تکلیف ۴ نظریه بازی‌ها   حدیث غفوری ۹۸۲۵۴۱۳

سوال ۶

۴ تا ایالت داریم A, B, C, D

$n_A = 12,\ n_B = 4,\ n_C = 8,\ n_D = 8$

ائتلاف دو ایالت i و j $\rightarrow \frac{5}{4}(n_i + n_j)$

ائتلاف ۳ ایالت i و j و k $\rightarrow \frac{9}{8}(n_i + n_j + n_k)$

ائتلاف ۴ ایالت $\rightarrow 43$

الف) آیا ائتلاف فراگیر ایجاد

برای سود حاصل از ائتلاف‌های مختلف G

سود ائتلاف‌های دو نفره G

$$(A,B) = \frac{5}{4}(n_A + n_B) = \frac{5}{\cancel{4}} \times \cancel{16}^{4} = \boxed{20}$$

$$(A,C) = \frac{5}{4} \times (n_A + n_C) = \frac{5}{\cancel{4}} \times \cancel{20}^{5} = \boxed{25}$$

$$(B,C) = \frac{5}{\cancel{4}} \times (\cancel{4+8}) = \boxed{15} \qquad (A,D) = \frac{5}{\cancel{4}} \times (\cancel{12+8}) = \boxed{25}$$

$$(B,D) = \frac{5}{\cancel{4}} \times (\cancel{4+8}) = \boxed{15} \qquad (C,D) = \frac{5}{\cancel{4}} \times (\cancel{8+8}) = \boxed{20}$$

سود ائتلاف‌های ۳ نفره G

$$(A,B,C) = \frac{9}{\cancel{8}}(\cancel{12+4+8}) = \boxed{27}$$

$$(A,B,D) = \frac{9}{8}(\cancel{12+4+8}) = \boxed{27}$$

$$(B,C,D) = \frac{9}{8}(\cancel{4+8+8}) = \boxed{22.5}$$

$$(A,C,D) = \frac{9}{\cancel{8}}(\cancel{12+8+8}) = \boxed{31.5}$$

$$(A,B,C,D) = 43$$ ← تنها یک ائتلاف ۴ نفره می‌تواند شکل بگیرد

می‌دانیم که اگر بازی چسبنده نباشد ← ائتلاف بزرگ قابل شکل‌گیری نیست ← باید چک کنیم که چسبندگی داریم یا نه. تعریف چسبندگی: یک بازی ائتلافی با سود قابل انتقال را چسبنده می‌گوییم اگر برای هر افراز $S_1, S_2, \dots, S_k$ از مجموعه بازیکنان (N) G

$$v(N) \geq \sum_{k=1} v(S_k)$$

۵

به عنوان مثال ۵ اگر ائتلاف به شکل زیر ایجاد بشه ؟

$\{\{A,D\},\{B,C\}\}$

$$\sum_{K=1}^{2} v(S_K) = \underbrace{\cancel{v(S_1)}}_{25} + \underbrace{\cancel{v(S_2)}}_{15} = 40 \Rightarrow 40 \neq 32 \rightarrow$$

بازی چسبنده نیست ←

و

$v(N) = 32$

ائتلاف بزرگ یا فراگیر نداریم.

با چه تفسیری ارزش ائتلاف فراگیر بالا می‌رود ؟

باید max ـ ارزشی که از ائتلاف‌های ممکن ایجاد شده را پیدا کنیم و ارزش ائتلاف فراگیر را از آن مقدار کم کنیم ←

همه‌ی ائتلاف‌هایی که می‌توانند ایجاد شوند ؟

1. $\{\{A\},\{B\},\{C\},\{D\}\} \Rightarrow$

ارزش حاصل از این ائتلاف $= \sum_{K=1}^{4} v(S_K) = v(S_1)+v(S_2)+v(S_3)+v(S_4) = 12+4+8+8 = \boxed{32}$

