افکار سازگار ، نوشتار نابکار

ریاضیات گسسته

سودابه محمدهاشمی - کیمیا محمدطاهری

هرگاه نویسنده‌ای توانایی درست نوشتن را نداشته باشد در انتقال صحیح تراوشات فکری خود به خواننده ناکام می‌ماند. نوشتار در خصوص مباحث علم ریاضیات گسسته نیز علاوه بر درک درست از مفاهیم، نیاز به دانش «صحیح نوشتن» و روش به تحریر درآوردن مسائل و اثبات‌ها دارد تا بتواند هدف انتقال بی کم و کاست به خواننده را کسب نماید.

چیزی که واقعا اهمیت دارد این است که با درست نوشتن، خواننده درک صحیحی از راه و روش حل مسائل و اثبات‌ها کسب کند و توانایی درک و خلاقیت در کشف روش‌های حل مسائل را در خود ارتقاء بخشد. در بیشتر مواقع اثبات مسائل آسان و منطق حل مسائل بسیار دست یافتنی به نظر می‌آید ولی در واقع در زمان نوشتن حل مسائل و اثبات‌ها رویکرد اشتباهی را پیش می‌گیریم. به همین خاطر است که ما نیاز داریم یاد بگیریم که چگونه اثبات‌ها را دنبال کنیم.

هر چند که رعایت حداقل معیارهای درست نویسی و پیشبرد مرحله به مرحله‌ی حل مسائل و اثبات‌ها با استدلال‌های منطقی، خیال ما را نسبت به درست و معتبر بودن نوشته‌ی خود راحت می‌نماید ولی مطالعه‌ی متون فنی و تعمق در نوشتارهای غنیِ ما را به مرحله‌ای از بلوغ در نویسندگی می‌رساند که علاوه بر رسیدن به بهترین نتیجه‌ی ممکن، ما را در انتقال صحیح معنا و مفهوم و درك صحیح نوشته بسیار موفق می‌سازد و در نهایت زمانی که فرا بگیریم، چگونه با اتکا به استدلال‌های درست اثباتمان را کامل کنیم، به فهم عمیق‌تری از مسائل می‌رسیم.

پایه و بنیاد درست نویسی بسیار آسان است. تنها کافی است که دقت نماییم تا جملات استفاده شده به یکی از اشکال زیر باشد:

۱. خود فرض مسئله باشد.

۲. به صورت کاملا شفاف و واضح از جملات قبلی نتیجه شده باشد.

۳. درستی آن قبلا اثبات شده باشد.

در این جزوه تمام سعی و کوشش ما بر این بوده است تا شما را بیشتر با «درست نویسی» و نکاتی که خواننده را به این جهت سوق دهد آشنا کنیم. امید است که فراگیری نکات «درست نویسی» در تمامی مراحل زندگی راهبر و راهنمای شما باشد.

انواع نکات

در این جزوه با سه دسته نکته مواجه هستیم:

۱. دسته E: نکات درست نویسی که رعایت نکردن آن باعث ناقص شدن اثبات و در نتیجه کسر نمره می شود.

۲. دسته N: نکات درست نویسی که رعایت کردن آن‌ها واجب نیست، امابه خوانایی راه حل، ابهام زدایی، پرهیز از تکرار و جلوگیری از خطا کمک می کنند.

۳. دسته T: دام های آموزشی و خطاهای رایج در حل سوالات.

فصل ۱ : شمارش

سؤال ۱.۱.

سه مهره رخ متمایز و صفحه شطرنجی 8×8 داریم. به چند روش می‌توان این سه مهره را در سه خانه از این صفحه قرار داد به طوری که حداقل یک مهره وجود داشته باشد که توسط هیچ مهره‌ای تهدید نمی‌شود؟

پاسخ .

سوال را با اصل متمم حل می‌کنیم:
- کل حالات:

$$64 \times 63 \times 62$$

- حالات نامطلوب: حالاتی که همه رخ‌ها تهدید بشوند.
رخ اول برای قرار گیری در صفحه شطرنجی ۶۴ حالت دارد، حال چون رخ اول باید تهدید بشود رخ دوم را باید در سطر یا ستون رخ اول قرار بدهیم که ۱۴ حالت دارد. چون رخ سوم هم باید تهدید بشود باید در سطر یا ستون یکی از رخ ها باشد که در مجموع شامل ۶ خانه در سطر یا ستون مشترک دو رخ قبلی و ۱۴ خانه در سطرها یا ستون های غیر مشترک دو رخ است. پس کل حالت ها برابر است با:

$$64 \times 14 \times 20$$

- حالات مطلوب: طبق اصل متمم برابر است با:

$$64 \times 63 \times 62 - 64 \times 14 \times 20$$

نکات:

T.I : نشمردن همه حالت ها: در اینجا تمام حالات نامطلوب محاسبه نشده است، زیرا این امکان وجود دارد که رخ اول توسط رخ دوم تهدید نشود و این حالت در نظر گرفته نشده است.

N.II : بهتر بود اشاره شود که به دلیل تمایز رخ ها چنین نتیجه ای گرفته شده است.

پاسخ .

- کل حالات:

$$64 \times 63 \times 62$$

- حالات نامطلوب: حالاتی که همه رخ ها تهدید بشوند.

$$۶۴ \times ۷ \times ۲۰ \times ۲$$

- حالات مطلوب: طبق اصل متمم برابر است با:

$$۶۴ \times ۶۳ \times ۶۲ - ۶۴ \times ۱۴ \times ۲۰$$

نکات:

N.III : نبود توضیحات کافی برای عبارت: به دلیل نبود توضیحات کافی، تشخیص چرایی غلط بودن جواب نهایی ممکن نیست.

پاسخ صحیح .

