



افکار سازگار ، نوشتار نابکار

ریاضیات گسسته

سودابه محمدهاشمی - کیمیا محمدطاهری

هرگاه نویسنده‌ای توانایی درست نوشتن را نداشته باشد در انتقال صحیح تراوشات فکری خود به خواننده ناکام می‌ماند. نوشتار در خصوص مباحث علم ریاضیات گسسته نیز علاوه بر درک درست از مفاهیم، نیاز به دانش «صحیح نوشتن» و روش به تحریر درآوردن مسائل و اثبات‌ها دارد تا بتواند هدف انتقال بی‌کم و کاست به خواننده را کسب نماید.

چیزی که واقعا اهمیت دارد این است که با درست نوشتن، خواننده درک صحیحی از راه و روش حل مسائل و اثبات‌ها کسب کند و توانایی درک و خلاقیت در کشف روش‌های حل مسائل را در خود ارتقاء بخشد. در بیشتر مواقع اثبات مسائل آسان و منطق حل مسائل بسیار دست یافتنی به نظر می‌آید ولی در واقع در زمان نوشتن حل مسائل و اثبات‌ها رویکرد اشتباهی را پیش می‌گیریم. به همین خاطر است که ما نیاز داریم یاد بگیریم که چگونه اثبات‌ها را دنبال کنیم.

هر چند که رعایت حداقل معیارهای درست نویسی و پیشبرد مرحله به مرحله حل مسائل و اثبات‌ها با استدلال‌های منطقی، خیال ما را نسبت به درست و معتبر بودن نوشته‌ی خود راحت می‌نماید ولی مطالعه‌ی متون فنی و تعمق در نوشتارهای غنی ما را به مرحله‌ای از بلوغ در نویسندگی می‌رساند که علاوه بر رسیدن به بهترین نتیجه‌ی ممکن، ما را در انتقال صحیح معنا و مفهوم و درک صحیح نوشته بسیار موفق می‌سازد و در نهایت زمانی که فرا بگیریم، چگونه با اتکا به استدلال‌های درست اثباتمان را کامل کنیم، به فهم عمیق‌تری از مسائل می‌رسیم. پایه و بنیاد درست نویسی بسیار آسان است. تنها کافی است که دقت نماییم تا جملات استفاده شده به یکی از اشکال زیر باشد:

۱. خود فرض مسئله باشد.

۲. به صورت کاملاً شفاف و واضح از جملات قبلی نتیجه شده باشد.

۳. درستی آن قبلاً اثبات شده باشد.

در این جزوه تمام سعی و کوشش ما بر این بوده است تا شما را بیشتر با «درست نویسی» و نکاتی که خواننده را به این جهت سوق دهد آشنا کنیم. امید است که فراگیری نکات «درست نویسی» در تمامی مراحل زندگی راهبر و راهنمای شما باشد.

انواع نکات

در این جزوه با سه دسته نکته مواجه هستیم:

۱. دسته E : نکات درست نویسی که رعایت نکردن آن باعث ناقص شدن اثبات و در نتیجه کسر نمره می‌شود.

۲. دسته N : نکات درست نویسی که رعایت کردن آن‌ها واجب نیست، اما به خوانایی راه حل، ابهام زدایی، پرهیز از تکرار و جلوگیری از خطا کمک می‌کنند.

۳. دسته T : دام‌های آموزشی و خطاهای رایج در حل سوالات.

فصل ۱ : شمارش

سؤال ۱.۱.

سه مهرهٔ رخ متمایز و صفحه شطرنجی 8×8 داریم. به چند روش می‌توان این سه مهره را در سه خانه از این صفحه قرار داد به طوری که حداقل یک مهره وجود داشته باشد که توسط هیچ مهره‌ای تهدید نمی‌شود؟

پاسخ .

سوال را با اصل متمم حل می‌کنیم:
- کل حالات:

$$64 \times 63 \times 62$$

- حالات نامطلوب: حالتی که همه رخ‌ها تهدید بشوند.

رخ اول برای قرار گیری در صفحه شطرنجی ۶۴ حالت دارد، حال چون رخ اول باید تهدید بشود رخ دوم را باید در سطر یا ستون رخ اول قرار بدهیم که ۱۴ حالت دارد. چون رخ سوم هم باید تهدید بشود باید در سطر یا ستون یکی از رخ‌ها باشد که در مجموع شامل ۶ خانه در سطر یا ستون مشترک دو رخ قبلی و ۱۴ خانه در سطرها یا ستون‌های غیر مشترک دو رخ است. پس کل حالت‌ها برابر است با:

$$64 \times 14 \times 20$$

- حالات مطلوب: طبق اصل متمم برابر است با:

$$64 \times 63 \times 62 - 64 \times 14 \times 20$$

نکات:

T.I : نشمردن همه حالت‌ها: در اینجا تمام حالات نامطلوب محاسبه نشده است، زیرا این امکان وجود دارد که رخ اول توسط رخ دوم تهدید نشود و این حالت در نظر گرفته نشده است.

N.II : بهتر بود اشاره شود که به دلیل تمایز رخ‌ها چنین نتیجه‌ای گرفته شده است.

پاسخ .

