پردازش تصویر در دهه آینده
از عمق ریاضیات تا مهندس حرفه‌ای

کتاب ـ جزوه درس کارشناسی ارشد و آزمایشگاه پژوهش‌محور

هفتم فصل

مورفولوژی و محلی ساختار

و سوراخ‌سوزنی دوربین همگن، تصویری فضای از
عریض دوربین‌های چنددیدگاهی، هندسه تا کالیبراسیون
تفاضل‌پذیر دوربین و rolling shutter غیرمرکزی، و

مدل یک پرتو، یک تقاطع نتیجه بلکه منفرد، عدد یک نه پیکسل هر فصل، این در ستون دوربین هندسه است. نمونه‌برداری زمان یک و مختصات دستگاه یک فیزیکی، است. عصبی صحنه مدل‌های و رباتیک بازسازی، سه‌بعدی، اندازه‌گیری فقرات

نسخه تفصیلی درس ـ تابستان ۱۴۰۵ / ۲۰۲۶

قابل کامپایل با TeX Live + TeXstudio + XeLaTeX

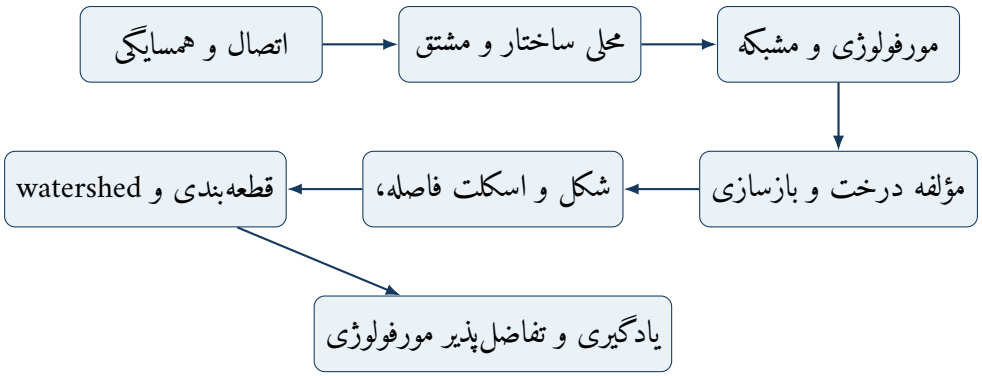
یادداشت روش‌شناختی فصل هفتم

این فصل در نقطه‌ای قرار دارد که «پیکسل» به «ساختار» تبدیل می‌شود. در فصل‌های پیشین، تصویر را اندازه‌گیری، میدان تصادفی، مسئله بازسازی و تصویر هندسی دوربین دیدیم؛ اکنون باید پاسخ دهیم که یک همسایگی کوچک چگونه می‌تواند وجود لبه، گوشه، خط، بافت، جزء متصل، حفره، محور میانی یا شیء را آشکار کند. دو زبان مکمل به کار می‌رود: زبان دیفرانسیلی که بر مشتق، تانسور و مقیاس تکیه دارد؛ و زبان مورفولوژی ریاضی که بر ترتیب، مجموعه، مشبکه، عنصر ساختاری و اتصال بنا شده است.

هدف فصل

هدف فصل حفظ یک خط فکری واحد است: از «همسایگی» به «ساختار محلی»، از ساختار محلی به «شکل و توپولوژی»، و از عملگرهای دقیق کلاسیک به لایه‌های تفاضل‌پذیر و قیود ساختاری در یادگیری عمیق. هر الگوریتم با تعریف ریاضی، ناوردایی‌ها، پیچیدگی، شبه‌کد و آزمون صحت همراه می‌شود.

نقشه فشرده فصل



قرارداد نمادگذاری و پیاده‌سازی

دامنه گسسته تصویر با $E \subset \mathbb{Z}^2$، تصویر دودویی با $X \subseteq E$ و تصویر خاکستری با $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ نمایش داده می‌شود. عنصر ساختاری $B \subset \mathbb{Z}^2$ است و بازتاب آن $\check{B} = \{-b : b \in B\}$. برای تصاویر دودویی، جمع مینکوفسکی $X \oplus B$ و تفاضل مینکوفسکی $X \ominus B$ به کار می‌رود. در کد، آرایه‌ها با ترتیب $[r, c]$ اندیس می‌خورند و اتصال ۴ و ۸ هرگز بدون ذکر صریح جابه‌جا نمی‌شوند.

قرارداد میان ریاضیات و کد

تمام الگوریتم‌ها باید سه آزمون پایه داشته باشند: آزمون دوگانگی، آزمون افزایش‌پذیری و آزمون همانی روی ورودی‌های مرزی. برای عملگرهای توپولوژیک، تعداد مؤلفه‌ها و مشخصه اویلر پیش و پس از پردازش نیز گزارش می‌شود.

فهرست مطالب

یادداشت روش‌شناختی فصل هفتم آ

نقشه فشرده فصل ب

قرارداد نمادگذاری و پیاده‌سازی پ

۷ ساختار محلی و مورفولوژی ۱

۱.۷ چرا ساختار محلی؟ ۱

۲.۷ همسایگی، اتصال و توپولوژی دیجیتال ۱

۱.۲.۷ اتصال ۴ و ۸ . . . . . ۱

۲.۲.۷ مؤلفه متصل و مشخصه اویلر ۲

۳.۲.۷ الگوریتم برچسب گذاری مؤلفه‌ها ۲

۳.۷ ساختار دیفرانسیلی محلی و فضای مقیاس ۳

۱.۳.۷ چرا مشتق مستقیم نامناسب است؟ ۳

۲.۳.۷ مشتق جهت‌دار و هموردایی چرخش ۴

۴.۷ تانسور ساختار: از لبه تا گوشه ۴

۱.۴.۷ معیار هریس و شای-توماسی ۵

۵.۷ هسین، خط و ساختارهای لوله‌ای ۶

۶.۷ از فیلتر جهت‌دار تا کدهای محلی ۶

۷.۷ مبانی جبری مورفولوژی ریاضی ۶

۱.۷.۷ مشبکه کامل ۶

۲.۷.۷ اتصال گالوا و adjunction ۶

۳.۷.۷ اثبات فشرده ۷

۸.۷ مورفولوژی دودویی ۷

۱.۸.۷ تبدیل hit-or-miss ۷

۲.۸.۷ انتخاب عنصر ساختاری ۸
۹.۷ مورفولوژی خاکستری و هندسه max-plus ۸
۱.۹.۷ گرادیان و top-hat مورفولوژیک ۹
۱۰.۷ الگوریتم‌های سریع dilation و erosion ۹
۱۱.۷ بازسازی مورفولوژیک و عملگرهای ژئودزیک ۹
۱.۱۱.۷ h-maxima و حذف قله‌های کم‌اهمیت ۱۰
۱۲.۷ عملگرهای متصل و درخت‌های مؤلفه ۱۰
۱.۱۲.۷ فیلترهای ویژگی ۱۱
۱۳.۷ تبدیل فاصله و min-convolution ۱۱
۱۴.۷ محور میانی، اسکلت و thinning ۱۲
۱.۱۴.۷ نقطه ساده و حفظ توپولوژی ۱۳
۲.۱۴.۷ هرس اسکلت ۱۳
۱۵.۷ watershed: از توپوگرافی تا جنگل پوشای کمینه ۱۳
۱.۱۵.۷ صورت‌بندی گرافی ۱۴
۱۶.۷ گرانولومتری و طیف الگو ۱۴
۱.۱۶.۷ پروفایل مورفولوژیک ۱۵
۱۷.۷ اندازه‌گیری شکل و ناوردایی‌ها ۱۵
۱.۱۷.۷ ممان‌های ناوردا ۱۵
۱۸.۷ مورفولوژی برداری، رنگی و چندطیفی ۱۶
۱.۱۸.۷ مورفولوژی ماتریسی و تانسوری ۱۶
۱۹.۷ مورفولوژی روی گراف، مش و ابرنقاط ۱۶
۱.۱۹.۷ فاصله ژئودزیک و propagation ۱۷
۲.۱۹.۷ ابرنقاط و ناوردایی نمونه‌برداری ۱۷
۲۰.۷ مورفولوژی سه‌بعدی و وکسل ناهمسانگرد ۱۷
۱.۲۰.۷ اتصال‌های ۶، ۱۸ و ۲۶ ۱۸
۲.۲۰.۷ پیچیدگی حافظه ۱۸
۲۱.۷ عدم‌قطعیت و پایداری ساختار محلی ۱۸
۱.۲۱.۷ پایداری مورفولوژیک ۱۸
۲.۲۱.۷ persistence به جای threshold منفرد ۱۹
۲۲.۷ مورفولوژی، PDE و تکامل شکل ۱۹
۲۳.۷ مورفولوژی تفاضل‌پذیر ۱۹
۱.۲۳.۷ کران تقریب ۲۰

۲.۲۳.۷ لایه مورفولوژیک قابل یادگیری ۲۰
۲۴.۷ اسکلت تفاضل‌پذیر و قیود توپولوژیک ۲۰
۲۵.۷ مورفولوژی در شبکه‌های عمیق و مدل‌های بنیادی ۲۰
۲۶.۷ طراحی الگوریتم: از تعریف تا کد صحیح ۲۱
۲۷.۷ کارگاه پایتون: پیاده‌سازی‌های مرجع ۲۱
۱.۲۷.۷ dilation و erosion خاکستری ۲۱
۲.۲۷.۷ بازسازی و watershed marker-controlled ۲۱
۳.۲۷.۷ محاسبه توپولوژی پیش و پس از پردازش ۲۲
۲۸.۷ آزمایش‌های فصل ۲۲
۱.۲۸.۷ آزمایش ۱: اتصال و پارادوکس دیجیتال ۲۲
۲.۲۸.۷ آزمایش ۲: ساختار محلی زیر نویز ۲۲
۳.۲۸.۷ آزمایش ۳: سرعت مورفولوژی ۲۳
۴.۲۸.۷ آزمایش ۴: بازسازی در برابر opening ۲۳
۵.۲۸.۷ آزمایش ۵: EDT و اسکلت ۲۳
۶.۲۸.۷ آزمایش ۶: watershed نشان‌محور ۲۳
۷.۲۸.۷ آزمایش ۷: morphology soft ۲۳
۲۹.۷ تمرین‌های نظری و اثباتی ۲۳
۳۰.۷ پروژه‌های پایان فصل ۲۴
۱.۳۰.۷ پروژه A: آزمایشگاه مورفولوژی قابل ممیزی ۲۴
۲.۳۰.۷ پروژه B: قطعه‌بندی اشیای چسبیده ۲۴
۳.۳۰.۷ پروژه C: شبکه مورفولوژیک ۲۴
۴.۳۰.۷ پروژه D: مرکزخط توپولوژی‌آگاه ۲۴
۳۱.۷ پرامپت پیشنهادی برای Codex ۲۴
۳۲.۷ تقسیم پیشنهادی ویدئوهای ۱۵ دقیقه‌ای ۲۵
۳۳.۷ جمع‌بندی و پل به فصل هشتم ۲۶

