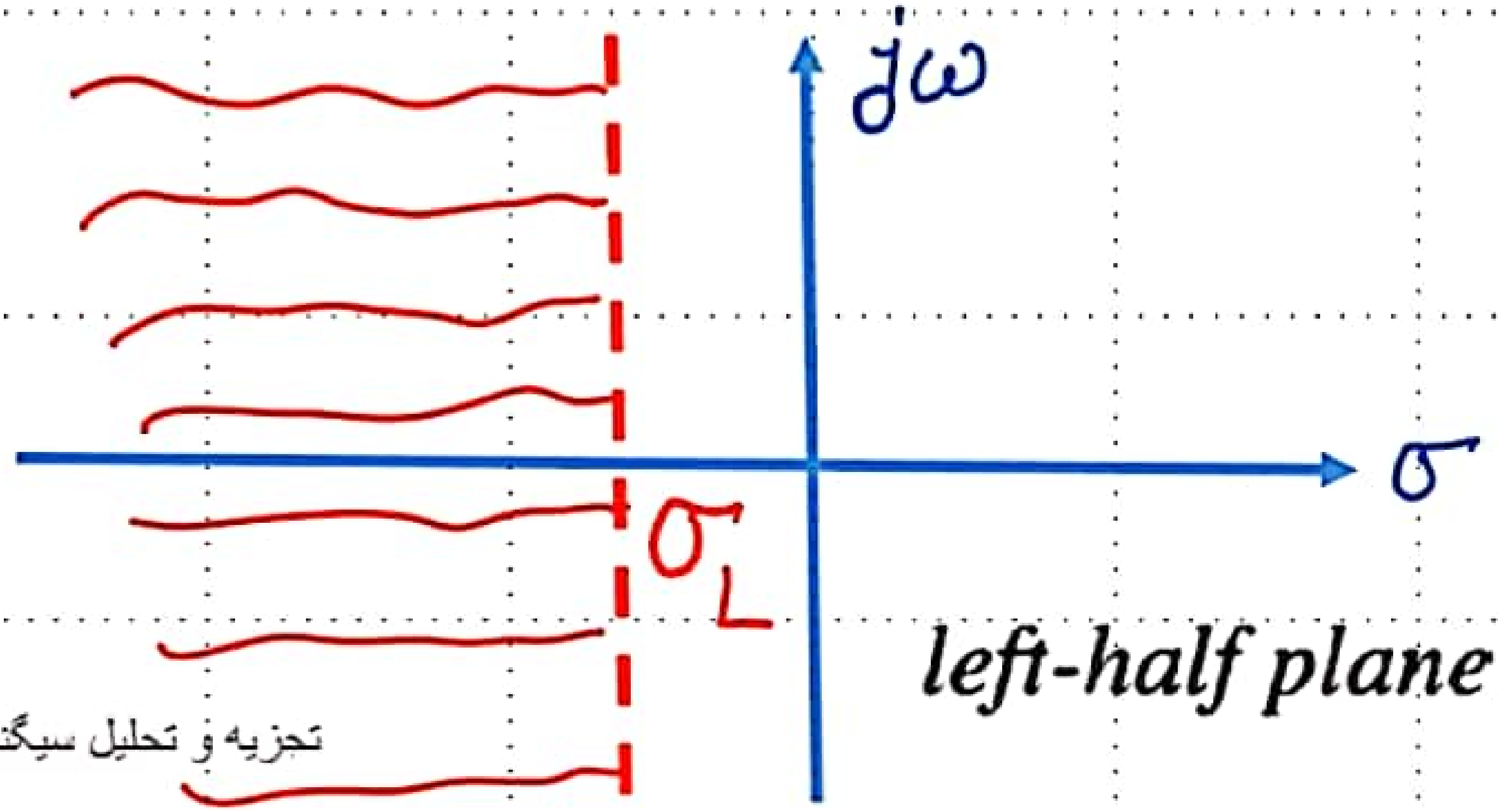
Property 5: If $x(t)$ is left sided, and if the line $\Re e\{s\} = \sigma_0$ is in the ROC, then all values of s for which $\Re e\{s\} < \sigma_0$ will also be in the ROC.

خاصیت پنجم: اگر $x(t)$ یک سیگنال سمت چپی باشد و خط $Re\{s\} = \sigma_0$ در ROC آن قرار داشته باشد، همهٔ مقادیر s که $Re\{s\} < \sigma_0$ نیز در ROC آن قرار دارند.

به عبارت دیگر ROC سیگنالهای سمت چپی، نیم‌صفحه‌ای سمت چپی است.

A *left-sided* signal is a signal for which $x(t) = 0$ after some finite time T_2





suppose that the Laplace transform converges for some value of σ, which we denote by σ_0. Then

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t}\, dt < \infty,$$

or equivalently, since $x(t)$ is left sided,

$$\int_{-\infty}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma_0 t}\, dt < \infty$$

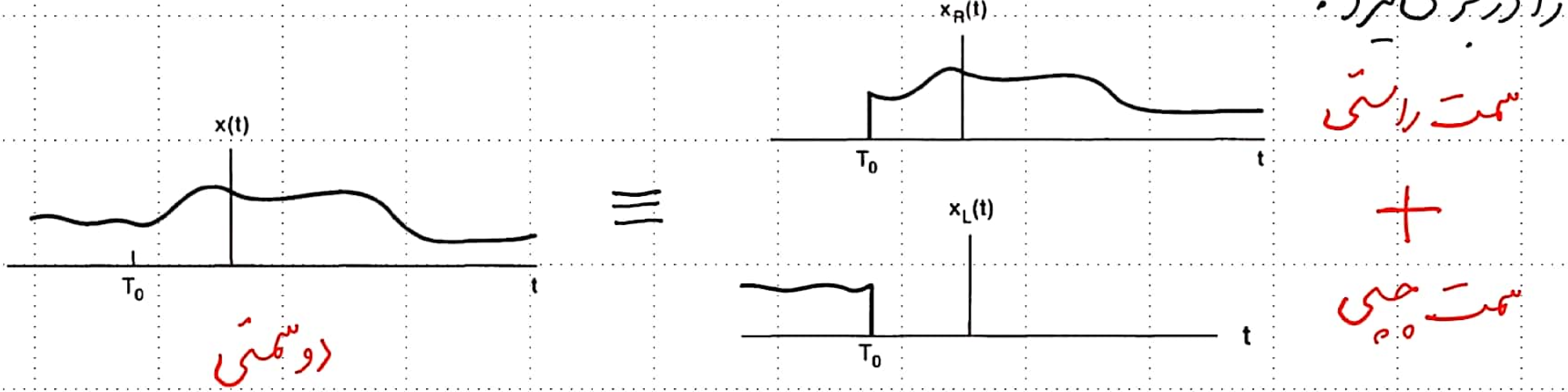
we can say that with $\sigma_1 < \sigma_0$,

$$\int_{-\infty}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma_1 t}\, dt = \int_{-\infty}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} e^{-(\sigma_1-\sigma_0)t}\, dt$$

$$\leq \underbrace{e^{-(\sigma_1-\sigma_0)T_2}}_{<\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma_0 t}\, dt}_{<\infty} < \infty$$

Property 6: If $x(t)$ is two sided, and if the line $\Re e\{s\} = \sigma_0$ is in the ROC, then the ROC will consist of a strip in the s-plane that includes the line $\Re e\{s\} = \sigma_0$.

خاصیت ششم: اگر $x(t)$ یک سیگنال دوسمتی باشد و خط $Re\{s\} = \sigma_0$ در ROC آن قرار داشته باشد، آنگاه ROC به صورت نواری از صفحهٔ s است که خط $Re\{s\} = \sigma_0$ را در بر می‌گیرد.