- کل حالات:

$$64 \times 63 \times 62$$

- حالات نامطلوب: حالتی که همه رخ‌ها تهدید بشوند.

$$64 \times 7 \times 20 \times 2$$

- حالات مطلوب: طبق اصل متمم برابر است با:

$$64 \times 63 \times 62 - 64 \times 14 \times 20$$

نکات:

N.III : نبود توضیحات کافی برای عبارت: به دلیل نبود توضیحات کافی، تشخیص چرایی غلط بودن جواب نهایی ممکن نیست.

پاسخ صحیح .

- کل حالات: به دلیل تمایز رخ ها برابر است با:

$$P(64, 3) = 64 \times 63 \times 62$$

- حالات نامطلوب: حالتی که همه رخ ها تهدید بشوند.
دو حالت داریم:

۱. رخ اول رخ دوم را تهدید کند:
رخ اول برای قرار گیری در صفحه شطرنجی ۶۴ حالت دارد، حال چون رخ اول باید توسط رخ دوم تهدید بشود رخ دوم را باید در سطر یا ستون رخ اول قرار بدهیم که ۱۴ حالت دارد. چون رخ سوم هم باید تهدید بشود باید در سطر یا ستون یکی از رخ ها باشد که در مجموع شامل ۶ خانه در سطر یا ستون مشترک دو رخ قبلی و ۱۴ خانه در سطرها یا ستون های غیر مشترک دو رخ است. پس کل حالت ها برابر است با:

$$64 \times 14 \times 20$$

۲. رخ اول رخ دوم را تهدید نکند:
رخ اول برای قرار گیری در صفحه شطرنجی ۶۴ حالت دارد، حال چون رخ اول نباید توسط رخ دوم تهدید بشود رخ دوم را در خانه ای به جز سطر یا ستون رخ اول قرار بدهیم که ۴۹ حالت دارد. حال رخ سوم باید هر دو رخ را تهدید کند پس باید در یکی از محل های تقاطع سطر و ستون رخ اول و رخ دوم قرار بگیرد که دو حالت دارد، پس کل حالت ها برابر است با:

$$64 \times 49 \times 2$$

- حالات مطلوب: طبق اصل متمم برابر است با:

$$64 \times 63 \times 62 - (64 \times 14 \times 20 + 64 \times 49 \times 2)$$

سؤال ۲.۱.

اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$1^2 \binom{n}{1} + 2^2 \binom{n}{2} + 3^2 \binom{n}{3} + \dots + n^2 \binom{n}{n} = n(n+1)2^{n-2}$$

پاسخ .

فرض کنید $P = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$ میانگر تعداد راه های انتخاب یک کمیته از بین n کاندیدا است به طوری که یک فرد یا دو فرد متمایز، رئیس کمیته باشند. حال این شمارش را به روش دیگری انجام می دهیم.

۱. با فرض داشتن یک رئیس، رئیس را انتخاب کرده و تصمیم می‌گیریم که بقیه افراد حضور داشته باشند یا خیر و حالات به دست آمده را جمع می‌کنیم با حالاتی که ۲ رئیس را انتخاب کردیم در مورد حضور یا عدم حضور بقیه افراد تصمیم گرفتیم:

$$P = n \times 2^{n-1} + n \times (n-1) \times 2^{n-2} = n \times (n+1) \times 2^{n-2}$$

از تساوی این ۲ حالت حکم مساله اثبات می‌شود:

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n \times (n+1) \times 2^{n-2}$$

نکات:

E.IV : عدم تطابق توضیحات با فرمول نوشته شده، انتخاب دو رئیس از میان n نفر $\binom{n}{2}$ حالت دارد نه $n \times (n-1)$.

N.V : بهتر است روش اثبات (دوگانه شماری) ذکر شود.

E.VI : یک طرف دوگانه شماری که نیازمند اثبات است، بدیهی در نظر گرفته شده است.

پاسخ صحیح .

سوال را با دوگانه شماری حل می‌کنیم:

فرض کنید P بیانگر تعداد راه های انتخاب یک کمیته از بین n کاندیدا است به طوری که یک فرد رئیس کمیته و یک نفر معاون باشند و رئیس و معاون می‌توانند یک نفر باشند. شمارش این راه ها به ۲ روش امکان پذیر است.

۱. با فرض یکسان بودن رئیس و معاون، رئیس را انتخاب کرده و تصمیم می‌گیریم که بقیه افراد حضور داشته باشند یا خیر و حالات به دست آمده را جمع می‌کنیم با حالاتی که رئیس و معاون متمایز را انتخاب کردیم و در مورد حضور یا عدم حضور بقیه افراد تصمیم گرفتیم:

$$P = n \times 2^{n-1} + n \times (n-1) \times 2^{n-2} = n \times (n+1) \times 2^{n-2}$$

۲. ابتدا این که چه اعضای کمیته و رئیس و معاون را تشکیل دهند را انتخاب می‌کنیم که این تعداد می‌تواند هر عددی باشد، سپس رئیس و معاون یکسان یا متمایز را از بین آن ها انتخاب می‌کنیم:

$$P = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (k(k-1) + k) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$$

از تساوی ۲ حالت فوق حکم مساله اثبات می‌شود:

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n \times (n+1) \times 2^{n-2}$$

سؤال ۳.۱

۶۰ دانشجو در کلاس ریاضیات گسسته حضور دارند. در میان هر ۱۰ نفر از این کلاس، حداقل ۳ نفر نمره مبانی یکسانی دارند. ثابت کنید در این کلاس ۱۵ نفر وجود دارند که نمره مبانی آن ها یکسان است.