منابع منتخب فصل ۲۸

راهنمای کامپایل، فونت و اجرای آزمایش‌ها ۳۲

فصل ۷

ساختار محلی و مورفولوژی

۱.۷ چرا ساختار محلی؟

یک مقدار شدت منفرد معنای هندسی اندکی دارد. معنا از رابطه آن با همسایگان پدید می‌آید: تغییر جهت‌دار شدت لبه را می‌سازد؛ دو تغییر مستقل گوشه را؛ تداوم پاسخ در راستایی خاص خط یا رشته را؛ و آرایش اجزای متصل، شکل و توپولوژی را. بنابراین تحلیل محلی را می‌توان نگاشتی دانست

$$\Phi_x(f) = \Phi(\{f(x+h) : h \in \mathcal{N}\}), \tag{۱.۷}$$

که در آن انتخاب همسایگی $\mathcal{N}$، مقیاس و ساختار جبری عملگر، نوع اطلاعات استخراج‌شده را تعیین می‌کند.

اصل راهنما

ساختار محلی فقط «کوچک بودن پنجره» نیست. یک توصیف‌گر محلی باید نسبت به نویز پایدار، نسبت به تبدیل‌های مورد نظر ناوردا یا هموردا، از نظر محاسباتی قابل کنترل و از نظر آماری قابل کالیبراسیون باشد.

۲.۷ همسایگی، اتصال و توپولوژی دیجیتال

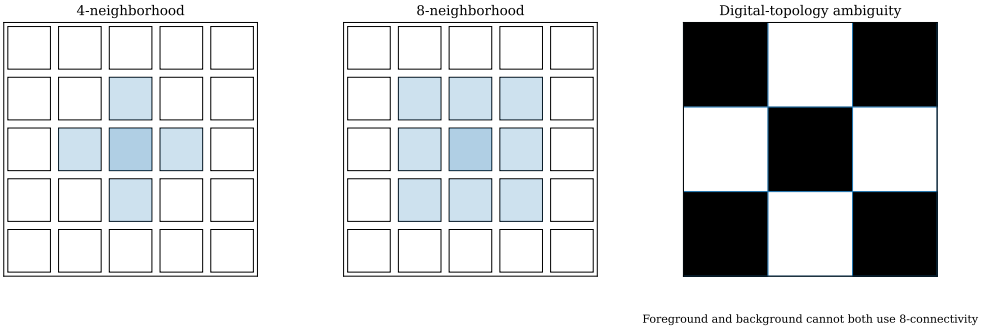
۱.۲.۷ اتصال ۴ و ۸

برای $p = (p_1, p_2)$، همسایگی‌های استاندارد عبارت‌اند از

$$N_4(p) = \{q : \|q-p\|_1 = 1\}, \tag{۲.۷}$$

$$N_8(p) = \{q : \|q-p\|_\infty = 1\}. \tag{۳.۷}$$

استفاده هم‌زمان از یک اتصال برای پیش‌زمینه و پس‌زمینه می‌تواند پارادوکس توپولوژیک ایجاد کند؛ برای نمونه یک قطر دو پیکسل ممکن است هم پیش‌زمینه و هم پس‌زمینه را «متصل» نشان دهد. قرارداد سازگار معمولاً زوج‌های (۴, ۸) یا (۸, ۴) است.



شکل ۱۰۷: همسایگی‌های دیجیتال و اثر انتخاب اتصال بر مؤلفه‌های متصل.

۲.۲.۷ مؤلفه متصل و مشخصه اویلر

رابطه هم‌ارزی «وجود مسیر دیجیتال» دامنه را به مؤلفه‌های متصل تقسیم می‌کند. در دوبعد، مشخصه اویلر

$$\chi = \beta_0 - \beta_1 \tag{۴.۷}$$

است؛ β_0 تعداد مؤلفه‌ها و β_1 تعداد حفره‌هاست. این کمیت یک آزمون فشرده برای حفظ توپولوژی در skeletonization thinning، و شبکه‌های قطعه‌بندی است.

۳.۲.۷ الگوریتم برچسب گذاری مؤلفه‌ها

روش دوگذر کلاسیک در گذر اول برچسب موقت و روابط هم‌ارزی تولید و در گذر دوم هر برچسب را به نماینده مجموعه اتحاد-یافت نگاشت می‌کند. پیچیدگی با فشرده‌سازی مسیر و اتحاد بر حسب رتبه عملاً خطی است:

$$T(N) = O(N\alpha(N)) \approx O(N). \tag{۵.۷}$$

الگوریتم ۱.۷: برچسب گذاری دوگذر

۱. تصویر را به ترتیب سطری پیمایش کنید؛ برای هر پیکسل پیش‌زمینه، برچسب همسایه‌های قبلاً دیده‌شده را بخوانید.

۲. اگر هیچ برچسبی نیست، برچسب تازه بسازید؛ اگر یک یا چند برچسب هست، کمینه را اختصاص و برچسب‌ها را union کنید.

۳. در گذر دوم، هر برچسب را با ریشه ساختار union–find جایگزین کنید.

۴. ویژگی‌های جزء مانند مساحت، جعبه محاطی، مرکز جرم و محیط را در همان گذر تجمع دهید.

۳.۰۷ ساختار دیفرانسیلی محلی و فضای مقیاس

برای تصویر پیوسته $f(x,y)$، گرادیان

$$\nabla f = \begin{bmatrix} f_x & f_y \end{bmatrix}^T \tag{۶.۰۷}$$

جهت بیشترین افزایش و قدر آن شدت تغییر را بیان می‌کند. مشتقات مرتبه دوم در هسین

$$H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} \tag{۷.۰۷}$$

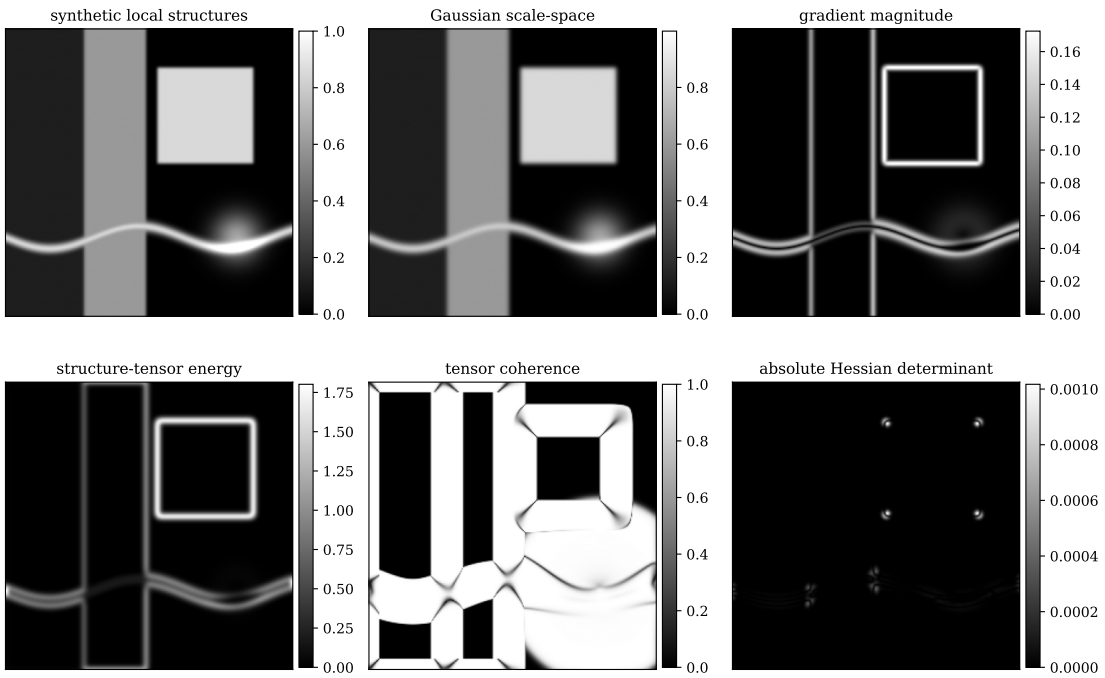
خمیدگی محلی را در همه جهت‌ها رمز می‌کنند.

۱.۳.۰۷ چرا مشتق مستقیم نامناسب است؟

مشتق، فرکانس بالا و در نتیجه نویز را تقویت می‌کند. راه اصولی، مشتق‌گیری از تصویر هموارشده است:

$$L(x,y;\sigma) = G_\sigma * f, \qquad \partial_x L = (\partial_x G_\sigma) * f. \tag{۸.۰۷}$$

فضای مقیاس گاوسی تنها خانواده خطی، ناوردا به انتقال و نیم‌گروهی است که ساختارهای جدید کاذب ایجاد نمی‌کند.



شکل ۲۰۷: ساختار دیفرانسیلی محلی در مقیاس‌های مختلف: گرادیان، پاسخ هسین و حساسیت به نویز.

۲۰۳۰۷ مشتق جهت‌دار و هموردایی چرخش

برای بردار واحد $u = (\cos\theta, \sin\theta)^T$،

$$D_u f = u^T \nabla f. \tag{۹۰۷}$$

اگر تصویر بچرخد، گرادیان نیز با همان دوران می‌چرخد؛ بنابراین قدر گرادیان ناوردای چرخش و جهت آن همورداست. این تمایز برای طراحی ویژگی صحیح حیاتی است.