2. $\{\{A,B\},\{C,D\}\} \Rightarrow$

ارزش این ائتلاف ؟ $\sum_{K=1}^{2} v(S_K) = v(S_1)+v(S_2) = 20+20 = \boxed{40}$

3. $\{\{A,C\},\{B,D\}\} \Rightarrow$

ارزش این ائتلاف ؟ $\sum_{K=1}^{2} v(S_K) = v(S_1)+v(S_2) = 25+15 = \boxed{40}$

4. $\{\{A,D\},\{B,C\}\} \Rightarrow$

$$\sum_{K=1}^{2} v(S_K) = v(S_1)+v(S_2) = 25+15 = \boxed{40}$$

5. $\{\{A,B,C\},\{D\}\} \Rightarrow$

$$\sum_{K=1}^{2} v(S_K) = 27+8 = \boxed{35}$$

6. $\{\{A,B,D\},\{C\}\} \Rightarrow \sum_{K=1}^{2} v(S_K) = 27+8 = \boxed{35}$

7. $\{\{A,C,D\},\{B\}\} \Rightarrow \sum_{K=1}^{2} v(S_K) = 31.5+4 = \boxed{35.5}$

8. $\{\{B,C,D\},\{A\}\} \Rightarrow \sum_{K=1}^{2} v(S_K) = 22.5+12 = \boxed{34.5}$

2 از بین تمام ائتلاف‌هایی که می‌توانند تشکیل بشن max ـ ارزش ۴۰ است ←

نور اتلاف فداکاری باید از ۳ و ۵ یک مقداری یعنی از $\boxed{40}$ تقسیم کند تا اتلاف فداکاری نشود.

قبلی به اندازه‌ی $\boxed{4}$ سهم می‌شوند اپسیلون

ب) اگر نور کل دقیقاً به نسبت نرخ‌های افراد تقسیم شود، چه افرادی پایدار هستند؟

① $\{A,B\}$ نور حاصل ۲۰ ، $nA = 12,\ nB = 4 \rightarrow$ نور به نسبت ۳ به ۱ تقسیم شود ←

$\boxed{(15,5)}$ بردار تقسیم

② $\{A,C\}$ نور حاصل ۲۵ ، $nA = 12,\ nC = 8 \rightarrow \frac{\cancel{12}^{3}}{\cancel{8}_{2}} = \boxed{\frac{3}{2}}$

به نسبت ۳ به ۲ نور تقسیم می‌شود ← $\cancel{\frac{25}{5}} \times 2 = 10$ و $\cancel{\frac{25}{5}} \times 3 = 15$

$$\boxed{\{A,C\} = (15,10)}$$

③ $\{A,D\}$ نور حاصل ۲۵ و $nA = 12,\ nD = 8 \rightarrow \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

بردار تقسیم نور $\left(\frac{25}{5} \times 3,\ \frac{25}{5} \times 2\right) = \boxed{(15,10)}$

④ $\{B,C\} \Rightarrow$ نور حاصل ۱۵ ، $nB = 4,\ nC = 8 \rightarrow \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ←

بردار تقسیم نور $\left(\cancel{\frac{15}{3}} \times 1,\ \cancel{\frac{15}{3}} \times 2\right) = \boxed{(5,10)}$

⑤ $\{B,D\} \Rightarrow$ نور حاصل ۱۵ ، $nB = 4\quad nD = 8$ ، $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ←

بردار تقسیم نور $\left(\cancel{\frac{15}{3}} \times 1,\ \cancel{\frac{15}{3}} \times 2\right) = \boxed{(5,10)}$

⑥ $\{C,D\} \Rightarrow$ نور ۲۰ ، $nC = 8\quad nD = 8 \rightarrow \frac{8}{8} = 1$

بردار تقسیم نور $\left(\frac{20}{2} \times 1,\ \frac{20}{2} \times 1\right) = \boxed{(10,10)}$