پاسخ.

در نظر میگیریم حداکثر تعداد تکرار از یک نمره ۱۴ عدد است که در این صورت حداقل به ۵ نمره متفاوت نیاز است. در این صورت باز میتوان گروه ۱۰ تایی را از دانش آموزان انتخاب کرد که حداکثر دو نفر نمره یکسان داشته باشند. پس فرض اولیه غلط بوده و مشخص میشود که لااقل از یکی از نمرات وجود دارد که ۱۵ دانش آموز یا بیشتر آن نمره را دارند.

نکات:

N.VII : در پاسخ از برهان خلف استفاده شده ولی از آن نام برده نشده است و باید توجه کنیم فرض خلف را حتما بیان کنیم.

N.VIII : باید اصل لانه کبوتری که از آن استفاده کرده است را نام میبرد و نحوه استفاده از آن مشخص شود.

T.IX : پاسخ کامل نیست. پاسخ درست و کامل در پایین آمده است.

پاسخ صحیح.

از برهان خلف استفاده می کنیم. فرض خلف: فرض کنید در این کلاس هیچ ۱۵ نفری وجود نداشته باشند که نمره ی مبانی آن ها یکسان باشد. در این صورت حداکثر ۱۴ نفر وجود دارند که نمره ی یکسان داشته باشند. بنابراین طبق اصل لانه کبوتری حداقل به اندازه ی سقف $\frac{60}{14}$ یعنی ۵ نمره ی متفاوت در کلاس وجود دارد. مسئله را به دو حالت تقسیم می کنیم:

۱. اگر پنج نمره ی متمایز وجود داشته باشند که از هر کدام ۲ عضو (دو نفر در کلاس که آن نمره را دارند) وجود داشته باشد؛ در این صورت از هر کدام از این نمرات دو عضو را در نظر گرفته و به مجموعه ای ۱۰ عضوی می رسیم که هیچ سه نفری در آن نمره ی یکسان ندارند که این خلاف فرض مسئله است و به تناقض رسیدیم. پس فرض خلف رد شده و حداقل ۱۵ نفر وجود دارند که نمره ی یکسانی داشته باشند.

۲. اگر پنج نمره ی متمایز، هر کدام دارای حداقل دو عضو وجود نداشته باشند؛ در این صورت $k \leq 4$ نمره ی متمایز با بیش از یک عضو داریم (مجموعه ی این نمرات را A بنامیم) که با توجه به فرض خلف، حداکثر تعداد $k \times 14$ عضو را پوشش می دهند. بنابراین حداقل $60 - 14k$ نفر باقی مانده که هیچ دو تایی نمی توانند دارای نمره ی یکسان باشند (در غیر این صورت تعداد نمره های متمایز دارای بیشتر مساوی ۲ عضو به حداقل $k+1$ می رسد). بنابراین هر یک از این اعضا دارای نمره ای متمایز است (مجموعه ی این اعضا را B بنامیم). می توان با انتخاب دو عضو از هر نمره ی مجموعه ی A و تمام اعضای مجموعه ی B به مجموعه ای متشکل از $N = 2k + 60 - 14k = 60 - 12k$ عضو رسید که $N \geq 12 \Rightarrow k \leq 4$ و هیچ سه عضوی در آن دارای نمره ی یکسان نیستند. هر ده عضوی از این مجموعه انتخاب شود، نقض فرض مسئله است و به تناقض رسیدیم. پس فرض خلف رد شده و حداقل ۱۵ نفر وجود دارند که نمره ی یکسانی داشته باشند.

سؤال ۴.۱.

ضریب عبارت x^{12} در بسط عبارت $(1 - 4x)^{-5}$ را بیابید.

پاسخ.

طبق بسط دوجمله ای داریم:

$$\frac{1}{(1 - 4x)^5} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{k} 4^k x^k$$

جمله ۱۲ام دنباله a_n ضریب x^{12} است. (E.XI)

$$\rightarrow a_{12} = \binom{16}{12} 4^{12}$$

نکات:

N.X : بهتر است اصل بسط دوجمله ای هم نوشته شود.

E.XI : قبل از استفاده از متغیر باید آن را تعریف کرد. تعریف دنباله a_n ضروری است.

پاسخ صحیح .

طبق جدول Useful Generating Functions از کتاب Rosen که استاد نیز به آن اشاره کردند داریم:

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k$$

بنابراین در این سوال داریم:

$$(1-4x)^{-5} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{5+k-1}{k} (4x)^k$$

جمله x^{12} به ازای مقدار $k = 12$ ساخته می شود. بنابراین جواب برابر خواهد بود با:

$$\binom{16}{12} (4)^{12}$$

سؤال ۵.۱.

چند عدد طبیعی حداکثر ۹ رقمی وجود دارد که مجموع ارقام آن برابر با ۳۲ باشد؟

پاسخ .

