



رو به سعادت در نوشتار

ریاضیات گسسته

سودابه محمدهاشمی - کیمیا محمدطاهری - یارا کامکار - بهزاد شایق

هر کس که وارد مبحث علم ریاضیات میشود باید توانایی درست خواندن و درک کردن و نوشتن مسائل و اثبات ها را کسب چیزی که برای ما اهمیت دارد درست نویسی است چرا که درست نوشتن اثبات ها نقش به سزایی در درست خواندن و درک کردن آن ها نیز دارد.

خیلی از اوقات پیش می آید که اثبات موضوعی بسیار منطقی ب نظر می آید ولی در واقع کاملاً اشتباه هست. به همین خاطر هست که ما نیاز داریم یاد بگیریم چگونه اثبات ها را دنبال کنیم. زمانی که اثبات ها را مرحله به مرحله با استدلال های منطقی و درست پیش ببریم میتوانیم از درست بودن و معتبر بودن نتیجه ای که به دست آورده ایم مطمئن باشیم. به علاوه این که در نهایت وقتی یاد بگیریم چگونه استدلال های به جا بیاوریم و اثباتمان را کامل کنیم، به فهم عمیق تری از ریاضیات و مسائل میرسیم.

پایه ی درست نویسی ساده است. فقط کافی است که دقت کنیم هر جمله ای که استفاده میکنیم یکی از موارد زیر باشد: ۱. فرض مسئله ۲. از جمله ی قبلی به طور شفاف نتیجه شده باشد. ۳. درستی آن قبلاً اثبات شده باشد.

در این جزوه ما سعی داریم شما را بیشتر با درست نویسی و نکاتی که در این جهت ما را سوق میدهند آشنا کنیم (تا در نهایت یاد بگیریم در دیگر مراحل زندگی مان هم با منطق باشیم.)

فصل ۱ : شمارش

سؤال ۱.۱.

سؤال ۲.۱.

سؤال ۳.۱.

۶۰ دانشجو در کلاس ریاضیات گسسته حضور دارند. در میان هر ۱۰ نفر از این کلاس، حداقل ۳ نفر نمره مبانی یکسانی دارند. ثابت کنید در این کلاس ۱۵ نفر وجود دارند که نمره مبانی آن ها یکسان است.

پاسخ .

(1.3.N.1) در نظر میگیریم حداکثر تعداد تکرار از یک نمره ۱۴ عدد است که در این صورت حداقل به ۵ نمره متفاوت نیاز است .
(1.3.N.2) در این صورت باز میتوان گروه ۱۰ تایی را از دانش آموزان انتخاب کرد که حداکثر دو نفر نمره یکسان داشته باشند . پس فرض اولیه غلط بوده و مشخص میشود که لااقل از یکی از نمرات وجود دارد که ۱۵ دانش آموز یا بیشتر آن نمره را دارند. (1.3.T.3)

نکات:

۱.N.۳.۱: در پاسخ از برهان خلف استفاده شده ولی از آن نام برده نشده است و باید توجه کنیم فرض خلف را حتما بیان کنیم.

۲.N.۳.۱: باید اصل لانه کبوتری که از آن استفاده کرده است را نام میرد و نحوه استفاده از آن مشخص شود.

۱.T.۳.۱: پاسخ کامل نیست. پاسخ درست و کامل در پایین آمده است.

پاسخ صحیح .

از برهان خلف استفاده می کنیم. فرض خلف : فرض کنید در این کلاس هیچ ۱۵ نفری وجود نداشته باشند که نمره ی مبانی آن ها یکسان باشد. در این صورت حداکثر ۱۴ نفر وجود دارند که نمره ی یکسان داشته باشند. بنابراین طبق اصل لانه کبوتری حداقل به اندازه ی سقف $\frac{60}{14}$ یعنی ۵ نمره ی متفاوت در کلاس وجود دارد. مسئله را به دو حالت تقسیم می کنیم :

۱. اگر پنج نمره ی متمایز وجود داشته باشند که از هر کدام ۲ عضو (دو نفر در کلاس که آن نمره را دارند) وجود داشته باشد؛ در این صورت از هر کدام از این نمرات دو عضو را در نظر گرفته و به مجموعه ای ۱۰ عضوی می رسیم که هیچ سه نفری در آن نمره ی یکسان ندارند که این خلاف فرض مسئله است و به تناقض رسیدیم. پس فرض خلف رد شده و حداقل ۱۵ نفر وجود دارند که نمره ی یکسانی داشته باشند.