۴۰۷ تانسور ساختار: از لبه تا گوشه

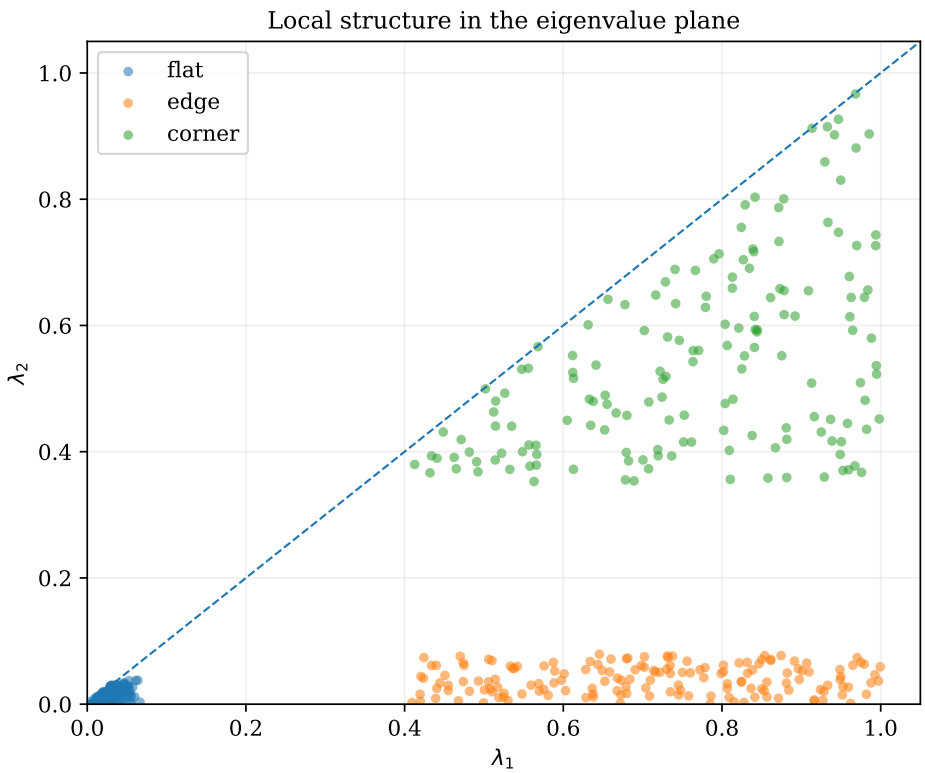
تانسور ساختار در مقیاس مشتق σ و مقیاس تجمیع ρ تعریف می‌شود:

$$J_{\rho,\sigma} = G_\rho * \left(\nabla L_\sigma \nabla L_\sigma^T\right) = \begin{bmatrix} G_\rho * L_x^۲ & G_\rho * L_x L_y \\ G_\rho * L_x L_y & G_\rho * L_y^۲ \end{bmatrix}. \tag{۱۰۰۷}$$

برای جابه‌جایی کوچک d، تغییر انرژی وصله تقریباً

$$E(d) \approx d^T J d \tag{۱۱۰۷}$$

است. اگر $\lambda_۱ \geq \lambda_۲$ مقادیر ویژه باشند، سه حالت رخ می‌دهد: هر دو کوچک ناحیه تخت؛ یکی بزرگ لبه؛ و هر دو بزرگ گوشه یا ساختار دوبعدی.



شکل ۳۰۷: صفحه مقادیر ویژه تانسور ساختار و نواحی متناظر با تخت، لبه و گوشه.

۱۰۴۰۷ معیار هریس و شای-توماسی

معیار هریس

$$R = \det J - k(\operatorname{tr} J)^{۲} \tag{۱۲۰۷}$$

و معیار شای-توماسی $R_{ST} = \min(\lambda_{۱}, \lambda_{۲})$ است. هریس به مقیاس شدت حساس است؛ لذا نرمال‌سازی، آستانه نسبی و non-maximum suppression باید بخشی از الگوریتم باشند، نه جزئیات حاشیه‌ای.

الگوریتم ۲۰۷: آشکارساز گوشه مقیاس‌آگاه

۱. مشتقات گاوسی را در چند σ محاسبه کنید.

۲. برای هر مقیاس، تانسور ساختار را با پنجره $\rho \geq \sigma$ بسازید.

۳. پاسخ گوشه را با توان مناسب مقیاس نرمال کنید.

۴. بیشینه‌های موضعی فضایی-مقیاسی را استخراج و نقاط نزدیک مرز یا با شرطی‌بودن نامناسب را حذف کنید.

۵. کوواریانس مکان نقطه را از وارون هسین پاسخ تخمین بزنید.

۵.۷ هسین، خط و ساختارهای لوله‌ای

مقادیر ویژه هسین تفاوت خمیدگی در دو جهت اصلی را نشان می‌دهند. در یک ridge روشن باریک، یکی از مقادیر ویژه منفی با قدر بزرگ و دیگری نزدیک صفر است. پاسخ چندمقیاسی vesselness را می‌توان به صورت

$$V_\sigma = \exp\left(-\frac{R_B^2}{2\beta^2}\right)\left[1-\exp\left(-\frac{S^2}{2c^2}\right)\right], \quad R_B = \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|}, \quad S = \sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2} \tag{۱۳.۷}$$

نوشت. انتخاب بیشینه روی مقیاس، قطر تقریبی ساختار را نیز تخمین می‌زند.

۶.۷ از فیلتر جهت‌دار تا کدهای محلی

فیلترهای steerable اجازه می‌دهند پاسخ هر زاویه از ترکیب خطی تعداد محدودی فیلتر پایه ساخته شود. برای مشتق گاوسی مرتبه اول،

$$G_\theta^{(1)} = \cos\theta\, G_x + \sin\theta\, G_y. \tag{۱۴.۷}$$

در مقابل، الگوی دودویی محلی با مقایسه شدت همسایه و مرکز

$$\mathrm{LBP}_{P,R} = \sum_{p=0}^{P-1} \mathbb{1}[g_p \geq g_c]\, 2^p \tag{۱۵.۷}$$

یک کد ترتیبی مقاوم به تبدیل‌های یکنوای شدت می‌سازد. این دو خانواده نشان می‌دهند که «محلی» می‌تواند هم تحلیلی-پیوسته و هم ترتیبی-گسسته باشد.

۷.۷ مبانی جبری مورفولوژی ریاضی

۱.۷.۷ مشبکه کامل

مجموعه تصاویر خاکستری با ترتیب نقطه‌ای $f \leq g \iff f(x) \leq g(x)$ یک مشبکه کامل است؛ سوپریمم و اینفیمم به صورت نقطه‌ای محاسبه می‌شوند. dilation عملگری است که سوپریمم‌ها را حفظ می‌کند و erosion اینفیمم‌ها را.

۲.۷.۷ اتصال گالوا و adjunction

زوج (ε, δ) یک adjunction است اگر

$$\delta(f) \leq g \quad \iff \quad f \leq \varepsilon(g). \tag{۱۶.۷}$$

از همین رابطه افزایش‌پذیری، تعریف opening $\gamma = \delta\varepsilon$ و closing $\varphi = \varepsilon\delta$، و خواص ضدگسترده/گسترده و idempotent استخراج می‌شوند.

قضیه: opening و closing

اگر (ε, δ) یک adjunction باشد، $\gamma = \delta\varepsilon$ افزایشی، ضدگسترده و idempotent است؛ $\varphi = \varepsilon\delta$ افزایشی، گسترده و idempotent است.

۳.۷.۷ اثبات فشرده

از adjunction با $g = \varepsilon(f)$ داریم $\delta\varepsilon(f) \leq f$. افزایش‌پذیری از افزایش‌پذیری اعضا می‌آید. با اعمال γ بر نامساوی ضدگستردگی و استفاده از افزایش‌پذیری، $\gamma\gamma(f) \leq \gamma(f)$؛ و چون $\gamma(f) \leq f$، از افزایش‌پذیری و تعریف adjunction جهت عکس حاصل می‌شود. استدلال closing دوگان است.

۸.۷ مورفولوژی دودویی

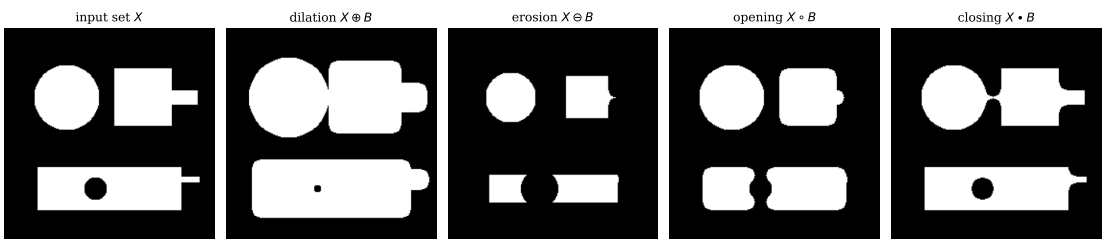
برای $X, B \subseteq E$، dilation و erosion به ترتیب

$$X \oplus B = \{x : \check{B}_x \cap X \neq \varnothing\}, \tag{۱۷.۷}$$

$$X \ominus B = \{x : B_x \subseteq X\}. \tag{۱۸.۷}$$

تعریف‌های جمع مینکوفسکی متناظر عبارت‌اند از

$$X \oplus B = \{x + b : x \in X, b \in B\}, \qquad X \ominus B = \{x : x + B \subseteq X\}. \tag{۱۹.۷}$$



شکل ۴.۷: اثر dilation، erosion opening و closing دودویی با عناصر ساختاری مختلف.

۱.۸.۷ تبدیل hit-or-miss

برای عنصر مرکب $B = (B_1, B_0)$ با قیود پیش‌زمینه و پس‌زمینه،

$$X \circledast B = (X \ominus B_1) \cap (X^c \ominus B_0) \tag{۲۰.۷}$$

الگوی دقیق محلی را آشکار می‌کند و پایه thinning، thickening و تشخیص نقاط انتهایی است.

۲.۸.۰۷ انتخاب عنصر ساختاری

عنصر ساختاری یک prior هندسی صریح است. دیسک برای ناوردایی تقریبی چرخش، خط برای ساختار جهت‌دار، مستطیل برای شبکه‌های محورهم‌راستا و footprint داده‌محور برای کاربرد تخصصی مناسب است. اندازه باید در واحد فیزیکی گزارش شود؛ یک شعاع ۵ پیکسلی در دو رزولوشن، یک معنای هندسی ندارد.