⑦ $\{A,B,C\} \Rightarrow$ نور ۲۷ ، $nA = 12\quad nB = 4\quad nC = 8$

به ۶ تقسیم کنیم $(3,1,2)$ ←

$\left(\frac{27}{3+1+2} \times 3,\ \cancel{\frac{27}{6}}^{9} \times 1,\ \frac{27}{6} \times 2\right) =$

$$\boxed{(13.5,\ 4.5,\ 9)}$$

⑧ $\{A,B,D\}$ نور ۲۷ $= \boxed{(13.5,\ 4.5,\ 9)}$

مثل مورد ⑦ حساب می‌شود

(۹) {A, C, D} = ۲۰ . حاصل لو, B ۳۱/۵ $n_A = ۱۲$ $n_C = ۸$ $n_D = ۸$

نسبت A, C, D و B (۳, ۲, ۲) ← B $\left(\frac{۳۱/۵}{۳+۲+۲} \times ۳ , \frac{۳۱/۵}{۷} \times ۲ , \frac{۳۱/۵}{۷} \times ۲ \right) = \boxed{(۱۳/۵ , ۹ , ۹)}$ برابر تقسیم لو,

(۲۵) {B, C, D} حاصل لو, B ۲۲/۵

$n_B = ۴$ $n_C = ۸$ $n_D = ۸$

به نسبت (۱, ۲, ۲) تقسیم می‌کنیم ← لو, هر کدام B

$\left(\frac{۲۲/۵}{۵} \times ۱ , \frac{۲۲/۵}{۵} \times ۲ , \frac{۲۲/۵}{۵} \times ۲ \right) = \boxed{(۴/۵ , ۹ , ۹)}$

(۲۶) {A, B, C, D} => حاصل لو, B ۳۳

تقسیم (۱۲, ۴, ۸, ۸) → (۳, ۱, ۲, ۲)

$\left(\frac{۳۳}{\cancel{۳+۱+۲+۲}\ ۸} \times ۳ , \frac{۳۳}{۸} \times ۱ , \frac{۳۳}{۸} \times ۲ , \frac{۳۳}{۸} \times ۲ \right) = \boxed{(۱۲/۳۷۵ , ۴/۱۲۵ , ۸/۱۲۵ , ۸/۱۲۵)}$

(۱) {{A, B}, {C, D}}
(۲) {{A, D}, {B, C}}
(۳) {{A, C}, {B, D}}

افرازهای نیم پایدار هستند B
چرا که افراد تمایلی برای خروج از ائتلاف به تنهایی ندارند.

سوال ۲

الف) استراتژی پایدار تکاملی ESS چیست؟

		q X	$1-q$ Y
p	X	1,1	0,2
$1-p$	Y	2,0	-1,-1

تعادل نش خالص و متقارن نداریم (از بین گزینه‌های ممکن که (Y,Y) (-1,-1) و (X,X) (+1,+1) هستند چون باید تعادل نش‌ای که پیدا می‌کنیم متقارن باشد) هیچ کدام تعادل نش نیستند.

(Y,X), (X,Y)

دو تا تعادل نش بازی هستند و متقارن نیستند

اکشن‌های متقارن بازی B: (Y,Y), (X,X)

طبق تعریف ESS B در یک بازی متقارن دو نفره با استراتژی‌های آمیخته B

استراتژی α^* را یک ESS می‌گوییم اگر

1) (α^*, α^*) is N.E.

2) for all $\beta \in BR(\alpha^*)$, $\beta \neq \alpha^*$: $v(\beta,\beta) < v(\alpha^*,\beta)$

ابتدا NE های آمیخته متقارن را پیدا می‌کنیم

$u_1(p,q) = 1 \times p \times (q) + 0 + (1-p) \times 2 \times q + ((1-p)(1-q)) \times -1 =$