- کل حالات: به دلیل تمایز رخ ها برابر است با:

$$P(۶۴, ۳) = ۶۴ \times ۶۳ \times ۶۲$$

- حالات نامطلوب: حالاتی که همه رخ ها تهدید بشوند.
دو حالت داریم:

۱. رخ اول رخ دوم را تهدید کند:
رخ اول برای قرار گیری در صفحه شطرنجی ۶۴ حالت دارد، حال چون رخ اول باید توسط رخ دوم تهدید بشود رخ دوم را باید در سطر یا ستون رخ اول قرار بدهیم که ۱۴ حالت دارد. چون رخ سوم هم باید تهدید بشود باید در سطر یا ستون یکی از رخ ها باشد که در مجموع شامل ۶ خانه در سطر یا ستون مشترک دو رخ قبلی و ۱۴ خانه در سطرها یا ستون های غیر مشترک دو رخ است. پس کل حالت ها برابر است با:

$$۶۴ \times ۱۴ \times ۲۰$$

۲. رخ اول رخ دوم را تهدید نکند:
رخ اول برای قرار گیری در صفحه شطرنجی ۶۴ حالت دارد، حال چون رخ اول نباید توسط رخ دوم تهدید بشود رخ دوم را در خانه ای به جز سطر یا ستون رخ اول قرار بدهیم که ۴۹ حالت دارد. حال رخ سوم باید هر دو رخ را تهدید کند پس باید در یکی از محل های تقاطع سطر و ستون رخ اول و رخ دوم قرار بگیرد که دو حالت دارد، پس کل حالت ها برابر است با:

$$۶۴ \times ۴۹ \times ۲$$

- حالات مطلوب: طبق اصل متمم برابر است با:

$$۶۴ \times ۶۳ \times ۶۲ - (۶۴ \times ۱۴ \times ۲۰ + ۶۴ \times ۴۹ \times ۲)$$

سؤال ۲.۱.

اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$۱^۲\binom{n}{۱} + ۲^۲\binom{n}{۲} + ۳^۲\binom{n}{۳} + \ldots + n^۲\binom{n}{n} = n(n+۱)۲^{n-۲}$$

پاسخ .

فرض کنید $P = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$ بیانگر تعداد راه های انتخاب یک کمیته از بین n کاندیدا است به طوری که یک فرد یا دو فرد متمایز، رئیس کمیته باشند. حال این شمارش را به روش دیگری انجام می دهیم.

۱. با فرض داشتن یک رئیس، رئیس را انتخاب کرده و تصمیم می‌گیریم که بقیه افراد حضور داشته باشند یا خیر و حالات به دست آمده را جمع می‌کنیم با حالاتی که ۲ رئیس را انتخاب کردیم در مورد حضور یا عدم حضور بقیه افراد تصمیم گرفتیم:

$$P = n \times 2^{n-1} + n \times (n-1) \times 2^{n-2} = n \times (n+1) \times 2^{n-2}$$

از تساوی این ۲ حالت حکم مساله اثبات می‌شود:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n \times (n+1) \times 2^{n-2}$$

نکات:

E.IV : عدم تطابق توضیحات با فرمول نوشته شده، انتخاب دو رئیس از میان n نفر $\binom{n}{2}$ حالت دارد نه $n \times (n-1)$.

N.V : بهتر است روش اثبات (دوگانه شماری)ذکر شود.

E.VI : یک طرف دوگانه شماری که نیازمند اثبات است، بدیهی در نظر گرفته شده است.

پاسخ صحیح .

سوال را با دوگانه شماری حل می کنیم:
فرض کنید P بیانگر تعداد راه های انتخاب یک کمیته از بین n کاندیدا است به طوری که یک فرد رئیس کمیته و یک نفر معاون باشند و رئیس و معاون می توانند یک نفر باشند. شمارش این راه ها به ۲ روش امکان پذیر است.

۱. با فرض یکسان بودن رئیس و معاون، رئیس را انتخاب کرده و تصمیم می‌گیریم که بقیه افراد حضور داشته باشند یا خیر و حالات به دست آمده را جمع می‌کنیم با حالاتی که رئیس و معاون متمایز را انتخاب کردیم و در مورد حضور یا عدم حضور بقیه افراد تصمیم گرفتیم:

$$P = n \times 2^{n-1} + n \times (n-1) \times 2^{n-2} = n \times (n+1) \times 2^{n-2}$$

۲. ابتدا این که چه اعضایی کمیته و رئیس و معاون را تشکیل دهند را انتخاب می‌کنیم که این تعداد می‌تواند هر عددی باشد، سپس رئیس و معاون یکسان یا متمایز را از بین آن ها انتخاب می‌کنیم:

$$P = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k(k-1)+k) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$$

از تساوی ۲ حالت فوق حکم مساله اثبات می‌شود:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n \times (n+1) \times 2^{n-2}$$

سؤال ۳.۱.

۶۰ دانشجو در کلاس ریاضیات گسسته حضور دارند.در میان هر ۱۰ نفر از این کلاس ، حداقل ۳ نفر نمره مبانی یکسانی دارند. ثابت کنید در این کلاس ۱۵ نفر وجود دارند که نمره مبانی آن ها یکسان است.

پاسخ .

در نظر میگیریم حداکثر تعداد تکرار از یک نمره ۱۴ عدد است که در این صورت حداقل به ۵ نمره متفاوت نیاز است . در این صورت باز میتوان گروه ۱۰ تایی را از دانش آموزان انتخاب کرد که حداکثر دو نفر نمره یکسان داشته باشند . پس فرض اولیه غلط بوده و مشخص میشود که لااقل از یکی از نمرات وجود دارد که ۱۵ دانش آموز یا بیشتر آن نمره را دارند.

نکات:

N.VII : در پاسخ از برهان خلف استفاده شده ولی از آن نام برده نشده است و باید توجه کنیم فرض خلف را حتما بیان کنیم.

N.VIII : باید اصل لانه کبوتری که از آن استفاده کرده است را نام میبرد و نحوه استفاده از آن مشخص شود.

T.IX : پاسخ کامل نیست. پاسخ درست و کامل در پایین آمده است.

پاسخ صحیح .

از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض خلف : فرض کنید در این کلاس هیچ ۱۵ نفری وجود نداشته باشند که نمره‌ی مبانی آن‌ها یکسان باشد. در این صورت حداکثر ۱۴ نفر وجود دارند که نمره‌ی یکسان داشته باشند. بنابراین طبق اصل لانه کبوتری حداقل به اندازه‌ی سقف $\frac{۶۰}{۱۴}$ یعنی ۵ نمره‌ی متفاوت در کلاس وجود دارد. مسئله را به دو حالت تقسیم می کنیم ؛

۱. اگر پنج نمره‌ی متمایز وجود داشته باشند که از هر کدام ۲ عضو (دو نفر در کلاس که آن نمره را دارند) وجود داشته باشد؛ در این صورت از هر کدام از این نمرات دو عضو را درنظر گرفته و به مجموعه‌ای ۱۰ عضوی می‌رسیم که هیچ سه نفری در آن نمره‌ی یکسان ندارند که این خلاف فرض مسئله است و به تناقض رسیدیم. پس فرض خلف رد شده و حداقل ۱۵ نفر وجود دارند که نمره‌ی یکسانی داشته باشند.