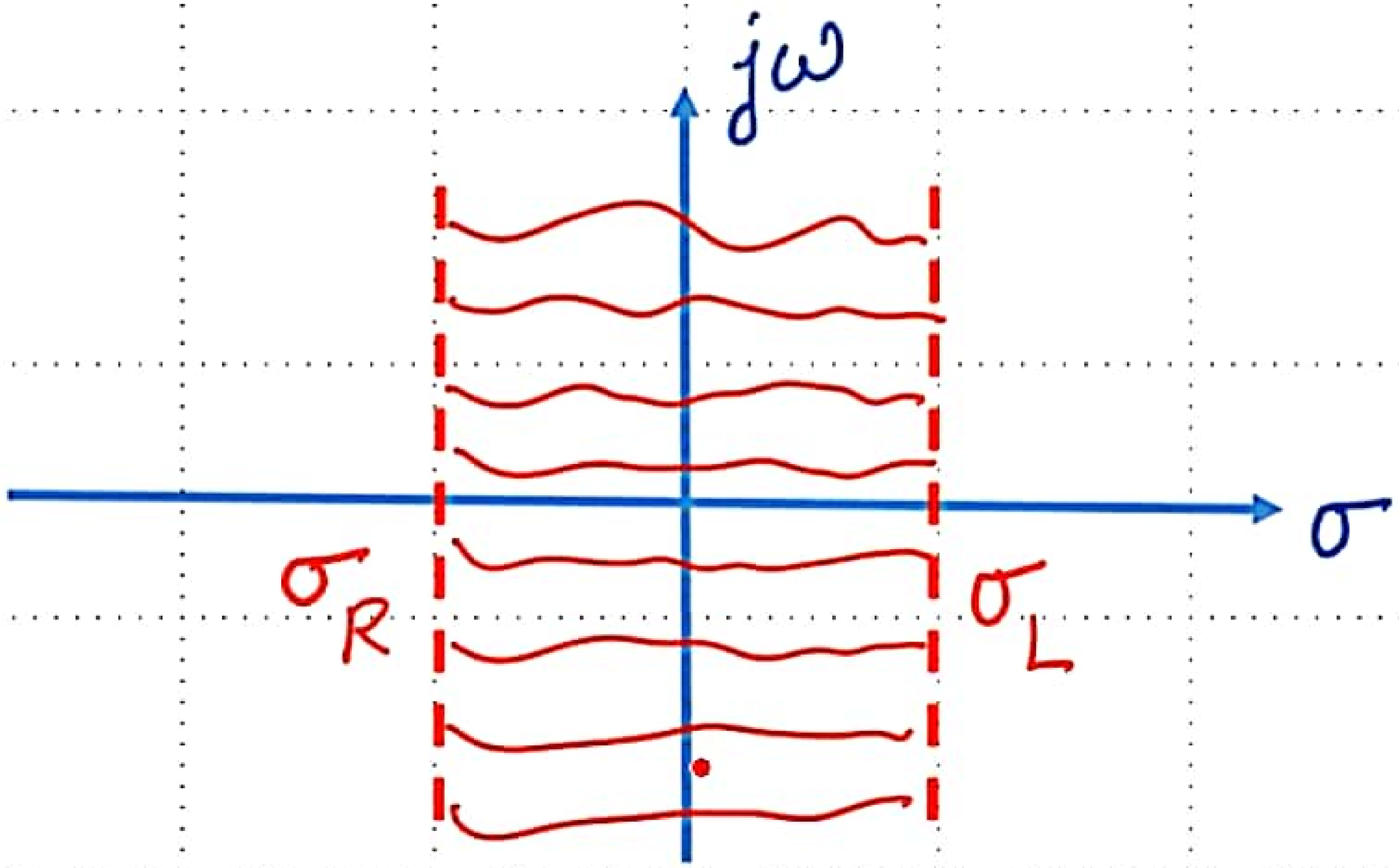
Scanned by CamScanner

با فرض وجود تبدیل لاپلاس برای $x(t) = x_R(t) + x_L(t)$ ، داریم:

$$ROC_x = ROC_{x_R} \cap ROC_{x_L} \Rightarrow$$ ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس سیگنال

دوسمتی $x(t)$ ، فصل مشترک یک نیم صفحه سمت راستی با یک نیم صفحه سمت چپی است که

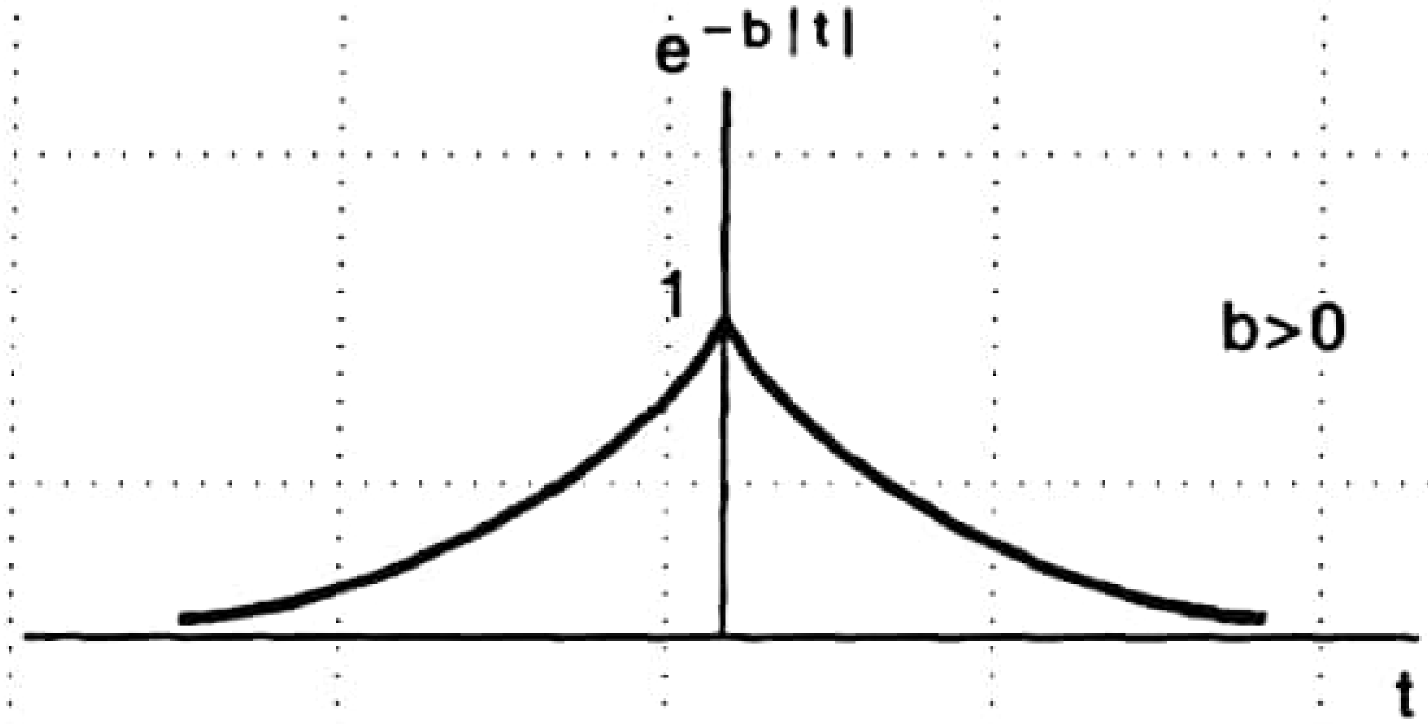
به صورت یک نوار است.

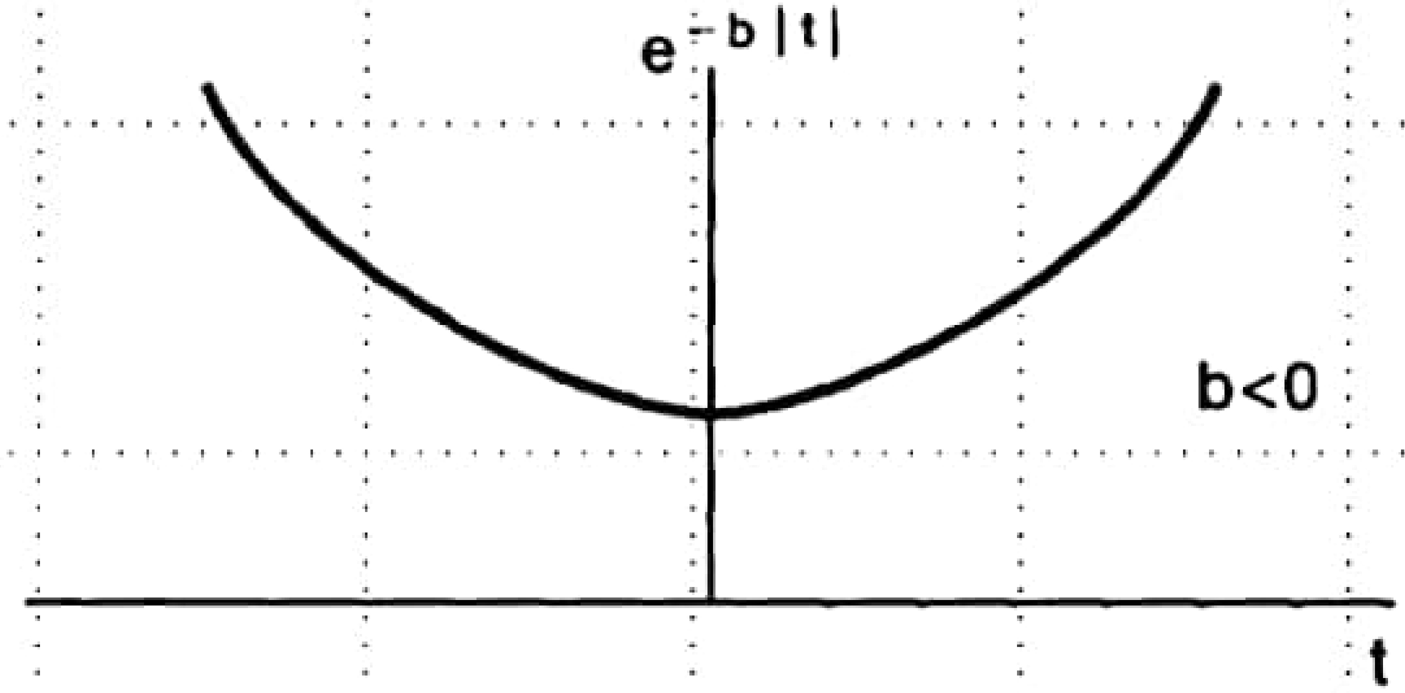


$\sigma_R < \sigma_L$

مثال)

$$x(t) = e^{-b|t|}, \quad \Longrightarrow \quad x(t) = e^{-bt}u(t) + e^{+bt}u(-t).$$





$$e^{-bt}u(t) \overset{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+b}, \quad \Re e\{s\} > -b,$$

$$e^{+bt}u(-t) \overset{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} \frac{-1}{s-b}, \quad \Re e\{s\} < +b.$$

$$\Longrightarrow \quad e^{-b|t|} \overset{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+b} - \frac{1}{s-b} = \frac{-2b}{s^2-b^2}, \quad -b < \Re e\{s\} < +b.$$

$b>0$

نکته: (دسته بندی انواع تبدیل های لاپلاس)

A signal either does not have a Laplace transform or falls into one of the four categories covered by Properties 3 through 6. Thus, for any signal with a Laplace transform, the ROC *must* be the entire s-plane (for finite-length signals), a left-half plane (for left-sided signals), a right-half plane (for right-sided signals), or a single strip (for two-sided signals). In all the examples that we have considered, the ROC has the additional property that in each direction (i.e., $\Re e\{s\}$ increasing and $\Re e\{s\}$ decreasing) it is bounded by poles or extends to infinity. In fact, this is *always* true for rational Laplace transforms:

> **Property 7:** If the Laplace transform $X(s)$ of $x(t)$ is rational, then its ROC is bounded by poles or extends to infinity. In addition, no poles of $X(s)$ are contained in the ROC.