$pq + 2q - 2pq + (-1) + q + p - pq =$ $\quad 1-q-p+pq$

$\sim + p(-2q+1) = \rightarrow$

$-2p(q - \frac{1}{2})$

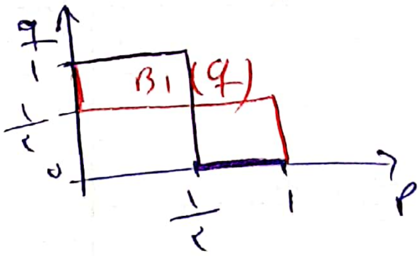
$$B_1(q) = \begin{cases} 0 & q > \frac{1}{2} \\ [0,1] & q = \frac{1}{2} \\ 1 & q < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$u_2(p,q) = pq + 2p(1-q) + 0 - 1(1-p)(1-q) =$ $\quad -1(1-p-q+pq)$

$pq + 2p - 2pq - 1 + p + q - pq =$

$\sim + q(-2p+1) = \sim + (-2q)(p - \frac{1}{2})$

$$B_2(p) = \begin{cases} 0 & p > \frac{1}{2} \\ [0,1] & p = \frac{1}{2} \\ 1 & p < \frac{1}{2} \end{cases}$$



$\alpha^* = ((p, 1-p), (q, 1-q)) =$
$((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$

$p = q$ چون تعادل نش آمیخته و متقارن

آیا α^* یک استراتژی تکاملی پایدار است؟

آیا برای هر β که عضو بهترین پاسخ α باشد $v(\beta,\beta) < v(\alpha^*,\beta)$ هست یا نه؟ اگر باشد ← می‌فهمیم که α^* یک ESS است در غیر این صورت نیست.

اول فرض می‌کنیم بازیکن آمیخته‌ی الگوئی α را انتخاب کرده و بهترین پاسخ را بدلیل میدانیم p و $\frac{1}{2}$

اگر q را $\frac{1}{2}$ بگذاریم →

	x $\cancel{q}$	y $1-q$
p X	-1,-1	0,2
1-p Y	2,0	-1,-1

$$v_1(p, \cancel{q}\ \tfrac{1}{2}) = 1\times p \times \frac{1}{2} + 0 + \cancel{2}\times(1-p)\times\frac{1}{\cancel{2}} + -1\times(1-p)\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$\frac{p}{2} + 1 - p - \frac{1}{2} + \frac{p}{2} = \boxed{\frac{1}{2}} \to v_1(\beta, \alpha) = \frac{1}{2} \to$$

یعنی مستقل از β الف یعنی همه‌ی β های با مقدار $(p, 1-p)$ عضو بهترین پاسخ α هستند

→ همه‌ی β ها عضو BR هستند $\quad \beta = (p, 1-p) \in BR(\alpha)$

باید اثبات کنیم عبارت زیر به ازای هر β که برقرار است که

$$\forall \beta\ v(\beta, \beta) < v(\alpha, \beta) \qquad |\beta \neq \alpha|$$

اگر فرض کنیم $\beta = (p, 1-p)$

	p x	$1-p$ y
p X	-1,-1	0,2
1-p Y	2,0	-1,-1

$$v_1(\beta,\beta) = v_1(p,p) = p\times p\times 1 + 0 + p\times 2\times(1-p) + \underbrace{(1-p)\times(1-p)}_{(1-2p+p^2)}\times -1 < \cancel{v(\alpha,\beta)}\ 2p-\frac{1}{2}$$

$$\to \cancel{p^2} + \cancel{2p} - 2p^2 - \cancel{p^2} + 2p - 1 < \cancel{2p} - \frac{1}{2}$$

$$-2p^2 + 2p - 1 + \frac{1}{2} < 0 \to -2p^2 + 2p - \frac{1}{2} < 0$$

	p x	$1-p$ y
$\frac{1}{2}$ X	-1,-1	0,2
$\frac{1}{2}$ Y	2,0	-1,-1

$$v(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\times p + 0 + \frac{1}{2}\times 2\times p + -1\times\frac{1}{2}\times(1-p) = \frac{1}{2}p + p - \frac{1}{2} + \frac{p}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{p}{2}$$

$$\boxed{2p - \frac{1}{2}}$$

$\div -2$

$$\boxed{p^2 - p + \frac{1}{4} > 0}$$

$$\Delta = 1 - 4\times 1\times\frac{1}{4} = 0 \qquad \boxed{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 > 0}$$ همواره مثبت است →