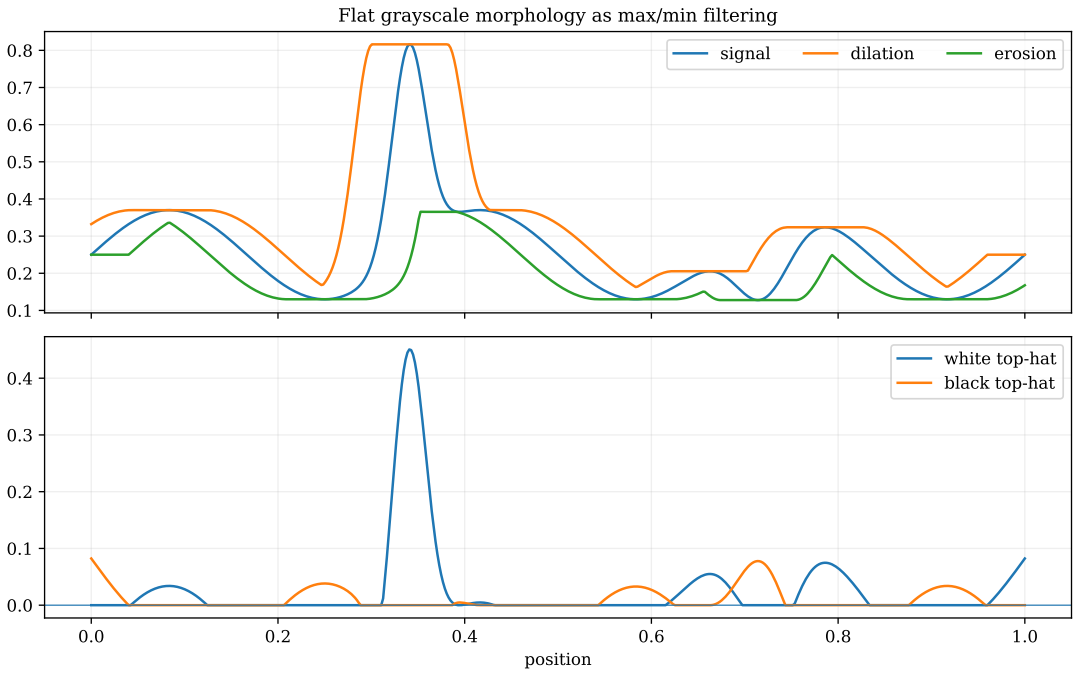
۹.۰۷ مورفولوژی خاکستری و هندسه max-plus

برای عنصر ساختاری غیرتخت $b{:}B \to \mathbb{R}$،

$$(\delta_b f)(x) = \sup_{y \in B} \{ f(x-y) + b(y) \}, \tag{۲۱.۰۷}$$

$$(\varepsilon_b f)(x) = \inf_{y \in B} \{ f(x+y) - b(y) \}. \tag{۲۲.۰۷}$$

این روابط کانولوشن max-plus و min-plus هستند. مورفولوژی خاکستری بنابراین «کانولوشن غیرخطی روی نیم‌حلقه» idempotent است، نه نسخه‌ای تجربی از max-pooling.



شکل ۵.۰۷: پروفایل یک‌بعدی dilation و erosion تخت و غیرتخت و اثر آن‌ها بر قله و دره.

۱.۹.۷ گرادیان و top-hat مورفولوژیک

$$\nabla_B f = \delta_B f - \varepsilon_B f, \tag{۲۳.۷}$$
$$T_w(f) = f - \gamma_B(f), \tag{۲۴.۷}$$
$$T_b(f) = \varphi_B(f) - f. \tag{۲۵.۷}$$

گرادیان مرز را برجسته می‌کند؛ top-hat white ساختارهای روشن کوچک‌تر از B و top-hat black ساختارهای تیره را استخراج می‌کند.

۱۰.۷ الگوریتم‌های سریع dilation و erosion

محاسبه ساده پنجره با اندازه k روی N پیکسل، $O(Nk)$ است. برای عنصر خطی تخت، الگوریتم van Herk/Gil-Werman در هر بعد با تعداد مقایسه ثابت مستقل از k کار می‌کند.

الگوریتم ۳.۷: بیشینه لغزان Herk van در یک بعد

۱. سیگنال را به بلوک‌های طول k تقسیم کنید.
۲. آرایه پیشوند $g[i]$ را با بیشینه از ابتدای هر بلوک تا i بسازید.
۳. آرایه پسوند $h[i]$ را با بیشینه از انتهای هر بلوک تا i بسازید.
۴. بیشینه پنجره مرکز i را از بیشینه دو مقدار مناسب $h[i-r]$ و $g[i+r]$ به دست آورید.
۵. برای مستطیل دوبعدی، الگوریتم را separable روی سطر و ستون اجرا کنید.

پیچیدگی $O(N)$، حافظه $O(N)$ یا در نسخه جریانی $O(k)$ است.

۱۱.۷ بازسازی مورفولوژیک و عملگرهای ژئودزیک

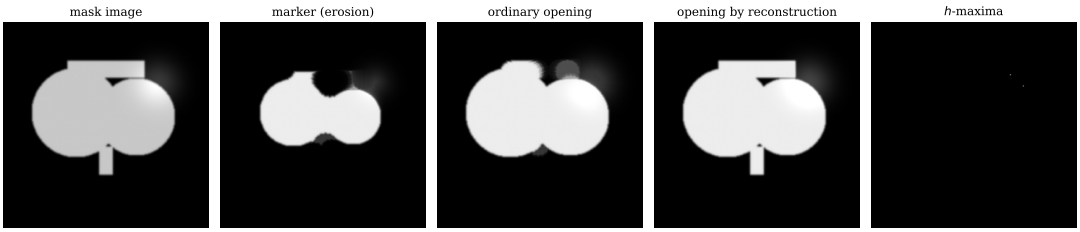
در بازسازی با marker $g \le f$ و mask f، dilation ژئودزیک

$$\delta_f^{(1)}(g) = \min(\delta_B g, f) \tag{۲۶.۷}$$

تکرار می‌شود تا نقطه ثابت

$$R_f^{\delta}(g) = \delta_f^{(\infty)}(g) \tag{۲۷.۷}$$

حاصل شود. برخلاف opening معمولی، بازسازی اجزای مجاز را بدون تغییر شکل اصلی بازیابی می‌کند.



شکل ۶.۷: بازسازی مورفولوژیک از marker زیر mask و تفاوت آن با opening معمولی.

الگوریتم ۴.۷: بازسازی سریع صف‌محور

۱. یک پیمایش رو به جلو و یک پیمایش رو به عقب برای انتشار اولیه مقادیر انجام دهید.

۲. پیکسل‌هایی را که هنوز می‌توانند همسایه‌ای را افزایش دهند وارد صف FIFO کنید.

۳. تا خالی شدن صف، مقدار همسایه q را با $\min(f(q), g(p))$ به‌روزرسانی کنید.

۴. اگر مقدار q افزایش یافت، آن را وارد صف کنید.

هر افزایش محدود است و الگوریتم در عمل نزدیک $O(N)$ است.

۱.۱.۱.۷ h-maxima و حذف قله‌های کم‌اهمیت

$$H_h(f) = f - R_f^{\delta}(f - h) \tag{۲۸.۷}$$

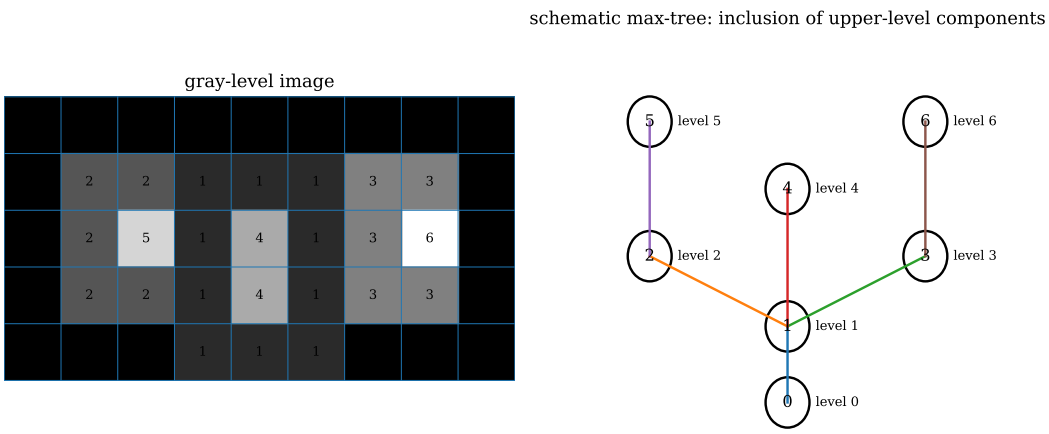
قله‌هایی با برجستگی کمتر از h را حذف می‌کند. این عملگر برای تولید های marker پایدار watershed از threshold ساده مناسب‌تر است.

۱.۲.۷ عملگرهای متصل و درخت‌های مؤلفه

عملگر متصل مرز اجزای باقی‌مانده را جابه‌جا نمی‌کند؛ فقط اجزا را نگه می‌دارد یا حذف/ادغام می‌کند. max-tree مؤلفه‌های متصل مجموعه‌های تراز بالا

$$X_\lambda = \{x : f(x) \geq \lambda\} \tag{۲۹.۷}$$

را در یک سلسله‌مراتب inclusion سازمان می‌دهد. هر گره یک جزء و هر یال رابطه والد در سطح پایین‌تر است.



شکل ۷.۷: نمای شماتیک max-tree و نگاشت نواحی سطح بالا به گره‌های سلسله‌مراتبی.

۱.۱۲.۷ فیلترهای ویژگی

اگر ویژگی گره $A(C)$ مانند مساحت، ارتفاع، واریانس یا elongation باشد، pruning درخت بر اساس شرط $A(C) \geq \tau$ یک فیلتر متصل می‌سازد. ویژگی باید افزایش‌پذیر باشد تا threshold ساده سازگاری سلسله‌مراتبی داشته باشد؛ در غیر این صورت قواعد pruning پیچیده‌تری لازم است.

الگوریتم ۵.۷: ساخت max-tree با union–find

۱. پیکسل‌ها را به ترتیب نزولی شدت مرتب یا با bucket histogram کنید.

۲. پیکسل‌ها را سطح‌به‌سطح فعال کنید و برای هر پیکسل، مجموعه همسایه‌های فعال را union کنید.

۳. هنگام ادغام اجزای سطوح متفاوت، گره والد-فرزند ثبت کنید.

۴. پس از canonicalization، ویژگی‌ها را از برگ به ریشه تجمع دهید.

پیچیدگی عمومی $O(N \log N)$ به علت مرتب‌سازی و برای دامنه شدت محدود نزدیک $O(N\alpha(N))$ است.