سوال را با اصل شمول و عدم شمول حل می کنیم:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_9| = \binom{9}{1} |A_1| + \binom{9}{2} |A_1 \cap A_2| + \dots + \binom{9}{9} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_9|$$

حال مقدار عبارت ها را حساب می کنیم:

$$|A_1| = \binom{30}{8}$$

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{20}{8}$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \binom{10}{8}$$

برای بقیه جمله ها جواب برابر ۰ است.
حال از اصل متمم برای به دست آوردن جواب نهایی استفاده می کنیم:
- کل حالات:

$$\binom{40}{8}$$

- حالات مطلوب:

$$\binom{40}{8} - \binom{9}{1} \binom{30}{8} + \binom{9}{2} \binom{20}{8} - \binom{9}{3} \binom{10}{8}$$

نکات:

E.XII: تعریف متغیرهای A_i ضروری است، چون در غیر این صورت منظور از بقیه استدلال ها به هیچ وجه مشخص نیست.

E.XIII: اثبات و یا در صورت وضوح، اشاره به تقارن میان مجموعه ها برای استفاده از اصل شمول و عدم شمول به این شکل ضروری است.

پاسخ صحیح .

رقم i ام این عدد را با x_i نشان می دهیم، بنابراین به دنبال یافتن تعداد جواب های صحیح معادله زیر هستیم:

$$\sum_{i=1}^9 x_i = 32$$

$$\forall i \in [1, 9] : x_i \leq 9$$

تعداد جواب های صحیح این معادله را به کمک اصل متمم پیدا می کنیم:

- کل حالات: تعداد جواب های صحیح نامنفی معادله $\sum_{i=1}^9 x_i = 32$. این یک معادله سیاله است و تعداد جواب های صحیح آن برابر است با:

$$\binom{40}{8}$$

- حالات نامطلوب: تعداد جواب های صحیح نامنفی معادله $\sum_{i=1}^9 x_i = 32$ به طوری که: $\exists i \in [1, 9] : x_i \geq 10$

حال اگر مجموعه حالت هایی که در آن $x_i \geq 10$ است را با A_i نشان دهیم، کافی است تعداد اعضای اجتماع این مجموعه ها را بیابیم طبق اصل شمول و عدم شمول و با توجه به تقارن میان A_i ها داریم:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_9| = \binom{9}{1} |A_1| + \binom{9}{2} |A_1 \cap A_2| + \dots + \binom{9}{9} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_9|$$

برای محاسبه مقدار عبارت ها، در معادله سیاله متناظر، در صورتی که $x_i \geq 10$ بود قرار می دهیم $x_i = y_i + 10$ و در غیر این صورت قرار می دهیم $x_i = y_i$ ، حال اگر تعداد i هایی را که به ازای آن ها $x_i \geq 10$ است را با k نشان بدهیم، حال به دنبال تعداد جواب های صحیح نامنفی معادله سیاله $\sum_{i=1}^9 y_i = 32 - 10k$ هستیم، که برابر است با:

$$\binom{40 - 10k}{8}$$

حال مقدار عبارت ها را حساب می کنیم:

$$|A_1| = \binom{30}{8} \quad (k=1)$$

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{20}{8} \quad (k=2)$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \binom{10}{8} \quad (k=3)$$

برای بقیه جمله ها جواب برابر ۰ است.
پس کل حالات نامطلوب برابر است با:

$$\binom{9}{1} \binom{30}{8} - \binom{9}{2} \binom{20}{8} + \binom{9}{3} \binom{10}{8}$$

- حالات مطلوب: طبق اصل متمم برابر است با:

$$\binom{40}{8} - \binom{9}{1} \binom{30}{8} + \binom{9}{2} \binom{20}{8} - \binom{9}{3} \binom{10}{8}$$

سؤال ۶.۱.

با استفاده از توابع مولد نشان دهید تعداد روش های انتخاب ۴ عضو دو به دو نامتوالی از مجموعه اعداد $1, 2, 3, \dots, n$ برابر با انتخاب ۴ از $n-3$ است.

پاسخ .

یک زیرمجموعه از این نوع مثلا ۱ و ۳ و ۷ و ۱۰ را انتخاب و نابرابری های اکید

$$0 < 1 < 3 < 7 < 10 < n+1$$

را در نظر میگیریم. و بررسی میکنیم چند عدد صحیح بین هر دو عدد متوالی از این اعداد وجود دارند. در اینجا ۰ و ۱ و ۳ و ۲ و $n-10$ را به دست می آوریم: ۰ زیرا عددی صحیح بین ۰ و ۱ وجود ندارد و ۱ زیرا تنها عدد ۲ بین ۱ و ۳ وجود دارد و ۳ زیرا اعداد صحیح ۴ و ۵ و ۶ بین ۳ و ۷ وجود دارند و مجموع این ۵ عدد صحیح برابر $n-4 = n-10+2+3+1+0$ است. (E.XIV)

پس تابع مولد زیر را داریم.

$$\begin{aligned} G(x) &= (1 + x^1 + x^3 + \dots)^1 (x + x^2 + x^3 + \dots)^3 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right)^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1} \right)^3 = \\ &= \frac{1}{(1-x)^1} \cdot \left(\frac{x}{1-x} \right)^3 = \frac{x^3}{(1-x)^4} = x^3 (1-x)^{-4} = x^3 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{k} x^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{k} x^{k+3} = (E.XV) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+1}{k-3} x^k \end{aligned}$$