خاصیت هفتم: ROC در تبدیل لاپلاس هایی که بصورت کسر گویا هستند، ناحیه ای محدود به دو قطب و یا محدود به یک قطب و گسترش یافته به سمت بی نهایت (چپ یا راست) است.

Scanned by CamScanner

Property 8: If the Laplace transform $X(s)$ of $x(t)$ is rational, then if $x(t)$ is right sided, the ROC is the region in the s-plane to the right of the rightmost pole. If $x(t)$ is left sided, the ROC is the region in the s-plane to the left of the leftmost pole.

خاصیت هشتم: ROC در تبدیل لاپلاس های کسری سیگنالهای سمت راستی، ناحیه ای سمت راست قطب با بزرگترین مقدار حقیقی و در سیگنالهای سمت چپی، ناحیه ای سمت چپ قطب با کوچکترین مقدار حقیقی است.

مثال) سمت راستی

$$x_1(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad Re\{s\} > -1$$

سمت چپی

$$x_2(t) = -e^{-t}u(-t) + e^{-2t}u(-t)$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad Re\{s\} < -2$$

دوسمتی

$$x_3(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t)$$

$$X_3(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad -2 < Re\{s\} < -1$$

$$x_4(t) = \underbrace{e^{-t}u(t)}_{Re\{s\} > -1} + \underbrace{e^{-2t}u(-t)}_{Re\{s\} < -2} \Rightarrow ROC = \emptyset \Rightarrow$$ تبدیل لاپلاس ندارد

بسم الله الرّحمن الرّحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده برق و کامپیوتر

تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مدرس: مسعود عمومی

جلسه دوازدهم _ بخش‌های 9.3 ، 9.5 و 9.6 کتاب

با سلام خدمت دانشجویان محترم

خواص تبدیل لاپلاس

۱. خطی بودن — Linearity of the Laplace Transform

If $x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s)$ with a region of convergence that will be denoted as R_1

and $x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_2(s)$ with a region of convergence that will be denoted as R_2,

then
$$\boxed{ax_1(t) + bx_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} aX_1(s) + bX_2(s), \text{ with ROC containing } R_1 \cap R_2.}$$

نکته: ناحیه همگرایی نهایی مربوط به ترکیب خطی دو سیگنال بایستی شامل $R_1 \cap R_2$ باشد (شاید بزرگتر)

مثال ۵) توسعهٔ ناحیهٔ همگرایی در اثر ترکیب خطی دو سیگنال

$$x(t) = x_1(t) - x_2(t),$$

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \Re e\{s\} > -1, \quad \& \quad X_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \Re e\{s\} > -1.$$

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2}. \quad \Re e\{s\} > -2.$$

۲. انتقال زمانی Time Shifting

If $\quad x(t) \overset{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} X(s), \quad$ with ROC $= R$,

then $\quad \boxed{x(t-t_0) \overset{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} e^{-st_0}X(s), \quad \text{with ROC} = R.}$

Shifting in the s-Domain ۳. انتقال در حوزهٔ فرکانس

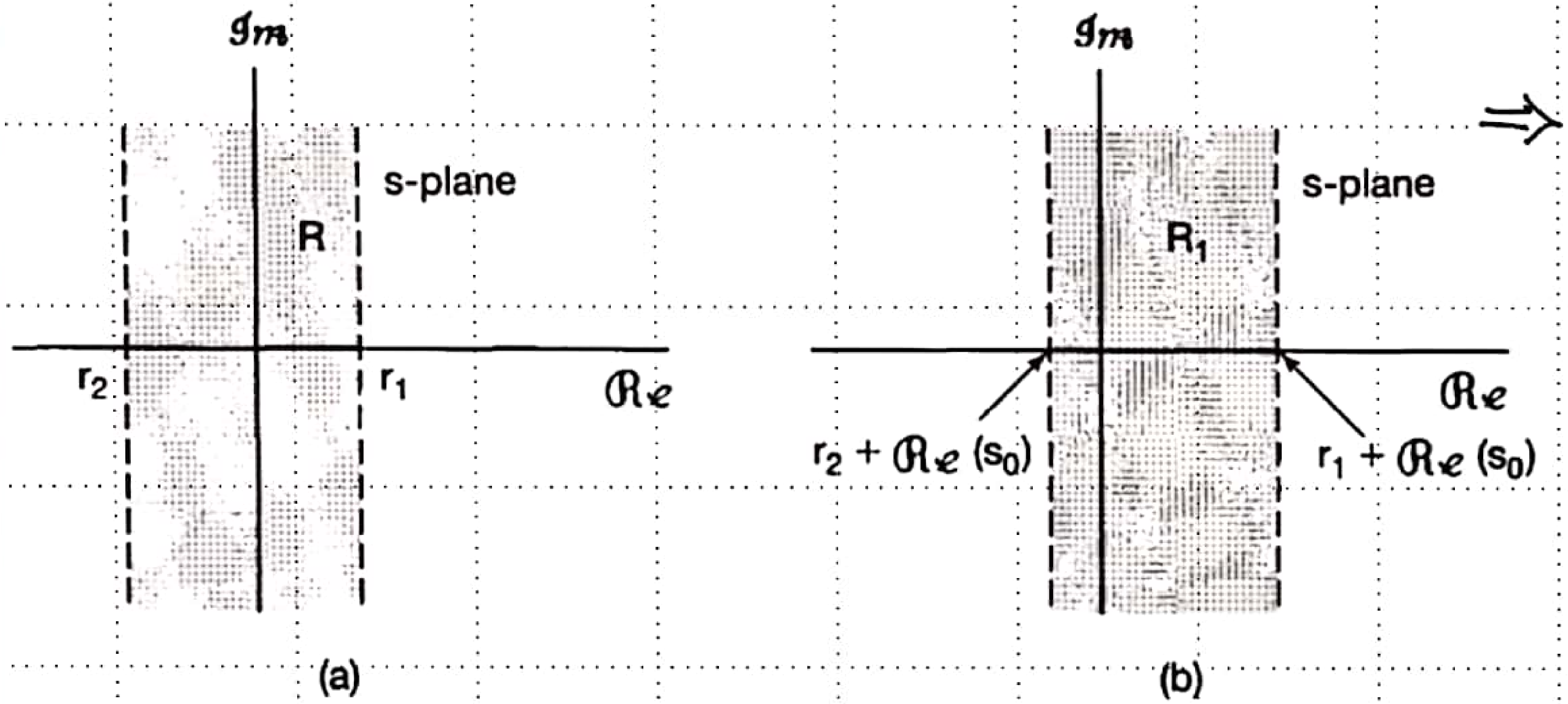
If $\quad x(t) \stackrel{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} X(s), \quad$ with ROC $= R,$

$r_2 < Re\{s\} < r_1$

then $\quad \boxed{e^{s_0 t} x(t) \stackrel{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} X(s - s_0), \quad \text{with ROC} = R + \mathcal{R}e\{s_0\}.}$

$\Rightarrow r_2 < Re\{s - s_0\} < r_1$

$\Rightarrow r_2 + Re\{s_0\} < Re\{s\} < r_1 + Re\{s_0\}$



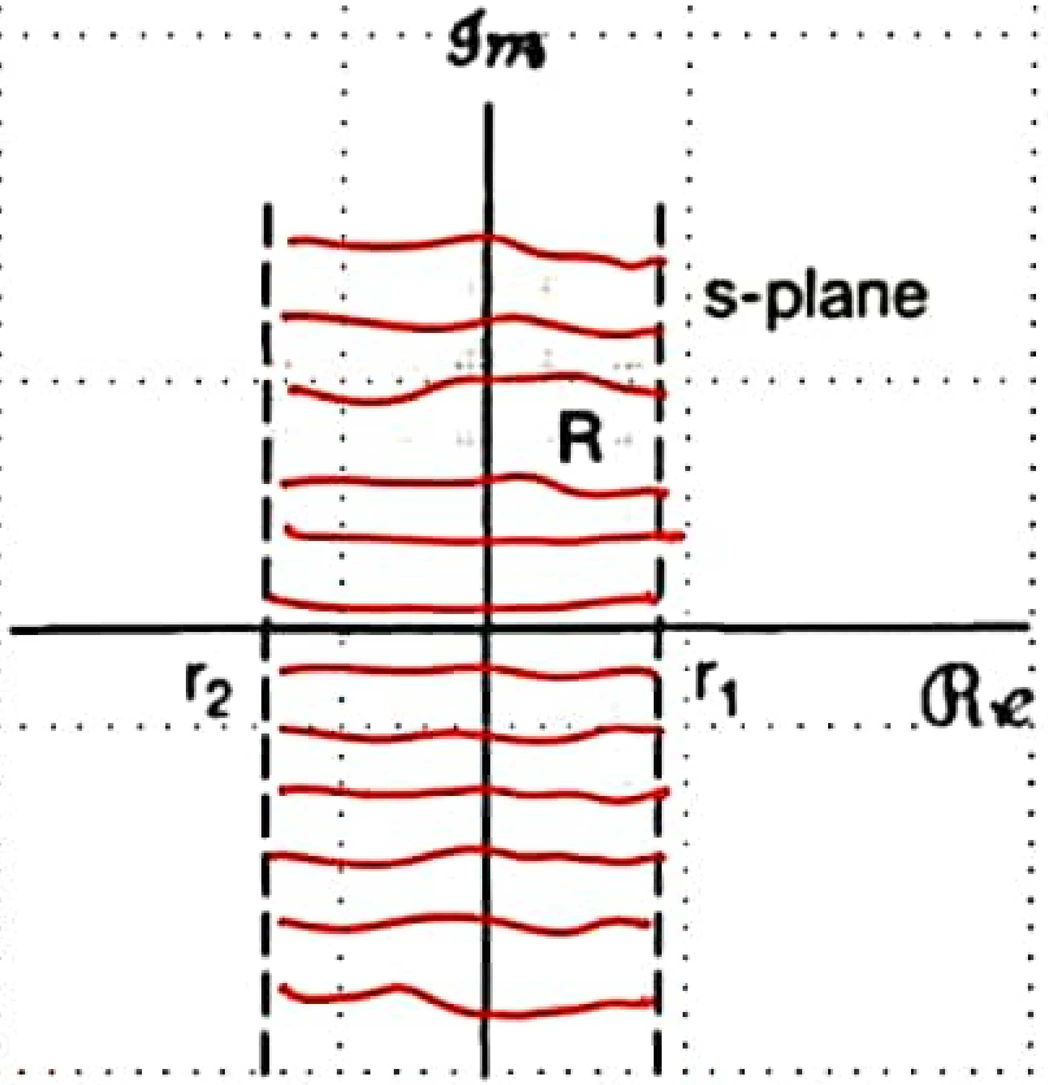
۴. تغییر مقیاس زمانی Time Scaling

If $\quad x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s), \quad$ with ROC $= R,$