۲. اگر پنج نمره‌ی متمایز، هرکدام دارای حداقل دو عضو وجود نداشته باشند؛ در این صورت ۴ $\geq k$ نمره‌ی متمایز با بیش از یک عضو داریم (مجموعه‌ی این نمرات را A بنامیم) که با توجه به فرض خلف، حداکثر تعداد $k \times$ ۱۴ عضو را پوشش می‌دهند. بنابراین حداقل $۱۴k -$ ۶۰ نفر باقی مانده که هیچ دو تایی نمی‌توانند دارای نمره‌ی یکسان باشند (در غیر این صورت تعداد نمره‌های متمایز دارای بیشتر مساوی ۲ عضو به حداقل k+1 می‌رسد). بنابراین هر یک از این اعضا دارای نمره‌ای متمایز است (مجموعه‌ی این اعضا را B بنامیم). می‌توان با انتخاب دو عضو از هر نمره‌ی مجموعه‌ی A و تمام اعضای مجموعه‌ی B به مجموعه‌ای متشکل از $N = ۶۰ - ۱۲k = ۶۰ - ۱۴k + ۲k$ عضو رسید که $k \leq ۴ \Rightarrow N \geq ۱۲$ و هیچ سه عضوی در آن دارای نمره‌ی یکسان نیستند. هر ده عضوی از این مجموعه انتخاب شود، نقض فرض مسئله است و به تناقض رسیدیم. پس فرض خلف رد شده و حداقل ۱۵ نفر وجود دارند که نمره‌ی یکسانی داشته باشند.

سؤال ۴.۱.

ضریب عبارت $x^{۱۲}$ در بسط عبارت $(۱ - ۴x)^{-۵}$ را بیابید.

پاسخ .

طبق بسط دوجمله ای داریم:

$$\frac{۱}{(۱-۴x)^{۵}} = \sum_{k=۰}^{\infty} \binom{k+۴}{k} ۴^k x^k$$

جمله ۱۲ ام دنباله a_n ضریب $x^{۱۲}$ است. XI.

$$\longrightarrow a_{۱۲} = \binom{۱۶}{۱۲} ۴^{۱۲}$$

نکات:

N.X : بهتر است اصل بسط دوجمله ای هم نوشته شود.

E.XI : قبل از استفاده از متغیر باید آن را تعریف کرد. تعریف دنباله a_n ضروری است.

پاسخ صحیح .

طبق جدول Useful Generating Functions از کتاب Rosen که استاد نیز به آن اشاره کردند داریم:

$$(۱-x)^{-n} = \sum_{k=۰}^{\infty} \binom{n+k-۱}{k} x^k$$

بنابراین در این سوال داریم:

$$(۱-۴x)^{-۵} = \sum_{k=۰}^{\infty} \binom{۵+k-۱}{k} (۴x)^k$$

جمله $x^{۱۲}$ به ازای مقدار $k = ۱۲$ ساخته می‌شود. بنابراین جواب برابر خواهد بود با:

$$\binom{۱۶}{۱۲} (۴)^{۱۲}$$

سؤال ۱.۵.

چند عدد طبیعی حداکثر ۹ رقمی وجود دارد که مجموع ارقام آن برابر با ۳۲ باشد؟

پاسخ .

سوال را با اصل شمول و عدم شمول حل می کنیم:

$$|A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_۹| = \binom{۹}{۱}|A_۱| + \binom{۹}{۲}|A_۱ \cap A_۲| + \ldots + \binom{۹}{۹}|A_۱ \cap A_۲ \cap \ldots \cap A_۹|$$

حال مقدار عبارت ها را حساب می کنیم:

$$|A_۱| = \binom{۳۰}{۸}$$

$$|A_۱ \cap A_۲| = \binom{۲۰}{۸}$$

$$|A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = \binom{۱۰}{۸}$$

برای بقیه جمله ها جواب برابر ۰ است.
حال از اصل متمم برای به دست آوردن جواب نهایی استفاده می کنیم:
-کل حالات:

$$\binom{۴۰}{۸}$$

- حالات مطلوب:

$$\binom{۴۰}{۸} - \binom{۹}{۱}\binom{۳۰}{۸} + \binom{۹}{۲}\binom{۲۰}{۸} - \binom{۹}{۳}\binom{۱۰}{۸}$$

نکات:

E.XII : تعریف متغیر های A_i ضروری است، چون در غیر این صورت منظور از بقیه استدلال ها به هیچ وجه مشخص نیست.

E.XIII : اثبات و یا در صورت وضوح، اشاره به تقارن میان مجموعه ها برای استفاده از اصل شمول و عدم شمول به این شکل ضروری است.

پاسخ صحیح .

رقم i ام این عدد را با x_i نشان می دهیم، بنابراین به دنبال یافتن تعداد جواب های صحیح معادله زیر هستیم:

$$\sum_{۱}^{۹} x_i = ۳۲$$

$$\forall i \in [۱, ۹] : x_i \leq ۹$$

تعداد جواب های صحیح این معادله را به کمک اصل متمم پیدا می کنیم:
-کل حالات:تعداد جواب های صحیح نامنفی معادله $\sum_{۱}^{۹} x_i = ۳۲$. این یک معادله سیاله است و تعداد جواب های صحیح آن برابر است با:

$$\binom{۴۰}{۸}$$

-حالات نامطلوب:تعداد جواب های صحیح نامنفی معادله $\sum_{۱}^{۹} x_i = ۳۲$ به طوری که: $\exists i \in [۱, ۹] : x_i \geq ۱۰$
حال اگر مجموعه حالت هایی که در آن $x_i \geq ۱۰$ است را با A_iنشان دهیم، کافی است تعداد اعضای اجتماع این مجموعه ها را بیابیم طبق اصل شمول و عدم شمول و با توجه به تقارن میان A_i ها داریم:

$$|A_۱ \cup A_۲ \cup ... \cup A_۹| = \binom{۹}{۱}|A_۱| + \binom{۹}{۲}|A_۱ \cap A_۲| + ... + \binom{۹}{۹}|A_۱ \cap A_۲ \cap ... \cap A_۹|$$