تا مساوی برقرار است $p \neq \frac{1}{2}$

پس برای هر $\beta \neq \frac{1}{2}$ ← طبق تعریفی که برای ESS داریم هم گزاره‌ی اول که ایجاب تعادل نش اکیداً بودن α بود برقرار شد هم گزاره دوم ←

$\underline{ESS}$ است که $\alpha = \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$

Scanned by CamScanner

		A (q)	P ($1-q$)
p	A	$\frac{v-c}{۲}, \frac{v-c}{۲}$	$\frac{۳v}{۴}, \frac{v}{۴}$
$1-p$	P	$\frac{v}{۴}, \frac{۳v}{۴}$	$\frac{v}{۲}, \frac{v}{۲}$

$\boxed{\text{سوال ۳}}$ پیدا کردن همه ESSهای بازی

طبق تعریف ESS در یک بازی متقارن دو نفره با استراتژی های آمیخته، استراتژی α^* را یک ESS می‌گوییم اگر

① (α^*, α^*) is N.E

② for all $\beta \in BR(\alpha^*)$

$\beta \neq \alpha^*$

$u(\beta, \beta) < u(\alpha^*, \beta)$

v ارزش کالا ← $v > 0$ ، c هزینه نزاع $c > 0$

گام‌ها: ① پیدا کردن تعادل‌های نش آمیخته ② آیا α^* ای که پیدا کردیم ESS است یا نه؟

$$u_1 = pq\left(\frac{v-c}{۲}\right) + p(1-q)\left(\frac{۳v}{۴}\right) + (1-p)q\left(\frac{v}{۴}\right) + \underbrace{(1-p)(1-q)}_{(1-p-q+pq)}\left(\frac{v}{۲}\right)$$

$$= \boxed{\quad //\quad} + \boxed{p\left(\frac{۳v}{۴}\right)} \boxed{-pq\left(\frac{۳v}{۴}\right)} + q\left(\frac{v}{۴}\right) \boxed{-pq\left(\frac{v}{۴}\right)} +$$

$$\frac{v}{۲}(1) \boxed{-p\left(\frac{v}{۲}\right)} - q\left(\frac{v}{۲}\right) \boxed{+pq\left(\frac{v}{۲}\right)} = \sim\sim + p\left[\qquad\right]$$

$p\left[q\left(\cancel{\frac{v-c}{2}} - \frac{2v}{3} - \frac{v}{3} + \frac{v}{2}\right) + \frac{2v}{3} - \frac{v}{2}\right] + \sim =$

$p\left[-\frac{qc}{2} + \frac{v}{6}\right] + \sim$

$$\boxed{BR_1(q) = \begin{cases} 0 & q > \frac{v}{3c} \\ [0,1] & q = \frac{v}{3c} \\ 1 & q < \frac{v}{3c} \end{cases}}$$

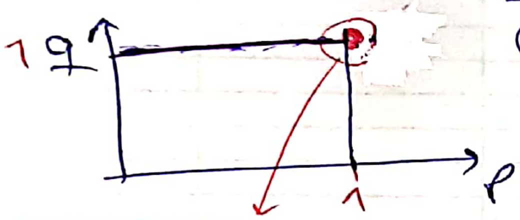
اگر $-\frac{qc}{2} + \frac{v}{6} < 0 \to$

$\frac{v}{6} < \frac{qc}{2}$ $\boxed{\frac{v}{3c} < q}$

تقسیم بندی حالت‌ها

① حالت اول اگر $1 < \frac{v}{3c}$ باشد ← چون $0 \le q \le 1$ ← همواره $q < \frac{v}{3c}$ می‌شود → همواره $\boxed{BR_1(q)=1}$ → $BR_2(p)=1$

به دلیل تقارن در بازی



$\boxed{\text{تعادل نش متقارن} \quad p=q=1}$ استراتژی $(p,p) \to (\frac{v}{2}, \frac{v}{2})$ یک SNE است

تعادل نش اکید است ← یک ESS است. ← نقاط استراتژی $((1,0),(0,1))$ یک استراتژی

اثبات اکید بودن (p,p) ؟ نقاط استراتژی است.