۱.۳.۷ تبدیل فاصله و min-convolution

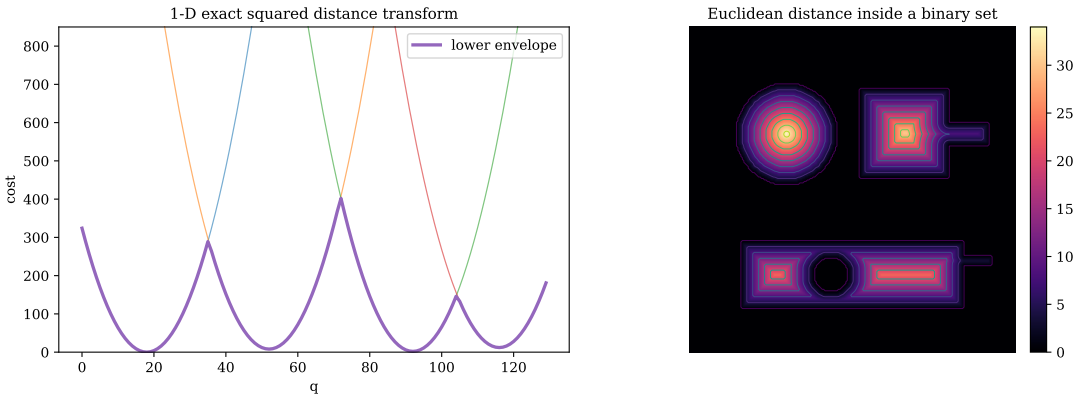
برای مجموعه پیش‌زمینه X، تبدیل فاصله اقلیدسی

$$D_X(p) = \min_{q \in X^c} \|p - q\|_2 \tag{۳.۷}$$

است. نسخه مربع فاصله یک تابع دوبعدی separable است و به دو تبدیل یک‌بعدی

$$D(i) = \min_j \{f(j) + (i-j)^۲\} \tag{۳۱۰۷}$$

تقلیل می‌یابد؛ یعنی پوش پایین سهمی‌ها.



شکل ۸۰۷: تبدیل فاصله دقیق به‌صورت پوش پایین سهمی‌ها؛ اساس الگوریتم خطی فلزن‌سوالب–هاتن‌لوخر.

الگوریتم ۶۰۷: EDT دقیق خطی در یک بعد

۱. آرایه v اندیس سهمی‌های فعال و z محل تقاطع متوالی آن‌ها را نگه می‌دارد.

۲. برای هر سهمی جدید، محل تقاطع با سهمی آخر را محاسبه کنید؛ تا وقتی تقاطع چپ‌تر از مرز قبلی است، سهمی آخر را حذف کنید.

۳. سهمی جدید و مرز اعتبار آن را اضافه کنید.

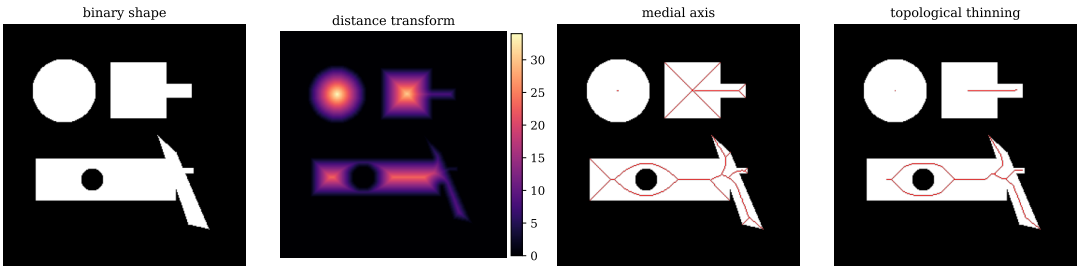
۴. در گذر دوم، برای هر i سهمی فعال متناظر با بازه z را ارزیابی کنید.

هر سهمی حداکثر یک بار وارد و یک بار حذف می‌شود؛ پس زمان $O(n)$ است.

۱۴۰۷ محور میانی، اسکلت و thinning

محور میانی مکان مراکز توپ‌های بیشینه محاط در شکل است. اگر D_X تبدیل فاصله باشد، های ridge آن تقریب محور میانی‌اند. اسکلت همراه با شعاع، امکان بازسازی شکل را فراهم می‌کند:

$$X = \bigcup_{p \in \mathrm{MA}(X)} B(p, D_X(p)). \tag{۳۲۰۷}$$



شکل ۹.۷: تفاوت محور میانی هندسی، skeleton یک‌پیکسلی و اثر شاخه‌های کاذب ناشی از ناهمواری مرز.

۱.۱۴.۷ نقطه ساده و حفظ توپولوژی

پیکسل p ساده است اگر حذف آن تعداد مؤلفه‌های پیش‌زمینه و پس‌زمینه را تغییر ندهد. thinning توپولوژیک پیکسل‌های مرزی ساده را با قیود endpoint و جهت به‌طور تکراری حذف می‌کند.

الگوریتم ۷.۷: thinning زیرچرخه‌ای

۱. پیکسل‌های مرزی را در یک یا چند جهت کاندید کنید.

۲. برای هر کاندید، تعداد انتقال صفر به یک در حلقه ۸-همسایگی و تعداد همسایه‌های پیش‌زمینه را محاسبه کنید.

۳. تنها نقاط ساده‌ای را حذف کنید که endpoint نیستند و قیود جهت زیرچرخه را برآورده می‌کنند.

۴. زیرچرخه‌های مکمل را تا نبود تغییر تکرار کنید.

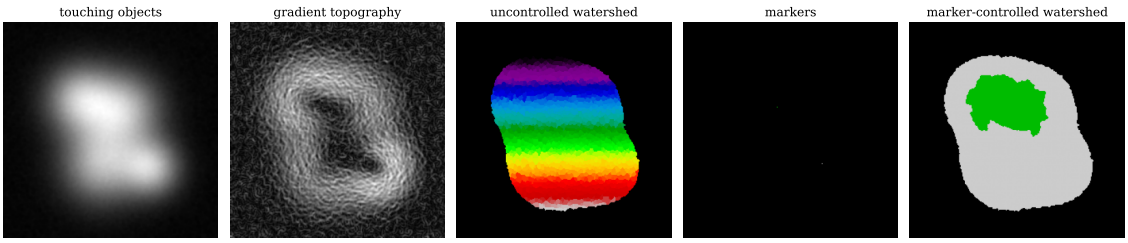
حذف هم‌زمان بدون زیرچرخه می‌تواند اتصال را بشکند؛ بنابراین ترتیب بخشی از اثبات الگوریتم است.

۲.۱۴.۷ هرس اسکلت

شاخه‌های کوتاه معمولاً حاصل نویز مرز هستند. هرس باید بر اساس طول ژئودزیک، persistence، نسبت طول به شعاع یا اهمیت بازسازی انجام شود؛ حذف صرفاً بر حسب تعداد پیکسل به رزولوشن وابسته است.

۱۵.۷ watershed: از توپوگرافی تا جنگل پوشای کمینه

تصویر گرادیان را سطح ارتفاع در نظر بگیرید. watershed مرز حوضه‌های آبریز مینیمم‌ها را می‌سازد. نسخه naive به‌علت تعداد زیاد مینیمم‌های نویزی over-segmentation شدید دارد؛ راه حل عملی، marker-controlled watershed است.



شکل ۱۰۰۷: watershed نشان‌محور: تولید marker، سطح گرادیان و جداسازی اشیای چسبیده.

۱۰۱۵۰۷ صورت‌بندی گرافی

روی گراف پیکسل‌ها با وزن یال

$$w(p,q) = \max(g(p), g(q)) \tag{۳۳۰۷}$$

یا اختلاف شدت، watershed نشان‌دار با جنگل پوشای کمینه ریشه‌دار مرتبط است. هر رأس به یک marker متصل می‌شود که هزینه مسیر minimax آن کمینه است.

الگوریتم ۸۰۷: watershed با صف اولویت

۱. markerها را با برچسب‌های متمایز مقداردهی و همسایه‌های بدون برچسب آن‌ها را در صف اولویت بر حسب ارتفاع وارد کنید.

۲. کم‌ارتفاع‌ترین پیکسل را خارج کنید.

۳. اگر همسایه‌های برچسب‌دار آن یک برچسب واحد دارند، همان را اختصاص دهید؛ اگر چند برچسب دارند، مرز watershed ثبت کنید.

۴. همسایه‌های تازه را وارد صف کنید تا صف خالی شود.

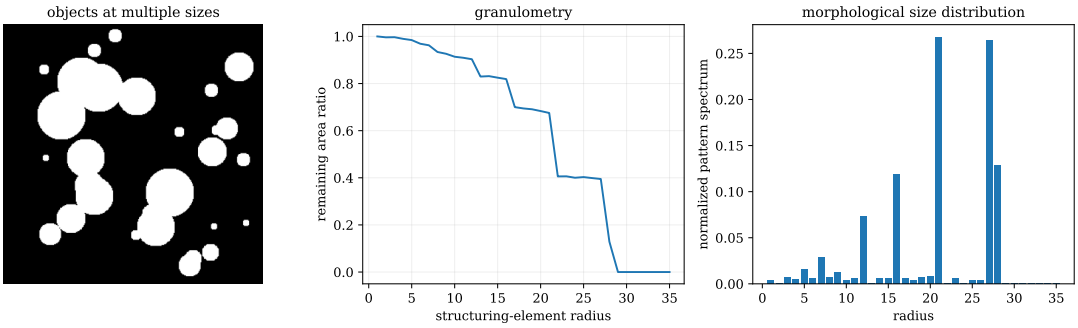
با heap زمان $O(N \log N)$ و با queue bucket برای شدت محدود نزدیک $O(N)$ است.

۱۶۰۷ گرانولومتری و طیف الگو

خانواده های opening γ_r با عناصر ساختاری افزاینده یک sieve مورفولوژیک می‌سازد. اگر $V(f)$ حجم تصویر باشد، تابع اندازه

$$G(r) = ۱ - \frac{V(\gamma_r(f))}{V(f)} \tag{۳۴۰۷}$$

و مشتق گسسته آن spectrum pattern توزیع اندازه ساختارها را تقریب می‌زند.



شکل ۱۱.۷: گرانولومتری چندمقیاسی و طیف الگو برای مخلوطی از اجسام با اندازه‌های متفاوت.