۲. اگر پنج نمره ی متمایز، هر کدام دارای حداقل دو عضو وجود نداشته باشند؛ در این صورت $k \leq 4$ نمره ی متمایز با بیش از یک عضو داریم (مجموعه ی این نمرات را A بنامیم) که با توجه به فرض خلف، حداکثر تعداد $14 \times k$ عضو را پوشش می دهند. بنابراین حداقل $60 - 14k$ نفر باقی مانده که هیچ دو تایی نمی توانند دارای نمره ی یکسان باشند (در غیر این صورت تعداد نمره های

متمایز دارای بیشتر مساوی ۲ عضو به حداقل $k+1$ می‌رسد). بنابراین هر یک از این اعضا دارای نمره‌ای متمایز است (مجموعه‌ای این اعضا را B بنامیم). می‌توان با انتخاب دو عضو از هر نمره‌ی مجموعه‌ی A و تمام اعضای مجموعه‌ی B به مجموعه‌ای متشکل از $N = 2k + 60 - 14k = 60 - 12k$ عضو رسید که $k \leq 4 \Rightarrow N \geq 12$ و هیچ سه عضوی در آن دارای نمره‌ی یکسان نیستند. هر ده عضوی از این مجموعه انتخاب شود، نقض فرض مسئله است و به تناقض رسیدیم. پس فرض خلف رد شده و حداقل ۱۵ نفر وجود دارند که نمره‌ی یکسانی داشته باشند.

سؤال ۴.۱.

ضریب عبارت x^{12} در بسط عبارت $(1 - 4x)^{-5}$ را بیابید.

پاسخ .

طبق بسط دوجمله‌ای داریم: (1.4.N.1)

$$\frac{1}{(1 - 4x)^5} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{k} 4^k x^k$$

جمله ۱۲ام دنباله a_n ضریب x^{12} است. (1.4.N.2)

$$\rightarrow a_{12} = \binom{16}{12} 4^{12}$$

نکات:

۱.۴.۱.N.۱: بهتر است اصل بسط دوجمله‌ای هم نوشته شود.

۱.۴.۱.N.۲: قبل از استفاده از متغیر باید آن را تعریف کرد. تعریف دنباله a_n ضروری است.

پاسخ صحیح .

طبق جدول Useful Generating Functions از کتاب Rosen که استاد نیز به آن اشاره کردند داریم:

$$(1 - x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k$$

بنابراین در این سوال داریم:

$$(1 - 4x)^{-5} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{5+k-1}{k} (4x)^k$$

جمله x^{12} به ازای مقدار $k = 12$ ساخته می‌شود. بنابراین جواب برابر خواهد بود با:

$$\binom{16}{12} (4)^{12}$$

سؤال ۵.۱

سؤال ۶.۱.

با استفاده از توابع مولد نشان دهید تعداد روش های انتخاب ۴ عضو دو به دو نامتوالی از مجموعه اعداد $1, 2, 3, \dots, n$ برابر با انتخاب ۴ از $n-3$ است.

پاسخ .

یک زیرمجموعه از این نوع مثلاً ۱ و ۳ و ۷ و ۱۰ را انتخاب و نابرابری های اکید

$$0 < 1 < 3 < 7 < 10 < n + 1$$

را در نظر میگیریم. و بررسی میکنیم چند عدد صحیح بین هر دو عدد متوالی از این اعداد وجود دارند. در اینجا ۰ و ۱ و ۳ و ۷ و $n-10$ را به دست می آوریم: ۰ زیرا عددی صحیح بین ۰ و ۱ وجود ندارد و ۱ زیرا تنها عدد ۲ بین ۱ و ۳ وجود دارد و ۳ زیرا اعداد صحیح ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۳ وجود دارند و مجموع این ۵ عدد صحیح برابر $n - 4 = n - 10 + 1 + 3 + 2 + 0$ است. (1.6.E.1)

پس تابع مولد زیر را داریم.

$$\begin{aligned} G(x) &= (1 + x^2 + x^3 + \dots)^2 (x + x^2 + x^3 + \dots)^3 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right)^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1} \right)^3 = \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \cdot \left(\frac{x}{1-x} \right)^3 = \frac{x^3}{(1-x)^5} = x^3 (1-x)^{-5} = x^3 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{k} x^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{k} x^{k+3} = (1.6.E.2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+1}{k-3} x^k \end{aligned}$$

$$\binom{n-3}{n-7} = \binom{n-3}{4}$$

به دنبال ضریب x^{n-4} می‌گشیم پس $k = n - 4$ و جواب نهایی برابر است با

$$(1.6.N.3)$$

نکات:

۱.۶.۱.E: مثال زدن باید به صورتی باشد که حذف آن اختلالی در فهم جواب ایجاد نکند. در اینجا اگر مثال پاراگراف اول را حذف کنیم مشخص نیست تابع مولد برچه اساسی نوشته شده است. پس باید توضیحی درمورد تابع مولد و جمله ای که به دنبال ضریب آن هستیم بدهیم

۲.۶.۱.E: نیاز هست که کاملاً گفته شود چه تغییر متغیری انجام میشود. در اینجا تغییر متغیر $k \rightarrow k + 3$ را داریم. همیشه به هنگام تغییر متغیر توجه کنیم ممکن است کران ها تغییر کنند. در اینجا کران پایین از صفر به سه میرود. صورت اصلاح شده: $\sum_{k=3}^{\infty} \binom{k+1}{k-3} x^k$

۱.۶.۱.N: در طی پاسخ به سوال خوب است دقت کنیم همه ی اعداد را یا فارسی یا انگلیسی بنویسیم.

پاسخ .