به دنبال ضریب x^{n-4} می‌گشتیم پس $k = n-4$ و جواب نهایی برابر است با $\binom{n-3}{n-7} = \binom{n-3}{4}$

نکات:

E.XIV : مثال زدن باید به صورتی باشد که حذف آن اختلالی در فهم جواب ایجاد نکند. در اینجا اگر مثال پاراگراف اول را حذف کنیم مشخص نیست تابع مولد برچه اساسی نوشته شده است. پس باید توضیحی درمورد تابع مولد و جمله ای که به دنبال ضریب آن هستیم بدهیم.

E.XV: نیاز هست که کاملاً گفته شود چه تغییر متغیری انجام میشود. در اینجا تغییر متغیر $k \rightarrow k+3$ را داریم. همیشه به هنگام تغییر متغیر توجه کنیم ممکن است کران ها تغییر کنند. در اینجا کران پایین از صفر به سه میرود. صورت اصلاح شده: $\sum_{k=3}^{\infty} \binom{k+1}{k-3} x^k$

N.XVI: در طی پاسخ به سوال خوب است دقت کنیم همه ی اعداد را یا فارسی یا انگلیسی بنویسیم.

پاسخ.

تابع مولد فاصله از مبدا:

$$G(x) = (1 + x + x^2 + \dots)(x + x^2 + x^3 + \dots)^3$$

در مجموع $n-4$ عدد داریم. توان های x باید بین مبدا و مقصد باشند پس باید توانی از x را که کوچک تر یا مساوی $n-4$ هستند را بیابیم:

$$G(x) = \frac{x^3}{(1-x)^4} = x^3(1-x)^{-4} = x^3 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^k$$

$$\rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \binom{x+k}{k} = \frac{1}{(1+x)^{k+1}} \rightarrow k+3 \leq n-4 \rightarrow k \leq n-7$$

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{k=r}^n \binom{k}{r} \quad (1)$$

مجموع حالات:

$$\rightarrow \sum_{k=0}^{n-7} \binom{k+3}{3} \xrightarrow{(1)} \binom{n-7+4}{4} = \binom{n-3}{4}$$

نکات:

E.XVII: به هنگام جایگذاری در فرمول باید جایگذاری ها واضح باشد. در این مثال در فرمول (1) کران پایین از r هست ولی در قسمتی که از آن استفاده شده کران پایین از 0 است. همین مطلب گویای آن است که به توضیحات بیشتری نیاز هست.

عبارت زیر صورت کامل شده این نکته است:

$$\rightarrow \sum_{k=0}^{n-7} \binom{k+3}{k} = \sum_{k=3}^{k-4} \binom{k}{k-3} = \sum_{k=3}^{n-4} \binom{k}{3} \xrightarrow[r \rightarrow 3, n \rightarrow n-4]{(1)} \binom{n-3}{4}$$

پاسخ صحیح.

تعداد عضوهای انتخاب نشده کوچکتر از عضو اول انتخاب شده را x_1 ، عضوهای انتخاب نشده بین عضو اول و دوم انتخاب شده را x_2 ، عضوهای انتخاب نشده بین عضو دوم و سوم انتخاب شده را x_3 ، عضوهای انتخاب نشده بین عضو سوم و چهارم انتخاب شده را x_4 و عضوهای انتخاب نشده بزرگتر از چهارمین عضو انتخاب شده را x_5 می گیریم. کافی است تعداد جواب های صحیح نامنفی معادله زیر را با شرایط $x_1, x_5 \geq 0, x_2, x_3, x_4 \geq 1$ بشماریم

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = n - 4$$

که برابر است با ضرب x^{n-4} در عبارت:

$$(1+x+x^2+\dots)(x+x^2+x^3+\dots)(x+x^2+x^3+\dots)(x+x^2+x^3+\dots)(1+x+x^2+\dots) = \frac{x^3}{(1-x)^5}$$

بنابراین کافی است ضرب x^{n-7} را در بسط $(1-x)^{-5}$ بشماریم .

طبق جدول Useful Generating Functions از کتاب Rosen که استاد نیز به آن اشاره کردند داریم:

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k$$

بنابراین در این سوال داریم:

$$(1-x)^{-5} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{5+k-1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{4} x^k$$

x^{n-7} به ازای $k = n - 7$ ساخته می شود. بنابراین جواب برابر است با:

$$\binom{n-3}{4}$$

سؤال ۷.۱.

اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sum_{i=k}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

پاسخ .

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} = \sum_{i=k}^n \binom{i+1}{k+1} - \binom{i}{k+1} = \sum_{i=k}^n \binom{i+1}{k+1} - \sum_{i=k}^n \binom{i}{k+1} \\ &= \binom{n+1}{k+1} + \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i+1}{k+1} - \left(\binom{k+1}{k+1} + \sum_{i=k+1}^n \binom{i}{k+1} \right) = \binom{n+1}{k+1} + \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i+1}{k+1} - \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i+1}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

نکات:

N.XVIII : باید فرمول و اتحاد های مورد استفاده و رفرنس معتبر آن ذکر شود . به عنوان رفرنس اسم اتحاد هم کافی است.