چون $c < v$ است اگر بازیکن اول روی استراتژی p

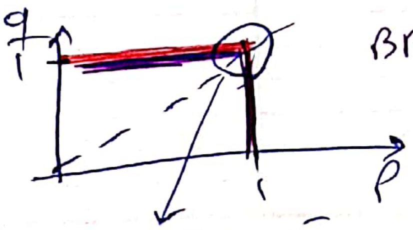
بماند ← لو بازیکن دوم به تنهایی با انحراف از p به A کاهش p با NE چون $\frac{v}{2} > \frac{v}{3}$

اگر بازیکن دوم روی استراتژی در p بماند ← بازیکن اول به تنهایی نمی‌تواند سود بیشتر کند چون

$\frac{v}{3} < \frac{v}{2}$ → (p,p) یک تعادل نش اکید است → strict. NE → ESS هم می‌شود

② حالت ۲ $\frac{v}{3c} = 1$ ← $BR_1(q) = \begin{cases} [0,1] & q=1 \\ 1 & q<1 \end{cases}$

$BR_2(p) = \begin{cases} [0,1] & p=1 \\ 1 & p<1 \end{cases}$ دو حالت NE متقارن را می‌شناسیم.

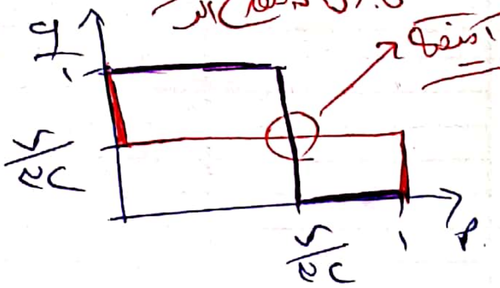


$(p,1)$, $(1,q)$ تمام نقاط به فرم $0 \le p \le 1$, $0 \le q \le 1$ ⇒ تعادل نش هستند →

تنها نقطه‌ای که تعادل متقارن است → $\boxed{p=q=1}$

تنها تعادل نش متقارن بازی

تنها تعادل نش بازی که متقارن است



③ حالت اول ← $\frac{V}{3C} < 1$

		q: A	$1-q$: P
p	A	$\frac{V-C}{2}, \frac{V-C}{2}$	$\frac{2V}{3}, \frac{V}{3}$
$1-p$	P	$\frac{V}{3}, \frac{2V}{3}$	$\frac{V}{2}, \frac{V}{2}$

$BR_2(p) = ?$

$u_2(p, q) =$ $\cancel{p(\frac{V}{3}) - pq(\frac{V}{3})}$

$pq(\frac{V-C}{2}) + p(1-q)(\frac{V}{3}) + (1-p)q(\frac{2V}{3}) + (1-p)(1-q)(\frac{V}{2}) =$ $q(\frac{2V}{3}) - pq(\frac{2V}{3})$

$(1-p-q+pq)$

$\frac{V}{2} - p(\frac{V}{2}) - q(\frac{V}{2}) + pq(\frac{V}{2})$

$\cancel{\quad} + q[\, p(\frac{\cancel{V}-C}{2} - \frac{V}{3} - \cancel{\frac{2V}{3}} + \frac{V}{2}) - \frac{V}{2} + \frac{2V}{3}] =$

$-\frac{pC}{2} + \frac{V}{6} < 0 \rightarrow \frac{V}{6} < \frac{pC}{2}$ ， $\frac{V}{3C} < p$

$q[-\frac{pC}{2} + \frac{V}{6}] + \cancel{\quad}$

$BR_2(p) = \begin{cases} 0 & p > \frac{V}{3C} \\ [0,1] & p = \frac{V}{3C} \\ 1 & p < \frac{V}{3C} \end{cases}$

پس در حالت $\frac{V}{C} < 1$ ، $((\frac{V}{3C}, 1-\frac{V}{3C}), (\frac{V}{3C}, 1-\frac{V}{3C}))$ یک تعادل نش است.