۱.۱۶.۷ پروفایل مورفولوژیک

بردار پاسخ opening/closing در چند مقیاس

$$\mathrm{MP}(x) = \left[\gamma_{r_m} f(x), \ldots, \gamma_{r_1} f(x), f(x), \varphi_{r_1} f(x), \ldots, \varphi_{r_m} f(x)\right] \tag{۳۵.۷}$$

یک توصیف‌گر ساختاری برای سنجش‌ازدور، بافت و قطعه‌بندی است. morphological dffierential profile اختلاف بین مقیاس‌های متوالی را استفاده می‌کند.

۱.۷ اندازه‌گیری شکل و ناوردایی‌ها

برای جزء X، مساحت $A = |X|$، مرکز جرم μ و ماتریس ممان مرتبه دوم

$$C = \frac{1}{A} \sum_{x \in X} (x - \mu)(x - \mu)^T \tag{۳۶.۷}$$

هستند. مقادیر ویژه C جهت اصلی و elongation را می‌دهند. compactness معمولاً

$$Q = \frac{4\pi A}{P^2} \leq 1 \tag{۳۷.۷}$$

است، ولی محیط دیجیتال به جهت و روش برآورد حساس است. گزارش شکل بدون ذکر estimator محیط قابل تکرار نیست.

۱.۱۷.۷ ممان‌های ناوردا

ممان‌های مرکزی نرمال‌شده نسبت به انتقال و مقیاس ناوردا هستند؛ ترکیب‌های Hu ناوردایی چرخش می‌سازند. در حضور نویز مرز، ممان‌های مرتبه بالا ناپایدارند؛ لذا regularization مرز یا توصیف‌گرهای مبتنی بر transform distance اغلب مناسب‌ترند.

۱۸۰۷ مورفولوژی برداری، رنگی و چندطیفی

در تصویر چندکاناله، ترتیب طبیعی کامل وجود ندارد. اگر min و max مستقل کانالی اعمال شوند، ممکن است برداری تولید شود که اصلاً در داده وجود نداشته و رنگ کاذب بسازد. بنابراین باید یک preorder یا نگاشت مرتب‌ساز $\rho : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ تعریف شود. سه راهبرد رایج عبارت‌اند از ترتیب حاشیه‌ای، ترتیب کاهش‌یافته بر اساس یک scalarization، و ترتیب واژگانی.

برای ترتیب کاهش‌یافته با امتیاز $s(v)$، dilation برداری

$$(\delta_B f)(x) = f(x - y^*), \qquad y^* = \arg\max_{y \in B} s(f(x-y)) \tag{۳۸۰۷}$$

یکی از بردارهای واقعی پنجره را انتخاب می‌کند. انتخاب s باید با کاربرد سازگار باشد: روشنایی، فاصله ماهالانوبیس از پس‌زمینه، عمق طیفی یا projection آموخته‌شده.

خطای رایج

مورفولوژی مستقل روی کانال‌های RGB عموماً با هندسه رنگ سازگار نیست. برای تصویر رنگی، فضای رنگ، metric و ترتیب بردار بخشی از تعریف عملگرند و باید همراه نتیجه گزارش شوند.

۱۰۱۸۰۷ مورفولوژی ماتریسی و تانسوری

برای داده‌های SPD مانند تانسور انتشار یا ماتریس کوواریانس، ترتیب Loewner جزئی است:

$$A \preceq B \iff B - A \succeq 0. \tag{۳۹۰۷}$$

چون هر دو ماتریس الزاماً قابل مقایسه نیستند، sup/inf ممکن است یکتا نباشد. راه‌حل‌ها شامل embedding به فضای اقلیدسی، میانگین‌های ریمانی و تعریف dilation بر حسب بهینه‌سازی انرژی است. این نمونه نشان می‌دهد انتقال مورفولوژی از اسکالر به داده ساخت‌یافته یک مسئله جبری واقعی است.

۱۹۰۷ مورفولوژی روی گراف، مش و ابرنقاط

شبکه پیکسلی تنها یک گراف خاص است. روی گراف $G = (V, E)$، همسایگی $N(v)$ جای footprint انتقال‌پذیر را می‌گیرد:

$$(\delta f)(v) = \max_{u \in N[v]} f(u), \tag{۴۰۰۷}$$

$$(\varepsilon f)(v) = \min_{u \in N[v]} f(u). \tag{۴۱۰۷}$$

اگر یال‌ها وزن‌دار باشند، عنصر ساختاری می‌تواند توپ متریک گراف $B_r(v) = \{u : d_G(u,v) \le r\}$ باشد. این تعریف برای superpixel، graph، mesh شبکه راه، مولکول و ابرنقطه مناسب است.

۱.۱۹.۷ فاصله ژئودزیک و propagation

برای هزینه رأس $c(v) \ge 0$، فاصله ژئودزیک وزنی

$$d_c(s,v) = \min_{\pi: s \rightsquigarrow v} \sum_{u \in \pi} c(u) \tag{۴۲.۷}$$

است. رشد marker در این metric، نسخه‌ای از morphology ژئودزیک و پایه random watershed، walker و روش‌های propagation front است. با هزینه نامنفی، Dijkstra زمان $O(|E| \log |V|)$ دارد؛ روی های bucket صحیح، Dial می‌تواند سریع‌تر باشد.

الگوریتم ۹.۷: dilation گرافی با شعاع ژئودزیک

۱. از همه رأس‌های marker یک Dijkstra چندمبدأ آغاز کنید.
۲. رأس‌ها را تا فاصله r گسترش دهید و مبدأ برنده را ثبت کنید.
۳. در تساوی هزینه، قرارداد tie-breaking ثابت یا برچسب مرزی به کار ببرید.
۴. برای erosion، dilation مکمل یا شرط قرارگیری کامل توپ متریک را استفاده کنید.

۲.۱۹.۷ ابرنقاط و ناوردایی نمونه‌برداری

در ابرنقاط، k-NN با چگالی نمونه تغییر می‌کند. توپ شعاع فیزیکی، graph مبتنی بر geodesic و وزن‌گذاری بر اساس حجم Voronoi از وابستگی شدید به چگالی می‌کاهند. ارزیابی باید با subsampling تصادفی تکرار شود تا پایداری عملگر نسبت به نمونه‌برداری سنجیده شود.

۲.۷ مورفولوژی سه‌بعدی و وکسل ناهمسانگرد

در CT و MRI معمولاً spacing برابر نیست: $\Delta z \gg \Delta x, \Delta y$. استفاده از کره پیکسلی در چنین حجمی در فضای فیزیکی یک ellipsoid است. عنصر ساختاری فیزیکی شعاع r باید شرط

$$(\Delta x\, i)^2 + (\Delta y\, j)^2 + (\Delta z\, k)^2 \le r^2 \tag{۴۳.۷}$$

را برآورده کند.

۱.۲.۰.۷ اتصال‌های ۶، ۱۸ و ۲۶

در سه‌بعد، زوج اتصال پیش‌زمینه و پس‌زمینه باید سازگار باشد؛ زوج‌های متداول $(۶, ۲۶)$ و $(۲۶, ۶)$ هستند. اتصال ۱۸ حالت میانی است. در skeletonization جمعی، حفظ $\beta_۰, \beta_۱, \beta_۲$ مهم است؛ $\beta_۲$ تعداد حفره‌های جمعی محصور را نشان می‌دهد.

۲.۲.۰.۷ پیچیدگی حافظه

حجم $۵۱۲^۳$ بیش از ۱۳۴ میلیون وکسل دارد. یک آرایه float۳۲ حدود ۵۱۲ مگابایت است؛ نگهداری چند buffer به‌سرعت حافظه را پر می‌کند. الگوریتم‌های blockwise فقط وقتی صحیح‌اند که halo به اندازه برد عملگر داشته باشند و عملگرهای global مانند reconstruction یا tree component راهبرد ادغام مرزی صریح داشته باشند.

الگوریتم ۱.۰.۷: پردازش جمعی blockwise با halo

۱. شعاع مؤثر عملگر را در واحد وکسل هر محور محاسبه کنید.
۲. هر بلوک را با halo کافی بخوانید و نتیجه را فقط برای ناحیه داخلی بنویسید.
۳. برای عملگرهای iterative، تبادل halo را تا همگرایی ادامه دهید.
۴. برای CCL، برچسب‌های مرز بلوک‌ها را با union–find سراسری آشتی دهید.

۲.۱.۰.۷ عدم‌قطعیت و پایداری ساختار محلی

پاسخ‌های محلی خود متغیر تصادفی‌اند. اگر $f = s + n$ و $n \sim \mathcal{N}(۰, \sigma_n^۲ I)$، و فیلتر مشتق خطی h باشد،

$$\mathrm{Var}[(h * n)(x)] = \sigma_n^۲ \|h\|_۲^۲. \tag{۴۴.۷}$$

پس آستانه گرادیان باید با انرژی فیلتر و سطح نویز مقیاس شود. برای تانسور ساختار، عناصر ماتریس حاصل‌ضرب متغیرهای گاوسی‌اند و سوگیری نویز در قطر تقریباً قابل برآورد و کسر است.

۱.۲.۱.۰.۷ پایداری مورفولوژیک

برای dilation تخت در نرم بی‌نهایت،

$$\|\delta_B f - \delta_B g\|_\infty \le \|f - g\|_\infty, \tag{۴۵.۷}$$

و erosion نیز non-expansive است. اما topology دودویی پس از threshold می‌تواند با اغتشاش بسیار کوچک عوض شود. بنابراین پایداری شدت به‌تنهایی تضمین‌کننده پایداری شکل نیست.

۲.۲۱.۷ persistence به جای threshold منفرد

درخت مؤلفه و homology persistent هر ساختار را با طول عمر میان سطح تولد و مرگ توصیف می‌کنند. قله یا حفره‌ای که persistence اندک دارد غالباً نویز است. این دیدگاه، پارامتر h در h-maxima و pruning درخت را به سنجه‌ای کمتر وابسته به offset شدت متصل می‌کند.

۲.۲.۷ مورفولوژی، PDE و تکامل شکل

برای عناصر ساختاری کوچک، dilation و erosion با دیسک به معادلات همیلتون–ژاکوبی نزدیک می‌شوند:

$$\partial_t u = \|\nabla u\| \quad \text{(dilation)}, \qquad \partial_t u = -\|\nabla u\| \quad \text{(erosion)}. \tag{۴۶.۷}$$

opening/closing در حد پیوسته با جریان‌های curvature و فیلترهای هندسی مرتبط می‌شوند. این پل نشان می‌دهد مورفولوژی و روش‌های تغییراتی دو جزیره جدا نیستند.