پاسخ صحیح .

طبق اتحاد پاسکال داریم:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

پس طبق این اتحاد می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} &= \sum_{i=k}^n \left(\binom{i+1}{k+1} - \binom{i}{k+1} \right) = \sum_{i=k}^n \binom{i+1}{k+1} - \sum_{i=k}^n \binom{i}{k+1} \\ &= \binom{n+1}{k+1} + \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i+1}{k+1} - \left(\binom{n}{k+1} + \sum_{i=k+1}^n \binom{i}{k+1} \right) = \binom{n+1}{k+1} + \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i+1}{k+1} - \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i+1}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

فصل ۲ : منطق

سؤال ۱.۲.

گزاره های زیر همگی درست هستند، با در نظر گرفتن آن‌ها، درستی یا نادرستی گزاره های ۱ و ۲ را بررسی کنید.

- اگر کار نداشته باشم یا پولدار باشم، تفریح می کنم.
- اگر تفریح بکنم، فیلم می بینم یا بستنی می خورم.
- بستنی نمی خورم و می خوابم.
- اگر بخوابم، فیلم نمی بینم.

گزاره ها:

۱. من کار دارم.
۲. من پولدار هستم.

پاسخ .

چون خوابیدم، فیلم هم ندیدم، پس چون فیلم ندیدم، تفریح هم نکردم، پس طبق شرط اول، من پولدار نیستم و کار دارم.

نکات:

N.XIX : بهتر است برای جلوگیری از اشتباه، از نوشتار منطقی استفاده کرده و فارسی ننویسیم.

E.XX : باید فقط از تبدیلات تعریف شده استفاده کرد و استفاده از تبدیلات دیگر بدون اثبات صحیح نیست، مثلاً در اینجا فیلم ندیدن مستقیماً تفریح نکردن را نتیجه نمی دهد.

پاسخ صحیح .

هر گزاره را با یک حرف نشان می دهیم:

- من کار دارم p
- من پولدار هستم q
- من تفریح می کنم r
- من فیلم می بینم s

$$\bullet \text{ من بستنی می خورم } t =$$

$$\bullet \text{ من می خوابم } u =$$

فرض ها:

$$\bullet q \vee \neg p \implies r$$

$$\bullet r \implies s \vee t$$

$$\bullet \neg t \wedge u$$

$$\bullet u \implies \neg s$$

حال داریم:

$$1. \neg t \wedge u \text{ (فرض)}$$

$$2. u \text{ (طبق ۱: ساده سازی عطفی)}$$

$$3. \neg s \text{ (فرض) } u \implies \neg s$$

$$4. \neg s \text{ (طبق ۳ و ۴)}$$

$$5. \neg t \text{ (طبق ۱: ساده سازی عطفی)}$$

$$6. \neg t \wedge \neg s \text{ (طبق ۳ و ۴: ترکیب عطفی)}$$

$$7. r \text{ (فرض) } s \vee t \implies r$$

$$8. \neg r \text{ (طبق ۷: عکس نقیض)}$$

$$9. \neg r \text{ (طبق ۸: دمورگان)}$$

$$10. \neg r \text{ (طبق ۹ و ۶)}$$

$$11. r \text{ (فرض) } q \wedge \neg p \implies r$$

$$12. \neg (q \vee \neg p) \text{ (طبق ۱۱: عکس نقیض)}$$

$$13. \neg (q \vee \neg p) \text{ (طبق ۱۰ و ۱۲)}$$

$$14. \neg q \wedge p \text{ (طبق ۱۳: دمورگان)}$$

$$15. \neg q \text{ (طبق ۱۴: ساده سازی عطفی)}$$

$$16. p \text{ (طبق ۱۴: ساده سازی عطفی)}$$

پس ۱ صحیح و ۲ غلط است.

سؤال ۲.۲.

صفحه‌ای دو بعدی را در نظر بگیرید که از هر دو طرف تا بینهایت ادامه دارد و با دو رنگ آن را رنگ کرده‌ایم (حتما از هر دو رنگ استفاده شده است). آیا دو نقطه به فاصله d (عدد حقیقی) وجود دارد که هم‌رنگ باشند؟

پاسخ .

درستی نقیض خواسته سوال را اثبات می‌کنیم.

حکم سوال: دو نقطه به فاصله d (عدد حقیقی) وجود دارد که هم‌رنگ باشند.

نقیض حکم سوال: وجود دارد دو نقطه به فاصله d که دو رنگ مختلف باشند.

دو نقطه با دو رنگ متفاوت را در نظر می‌گیریم. فاصله این دو نقطه $kd + r$ است به طوری که k عدد صحیح نامنفی و $r < k$ است. اگر k بیشتر مساوی یک باشد از نقطه چپ، به اندازه d سمت راست می‌آییم. این نقطه باید هم‌رنگ باشد و این انتقال را آنقدر ادامه می‌دهیم تا $k = 0$ شود. حالا به دو نقطه ای رسیده‌ایم که فاصله‌ای کمتر از d دارند و از دو رنگ متفاوت هستند. سپس نقطه سوم به فاصله d از این دو نقطه در نظر می‌گیریم. یک مثلث متساوی الساقین تشکیل می‌شود. بنابراین راس سوم حتماً با یکی از دو راس دیگر رنگ متفاوت خواهد داشت. در اینجا ثابت کردیم نقیض حکم سوال درست است پس حکم سوال نادرست می‌باشد.