آیا α^* یک ESS است؟

ابتدا باید $BR(\alpha^*)$ را پیدا کنیم. اگر $(\alpha, \alpha) = NE$ باشد ← $\alpha \in BR(\alpha)$ است

فرض $\beta = (p, 1-p)$ ، $0 \le p \le 1$

$u_1(\beta, \alpha^*) = ?$

		$\frac{V}{3C}$: A	$1-\frac{V}{3C}$: P
p	A	$\frac{V-C}{2}, \frac{V-C}{2}$	$\frac{2V}{3}, \frac{V}{3}$
$1-p$	P	$\frac{V}{3}, \frac{2V}{3}$	$\frac{V}{2}, \frac{V}{2}$

$u_1(\beta, \alpha^*) = p \times \frac{V}{3C} \times (\frac{V-C}{2}) + p(1-\frac{V}{3C}) \times (\frac{2V}{3}) + (1-p) \times (\frac{V}{3C}) \times \frac{V}{3} + (1-p)(1-\frac{V}{3C}) \times (\frac{V}{2}) = p[\frac{V}{3C} \times (\frac{V-C}{2}) + (1-\frac{V}{3C}) \times \frac{2V}{3} - \frac{V}{3C} \times \frac{V}{3} - \frac{V}{2}(1-\frac{V}{3C})] =$

$p[\cancel{\frac{V^2}{6C}} - \frac{V}{6} + \frac{2V}{3} \underbrace{- \cancel{\frac{2V^2}{9C}} - \cancel{\frac{V^2}{9C}}}_{-\frac{3V^2}{9C}}) - \frac{V}{2} + \cancel{\frac{V^2}{6C}}]$

$-\frac{3V^2}{9C} = -\cancel{\frac{V^2}{3C}} + \cancel{\frac{V^2}{3C}}$

$p[-\frac{V}{6} + \frac{4V - 3V}{6}] =$ 0

$p[-\frac{V}{6} + \frac{V}{6}] = \boxed{0}$ ☆ به p وابسته نیست

چون v_1 به p وابسته نیست یعنی

$v_1(\alpha^*) = [0,1]$

بهترین پاسخ بازیکن اول در مقابل انتخاب α^* توسط رقیب هر مقداری بین ۰ و ۱ است.

$BR(\alpha^*) = [0,1]$

(α^*, α^*) تعادل نش است

$$\alpha^* = \left(\underbrace{\frac{v}{2c}}_{A},\ \underbrace{1-\frac{v}{2c}}_{P}\right)$$

$$v(\beta,\beta) < v(\alpha^*,\beta) \quad \forall \beta \in BR$$

$$v_1(p,p) \overset{?}{<} v_1\left(\frac{v}{2c}, p\right) \quad \forall p \in [0,1]$$

آیا این رابطه برقرار است p

اگر باشد ← α^* یک ESS می‌باشد.

$-\frac{2v}{2}$

	p	$1-p$
$\frac{v}{2c}$ p	$\frac{v-c}{2}, \frac{v-c}{2}$	$\frac{2v}{2}$
$1-\frac{v}{2c}$ $1-p$	$\frac{v}{2}$	$\frac{v}{2}$

$$v(\beta,\beta) = p^2 \times \left(\frac{v-c}{2}\right) + p(1-p)\left(\frac{2v}{2}\right) + (1-p)p \times \left(\frac{v}{2}\right) + (1-p)^2\left(\frac{v}{2}\right) =$$

$$\cancel{\frac{p^2 v}{2}} - \cancel{\frac{p^2 c}{2}} + \cancel{p\left(\frac{2v}{2}\right)} - \cancel{\frac{p^2 \times 2v}{2}} + \cancel{p\left(\frac{v}{2}\right)} - \cancel{p^2 \times \frac{v}{2}}$$

$$+ \cancel{(1-2p+p^2)\left(\frac{v}{2}\right)}$$

$$\frac{v}{2} - \cancel{pv} + \cancel{p^2\left(\frac{v}{2}\right)}$$

$$= p^2\left(\cancel{v - \frac{c}{2} - \frac{2v}{2} - \frac{v}{2}}\right) + p\left(\cancel{\frac{v}{2} - v + \frac{2v}{2}}\right) + \frac{v}{2}$$