برای محاسبه مقدار عبارت ها، در معادله سیاله متناظر، در صورتی که $x_i \geq ۱۰$ بود قرار می دهیم $x_i = y_i + ۱۰$ و در غیر این صورت قرار می دهیم $x_i = y_i$. حال اگر تعداد i هایی را که به ازای آن ها $x_i \geq ۱۰$ است را با k نشان بدهیم، حال به دنبال تعداد جواب های صحیح نامنفی معادله سیاله $\sum_{۱}^{۹} y_i = ۳۲ - ۱۰k$ هستیم، که برابر است با:

$$\binom{۴۰ - ۱۰k}{۸}$$

حال مقدار عبارت ها را حساب می کنیم:

$$|A_۱| = \binom{۳۰}{۸} \qquad\qquad (k=۱)$$

$$|A_۱ \cap A_۲| = \binom{۲۰}{۸} \qquad\qquad (k=۲)$$

$$|A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = \binom{۱۰}{۸} \qquad\qquad (k=۳)$$

برای بقیه جمله ها جواب برابر ۰ است.
پس کل حالات نامطلوب برابر است با:

$$\binom{۹}{۱}\binom{۳۰}{۸} - \binom{۹}{۲}\binom{۲۰}{۸} + \binom{۹}{۳}\binom{۱۰}{۸}$$

- حالات مطلوب: طبق اصل متمم برابر است با:

$$\binom{۴۰}{۸} - \binom{۹}{۱}\binom{۳۰}{۸} + \binom{۹}{۲}\binom{۲۰}{۸} - \binom{۹}{۳}\binom{۱۰}{۸}$$

سؤال ۶.۱.

با استفاده از توابع مولد نشان دهید تعداد روش های انتخاب ۴ عضو دو به دو نامتوالی از مجموعه اعداد n ،...،۱،۲،۳ برابر با انتخاب ۴ از n-۳ است.

پاسخ .

یک زیرمجموعه از این نوع مثلا ۱و۳و۷و۱۰ را انتخاب و نابرابری های اکید
$۰ < ۱ < ۳ < ۷ < ۱۰ < n+۱$
را در نظر میگیریم. و بررسی میکنیم چند عدد صحیح بین هر دو عدد متوالی از این اعداد وجود دارند. در اینجا ۰ و ۱ و۳ و 2 و n-۱۰ را به دست می آوریم: ۰ زیرا عددی صحیح بین 0 و ۱ وجود ندارد و ۱ زیرا تنها عدد ۲ بین ۱ و۳ وجود دارد و 3 زیرا اعداد صحیح ۴ و۵ و۶ بین ۳ و۷ وجود دارند و ... . مجموع این ۵ عدد صحیح برابر $0+1+3+2+n-10=n-4$ است. XIV

پس تابع مولد زیر را داریم.

$$G(x) = (۱+x^۲+x^۳+...)^۲(x+x^۲+x^۳+...)^۳ = (\sum_{k=۰}^{\infty} x^k)^۲ (\sum_{k=۰}^{\infty} x^{k+۱})^۳ =$$

$$\frac{۱}{(۱-x)^۲} . (\frac{x}{۱-x})^۳ = \frac{x^۳}{(۱-x)^۵} = x^۲(۱-x)^{-۵} = x^۳ \sum_{k=۰}^{\infty} \binom{k+۴}{k} x^k =$$

$$\sum_{k=۰}^{\infty} \binom{k+۴}{k} x^{k+۳} = (E.XV) \quad \sum_{k=۰}^{\infty} \binom{k+۱}{k-۳} x^k$$

به دنبال ضریب $x^{n-۴}$ میگشتیم پس $k=n-۴$ و جواب نهایی برابر است با $\binom{n-3}{n-7} = \binom{n-3}{4}$

نکات:

E.XIV : مثال زدن باید به صورتی باشد که حذف آن اختلالی در فهم جواب ایجاد نکند . در اینجا اگر مثال پاراگراف اول را حذف کنیم مشخص نیست تابع مولد برچه اساسی نوشته شده است. پس باید توضیحی درمورد تابع مولد و جمله ای که به دنبال ضریب آن هستیم بدهیم .

E.XV : نیاز هست که کاملا گفته شود چه تغییر متغیری انجام میشود . در اینجا تغییر متغیر $k \to k+۳$ را داریم. همیشه به هنگام تغییر متغیر توجه کنیم ممکن است کران ها تغییر کنند. در اینجا کران پایین از صفر به سه میرود. صورت اصلاح شده: $\sum_{k=۳}^{\infty}\binom{k+۱}{k-۳}x^k$

N.XVI : در طی پاسخ به سوال خوب است دقت کنیم همه ی اعداد را یا فارسی یا انگلیسی بنویسیم.

پاسخ .

تابع مولد فاصله از مبدا:

$$G(x)=(۱+x+x^۲+...)(x+x^۲+x^۳+...)^۳$$

در مجموع n-۴ عدد داریم . توان های x باید بین مبدا و مقصد باشند پس باید توانی از x را که کوچک تر یا مساوی n-۴ هستند را بیابیم:

$$G(x)=\frac{x^۳}{(۱-x)^۴}=x^۳(۱-x)^{-۴}=x^۳\sum_{k=۰}^{\infty}\binom{k+۳}{۳}x^k$$

$$\longrightarrow \sum_{k=۰}^{\infty}\binom{x+k}{k}=\frac{۱}{(۱+x)^{k+۱}} \longrightarrow k+۳\leq n-۴ \to k\leq n-۷$$

$$\binom{n+۱}{r+۱}=\sum_{k=r}^{n}\binom{k}{r} \qquad (۱)$$

مجموع حالات:

$$\longrightarrow \sum_{k=۰}^{n-۷}\binom{k+۳}{۳}\xrightarrow{(۱)}\binom{n-۷+۴}{۴}=\binom{n-۳}{۴}$$

نکات:

E.XVII : به هنگام جایگذاری در فرمول باید جایگذاری ها واضح باشد. در این مثال در فرمول (۱) کران پایین از r هست ولی در قسمتی که از آن استفاده شده کران پایین از ۰ است. همین مطلب گویای آن است که به توضیحات بیشتری نیاز هست.