نکات:

T.XXI: نقیض حکم سوال به نادرستی بیان شده است. فرض کنید $P(x,y)$ هم‌رنگ بودن دو نقطه x و y باشد. $D(x,y)$ به فاصله d بودن دو نقطه x و y باشد.

حکم سوال بیان میکند که: $\exists x, y (D(x, y) \wedge P(x, y))$
برای نقیض کردن آن داریم:

$$\neg \exists x, y, (D(x, y) \wedge P(x, y)) = \forall x, y, (\neg (D(x, y) \wedge P(x, y)) = \forall x, y, (\neg D(x, y) \vee \neg P(x, y))$$

به صورت فارسی می‌توان گفت: هیچ دو نقطه به فاصله‌ی d هم‌رنگ نیستند.

در صورتی که جمله‌ی 'وجود دارد دو نقطه به فاصله d که دو رنگ مختلف باشند.' به شکل منطقی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\exists x, y, (D(x, y) \wedge \neg P(x, y))$$

در گزاره‌های منطقی واضح است نقیض کردن اشتباه انجام شده است.

E.XXII: به طور کلی در نظر داشته باشد، توجه به نگرش پایه‌ای و گام به گام منطق در تمامی حل سوالات (حتی مباحث غیرمنطق) به تمیزتر نوشتن و پرهیز از اشتباه کمک می‌کند. به همین علت مهم و مورد انتظار است.

پاسخ صحیح.

اصل لانه‌ی کبوتری: به ازای n لانه و $n + 1$ کبوتر با فرض اینکه هر کبوتر در یکی از لانه‌ها قرار دارد؛ دو کبوتر وجود دارند که در یک لانه قرار دارند.

قبل از شروع اثبات اسم رنگ اول را قرمز و رنگ دوم را آبی می‌گذاریم.

حال مثالی متساوی‌الاضلاع را در نظر بگیرید که اندازه‌ی هر ضلع آن d است. بدیهی است که این مثلث را می‌توان در صفحه (طبق فرض مسئله صفحه بی‌نهایت است) در نظر گرفت که طبق اصل لانه‌ی کبوتری روی سه نقطه و دو رنگ، دو نقطه از این سه نقطه هم‌رنگند. این دو نقطه، دو نقطه به فاصله d و هم‌رنگند.

نکات:

N.VIII

سؤال ۳.۲.

چگونگی اثبات درستی یا نادرستی جمله زیر را توضیح دهید.

تابع $q(x,y)$ را تعریف می‌کنیم اگر $p(x)$ درست باشد $p(x+y)$ و در غیر این صورت نقیض $p(x-y)$ را نتیجه می‌دهد.

پاسخ.

جمله بالا را به صورت یک گزاره منطقی می نویسیم.

$$(\forall x, p(x)) \rightarrow (\exists y, q(x, y))$$

حال با یک مثال ، نادرستی گزاره فوق را نشان می دهیم.

سمت چپ گزاره $(\forall x, p(x))$ را P و سمت راست $(\exists y, q(x, y))$ را Q می نامیم. پس داریم: $P \rightarrow Q$
 x_1 را در نظر می گیریم طوری که P درست باشد. سپس y_1 را طوری انتخاب می کنیم که Q نادرست باشد.

$$P = True \rightarrow Q = False$$

بنابراین طبق جدول truth-table گزاره فوق نادرست خواهد بود.

نکات:

E.XXII

T.XXIII : از سورها به نادرستی تعبیر شده است. در عبارت Q سور وجودی داریم. بنابراین نمی توان y_1 را طوری انتخاب کرد که Q نادرست باشد.

پاسخ صحیح .

جمله بالا را به صورت یک گزاره منطقی می نویسیم.

$$(\forall x, p(x)) \rightarrow (\exists y, q(x, y))$$

چون در قسمت سمت چپ از سور عمومی استفاده شده است x_1 را طوری می یابیم که ناقض P باشد. بنابراین طبق truth-table درستی یا نادرستی Q اهمیتی ندارد.

$$P = False \rightarrow Q = -$$

پس در کل گزاره فوق درست است.

فصل ۳ : ناوردایی

سؤال ۱.۳.

اعداد ۱ تا ۲۰ را روی تخته نوشته ایم. هر بار می توانیم دو عدد a و b را از روی تخته پاک کرده و عدد $a + b + ab$ را روی تخته بنویسیم. عدد نهایی روی تخته را بیابید.

پاسخ .

در هر بار حاصل ضرب اعداد روی تخته + ۱ ثابت است. این عدد برابر $21!$ است. پس عدد نهایی $1 - 21!$ خواهد بود.