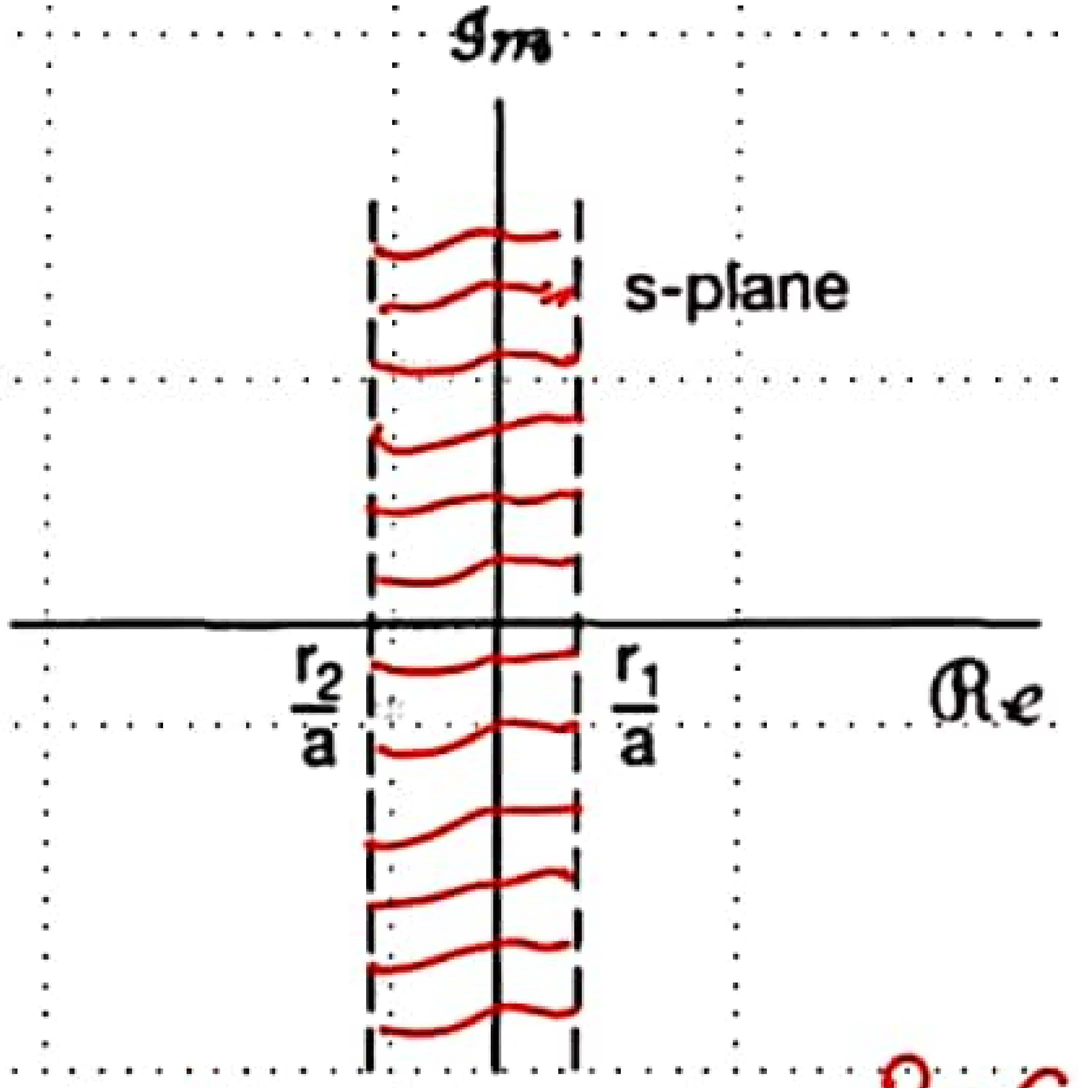
$r_۲ < Re\{s\} < r_۱$

then $\boxed{x(at) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right), \quad \text{with ROC } R_1 = aR.}$

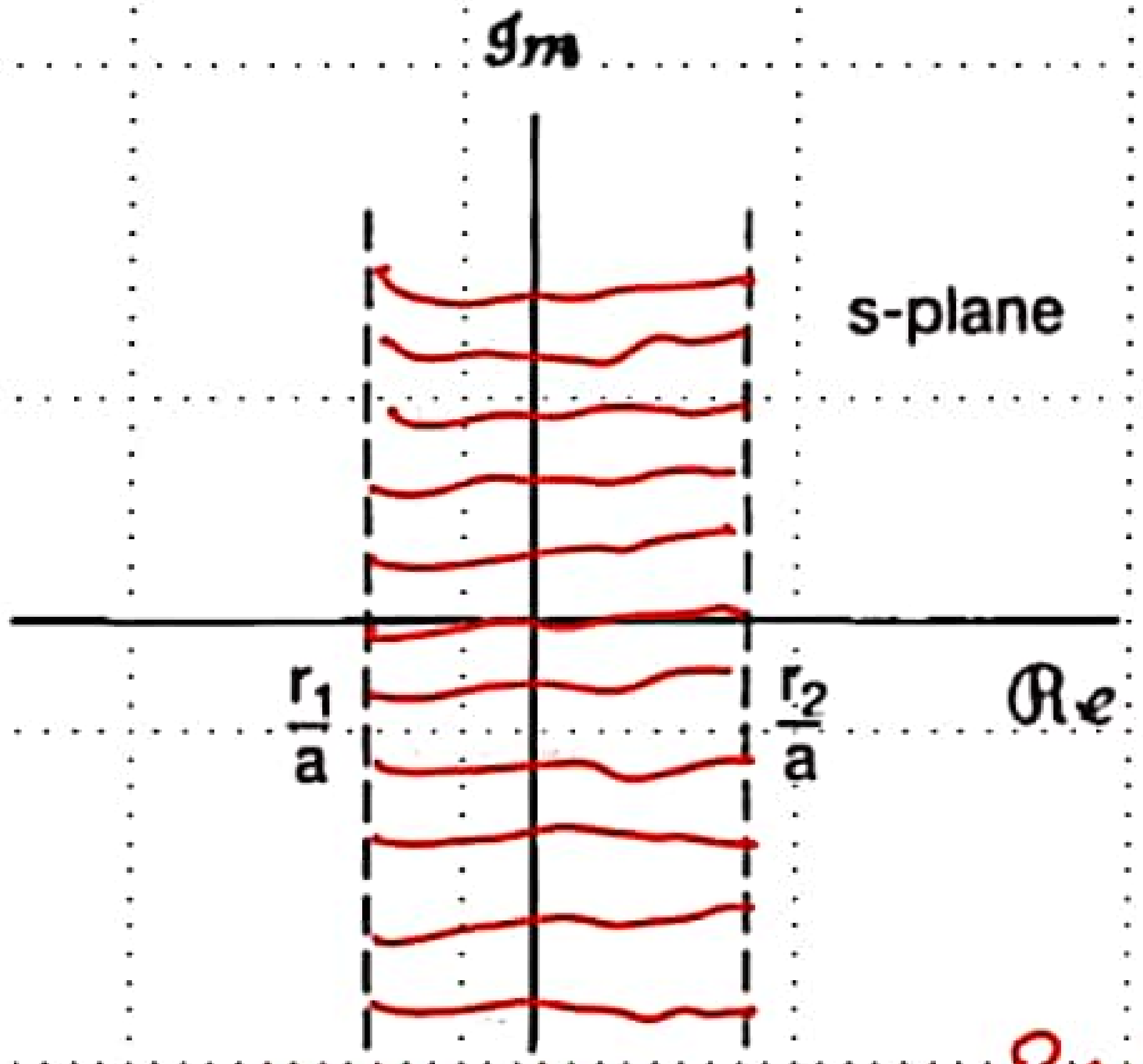
$\Rightarrow \quad r_۲ < Re\{as\} < r_۱$



X(S) مربوط به ROC



$a > 1$ ROC جدید



$-1 < a < 0$ ROC جدید

Conjugation ۵. مزدوج گیری

If $x(t) \overset{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$, with ROC $= R$,

then $\boxed{x^*(t) \overset{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} X^*(s^*), \quad \text{with ROC} = R.}$

Therefore, $X(s) = X^*(s^*)$ when $x(t)$ is real.

Convolution Property ۶. خاصیت کانولوشن

If $x_1(t) \overset{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} X_1(s)$, with $ROC = R_1$,

and $x_2(t) \overset{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} X_2(s)$, with $ROC = R_2$, then $\boxed{x_1(t) * x_2(t) \stackrel{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} X_1(s)X_2(s), \quad \text{with ROC containing } R_1 \cap R_2.}$

$$\mathcal{L}\{x_1(t) * x_2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\lambda)\, x_2(t-\lambda)\, d\lambda \right] e^{-st}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(\underbrace{t-\lambda}_{\tau})\, e^{-s\underbrace{(t-\lambda)}_{\tau}}\, dt \right] e^{-s\lambda}\, d\lambda$$

$$= X_2(s) \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\lambda)\, e^{-s\lambda}\, d\lambda = X_1(s)\, X_2(s)$$

نکته: ناحیهٔ همگرایی نهایی مربوط به کانولوشن دو سیگنال بایستی شامل $R_1 \cap R_2$ باشد (شاید بزرگتر)

For example, if $X_1(s) = \dfrac{s+1}{s+2}, \quad \Re e\{s\} > -2,$ and $X_2(s) = \dfrac{s+2}{s+1}, \quad \Re e\{s\} > -1,$

then $X_1(s)X_2(s) = 1$, and its ROC is the entire s-plane.