عبارت زیر صورت کامل شده این نکته است:

$$\longrightarrow \sum_{k=۰}^{n-۷}\binom{k+۳}{k}=\sum_{k=۳}^{k-۴}\binom{k}{k-۳}=\sum_{k=۳}^{n-۴}\binom{k}{۳}\xrightarrow[r\to۳,n\to n-۴]{(۱)}\binom{n-۳}{۴}$$

پاسخ صحیح .

تعداد عضوهای انتخاب نشده کوچکتر از عضو اول انتخاب شده را $x_۱$، عضوهای انتخاب نشده بین عضو اول و دوم انتخاب شده را $x_۲$، عضوهای انتخاب نشده بین عضو دوم و سوم انتخاب شده را $x_۳$، عضوهای انتخاب نشده بین عضو سوم و چهارم انتخاب شده را $x_۴$ و

عضوهای انتخاب نشده بزرگ‌تر از چهارمین عضو انتخاب شده را x_5 می‌گیریم. کافی است تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله زیر را با شرایط $x_2x_3, x_4 \geq 1$ $x_1, x_5 \geq 0$ بشماریم

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = n - 4$$

که برابر است با ضریب x^{n-4} در عبارت:

$$(1+x+x^2+\ldots)(x+x^2+x^3+\ldots)(x+x^2+x^3+\ldots)(x+x^2+x^3+\ldots)(1+x+x^2+\ldots) = \frac{x^3}{(1-x)^5}$$

بنابراین کافی است ضریب x^{n-7} را در بسط $(1-x)^{-5}$ بشماریم .

طبق جدول Useful Generating Functions از کتاب Rosen که استاد نیز به آن اشاره کردند داریم:

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k$$

بنابراین در این سوال داریم:

$$(1-x)^{-5} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{5+k-1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{4} x^k$$

x^{n-7} به ازای $k = n - 7$ ساخته می‌شود. بنابراین جواب برابر است با:

$$\binom{n-3}{4}$$

سؤال ۱.۷.

اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

پاسخ .

$$A = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i+1}{k+1} - \binom{i}{k+1} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i+1}{k+1} - \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k+1}$$

$$= \binom{n+1}{k+1} + \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i+1}{k+1} - (0 + \sum_{i=k+1}^{n} \binom{i}{k+1}) = \binom{n+1}{k+1} + \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i+1}{k+1} - \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i+1}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

نکات:

N.XVIII : باید فرمول و اتحاد های مورد استفاده و رفرنس معتبر آن ذکر شود . به عنوان رفرنس اسم اتحاد هم کافی است.

پاسخ صحیح .

طبق اتحاد پاسکال داریم:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

پس طبق این اتحاد می توان نوشت:

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i+1}{k+1} - \binom{i}{k+1} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i+1}{k+1} - \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k+1}$$

$$= \binom{n+1}{k+1} + \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i+1}{k+1} - (0 + \sum_{i=k+1}^{n} \binom{i}{k+1}) = \binom{n+1}{k+1} + \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i+1}{k+1} - \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i+1}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

فصل ۲ : منطق

سؤال ۱.۲.

گزاره های زیر همگی درست هستند، با در نظر گرفتن آن‌ها، درستی یا نادرستی گزاره های ۱ و ۲ را بررسی کنید.

- اگر کار نداشته باشم یا پولدار باشم، تفریح می کنم.
- اگر تفریح بکنم، فیلم می بینم یا بستنی می خورم.
- بستنی نمی خورم و می خوابم.
- اگر بخوابم، فیلم نمی بینم.

گزاره ها:

۱. من کار دارم.

۲. من پولدار هستم.

پاسخ .

چون خوابیدم، فیلم هم ندیدم، پس چون فیلم ندیدم، تفریح هم نکردم، پس طبق شرط اول، من پولدار نیستم و کار دارم.

نکات:

N.XIX : بهتر است برای جلو گیری از اشتباه، از نوشتار منطقی استفاده کرده و فارسی ننویسیم.

E.XX : باید فقط از تبدیلات تعریف شده استفاده کرد و استفاده از تبدیلات دیگر بدون اثبات صحیح نیست، مثلا در اینجا فیلم ندیدن مستقیما تفریح نکردن را نتیجه نمی دهد.

پاسخ صحیح .

هر گزاره را با یک حرف نشان می دهیم:

- من کار دارم $= p$
- من پولدار هستم $= q$
- من تفریح می کنم $= r$
- من فیلم می بینم $= s$

- $t =$ من بستنی می خورم
- $u =$ من می خوابم

فرض ها:

- $q \vee \neg p \implies r$
- $r \implies s \vee t$
- $\neg t \wedge u$
- $u \implies \neg s$

حال داریم:

۱. $\neg t \wedge u$(فرض)

۲. u(طبق ۱: ساده سازی عطفی)

۳. $u \implies \neg s$ (فرض)

۴. $\neg s$ (طبق ۳و۴)

۵. $\neg t$ (طبق ۱: ساده سازی عطفی)

۶. $\neg t \wedge \neg s$ (طبق ۳و۴: ترکیب عطفی)

۷. $r \implies s \vee t$(فرض)

۸. $\neg(s \vee t) \implies \neg r$(طبق ۷: عکس نقیض)

۹. $\neg s \wedge \neg t \implies \neg r$(طبق ۸: دمورگان)

۱۰. $\neg r$(طبق ۶و۹)

۱۱. $q \wedge \neg p \implies r$(فرض)

۱۲. $\neg r \implies \neg(q \vee \neg p)$(طبق ۱۱: عکس نقیض)

۱۳. $\neg(q \vee \neg p)$(طبق ۱۰و۱۲)

۱۴. $\neg q \wedge p$(طبق ۱۳: دمورگان)

۱۵. $\neg q$(طبق ۱۴: ساده سازی عطفی)

۱۶. p(طبق ۱۴: ساده سازی عطفی)

پس ۱ صحیح و ۲ غلط است.

سؤال ۲.۲.

صفحه‌ای دو بعدی را در نظر بگیرید که از هر دو طرف تا بینهایت ادامه دارد و با دو رنگ آن را رنگ کرده‌ایم (حتما از هر دو رنگ استفاده شده است). آیا دو نقطه به فاصله d (عدد حقیقی) وجود دارد که هم‌رنگ باشند؟

پاسخ .