نکات:

N.XXIV : از نوشتن جملات فارسی که ایجاد ابهام می کنند پرهیزید و حتی الامکان عبارات را به صورت ریاضی بنویسید.
از جمله بالا می توان $1 + a_1 * a_2 * a_3 * \dots * a_n$ را تعبیر کرد در صورتی که مقصود $(a_1 + 1) * (a_2 + 1) * (a_3 + 1) * \dots * (a_n + 1)$ بوده است.

T.XXV : اثبات ناوردا بودن یک مقدار از مهم ترین موارد مساله های ناوردایی می باشد. در این پاسخ این مورد اثبات نشده است.

پاسخ صحیح .

مساله را با ناوردائی حل می کنیم. سوال را برای اعداد دلخواه حل کرده سپس اعداد یک تا بیست را در نتیجه ی نهایی لحاظ می کنیم. فرض می کنیم در ابتدای مساله اعداد $x_1, x_2, \dots, x_{19}, x_{20}$ را داریم. به ازای هر عدد x_i ، y_i را به این صورت در نظر می گیریم: $y_i = x_i + 1$. مقدار ناوردا را S در نظر می گیریم و آن به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$S = y_1 \times y_2 \times \dots \times y_{19} \times y_{20}.$$

ادعا می کنیم در هر مرحله با برداشتن دو عدد دلخواه a و b و گذاشتن عدد $a + b + ab$ به جای آن، مقدار S ثابت می ماند. حال به اثبات آن می پردازیم:

فرض می کنیم در مرحله ی اول دو عدد دلخواه x_i و x_j را انتخاب می کنیم و به جای آن $x_i + x_j + x_i x_j$ قرار می دهیم. این مقدار درواقع معادل $1 - (x_i + 1)(x_j + 1)$ می باشد. بدین ترتیب مقدار S که تاکنون برابر $(x_1 + 1)(x_2 + 1) \dots (x_{20} + 1)$ بوده است؛ به صورت زیر به روزرسانی خواهد شد:

$$\begin{aligned}
 S &= \left(\prod_{k=1, k \neq i, j}^{20} (x_k + 1) \right) (((x_i + 1)(x_j + 1) - 1) + 1) \\
 &= \left(\prod_{k=1, k \neq i, j}^{20} (x_k + 1) \right) (x_i + 1)(x_j + 1) \\
 &= (x_1 + 1)(x_2 + 1) \dots (x_{20} + 1)
 \end{aligned}$$

بنابراین در هر گام و با انتخاب هر دو عدد دلخواه، مقدار تعریف شده برای S ثابت خواهد ماند. بدین ترتیب عدد باقیمانده روی تخته برای اعداد یک تا بیست برابر است با:

$$(1+1)(2+1) \dots (20+1) - 1 = 21! - 1$$

(از آنجایی که مقدار ناوردا بر اساس y_i تعریف شده است. در نهایت مقدار نهایی که براساس x_i است، یک واحد از مقدار ناوردا کمتر خواهد بود.)

سؤال ۲.۳.

در یک ردیف ۲۰۰۰ عدد نوشته شده است. فرض کنید به ازای هر عدد a در این دنباله، $f(a)$ برابر با تعداد دفعاتی باشد که a در دنباله آمده است. در هر مرحله به ازای هر عضوی از دنباله مثل x مقدار $f(x)$ را زیر آن می نویسیم تا یک دنباله ۲۰۰۰ تایی جدید حاصل شود. آیا می توان این دنباله را تا ابد ادامه داد به طوری که هیچ دو دنباله متوالی باهم برابر نباشند؟

پاسخ .

خیر این حالت امکان پذیر نیست. چون لازم است تعداد اعداد تکرار شده در هر مرحله باهم متفاوت باشد و پس از گذر از چند مرحله این امکان از بین می رود.

نکات:

T.XXVI : استدلال فوق شهودی است و شهود به هیچ عنوان ارزش ریاضی ندارد.

پاسخ صحیح .

با ناوردایی مساله را حل می کنیم. مقدار ناوردا در این مساله، تعداد جملات متمایز و متفاوت است. اولین دنباله ای جدید ایجاد شده را در نظر بگیرید. در این دنباله به تعداد عددهایی که در دنباله ای قبلی i بار آمده بودند، جمله با مقدار i داریم. یعنی اگر در دنباله ای قبلی x عدد داشتیم، که هر یک i بار تکرار شده باشند، در دنباله ای جدید، $x \times i$ جمله با مقدار i خواهیم داشت. بدین ترتیب در هر گام تعداد جملات متمایز موجود در دنباله همواره کاهش می یابد. اگر زمانی باشد که این تعداد ثابت بماند، دنباله در مرحله ی بعد و دومرحله بعد آن یکسان خواهند بود و مساله حل است. در غیر این صورت یک تابع ناوردای کاهشی داریم. از طرفی کران گام نیز داریم. چون تعداد عدد صحیح می باشد، این کران یک خواهد بود. هم چنین چون مقدار ناوردای کاهشی داریم و همواره در طی گام ها مقدار ناوردای انتخابی کم می شود و کران پایین هم داریم (تعداد جملات در کمترین حالت ممکن می توانند صفر باشند). بالاخره به نقطه ای خواهیم رسید که تعداد جملات متمایز یک خواهد بود و تمام جملات دنباله یکسان می شوند و از آن پس دیگر دنباله ای متمایز نخواهیم داشت.