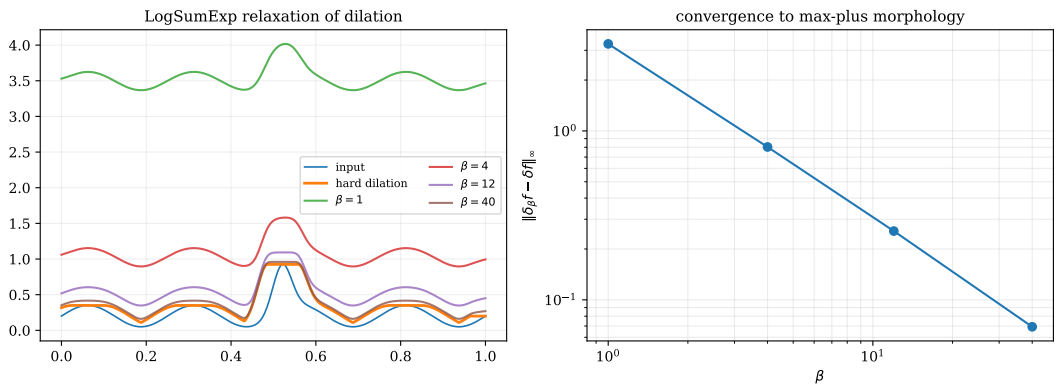
۲.۳.۷ مورفولوژی تفاضل‌پذیر

max و min کلاسیک تقریباً همه‌جا زیرگرادیان دارند اما گرادیان فقط از argmax/argmin عبور می‌کند و برای یادگیری عنصر ساختاری می‌تواند تنک و ناپایدار باشد. تقریب نرم

$$\mathrm{smax}_\tau(z_1, \dots, z_n) = \tau \log \sum_i e^{z_i/\tau}, \tag{۴۷.۷}$$

$$\mathrm{smin}_\tau(z) = -\tau \log \sum_i e^{-z_i/\tau} \tag{۴۸.۷}$$

با $\tau \to 0$ به max/min میل می‌کند.



شکل ۱.۲.۷: اثر دما بر تقریب نرم dilation و توزیع گرادیان میان اعضای پنجره.

۱.۲۳.۷ کران تقریب

برای n مقدار،

$$\max_i z_i \le \mathrm{smax}_\tau(z) \le \max_i z_i + \tau \log n. \tag{۴۹.۷}$$

پس دما مصالحه‌ای میان خطای تقریب و چگالی گرادیان است. annealing از دمای بزرگ به کوچک راهبرد طبیعی آموزش است.

۲.۲۳.۷ لایه مورفولوژیک قابل یادگیری

یک dilation قابل یادگیری

$$y(p) = \max_{q \in B}\{x(p-q) + w(q)\} \tag{۵۰.۷}$$

است. برخلاف convolution که جمع ضربی دارد، این لایه بر max-plus بنا شده و پاسخ آن به رخداد غالب محلی وابسته است. محدودکردن w، تقارن، تنکی footprint یا پارامتری‌کردن شکل عنصر ساختاری، prior مهندسی مفیدی ایجاد می‌کند.

۲.۴.۷ اسکلت تفاضل‌پذیر و قیود توپولوژیک

روش‌های soft-skeletonization با تکرار erosion نرم و استخراج باقیمانده، opening اسکلت تقریبی می‌سازند، اما ممکن است شاخه را قطع یا حلقه کاذب ایجاد کنند. روش‌های جدیدتر تلاش می‌کنند توپولوژی را حین سازگاری با backpropagation حفظ کنند. زیان اتصال می‌تواند بر skeleton پیش‌بینی و مرجع تعریف شود:

$$\mathcal{L}_{cl} = ۱ - \frac{۲\langle S(P), G\rangle}{\|S(P)\|_۱ + \|G\|_۱} + ۱ - \frac{۲\langle S(G), P\rangle}{\|S(G)\|_۱ + \|P\|_۱}. \tag{۵۱.۷}$$

اما این زیان جای سنجه‌های توپولوژیک مانند error Betti را نمی‌گیرد.

۲.۵.۷ مورفولوژی در شبکه‌های عمیق و مدل‌های بنیادی

مورفولوژی می‌تواند در چهار سطح وارد شود: پیش‌پردازش/پس‌پردازش؛ لایه max-plus/min-plus؛ ویژگی یا پروفایل ساختاری؛ و قید loss بر اتصال، اسکلت یا مؤلفه‌ها. برای مدل‌های بنیادی قطعه‌بندی، مورفولوژی همچنان برای تولید prompt، پاک‌سازی mask، جداسازی اشیای چسبیده و ممیزی topology کاربرد دارد.

خواندن مقاله و استاندارد:

ادغام بی‌فکر opening/closing پس از شبکه ممکن است Dice را بهتر ولی topology را بدتر کند. ارزیابی باید همزمان شامل Dice/IoU، فاصله مرزی، تعداد مؤلفه، Betti numbers، خطای مرکزخط و پایداری نسبت به رزولوشن باشد.

۲۶.۰۷ طراحی الگوریتم: از تعریف تا کد صحیح

برای هر عملگر مورفولوژیک، شش تصمیم باید ثبت شود:

۱. دامنه و نوع داده: دودویی، uint۸، float یا مقدارهای بی‌نهایت؛

۲. قرارداد مرز: constant، reflect replicate یا دامنه معتبر؛

۳. شکل و مرکز footprint، به‌ویژه برای اندازه زوج؛

۴. اتصال پیش‌زمینه/پس‌زمینه؛

۵. تفسیر پیکسل ناهمسانگرد و spacing فیزیکی؛

۶. معیار صحت و پیچیدگی حافظه/زمان.

۲۷.۰۷ کارگاه پایتون: پیاده‌سازی‌های مرجع

۱.۲۷.۰۷ خاکستری erosion و dilation

```python
import numpy as np
from scipy.ndimage import grey_dilation, grey_erosion

def morph_gradient(image: np.ndarray, footprint: np.ndarray) -> np.ndarray:
    if image.ndim != 2 or footprint.ndim != 2:
        raise ValueError("image and footprint must be 2-D")
    dil = grey_dilation(image, footprint=footprint, mode="reflect")
    ero = grey_erosion(image, footprint=footprint, mode="reflect")
    return dil.astype(np.float64) - ero.astype(np.float64)
```

۲.۲۷.۰۷ بازسازی و watershed marker-controlled

```python
import numpy as np
from scipy import ndimage as ndi
```

```python
from skimage import morphology, segmentation, filters

def split_touching(binary: np.ndarray) -> np.ndarray:
    binary = np.asarray(binary, dtype=bool)
    distance = ndi.distance_transform_edt(binary)
    peaks = morphology.h_maxima(distance, h=1.5)
    markers, _ = ndi.label(peaks)
    labels = segmentation.watershed(-distance, markers, mask=binary)
    return labels
```

۳.۲۷.۰۷ محاسبه توپولوژی پیش و پس از پردازش

```python
from skimage.measure import label, euler_number

def topology_report(mask):
    mask = mask.astype(bool)
    n4 = label(mask, connectivity=1).max()
    n8 = label(mask, connectivity=2).max()
    return {
        "components_4": int(n4),
        "components_8": int(n8),
        "euler_4": int(euler_number(mask, connectivity=1)),
        "euler_8": int(euler_number(mask, connectivity=2)),
    }
```

۲.۸.۰۷ آزمایش‌های فصل

۱.۲.۸.۰۷ آزمایش ۱: اتصال و پارادوکس دیجیتال

الگوهای قطری، حلقه و تماس نقطه‌ای بسازید و χ، β_1، β_0 را تحت زوج‌های اتصال مقایسه کنید.

۲.۲.۸.۰۷ آزمایش ۲: ساختار محلی زیر نویز

گرادیان، تانسور ساختار و هسین را در چند σ روی corner edge، و ridge مصنوعی با هایSNR مختلف ارزیابی کنید.

۳.۲۸.۷ آزمایش ۳: سرعت مورفولوژی

پیاده‌سازی naive را با Herk van و کتابخانه برای $k \in \{۳, ۱۵, ۶۳, ۲۵۵\}$ مقایسه و شیب زمان نسبت به k را گزارش کنید.

۴.۲۸.۷ آزمایش ۴: بازسازی در برابر opening

اشیای کشیده و لکه‌های کوچک بسازید؛ حذف نویز و اعوجاج شکل را با Hausdorff IoU، و تغییر محیط بسنجید.

۵.۲۸.۷ آزمایش ۵: EDT و اسکلت

EDT تقریبی chamfer و EDT دقیق را از نظر خطا و زمان مقایسه؛ سپس حساسیت شاخه‌های اسکلت به زبری مرز را اندازه‌گیری کنید.

۶.۲۸.۷ آزمایش ۶: watershed نشان‌محور

تعداد marker، مقدار h-maxima و میزان هموارسازی گرادیان را تغییر دهید. سپس نمودار under-segmentation/over-segmentation را بسازید.

۷.۲۸.۷ آزمایش ۷: morphology soft

برای دماهای مختلف، خطای تقریب entropy max، گرادیان و پایداری آموزش یک عنصر ساختاری را گزارش کنید.

۲۹.۷ تمرین‌های نظری و اثباتی

۱. دوگانگی $(X \oplus B)^c = X^c \ominus \check{B}$ را اثبات کنید.

۲. نشان دهید opening و closing ناشی از idempotent adjunction، هستند.

۳. ثابت کنید dilation تخت نسبت به سوپریمم تصاویر توزیع‌پذیر است.

۴. رابطه پاسخ تانسور ساختار با تقریب مرتبه دوم SSD وصله جابه‌جا شده را استخراج کنید.

۵. کران $\tau \log n$ برای log-sum-exp را اثبات کنید.

۶. نشان دهید EDT مربع اقلیدسی در دو بعد separable است.

۷. یک مثال بسازید که threshold بر ویژگی غیرافزایشی، max-tree سلسله‌مراتب را ناسازگار کند.

۸. شرایطی بیابید که watershed و forest spanning minimum برچسب یکسان دهند.

۹. اثر scaling رزولوشن بر compactness و طول اسکلت را تحلیل کنید.

۱۰. یک زیان dffierentiable پیشنهاد دهید که هم اتصال و هم ضخامت ساختار لوله‌ای را کنترل کند.