تابع مولد فاصله از مبدا:

$$G(x) = (1 + x + x^2 + \dots)(x + x^2 + x^3 + \dots)^3$$

در مجموع $n-4$ عدد داریم. توان های x باید بین مبدا و مقصد باشند پس باید توانی از x را که کوچک تر یا مساوی $n-4$ هستند را بیاییم:

$$G(x) = \frac{x^3}{(1-x)^4} = x^3(1-x)^{-4} = x^3 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^k$$

$$\rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \binom{x+k}{k} = \frac{1}{(1+x)^{k+1}} \rightarrow k+3 \leq n-4 \rightarrow k \leq n-7$$

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{k=r}^n \binom{k}{r} \quad (1)$$

مجموع حالات:

$$\rightarrow \sum_{k=0}^{n-7} \binom{k+3}{3} \xrightarrow{(1)} \binom{n-7+4}{4} = \binom{n-3}{4} \quad (1.6.E.4)$$

نکات:

۳.E.۶.۱: به هنگام جایگذاری در فرمول باید جایگذاری ها واضح باشد. در این مثال در فرمول (۱) کران پایین از r هست ولی در قسمتی که از آن استفاده شده کران پایین از 0 است. همین مطلب گویای آن است که به توضیحات بیشتری نیاز هست. عبارت زیر صورت کامل شده این نکته است:

$$\rightarrow \sum_{k=0}^{n-7} \binom{k+3}{k} = \sum_{k=3}^{k-4} \binom{k}{k-3} = \sum_{k=3}^{n-4} \binom{k}{3} \xrightarrow[r \rightarrow 3, n \rightarrow n-4]{(1)} \binom{n-3}{4}$$

پاسخ صحیح .

تعداد عضوهای انتخاب نشده کوچکتر از عضو اول انتخاب شده را x_1 ، عضوهای انتخاب نشده بین عضو اول و دوم انتخاب شده را x_2 ، عضوهای انتخاب نشده بین عضو دوم و سوم انتخاب شده را x_3 ، عضوهای انتخاب نشده بین عضو سوم و چهارم انتخاب شده را x_4 و عضوهای انتخاب نشده بزرگتر از چهارمین عضو انتخاب شده را x_5 می گیریم. کافی است تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادله زیر را با شرایط $x_1, x_5 \geq 0, x_2, x_3, x_4 \geq 1$ بشماریم

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = n - 4$$

که برابر است با ضریب x^{n-4} در عبارت:

$$(1+x+x^2+\dots)(x+x^2+x^3+\dots)(x+x^2+x^3+\dots)(x+x^2+x^3+\dots)(1+x+x^2+\dots) = \frac{x^3}{(1-x)^5}$$

بنابراین کافی است ضریب x^{n-7} را در بسط $(1-x)^{-5}$ بشماریم .

طبق جدول Useful Generating Functions از کتاب Rosen که استاد نیز به آن اشاره کردند داریم:

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k$$

بنابراین در این سوال داریم:

$$(1-x)^{-5} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{5+k-1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{4} x^k$$

x^{n-7} به ازای $k = n - 7$ ساخته می‌شود. بنابراین جواب برابر است با:

$$\binom{n-3}{4}$$

سؤال ۷.۱.

اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sum_{i=0}^n i \binom{n}{i}^2 = \frac{n}{2} \binom{2n}{n}$$

پاسخ .

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i}^2 \xrightarrow{\times 2} 2A = \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i}^2 + \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i}^2 \xrightarrow{j=n-i} \\ 2A &= \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i}^2 + \sum_{j=0}^n (n-j) \binom{n}{n-j}^2 \rightarrow 2A = \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i}^2 + \sum_{j=0}^n (n-j) \binom{n}{j}^2 = \\ &\sum_{i=0}^n (i + (n-i)) \binom{n}{i}^2 \rightarrow 2A = n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 \rightarrow 2A = n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} \end{aligned}$$

بنابراین میدانیم که: (1.7.N.1)

$$2A = n \binom{2n}{n} \rightarrow A = \frac{n}{2} \binom{2n}{n}$$

نکات:

۱.N.۷.۱: باید فرمول و اتحاد های مورد استفاده و رفرنس معتبر آن ذکر شود . به عنوان رفرنس اسم اتحاد هم کافی است.

پاسخ صحیح .
طبق اتحاد واندرموند داریم:

$$\sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i}^2 \xrightarrow{\times 2} 2A = \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i}^2 + \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i}^2 \xrightarrow{j=n-i} \\
2A &= \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i}^2 + \sum_{j=0}^n (n-j) \binom{n}{n-j}^2 \rightarrow 2A = \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i}^2 + \sum_{j=0}^n (n-j) \binom{n}{j}^2 = \\
&\sum_{i=0}^n (i + (n-i)) \binom{n}{i}^2 \rightarrow 2A = n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 \rightarrow 2A = n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} \xrightarrow[m=n=k]{(1)} \\
&2A = n \binom{2n}{n} \rightarrow A = \frac{n}{2} \binom{2n}{n}
\end{aligned}$$