درستی نقیض خواسته سوال را اثبات می‌کنیم.
حکم سوال : دو نقطه به فاصله d (عدد حقیقی) وجود دارد که هم‌رنگ باشند.
نقیض حکم سوال : وجود دارد دو نقطه به فاصله d که دو رنگ مختلف باشند.
دو نقطه با دو رنگ متفاوت را در نظر می‌گیرم. فاصله این دو نقطه $kd + r$ است به طوری که k عدد صحیح نامنفی و $r < k$ است. اگر k بیشتر مساوی یک باشد از نقطه چپ ، به اندازه d سمت راست می‌آییم. این نقطه باید همرنگ باشد و این انتقال را آنقدر ادامه می‌دهیم تا $k = ۰$ شود. حالا به دو نقطه ای رسیده‌ایم که فاصله‌ای کمتر از d دارند و از دو رنگ متفاوت هستند. سپس نقطه سوم به فاصله d از این دو نقطه در نظر می‌گیریم. یک مثلث متساوی الساقین تشکیل می‌شود. بنابراین راس سوم حتما با یکی از دو راس دیگر رنگ متفاوت خواهد داشت. در اینجا ثابت کردیم نقیض حکم سوال درست است پس حکم سوال نادرست می‌باشد.

نکات:

T.XXI : نقیض حکم سوال به نادرستی بیان شده است. فرض کنید P(x,y) هم‌رنگ بودن دو نقطه x و y باشد. D(x,y) به فاصله d بودن دو نقطه x و y باشد.
حکم سوال بیان میکند که : $\exists x, y(D(x,y) \wedge P(x,y))$
برای نقیض کردن آن داریم:

$$\neg\exists x, y, (D(x,y) \wedge P(x,y)) = \forall x, y, (\neg(D(x,y) \wedge P(x,y)) = \forall x, y, (\neg D(x,y) \vee \neg P(x,y))$$

به صورت فارسی می‌توان گفت : هیج دو نقطه به فاصله‌ی d هم‌رنگ نیستند.
در صورتی که جمله‌ی 'وجود دارد دو نقطه به فاصله d که دو رنگ مختلف باشند.' به شکل منطقی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\exists x, y, (D(x,y) \wedge \neg P(x,y))$$

در گزاره‌های منطقی واضح است نقیض کردن اشتباه انجام شده است.

E.XXII : به طور کلی در نظر داشته باشد، توجه به نگرش پایه‌ای و گام به گام منطق در تمامی حل سوالات (حتی مباحث غیرمنطق) به تمیزتر نوشتن و پرهیز از اشتباه کمک می‌کند. به همین علت مهم و مورد انتظار است.

پاسخ صحیح .

اصل لانه‌ی کبوتری: به ازای n لانه و $n + ۱$ کبوتر با فرض اینکه هر کبوتر در یکی از لانه‌ها قرار دارد؛ دو کبوتر وجود دارند که در یک لانه قرار دارند.

قبل از شروع اثبات اسم رنگ اول را قرمز و رنگ دوم را آبی می‌گذاریم.

حال مثلثی متساوی‌الاضلاع را در نظر بگیرید که اندازه‌ی هر ضلع آن d است. بدیهی است که این مثلث را می‌توان در صفحه(طبق فرض مسئله صفحه بی‌نهایت است) در نظر گرفت که طبق اصل لانه‌ی کبوتری روی سه نقطه و دو رنگ، دو نقطه از این سه نقطه هم‌رنگند. این دو نقطه، دو نقطه به فاصله d و هم‌رنگند.

نکات:

N.VIII

سؤال ۳.۲.

چگونگی اثبات درستی یا نادرستی جمله زیر را توضیح دهید.
تابع q(x,y) را تعریف می‌کنیم اگر p(x) درست باشد p(x+y) و در غیر این صورت نقیض p(x-y) را نتیجه می‌دهد.

پاسخ .

جمله بالا را به صورت یک گزاره منطقی می‌نویسیم.

$$(\forall x, p(x)) \rightarrow (\exists y, q(x, y))$$

حال با یک مثال ، نادرستی گزاره فوق را نشان می‌دهیم.
سمت چپ گزاره $(\forall x, p(x))$ را P و سمت راست $(\exists y, q(x, y))$ را Q می‌نامیم. پس داریم: $P \rightarrow Q$
x_1 را در نظر می‌گیریم طوری که P درست باشد. سپس y_1 را طوری انتخاب می‌کنیم که Q نادرست باشد.

$$P = True \rightarrow Q = False$$

بنابراین طبق جدول truth-table گزاره فوق نادرست خواهد بود.

نکات:

E.XXII

T.XXIII : از سورها به نادرستی تعبیر شده است. در عبارت Q سور وجودی داریم. بنابراین نمی‌توان y_1 را طوری انتخاب کرد که Q نادرست باشد.

پاسخ صحیح .

جمله بالا را به صورت یک گزاره منطقی می‌نویسیم.

$$(\forall x, p(x)) \rightarrow (\exists y, q(x, y))$$

چون در قسمت سمت چپ از سور عمومی استفاده شده است x_1 را طوری می‌یابیم که ناقض P باشد. بنابراین طبق truth-table درستی یا نادرستی Q اهمیتی ندارد.

$$P = False \rightarrow Q = -$$

پس در کل گزاره فوق درست است.

فصل ۳ : ناوردایی

سؤال ۱.۳.

اعداد ۱ تا ۲۰ را روی تخته نوشته‌ایم. هر بار می‌توانیم دو عدد a, b را از روی تخته پاک کرده و عدد b + a + ab را روی تخته بنویسیم. عدد نهایی روی تخته را بیابید.

پاسخ .

در هربار حاصل ضرب اعداد روی تخته + ۱ ثابت است. این عدد برابر !۲۱ است. پس عدد نهایی ۱ − !۲۱ خواهد بود.

نکات:

N.XXIV : از نوشتن جملات فارسی که ایجاد ابهام می‌کنند بپرهیزید و حتی‌الامکان عبارات را به صورت ریاضی بنویسید. از جمله بالا می‌توان $a_1 * a_2 * a_3 * \ldots * a_n + 1$ را تعبیر کرد در صورتی که مقصود $(a_1+1) * (a_2+1) * (a_3+1) * \ldots * (a_n+1)$ بوده است.