۷.۳ پروژه‌های پایان فصل

۷.۳.۱ پروژه A: آزمایشگاه مورفولوژی قابل ممیزی

یک بسته Python بسازید که همه عملگرها را با قرارداد مرز، footprint، اتصال و آزمون خواص جبری اجرا و گزارش HTML تولید کند.

۷.۳.۲ پروژه B: قطعه‌بندی اشیای چسبیده

خط لوله watershed marker-controlled را برای سلول، دانه یا ذرات طراحی و با روش یادگیری عمیق از نظر topology و خطای شمارش مقایسه کنید.

۷.۳.۳ پروژه C: شبکه مورفولوژیک

یک لایه max-plus با عنصر ساختاری قابل یادگیری پیاده‌سازی، دمای softmax را anneal و شکل آموخته‌شده را تحلیل کنید.

۷.۳.۴ پروژه D: مرکزخط توپولوژی‌آگاه

برای رگ یا جاده، segmentation و skeleton را مشترکاً آموزش دهید و Dice، clDice، Betti error و فاصله مرکزخط را گزارش کنید.

۷.۱۰ پرامپت پیشنهادی برای Codex

```
Build a fully reproducible Python research package for Chapter 7, "Local
Structure and Mathematical Morphology". Implement or wrap: connected-component
labeling with explicit 4/8 connectivity, Gaussian derivatives, structure tensor,
Hessian ridge measures, binary and grayscale morphology, van Herk sliding extrema,
morphological reconstruction, max-tree attribute filtering, exact Euclidean
```

```
distance transform, topology-preserving thinning, marker-controlled watershed,
granulometry, and soft differentiable morphology.

Requirements:
1. Every operator must expose border mode, footprint origin, connectivity, and
   physical pixel spacing where relevant.
2. Add property-based tests for increasingness, duality, extensivity/
   anti-extensivity, idempotence, and topology preservation.
3. Benchmark naive and optimized algorithms over image size and footprint size.
4. Produce all chapter figures and CSV tables with fixed random seeds.
5. Include synthetic cases with known ground truth and at least two real public
   images. Report accuracy, topology, runtime, and memory.
6. Implement a small PyTorch experiment that learns a soft max-plus structuring
   element with temperature annealing and compares it with convolution.
7. Never fabricate results. Save environment versions, command line arguments,
   and hashes of inputs.
```

۳۲۰۷ تقسیم پیشنهادی ویدئوهای ۱۵ دقیقه‌ای

بخش	موضوع
۱	مسئله ساختار محلی و تفاوت زبان دیفرانسیلی و مورفولوژیک
۲	همسایگی، اتصال و توپولوژی دیجیتال
۳	CCL و union–find
۴	مشتق گاوسی و فضای مقیاس
۵	تانسور ساختار و گوشه
۶	هسین و ridge/vesselness
۷	فیلتر steerable و LBP
۸	مشبکه، سوپریمم و اینفیمم
۹	adjunction و اثبات opening/closing
۱۰	مورفولوژی دودویی

۱۱	hit-or-miss و thinning
۱۲	مورفولوژی خاکستری و max-plus
۱۳	گرادیان و top-hat
۱۴	الگوریتم Herk van
۱۵	بازسازی مورفولوژیک
۱۶	h-maxima و marker پایدار
۱۷	عملگر متصل و max-tree
۱۸	فیلتر ویژگی درختی
۱۹	تبدیل فاصله و min-convolution
۲۰	الگوریتم خطی EDT
۲۱	محور میانی و بازسازی از اسکلت
۲۲	نقطه ساده و حفظ توپولوژی
۲۳	هرس و سنجه‌های اسکلت
۲۴	watershed توپوگرافیک
۲۵	watershed گرافی و صف اولویت
۲۶	گرانولومتری و spectrum pattern
۲۷	اندازه‌گیری شکل و ممان‌ها
۲۸	پیوند مورفولوژی و PDE
۲۹	morphology soft و کران تقریب
۳۰	لایه‌های max-plus قابل یادگیری
۳۱	اسکلت تفاضل‌پذیر و قیود توپولوژیک
۳۲	کارگاه scikit-image/OpenCV
۳۳	طراحی آزمایش و ممیزی الگوریتم
۳۴	پروژه پژوهشی و مرور مرز دانش

۳۳۰۷ جمع‌بندی و پل به فصل هشتم

جمع‌بندی فصل

۱. ساختار محلی با انتخاب همسایگی، مقیاس و گروه تبدیل معنا پیدا می‌کند.

۲. تانسور ساختار انرژی تغییر وصله را به یک فرم درجه دوم تبدیل و لبه/گوشه را با طیف خود جدا می‌کند.

۳. مورفولوژی ریاضی نظریه‌ای بر مبنای ترتیب و مشبکه است؛ dilation/erosion صرفاً فیلتر max/min نیستند.

۴. adjunction منشأ خواص بنیادی opening و closing است.

۵. بازسازی و عملگرهای متصل شکل اجزای باقی‌مانده را بهتر از footprint ثابت حفظ می‌کنند.
۶. max-tree تصویر را به سلسله‌مراتب اجزای تراز تبدیل می‌کند و فیلتر ویژگی را کارآمد می‌سازد.
۷. EDT دقیق با پوش پایین سهمی‌ها در زمان خطی محاسبه می‌شود.
۸. اسکلت یک نمایش فشرده هندسه، توپولوژی و مقیاس است، اما به نویز مرز حساس است.
۹. watershed بدون marker معمولاً بیش‌قطعه‌بندی می‌کند؛ کنترل مینیمم‌ها بخش اصلی الگوریتم است.
۱۰. morphology soft امکان یادگیری می‌دهد ولی دما، خطای تقریب و جریان گرادیان باید مشترکاً تحلیل شوند.
۱۱. در کاربردهای مدرن، Dice به تنهایی کافی نیست؛ centerline topology، و پایداری رزولوشن باید سنجیده شوند.
۱۲. فصل بعد می‌تواند بر قطعه‌بندی و نمایش ناحیه بنا شود، زیرا اکنون ابزارهای محلی، شکلی و توپولوژیک آماده‌اند.

منابع منتخب فصل

Bibliography

[1] J. Serra, *Image Analysis and Mathematical Morphology*, Academic Press, 1982.

[2] P. Soille, *Morphological Image Analysis*, 2nd ed., Springer, 2003.

[3] L. Najman and H. Talbot, eds., *Mathematical Morphology: From Theory to Applications*, Wiley, 2013.

[4] H. J. A. M. Heijmans, *Morphological Image Operators*, Academic Press, 1994.

[5] G. Matheron, *Random Sets and Integral Geometry*, Wiley, 1975.

[6] T. Lindeberg, *Scale-Space Theory in Computer Vision*, Springer, 1994.

[7] C. Harris and M. Stephens, “A combined corner and edge detector,” Alvey Vision Conference, 1988.

[8] J. Shi and C. Tomasi, “Good features to track,” CVPR, 1994.

[9] A. F. Frangi et al., “Multiscale vessel enhancement filtering,” MICCAI, 1998.

[10] T. Ojala, M. Pietikäinen, and T. Mäenpää, “Multiresolution gray-scale and rotation invariant texture classification with local binary patterns,” TPAMI, 2002.

[11] M. van Herk, “A fast algorithm for local minimum and maximum filters on rectangular and octagonal kernels,” Pattern Recognition Letters, 1992.

[12] J. Gil and M. Werman, “Computing 2-D min, median, and max filters,” TPAMI, 1993.

[13] L. Vincent, “Morphological grayscale reconstruction in image analysis: Applications and efficient algorithms,” TIP, 1993.

[14] P. Salembier, A. Oliveras, and L. Garrido, “Antiextensive connected operators for image and sequence processing,” TIP, 1998.

[15] L. Najman and M. Couprie, “Building the component tree in quasi-linear time,” TIP, 2006.

[16] E. Carlinet and T. Géraud, “A comparative review of component tree computation algorithms,” TIP, 2014.

[17] N. Passat and B. Naegel, “Morphological hierarchies: A unifying framework with new perspectives,” 2023.

[18] P. F. Felzenszwalb and D. P. Huttenlocher, “Distance transforms of sampled functions,” Theory of Computing, 2012.

[19] T. Y. Zhang and C. Y. Suen, “A fast parallel algorithm for thinning digital patterns,” CACM, 1984.

[20] T.-C. Lee, R. L. Kashyap, and C.-N. Chu, “Building skeleton models via 3-D medial surface/axis thinning algorithms,” CVGIP, 1994.

[21] F. Meyer, “Topographic distance and watershed lines,” Signal Processing, 1994.

[22] C. Couprie, L. Grady, L. Najman, and H. Talbot, “Power watershed: A unifying graph-based optimization framework,” TPAMI, 2011.

[23] Y. Shen, X. Zhong, and F. Y. Shih, “Deep morphological neural networks,” arXiv:1909.01532, 2019.

[24] J. Angulo, “Some open questions on morphological operators and representations in the deep learning era,” 2021.

[25] Y. Hu et al., “Learning deep morphological networks with neural architecture search,” 2021.

[26] S. Blusseau, “Training morphological neural networks with gradient descent: Some theoretical insights,” 2024.

[27] M. J. Menten et al., “A skeletonization algorithm for gradient-based optimization,” ICCV, 2023.

[28] S. Shit et al., “clDice: A novel topology-preserving loss function for tubular structure segmentation,” CVPR, 2021.

[29] A. Shamsi et al., “Improved topological preservation in 3D axon segmentation and centerline detection,” WACV, 2024.

[30] J. M. Forte et al., “Consistent connected operators based on trees of shapes,” SIAM Journal on Imaging Sciences, 2025.

[31] scikit-image Developers, “Morphology API: max-tree, reconstruction, skeletonize, medial axis and area operators,” documentation, accessed 2026.

[32] OpenCV Development Team, “Morphological transformations, distance transform and watershed,” documentation, accessed 2026.

راهنمای کامپایل، فونت و اجرای آزمایش‌ها

فایل با XeLaTeX کامپایل می‌شود. فونت اصلی Amiri، فونت لاتین DejaVu Serif و فونت کد DejaVu Sans Mono است و برای هر سه جایگزین خودکار تعریف شده است. فایل فونت در بسته توزیع نمی‌شود.

```
python -m venv .venv
# Windows: .venv\Scripts\activate
# Linux/macOS: source .venv/bin/activate
pip install -r requirements.txt
python generate_figures.py
xelatex image_processing_next_decade_ch07_fa.tex
xelatex image_processing_next_decade_ch07_fa.tex
```