Differentiation in the Time Domain ۷. مشتق گیری در حوزه زمان

If $\quad x(t) \overset{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} X(s), \quad$ with ROC $= R$,

then $\boxed{\dfrac{dx(t)}{dt} \overset{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} sX(s), \qquad \text{with ROC containing } R.}$

Specifically, let $\quad x(t) = \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds.$

Then $$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} sX(s)e^{st}ds.$$

Consequently, $dx(t)/dt$ is the inverse Laplace transform of $sX(s)$.

نکته: ناحیهٔ همگرایی نهایی مربوط به مشتق یک سیگنال بایستی شامل ناحیهٔ همگرایی آن سیگنال باشد (شاید بزرگتر)

if $x(t) = u(t)$, then $X(s) = 1/s$, with an ROC that is $\Re e\{s\} > 0$.

The derivative of $x(t)$ is an impulse with an associated Laplace transform that is unity and an ROC that is the entire s-plane.

Differentiation in the s-Domain ۸. مشتق گیری در حوزه فرکانس

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt,$$

Differentiating both sides of the Laplace transform equation we obtain

$$\frac{dX(s)}{ds} = \int_{-\infty}^{+\infty} (-t)x(t)e^{-st}dt.$$

Consequently, if $x(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$, with ROC $= R$,

then

$$\boxed{-tx(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{dX(s)}{ds}, \qquad \text{with ROC} = R.}$$

$x(t) = te^{-at}u(t).$ $X(s) = ?$, $ROC = ?$ (مثال

Since $e^{-at}u(t) \overset{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{s+a}, \qquad \mathcal{R}e\{s\} > -a,$

$$te^{-at}u(t) \overset{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s+a}\right] = \frac{1}{(s+a)^2}, \qquad \mathcal{R}e\{s\} > -a.$$

$$\frac{t^2}{2}e^{-at}u(t) \overset{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(s+a)^3}, \qquad \mathcal{R}e\{s\} > -a,$$

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t) \overset{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(s+a)^n}, \qquad \mathcal{R}e\{s\} > -a.$$

Integration in the Time Domain ۹. انتگرال گیری در حوزه زمان

If $\quad x(t) \overset{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} X(s), \quad$ with ROC $= R,$

then $\quad \boxed{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \overset{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s}X(s), \text{ with ROC containing } R \cap \{\Re e\{s\} > 0\}.}$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = u(t) * x(t). \qquad u(t) \overset{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s}, \qquad \Re e\{s\} > 0,$$

from the convolution property, $\quad u(t) * x(t) \overset{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s}X(s),$

with an ROC that contains the intersection of the ROC of $X(s)$ and the ROC of the Laplace

transform of $u(t)$ i.e., $\Re e\{s\} > 0,$

The Initial- and Final-Value Theorems ۱۰. قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی

Under the specific constraints that $x(t) = 0$ for $t < 0$ and that $x(t)$ contains no impulses or higher order singularities at the origin, one can directly calculate, from the Laplace transform, the initial value $x(0^+)$—i.e., $x(t)$ as t approaches zero from positive values of t. Specifically the *initial-value theorem* states that

$$x(0^+) = \lim_{s \to \infty} sX(s),$$

Also, if $x(t) = 0$ for $t < 0$ and, in addition, $x(t)$ has a finite limit as $t \to \infty$, then the *final- value theorem* says that

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sX(s).$$

The derivation of these results is considered in Problem 9.53.

جدول خواص تبدیل لاپلاس

TABLE 9.1 PROPERTIES OF THE LAPLACE TRANSFORM

Section	Property	Signal	Laplace Transform	ROC
		$x(t)$	$X(s)$	R
		$x_1(t)$	$X_1(s)$	R_1
		$x_2(t)$	$X_2(s)$	R_2
9.5.1	Linearity	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$	At least $R_1 \cap R_2$
9.5.2	Time shifting	$x(t - t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$	R
9.5.3	Shifting in the s-Domain	$e^{s_0 t}x(t)$	$X(s - s_0)$	Shifted version of R (i.e., s is in the ROC if $s - s_0$ is in R)
9.5.4	Time scaling	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|}X\left(\frac{s}{a}\right)$	Scaled ROC (i.e., s is in the ROC if s/a is in R)
9.5.5	Conjugation	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R
9.5.6	Convolution	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	At least $R_1 \cap R_2$

9.5.7	Differentiation in the Time Domain	$\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s)$	At least R
9.5.8	Differentiation in the s-Domain	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	R
9.5.9	Integration in the Time Domain	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d(\tau)$	$\frac{1}{s}X(s)$	At least $R \cap \{\mathcal{R}e\{s\} > 0\}$

Initial- and Final-Value Theorems

9.5.10 If $x(t) = 0$ for $t < 0$ and $x(t)$ contains no impulses or higher-order singularities at $t = 0$, then

$$x(0^+) = \lim_{s \to \infty} sX(s)$$

If $x(t) = 0$ for $t < 0$ and $x(t)$ has a finite limit as $t \longrightarrow \infty$, then

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to \infty} sX(s)$$

جدول تبدیل لاپلاس‌های مهم

TABLE 9.2 LAPLACE TRANSFORMS OF ELEMENTARY FUNCTIONS

Transform pair	Signal	Transform	ROC
1	$\delta(t)$	1	All s
2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathcal{R}e\{s\} > 0$
3	$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathcal{R}e\{s\} < 0$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathcal{R}e\{s\} > 0$
5	$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathcal{R}e\{s\} < 0$

6	$e^{-\alpha t}u(t)$	$\dfrac{1}{s+\alpha}$	$\Re e\{s\} > -\alpha$
7	$-e^{-\alpha t}u(-t)$	$\dfrac{1}{s+\alpha}$	$\Re e\{s\} < -\alpha$
8	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t)$	$\dfrac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\Re e\{s\} > -\alpha$
9	$-\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(-t)$	$\dfrac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\Re e\{s\} < -\alpha$
10	$\delta(t-T)$	e^{-sT}	All s
11	$[\cos \omega_0 t]u(t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\Re e\{s\} > 0$
12	$[\sin \omega_0 t]u(t)$	$\dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\Re e\{s\} > 0$

13	$[e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t]u(t)$	$\dfrac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\mathcal{Re}\{s\} > -\alpha$
14	$[e^{-\alpha t}\sin\omega_0 t]u(t)$	$\dfrac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\mathcal{Re}\{s\} > -\alpha$
15	$u_n(t) = \dfrac{d^n\delta(t)}{dt^n}$	s^n	All s
16	$u_{-n}(t) = \underbrace{u(t) * \cdots * u(t)}_{n \text{ times}}$	$\dfrac{1}{s^n}$	$\mathcal{Re}\{s\} > 0$

the basic inverse Laplace transform equation: تبدیل لاپلاس معکوس

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} \, ds. \qquad (1)$$

This equation states that $x(t)$ can be represented as a weighted integral of complex exponentials.

The contour of integration in eq. (1) is the straight line in the s-plane corresponding to all points s satisfying $\Re e\{s\} = \sigma$. This line is parallel to the $j\omega$-axis. Furthermore, we can choose any such line in the ROC—i.e., we can choose any value of σ such that $X(\sigma + j\omega)$ converges.

تبدیل لاپلاس معکوس کسرهای گویا

However, for the class of rational transforms, the inverse Laplace transform can be determined using the technique of partial-fraction expansion

Basically, the procedure consists of expanding the rational algebraic expression into a linear combination of lower order terms.

روش گسترش به کسرهای جزئی

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k s^{m-k}}{\sum_{k=0}^{n} a_k s^{n-k}}$$

$\deg\{N(s)\} = m$

$\deg\{D(s)\} = n$

اگر $m < n$ ، $X(s)$ را یک کسر مناسب می‌نامیم.

اگر $m \geq n$ ، $X(S)$ یک کسر نامناسب است و با تقسیم $N(S)$ بر $D(S)$ داریم:

$$X(S) = \frac{N(S)}{D(S)} = \underbrace{Q(S)}_{\text{خارج قسمت}} + \underbrace{\frac{R(S)}{D(S)}}_{\text{باقیمانده}} \quad , \quad \deg\{R(S)\} < \deg\{D(S)\}$$

$$\deg\{Q(S)\} = m-n \geq 0 \quad \Rightarrow \quad Q(S) = \sum_{K=0}^{m-n} C_K \, S^{m-n-K}$$

$q(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Q(S)\}$ شامل ترکیبی از ضربه واحد و مشتقات آن است.

$\frac{R(S)}{D(S)}$ یک کسر مناسب است. در ادامه فرض می‌کنیم $X(S) = \frac{N(S)}{D(S)}$ یک کسر مناسب خواهد بود.