E.XXV : اثبات ناوردا بودن یک مقدار از مهم‌ترین موارد مساله‌های ناوردایی می‌باشد. در این پاسخ، این مورد اثبات نشده است.

پاسخ صحیح .

مساله را با ناوردائی حل می‌کنیم. سوال را برای اعداد دلخواه حل کرده سپس اعداد یک تا بیست را در نتیجه‌ی نهایی لحاظ می‌کنیم. فرض می‌کنیم در ابتدای مساله اعداد x_{20} ، x_{19} ، ... ، x_2 ، x_1 را داریم. به ازای هر عدد x_i ، y_i را به این صورت در نظر می‌گیریم: $y_i = x_i + 1$

مقدار ناوردا را S در نظر می‌گیریم و آن به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S = y_1 \times y_2 \times \ldots \times y_{19} \times y_{20}$$

ادعا می‌کنیم در هر مرحله با برداشتن دو عدد دلخواه a و b و گذاشتن عدد $a + b + ab$ به جای آن، مقدار S ثابت می‌ماند. حال به اثبات آن می‌پردازیم:

فرض می‌کنیم در مرحله‌ی اول دو عدد دلخواه x_iو x_j را انتخاب می‌کنیم و به جای آن $x_i + x_j + x_i x_j$ قرار می‌دهیم. این مقدار درواقع معادل $(x_i + 1)(x_j + 1) - 1$ می‌باشد.بدین ترتیب مقدار S که تاکنون برابر $(x_1 + 1)(x_2 + 1) \ldots (x_{20} + 1)$ بوده است؛ به صورت زیر به‌روزرسانی خواهد شد:

$$S = \Big(\prod_{k=1, k\neq i,j}^{20} (x_k + 1)\Big)(((x_i + 1)(x_j + 1) - 1) + 1)$$
$$= \Big(\prod_{k=1, k\neq i,j}^{20} (x_k + 1)\Big)(x_i + 1)(x_j + 1)$$
$$= (x_1 + 1)(x_2 + 1)\dots(x_{20} + 1)$$

بنابراین در هرگام و با انتخاب هر دو عدد دلخواه، مقدار تعریف شده برای S ثابت خواهد ماند. بدین ترتیب عدد باقیمانده روی تخته برای اعداد یک تا بیست برابر است با:

$$(1 + 1)(2 + 1)\dots(20 + 1) - 1 = 21! - 1$$

(از آن‌جایی که مقدار ناوردا بر اساس y_i تعریف شده است. در نهایت مقدار نهایی که براساس x_i است، یک واحد از مقدار ناوردا کمتر خواهد بود.)

سؤال ۲.۳.

در یک ردیف ۲۰۰۰ عدد نوشته شده است. فرض کنید به ازای هر عدد a در این دنباله، f(a) برابر با تعداد دفعاتی باشد که a در دنباله آمده است. در هر مرحله به ازای هر عضوی از دنباله مثل x مقدار f(x) را زیر آن می‌نویسیم تا یک دنباله ۲۰۰۰ تایی جدید حاصل شود. آیا می‌توان این دنباله را تا ابد ادامه داد به طوری که هیچ دو دنباله متوالی باهم برابر نباشند؟

پاسخ .

خیر این حالت امکان‌پذیر نیست. چون لازم است تعداد اعداد تکرار شده در هر مرحله باهم متفاوت باشد و پس از گذر از چند مرحله این امکان از بین می‌رود.

نکات:

E.XXVI : استدلال فوق شهودی است و شهود به هیچ عنوان ارزش ریاضی ندارد.

پاسخ صحیح .

با ناوردایی مساله را حل می‌کنیم. مقدار ناوردا در این مساله، تعداد جملات متمایز و متفاوت است. اولین دنباله‌ی جدید ایجاد شده را در نظر بگیرید. در این دنباله به تعداد عددهایی که در دنباله‌ی قبلی i بار آمده‌بودند، جمله با مقدار i داریم. یعنی اگر در دنباله‌ی قبلی x عدد داشتیم، که هر یک i بار تکرار شده باشند، در دنباله‌ی جدید، $i \times x$ جمله با مقدار i خواهیم داشت. بدین ترتیب در هرگام تعداد جملات متمایز موجود در دنباله همواره کاهش می‌یابد. اگر زمانی باشد که این تعداد ثابت بماند، دنباله در مرحله‌ی بعد و دومرحله بعد آن یکسان خواهند بود و مساله حل است. در غیر این صورت یک تابع ناوردای کاهشی داریم. از طرفی کران گام نیز داریم. چون تعداد عدد صحیح می‌باشد، این کران یک خواهد بود. هم‌چنین چون مقدار ناوردای کاهشی داریم و همواره در طی گام‌ها مقدار ناوردای انتخابی کم می‌شود و کران پایین هم داریم (تعداد جملات در کمترین حالت ممکن می‌توانند صفر باشند)، بالاخره به نقطه‌ای خواهیم رسید که تعداد جملات متمایز یک خواهد بود و تمام جملات دنباله یکسان می‌شوند و از آن پس دیگر دنباله‌ی متمایز نخواهیم داشت.

سؤال ۳.۳.

ثابت کنید ۱۰۰۰۰۰ عدد طبیعی متوالی می‌توان یافت که در بین آن‌ها دقیقا ۵ عدد اول وجود دارد.

پاسخ .

اعداد ۱ تا ۱۰۰۰۰۰ را در نظر بگیرید، بین این اعداد بیشتر از ۵ عدد اول وجود دارد.

حال دنباله اعداد

$$۱۰۰۰۰۰!, ۱۰۰۰۰۰! + ۱, ۱۰۰۰۰۰! + ۲, ..., ۱۰۰۰۰۰! + ۹۹۹۹۹$$

را در نظر بگیرید، این دنباله حداکثر ۱ عدد اول دارد بنابراین قطعا بین این دنباله و دنباله اعداد ۱ تا ۱۰۰۰۰۰ دنباله‌ای وجود دارد که دقیقا ۵ عدد اول دارد.

نکات:

E.XXVII : نتیجه گیری نهایی نیاز به اثبات دارد.

پاسخ صحیح .