$-\frac{c}{2}$ 0

$$= \boxed{-\frac{p^2 c}{2} + \frac{v}{2}}$$

$$u(\alpha^*, \beta) = \frac{v}{3c} \times p \times \left(\frac{v-c}{2}\right) + \frac{v}{3c} \times (1-p) \times \frac{2v}{3} +$$

$$\left(1 - \frac{v}{3c}\right) \times p \times \frac{v}{3} + \left(1 - \frac{v}{3c}\right) \times \cancel{(1-p) \times \frac{v}{2}} =$$

$$\left(\frac{v}{2} - \frac{pv}{2}\right)^2$$

$$\frac{v}{3c} \times p \times \frac{v}{2} - \frac{pv}{3c} \times \frac{c}{2} + \frac{v}{3c} \times \frac{2v}{3} - \frac{v}{3c} \times p \times \frac{2v}{3}$$

$$+ \frac{pv}{3} - \frac{v}{3c} \times \frac{pv}{3} + \frac{v}{2} - \frac{pv}{2} - \frac{v}{3c} \times \frac{v}{2} - \frac{v}{3c} \times -\frac{pv}{2}$$

$$= \cancel{\frac{pv^2}{6c}} - \frac{pv}{6} + \cancel{\frac{2v^2}{9c}} - \cancel{\frac{2pv^2}{9c}} + \frac{pv}{3}$$

$$- \cancel{\frac{pv^2}{9c}} + \frac{v}{2} - \frac{pv}{2} - \cancel{\frac{v^2}{6c}} + \cancel{\frac{pv^2}{6c}} =$$

$$\frac{pv^2}{c}\left(\cancel{\frac{1}{6} - \frac{2}{9} - \frac{1}{9} + \frac{1}{6}}\right) + \frac{v^2}{c}\left(\frac{2}{9} - \frac{1}{6}\right)$$

$$\frac{4-3}{18} = \frac{1}{18}$$

$$+ pv\left(\underbrace{-\frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}}_{\frac{-1+2-3}{6} = -\frac{1}{3}}\right) + \frac{v}{2} \qquad \boxed{= \frac{v^2}{18c} - \frac{pv}{3} + \frac{v}{2}}$$

$$-\frac{p^2c}{2} + \cancel{\frac{v}{2}} < \frac{v^2}{18c} - \frac{pv}{3} + \cancel{\frac{v}{2}}$$

$$\boxed{0 < \frac{p^2c}{2} - \frac{pv}{3} + \frac{v^2}{18c}} \Rightarrow$$

$$0 < 3p^2c - 2pv + v^2$$

$$\Delta = (2v)^2 - 4 \times 3c \times v^2 = 4v^2 - 12cv^2 = 4v^2(1-3c)$$

$$x_1 = \frac{+2v \pm \sqrt{\Delta}}{\cancel{2a}\ 6c} \qquad \boxed{v>0}$$

چون $c>0$ ← اگر $c > \frac{1}{3}$ باشد ← $1-3c<0$ ← $\boxed{\Delta<0}$ → در معادله درجه ۲ بالا آمده، $a = 3c$ فرض

و چون $c>0$ → $\boxed{a>0}$

یعنی معادله درجه ۲ همواره مثبت است → $\alpha^* = \left(\frac{v}{3c}, 1 - \frac{v}{3c}\right)$

یک ESS داریم. اگر $c < \frac{1}{3}$ باشد، ESS نداریم