گسترش به کسرهای جزئی یک کسر مناسب

$$X(S) = \frac{N(S)}{D(S)}$$

حالت اول: قطب‌های $X(S)$ ساده (غیرتکراری) باشند.

$$X(S) = \frac{K\,N(S)}{(S-P_1)(S-P_2)\;\cdots\;(S-P_n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{S-P_i} \quad , \; ROC_X$$

ROC هرکدام از کسرهای جزئی بایستی با توجه به ROC داده شده برای $X(S)$ تعیین شود.

$$ROC_1 \cap \dots \cap ROC_n \subset ROC_X$$

P_i مانده نظیر قطب : $$A_i = (S-P_i)\,X(S)\Big|_{S=P_i}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A_i}{s-P_i}\right\} = \begin{cases} A_i e^{P_i t} u(t) , & Re\{s\} > Re\{P_i\} \\ -A_i e^{P_i t} u(-t) , & Re\{s\} < Re\{P_i\} \end{cases}$$

مثال)

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \qquad \mathcal{R}e\{s\} > -1.$$

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}.$$

$$\begin{cases} A = [(s+1)X(s)]|_{s=-1} = 1, \\ B = [(s+2)X(s)]|_{s=-2} = -1. \end{cases}$$

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}.$$

$$\underline{[e^{-t} - e^{-2t}]u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \qquad \mathcal{R}e\{s\} > -1.}$$

$$\begin{cases} e^{-t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{s+1}, & \mathcal{R}e\{s\} > -1, \\ e^{-2t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{s+2}, & \mathcal{R}e\{s\} > -2. \end{cases}$$

$$X(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)},\quad \mathcal{R}e\{s\}<-2. \Longrightarrow X(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}.$$ مثال ۹)

$$\begin{cases} -e^{-t}u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{s+1}, & \mathcal{R}e\{s\}<-1, \\ -e^{-2t}u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{s+2}, & \mathcal{R}e\{s\}<-2, \end{cases}$$

$$x(t)=[-e^{-t}+e^{-2t}]u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(s+1)(s+2)},\quad \mathcal{R}e\{s\}<-2.$$

$$X(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)},\quad -2<\mathcal{R}e\{s\}<-1. \Longrightarrow X(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}.$$ مثال ۹)

$$\begin{cases} -e^{-t}u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{s+1}, & \mathcal{R}e\{s\}<-1, \\ e^{-2t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{s+2}, & \mathcal{R}e\{s\}>-2. \end{cases} \Longrightarrow x(t)=-e^{-t}u(-t)-e^{-2t}u(t)$$

حالت دوم : $X(s)$ قطب تکراری داشته باشد.

فرض : $X(s)$ فقط قطب تکراری P_1 را از مرتبهٔ n_1 دارد و سایر قطب‌های آن ساده‌اند.

$$X(s) = \frac{K\,N(s)}{(s-P_1)^{n_1}(s-P_2)\cdots(s-P_r)} \quad , \quad n_1 + r - 1 = n$$

$$= \sum_{i=2}^{r} \frac{A_i}{s-P_i} + \frac{B_1}{s-P_1} + \frac{B_2}{(s-P_1)^2} + \cdots + \frac{B_{n_1}}{(s-P_1)^{n_1}}$$

ماندهٔ نظیر قطب سادهٔ P_i : $A_i = (s-P_i)X(s)\Big|_{s=P_i}$

$2 \leq i \leq r$

$$B_{n_1} = (s-p_1)^{n_1} X(s)\Big|_{s=p_1}$$

$$B_{n_1-1} = \frac{d}{ds}\left[(s-p_1)^{n_1} X(s)\right]\Big|_{s=p_1}$$

$$\vdots$$

$$B_2 = \frac{1}{(n_1-2)!}\left(\frac{d}{ds}\right)^{n_1-2}\left[(s-p_1)^{n_1} X(s)\right]\Big|_{s=p_1}$$

$$B_1 = \frac{1}{(n_1-1)!}\left(\frac{d}{ds}\right)^{n_1-1}\left[(s-p_1)^{n_1} X(s)\right]\Big|_{s=p_1}$$

ماندهٔ نظیر قطب تکراری : p_1 از مرتبهٔ n_1

$$B_j = \frac{1}{(n_1-j)!}\left(\frac{d}{ds}\right)^{n_1-j}\left[(s-p_1)^{n_1} X(s)\right]\Big|_{s=p_1}$$

مثال)

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)^3(s+2)} \quad , \quad Re\{s\} > -1$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{A_1}{s+2} + \frac{B_1}{s+1} + \frac{B_2}{(s+1)^2} + \frac{B_3}{(s+1)^3}$$

$$A_1 = (s+2)X(s)\Big|_{s=-2} = -1$$

$$B_3 = (s+1)^3 X(s)\Big|_{s=-1} = \frac{1}{s+2}\Big|_{s=-1} = 1$$

$$B_2 = \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s+2}\right]\Big|_{s=-1} = \frac{-1}{(s+2)^2}\Big|_{s=-1} = -1$$

$$B_1 = \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{1}{s+2}\right]\Big|_{s=-1} = \frac{2}{(s+2)^3}\Big|_{s=-1} = 2$$

$$\Rightarrow X(s) = -\frac{1}{s+2} + \frac{2}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^3}, \quad Re\{s\} > -1$$

$$\Rightarrow x(t) = -e^{-2t}u(t) + 2e^{-t}u(t) - te^{-t}u(t) + \frac{t^2}{2}e^{-t}u(t)$$

$$\Rightarrow x(t) = \left[-e^{-2t} + \left(\frac{t^2}{2} - t + 2\right)e^{-t}\right]u(t)$$

بسم الله الرّحمن الرّحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده برق و کامپیوتر

تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مدرس: مسعود عمومی

جلسه سیزدهم _ بخش 9.7 کتاب

با سلام خدمت دانشجویان محترم

تحلیل و توصیف سیستم‌های LTI به کمک تبدیل لاپلاس

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$X(s) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow Y(s) = X(s).H(s) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st}dt$$ with s in the ROC of $H(s)$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad \Rightarrow \quad h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$$

$H(s)$ is commonly referred to as the *system function* تابع سیستم

or, alternatively, the *transfer function.* تابع انتقال

Scanned by CamScanner

خواص سیستم‌های LTI بر اساس تابع سیستم آنها

Many properties of LTI systems can be closely associated with the characteristics of the *system function* in the *s*-plane.

۱. علیّت

For a causal LTI system, the impulse response is zero for $t < 0$ and thus is right sided.

The ROC associated with the system function for a causal system is a right-half plane.

پاسخ ضربه سیستم‌های LTI علّی، سیگنال سمت راستی است. در نتیجه ناحیهٔ همگرایی تابع سیستم آنها هم نیم صفحه‌ای سمت راستی است. (شرط لازم علّی بودن)

مثال)

$h(t) = e^{-t}u(t).$ (سیستم علّی است) $\Longrightarrow$ $H(s) = \dfrac{1}{s+1},\qquad \Re e\{s\} > -1.$

Since $h(t) = 0$ for $t < 0$, this system is causal.

$h(t) = e^{-|t|}.$ (سیستم غیرعلّی است) $\Longrightarrow$ $H(s) = \dfrac{-2}{s^2-1},\qquad -1 < \Re e\{s\} < +1.$

Since $h(t) \neq 0$ for $t < 0$, this system is not causal.

نکته: سمت راستی بودن ROC تابع سیستم، شرط کافی برای علّی بودن آن سیستم نیست.

مثال)

$$H(s) = \frac{e^s}{s+1},\qquad \Re e\{s\} > -1.$$

$$e^{-(t+1)}u(t+1) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{e^s}{s+1},\qquad \Re e\{s\} > -1, \quad \Longrightarrow \quad h(t) = e^{-(t+1)}u(t+1),$$

which is nonzero for $-1 < t < 0$. Hence, the system is not causal.

نکته: در سیستمهای LTI توصیف شده توسط معادلات دیفرانسیل خطی با ضرائب ثابت، تابع سیستم $H(s)$ یک کسر گویاست و شرط لازم و کافی برای علّی بودن آن آن است که ROC آن سمت راستی (از چپ محدود به قطب با بزرگترین مقدار حقیقی) باشد.

سیستم‌های ضدعلّی (Anticausal) و شرایط آن

In an exactly analogous manner, we can deal with the concept of anticausality. A system is *anticausal* if its impulse response $h(t) = 0$ for $t > 0$. Since in that case $h(t)$ would be left sided, we know from Section 9.2 that the ROC of the system function $H(s)$ would have to be a left-half plane. Again, in general, the converse is not true. That is, if the ROC of $H(s)$ is a left-half plane, all we know is that $h(t)$ is left sided. However, if $H(s)$ is rational, then having an ROC to the left of the leftmost pole is equivalent to the system being anticausal.

مثال)

$$H(s) = \frac{1}{s+2}, \quad Re\{s\} < -2 \Rightarrow h(t) = -e^{-2t}u(-t)$$

$h(t) = 0 \quad , \forall t > 0 \Rightarrow$ سیستم ضدّ علّی است.

۲. پایداری

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$$

An LTI system is stable if and only if the ROC of its system function H(s) includes the entire $j\omega$-axis [i.e., $\mathcal{R}e\{s\} = 0$].

شرط لازم و کافی پایداری یک سیستم LTI، آن است که ROC تابع $H(s)$ آن دربرگیرندهٔ محور $j\omega$ در صفحهٔ s باشد.