اعداد ۱ تا ۱۰۰۰۰۰ را در نظر بگیرید، بین این اعداد حداقل ۶ عدد اول وجود دارد.(۱۳،۱۱،۷،۵،۳،۲)

حال دنباله اعداد

$$۱۰۰۰۰۰!, ۱۰۰۰۰۰! + ۱, ۱۰۰۰۰۰! + ۲, ..., ۱۰۰۰۰۰! + ۹۹۹۹۹$$

را در نظر بگیرید، این دنباله حداکثر ۱ عدد اول دارد. چون به ازای تمام i های بین ۲ و ۹۹۹۹۹ داریم:

$$۱۰۰۰۰۰! + i = i(\frac{(۱۰۰۰۰۰!)}{i} + ۱)$$

پس این اعداد اول نیستند و تنها عددی که ممکن است اول باشد عدد $۱۰۰۰۰۰! + ۱$ است.

حال از دنباله اولیه شروع می کنیم و در هر گام، کوچک‌ترین عدد دنباله را حذف کرده و عدد بعد از بزرگ‌ترین عدد را به آن اضافه می کنیم. در هر گام تعداد اعداد اول دنباله حداکثر یک واحد تغییر می‌کند. بنابراین چون در ابتدا دنباله بیش از ۵ عدد اول و در زمان رسیدن به دنباله دوم، حداکثر ۱ عدد اول دارد،طبق پیوستگی گسسته، دنباله‌ای در این گام‌ها وجود دارد که دقیقا ۵ عدد اول دارد.

سؤال ۴.۳.

سه دسته سنگریزه داریم که به ترتیب شامل ۱۱، ۱۸۵ و ۱۸۹ سنگریزه هستند. در هر حرکت می‌توانیم دو دسته از سنگریزه‌ها را با هم ترکیب کرده و یا یک دسته که تعداد زوجی سنگریزه دارد را به دو دسته با تعداد سنگریزه‌های یکسان تقسیم کنیم. آیا می‌توانیم در نهایت به ۳۸۵ دسته برسیم که هر کدام ۱ سنگریزه دارند؟

پاسخ .

مشاهده می‌شود که برای این که به دسته های با یک سنگریزه برسیم، باید تعداد سنگریزه دسته‌ها مقسوم علیه مشترک بزرگتر از ۱ نداشته باشند زیرا مقسوم علیه مشترک در اینجا یک ناوردا است. در مورد این دسته‌ها هم این موضوع صدق می کند، پس می توان این تقسیم را انجام داد.

نکات:

E.XXV

T.XXVIII : نمی‌توان از برقرار بودن شرط لازم برای برقراری یک حکم، به درست بودن آن رسید. مثلا در این جواب، مقسوم علیه مشترک بیشتر از یک نداشتن دسته ها، شرط لازم برای برقراری حکم است اما کافی نیست، بنابرین نمی توان از آن برای اثبات درست بودن حکم استفاده کرد.

پاسخ صحیح .

برای شروع، از آن‌جایی که تعداد سنگ‌ها در تمامی دسته‌ها فرد است، فقط اجازه داریم که دو دسته را انتخاب کرده آن‌ها را با هم ترکیب کنیم. بر این اساس، سه حالت پیش می‌آید.

۱. دسته‌ی ۱۸۵ و ۱۸۹تایی را جهت ترکیب شدن انتخاب کنیم. در این صورت با اجرای مرحله‌ی اول دو دسته‌ی ۳۷۴تایی و ۱۱تایی خواهیم داشت.

۲. دسته‌ی ۱۱ و ۱۸۵تایی را انتخاب کنیم. دو دسته‌ی نهایی باقی‌مانده ۱۹۶تایی و ۱۸۹تایی خواهند بود.

۳. دسته‌ی ۱۸۹تایی و ۱۱تایی را برگزینیم. در نهایت دو دسته‌ی ۲۰۰تایی و ۱۸۵تایی خواهیم داشت.

مساله را با ناوردایی حل می‌کنیم. اثبات می‌کنیم اگر عدد اول و فردی وجود داشته باشد که باقی‌مانده‌ی تقسیم تعداد سنگ‌ر ها در دسته‌های اولیه بر آن برابر صفر باشد، این باقی‌مانده در تمامی مراحل همچنان صفر خواهد ماند.

اثبات:

این عدد را p می نامیم، دو حالت زیر را به ازای عدد اول $\mathrm{P}|\mathrm{P} > ۲$ برقرار است.

۱. در صورتیکه P بتواند هر دو دسته‌ي a و b را بشمارد، ترکیب آن دو را نیز می‌تواند بشمارد.

$$if\ P|a\ \&P|b \rightarrow P|a+b \qquad (۱)$$

۲. در صورتیکه P بتواند دسته‌اي با تعداد عضو زوج مثل $۲\mathrm{c}$ را بشمارد، نصف آن را نیز می‌تواند بشمارد.

$$if\ P|۲c \rightarrow P|c \qquad (۲)$$

مجددا تاکید شود که رابطه‌ی ۵ و ۶ به ازای عدد اول بزرگ‌تر از ۲ برقرار است.

بنابراین باقی‌مانده‌ی تعداد سنگ‌ریزه‌های هر دسته بر عددی مانند p با شرایط فوق، همواره صفر خواهد ماند و ثابت است. حال با توجه به این اثبات کافیست برای هر یکی از سه حالت بالا، عدد اولی بیابیم که هر دو دسته را بتواند بشمارد. در صورتی‌که چنین چیزی ممکن باشد، تعداد سنگ‌ریزه‌های موجود در هردسته در هریکی از حالات کران پایین خواهد داشت و به ازای هر گام، تعداد سنگ‌ریزه‌هایش همواره بزرگ‌تر مساوی آن کران خواهد بود؛ که این کران همان عدد اول پیدا شده است.

برای حالت اول، عدد ۱۱، در حالت دوم، عدد ۷ و در حالت سوم، عدد ۵، سه عدد اول بزرگ‌تر از ۲ هستند که می‌توانند تعداد سنگ‌ریزه‌های موجود در هردودسته را بشمارند. بدین ترتیب تعداد سنگ‌ریزه‌های موجود در هر دسته‌ی ایجاد شده هیچ‌گاه از عدد اول شمارنده‌ی آن کمتر نخواهد شد. پس هیچ‌گاه نمی‌توانیم ۱۸۱ دسته سنگ‌ریزه داشته باشیم که هریک فقط یک سنگ‌ریزه داشته باشد.