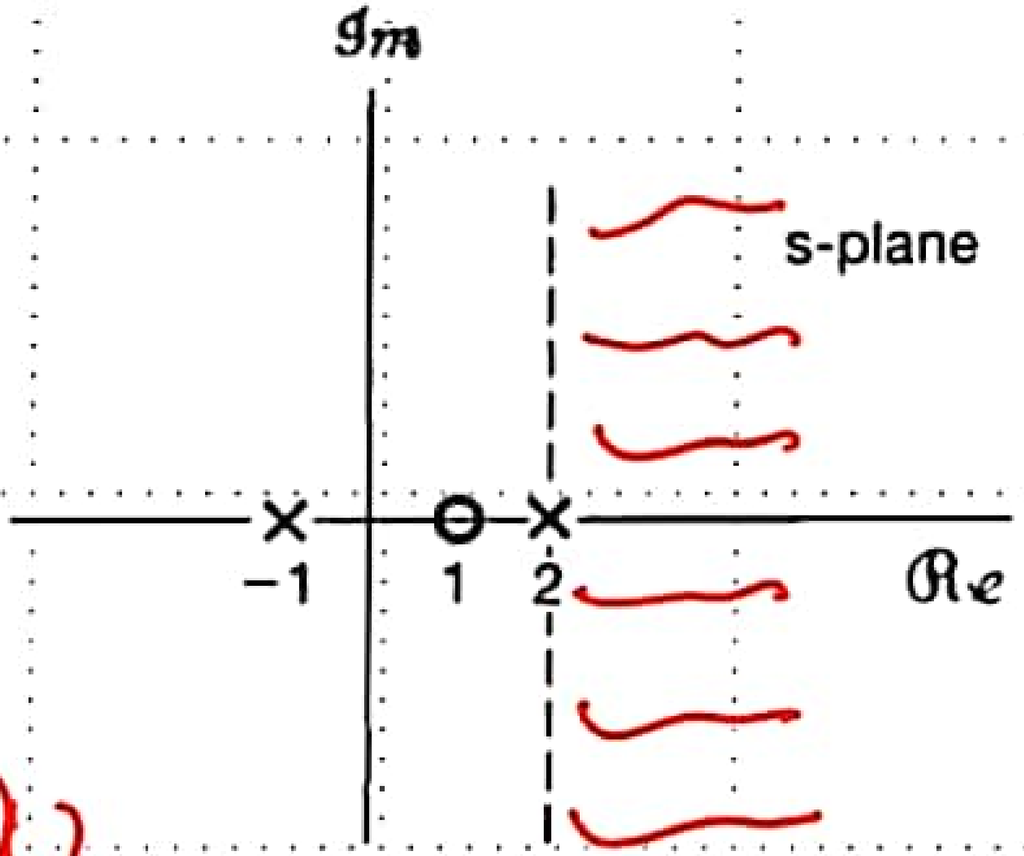
مثال:

$$H(S)=\frac{S-1}{(S+1)(S-2)}=\frac{2/3}{S+1}+\frac{1/3}{S-2}$$

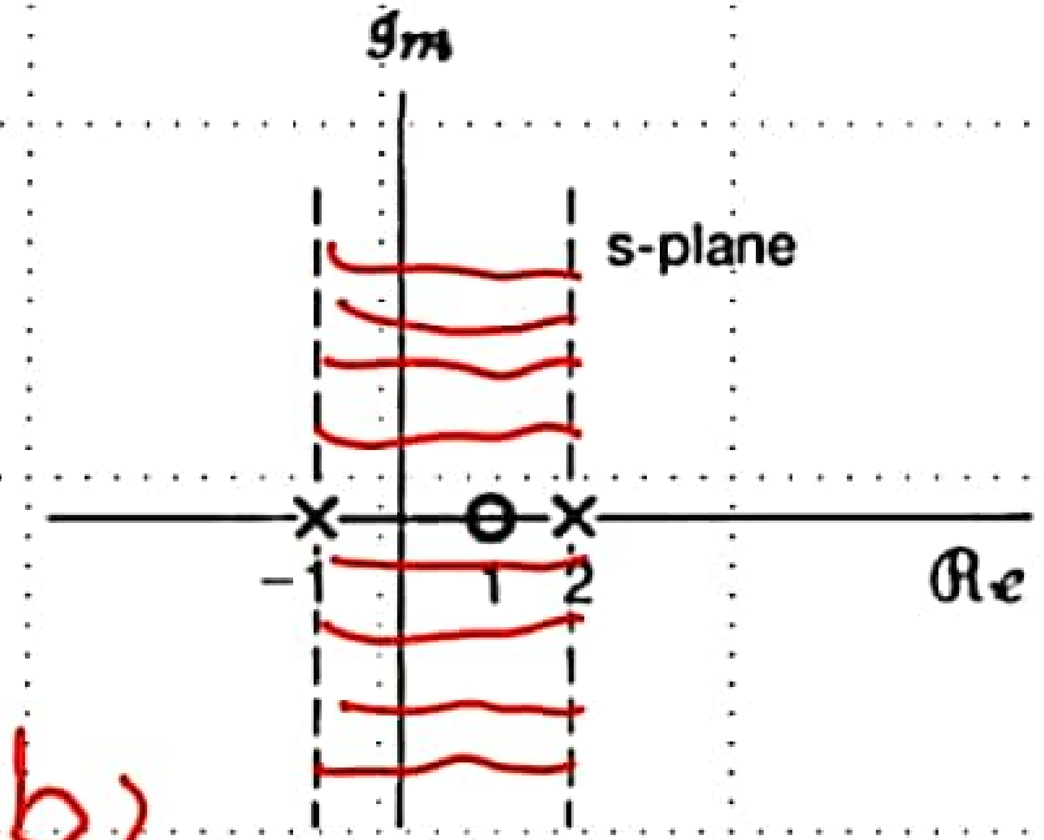
a) اگر $Re\{S\}>2 \Rightarrow h(t)=\left(\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t}\right)u(t) \Rightarrow$ سیستم علّی و ناپایدار

b) اگر $-1<Re\{S\}<2 \Rightarrow h(t)=\frac{2}{3}e^{-t}u(t)-\frac{1}{3}e^{2t}u(-t) \Rightarrow$ " غیرعلّی و پایدار

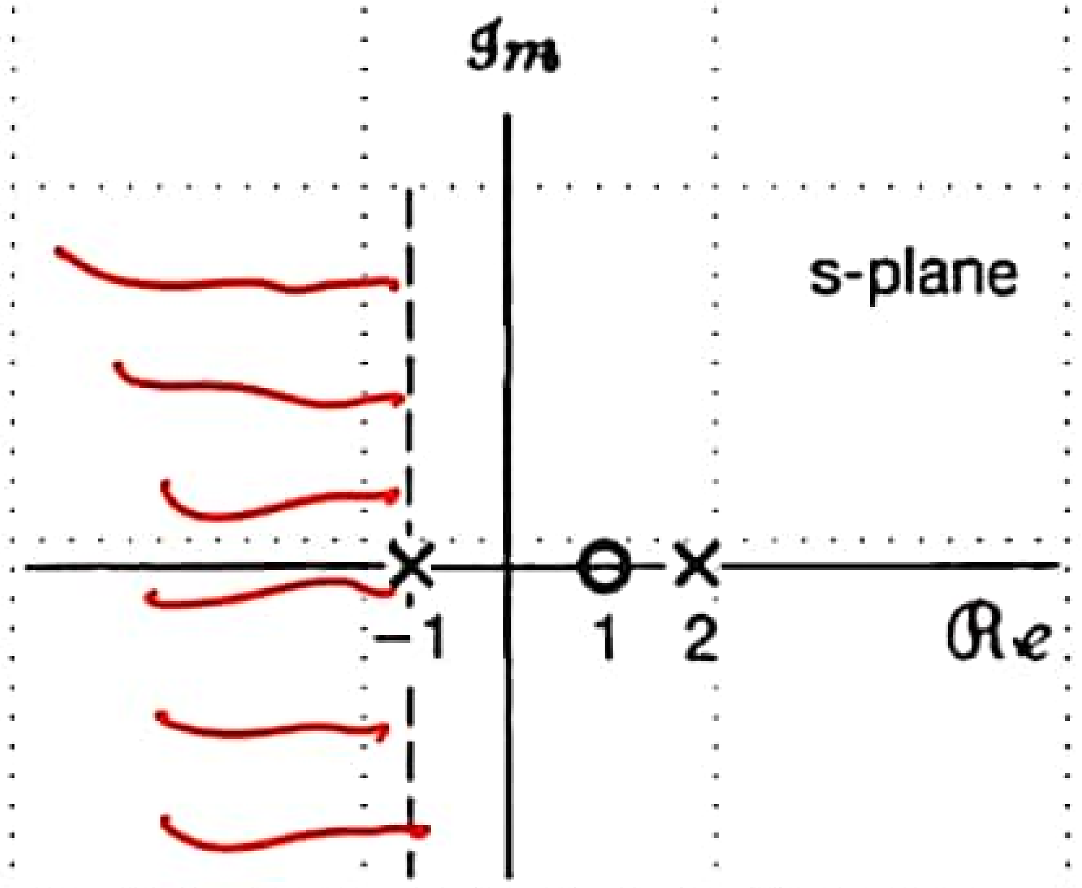
c) اگر $Re\{S\}<-1 \Rightarrow h(t)=-\left(\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t}\right)u(-t) \Rightarrow$ " ضدعلّی و ناپایدار



(a)



(b)



شرط پایداری برای سیستمهای LTI علّی با تابع سیستم $H(s)$ به صورت کسر گویا

For one particular and very important class of systems, stability can be characterized very simply in terms of the locations of the poles. Specifically, consider a causal LTI system with a rational system function $H(s)$. Since the system is causal, the ROC is to the right of the rightmost pole. Consequently, for this system to be stable (i.e., for the ROC to include the $j\omega$-axis), the rightmost pole of $H(s)$ must be to the *left* of the $j\omega$-axis. That is,

> A causal system with rational system function $H(s)$ is stable if and only if all of the poles of $H(s)$ lie in the left-half of the s-plane—i.e., all of the poles have negative real parts.

همهٔ قطب های $H(S)$ بایستی دارای بخش حقیقی منفی باشند (در نیم صفحهٔ چپ صفحهٔ S واقع شده باشند)

مثال) علّی و پایدار

$$H(s)=\frac{1}{s+1}\ , \ Re\{s\}>-1 \Rightarrow h(t)=e^{-t}u(t)$$

علّی و ناپایدار

$$H(s)=\frac{1}{s-1}\ , \ Re\{s\}>1 \Rightarrow h(t)=e^{t}u(t)$$

$$H(s)=\frac{1}{s^{2}-2s+2}\ , \quad Re\{s\}>1$$

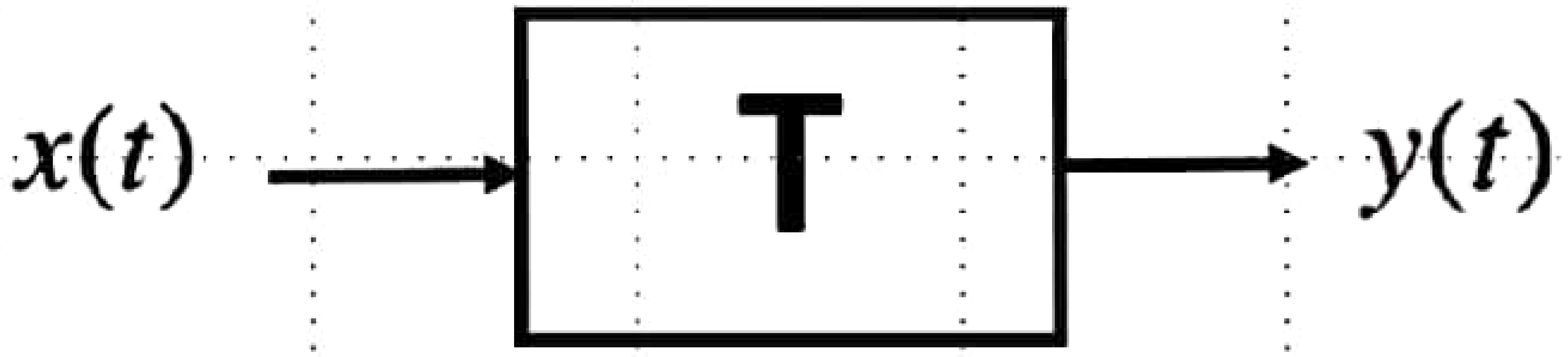
$$H(s)=\frac{1}{(s-1)^{2}+1}\ ,$$

قطب‌ها : $P_1, P_2 = 1 \pm j$

$$\Rightarrow h(t)=e^{t}(\sin t)u(t)$$

علّی و ناپایدار

تابع سیستم در سیستم‌های LTI توصیف‌شده توسط معادلات دیفرانسیل خطی با ضرائب ثابت



$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}. \xRightarrow{\mathcal{L}} \left(\sum_{k=0}^{N} a_k s^k\right) Y(s) = \left(\sum_{k=0}^{M} b_k s^k\right) X(s),$$

$$\Rightarrow \quad H(s) = \frac{\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k\right\}}{\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k\right\}} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

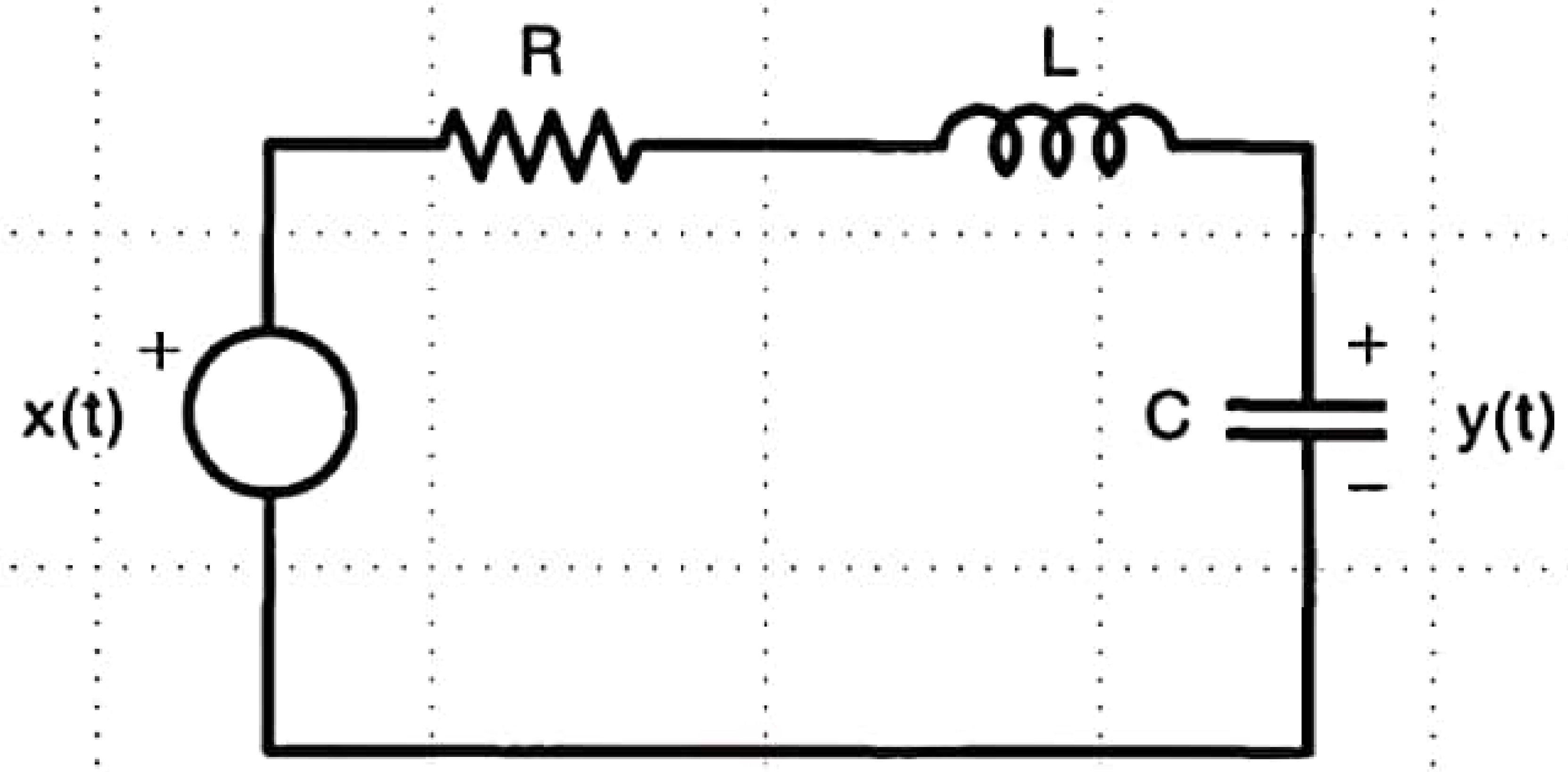
$$\sum_{k=0}^{M} b_k s^k = 0 \quad \Rightarrow \quad H(S)$$ صفرهای

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s^k = 0. \quad \Rightarrow \quad H(S)$$ قطب‌های

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st}dt \qquad h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$$

معادلهٔ دیفرانسیل توصیف کنندهٔ سیستم و در نتیجه تابع $H(S)$ به تنهایی اطلاعاتی در مورد ناحیهٔ همگرایی نمی دهد. براساس ویژگیهای علّی / غیرعلّی / ضدعلّی و پایدار / ناپایدار بودن سیستم می توان ROC را تعیین کرده و پاسخ ضربهٔ $h(t)$ را به دست آورد.

مثال)



A series *RLC* circuit.

$$RC\frac{dy(t)}{dt} + LC\frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t) = x(t).$$

$$H(s) = \frac{1/LC}{s^2 + (R/L)s + (1/LC)}.$$

مثال)

Suppose we know that if the input to an LTI system is $x(t) = e^{-3t}u(t)$,

then the output is $y(t) = [e^{-t} - e^{-2t}]u(t)$.

Taking Laplace transforms of $x(t)$ and $y(t)$, we get

$$X(s) = \frac{1}{s+3}, \quad \Re e\{s\} > -3, \quad \text{and} \quad Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \Re e\{s\} > -1.$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2}.$$

$ROC = ?$

Furthermore, we can also determine the ROC for this system. In particular, we know from the convolution property set forth in Section 9.5.6 that the ROC of $Y(s)$ must include at least the intersections of the ROCs of $X(s)$ and $H(s)$. Examining the three possible choices for the ROC of $H(s)$ (i.e., to the left of the pole at $s = -2$, between the poles at -2 and -1, and to the right of the pole at $s = -1$), we see that the only choice that is consistent with the ROCs of $X(s)$ and $Y(s)$ is $\Re e\{s\} > -1$. Since this is to the right of the rightmost pole of $H(s)$, we conclude that $H(s)$ is causal, and since both poles of $H(s)$ have negative real parts, it follows that the system is stable. Moreover, from the relationship between eqs. (9.131) and (9.133), we can specify the differential equation that, together with the condition of initial rest, characterizes the system:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t).$$

$ROC_H : Re\{s\} > -1 \ , \ Re\{P_1\} < 0 , Re\{P_2\} < 0 \Rightarrow$ سیستم علّی و پایدار است.

Suppose that we are given the following information about an LTI system: مثال)

1. The system is causal.
2. The system function is rational and has only two poles, at $s = -2$ and $s = 4$.
3. If $x(t) = 1$, then $y(t) = 0$.
4. The value of the impulse response at $t = 0^+$ is 4.

From this information we would like to determine the system function of the system.

حل:

From the first two facts, we know that the system is unstable (since it is causal and has a pole at $s = 4$ with positive real part) and that the system function is of the form

$$H(s) = \frac{p(s)}{(s+2)(s-4)} = \frac{p(s)}{s^2 - 2s - 8},$$

where $p(s)$ is a polynomial in s.

Because the response $y(t)$ to the input $x(t) = 1 = e^{0 \cdot t}$ must equal $H(0) \cdot e^{0 \cdot t} = H(0)$, we conclude, from fact 3, that $p(0) = 0$—i.e., that $p(s)$ must have a root at $s = 0$ and thus is of the form $p(s) = sq(s)$,

where $q(s)$ is another polynomial in s.

Finally, from fact 4 and the initial-value theorem we see that $\lim_{s \to \infty} sH(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{s^2 q(s)}{s^2 - 2s - 8} = 4$.

thus $q(s)$ must be constant—i.e., $q(s) = K$. We can evaluate this constant by evaluating

$\lim_{s \to \infty} \frac{Ks^2}{s^2 - 2s - 8} = \lim_{s \to \infty} \frac{Ks^2}{s^2} = K.$ we see that $K = 4$, and thus,

$$H(s) = \frac{4s}{(s+2)(s-4)}.$$