افکار سازگار ، نوشتار نابکار

ریاضیات گسسته

سودابه محمدهاشمی - کیمیا محمدطاهری

هرگاه نویسنده‌ای توانایی درست نوشتن را نداشته باشد در انتقال صحیح تراوشات فکری خود به خواننده ناکام می‌ماند. نوشتار در خصوص مباحث علم ریاضیات گسسته نیز علاوه بر درک درست از مفاهیم، نیاز به دانش «صحیح نوشتن» و روش به تحریر درآوردن مسائل و اثبات‌ها دارد تا بتواند هدف انتقال بی کم و کاست به خواننده را کسب نماید.

چیزی که واقعا اهمیت دارد این است که با درست نوشتن، خواننده درک صحیحی از راه و روش حل مسائل و اثبات‌ها کسب کند و توانایی درک و خلاقیت در کشف روش‌های حل مسائل را در خود ارتقاء بخشد. در بیشتر مواقع اثبات مسائل آسان و منطق حل مسائل بسیار دست یافتنی به نظر می‌آید ولی در واقع در زمان نوشتن حل مسائل و اثبات‌ها رویکرد اشتباهی را پیش می‌گیریم. به همین خاطر است که ما نیاز داریم یاد بگیریم که چگونه اثبات‌ها را دنبال کنیم.

هر چند که رعایت حداقل معیارهای درست نویسی و پیشبرد مرحله به مرحله‌ی حل مسائل و اثبات‌ها با استدلال‌های منطقی، خیال ما را نسبت به درست و معتبر بودن نوشته‌ی خود راحت می‌نماید ولی مطالعه‌ی متون فنی و تعمق در نوشتارهای غنیِ ما را به مرحله‌ای از بلوغ در نویسندگی می‌رساند که علاوه بر رسیدن به بهترین نتیجه‌ی ممکن، ما را در انتقال صحیح معنا و مفهوم و درك صحیح نوشته بسیار موفق می‌سازد و در نهایت زمانی که فرا بگیریم، چگونه با اتکا به استدلال‌های درست اثباتمان را کامل کنیم، به فهم عمیق‌تری از مسائل می‌رسیم.

پایه و بنیاد درست نویسی بسیار آسان است. تنها کافی است که دقت نماییم تا جملات استفاده شده به یکی از اشکال زیر باشد:

۱. خود فرض مسئله باشد.

۲. به صورت کاملا شفاف و واضح از جملات قبلی نتیجه شده باشد.

۳. درستی آن قبلا اثبات شده باشد.

در این جزوه تمام سعی و کوشش ما بر این بوده است تا شما را بیشتر با «درست نویسی» و نکاتی که خواننده را به این جهت سوق دهد آشنا کنیم. امید است که فراگیری نکات «درست نویسی» در تمامی مراحل زندگی راهبر و راهنمای شما باشد.

انواع نکات

در این جزوه با سه دسته نکته مواجه هستیم:

۱. دسته E: نکات درست نویسی که رعایت نکردن آن باعث ناقص شدن اثبات و در نتیجه کسر نمره می شود.

۲. دسته N: نکات درست نویسی که رعایت کردن آن‌ها واجب نیست، امابه خوانایی راه حل، ابهام زدایی، پرهیز از تکرار و جلوگیری از خطا کمک می کنند.

۳. دسته T: دام های آموزشی و خطاهای رایج در حل سوالات.

فصل ۱ : شمارش

سؤال ۱.۱.

سه مهرهٔ رخ متمایز و صفحه شطرنجی ۸ × ۸ داریم. به چند روش می‌توان این سه مهره را در سه خانه از این صفحه قرار داد به طوری که حداقل یک مهره وجود داشته باشد که توسط هیچ مهره‌ای تهدید نمی شود؟

پاسخ .

سوال را با اصل متمم حل می کنیم:
- کل حالات:

$$۶۴ \times ۶۳ \times ۶۲$$

- حالات نامطلوب: حالاتی که همه رخ‌ها تهدید بشوند.
رخ اول برای قرار گیری در صفحه شطرنجی ۶۴ حالت دارد، حال چون رخ اول باید تهدید بشود رخ دوم را باید در سطر یا ستون رخ اول قرار بدهیم که ۱۴ حالت دارد. چون رخ سوم هم باید تهدید بشود باید در سطر یا ستون یکی از رخ ها باشد که در مجموع شامل ۶ خانه در سطر یا ستون مشترک دو رخ قبلی و ۱۴ خانه در سطرها یا ستون های غیر مشترک دو رخ است. پس کل حالت ها برابر است با:

$$۶۴ \times ۱۴ \times ۲۰$$

- حالات مطلوب: طبق اصل متمم برابر است با:

$$۶۴ \times ۶۳ \times ۶۲ - ۶۴ \times ۱۴ \times ۲۰$$

نکات:

T.I : نشمردن همه حالت ها: در اینجا تمام حالات نامطلوب محاسبه نشده است، زیرا این امکان وجود دارد که رخ اول توسط رخ دوم تهدید نشود و این حالت در نظر گرفته نشده است.

N.II : بهتر بود اشاره شود که به دلیل تمایز رخ ها چنین نتیجه ای گرفته شده است.

پاسخ .

- کل حالات:

$$۶۴ \times ۶۳ \times ۶۲$$

- حالات نامطلوب: حالاتی که همه رخ ها تهدید بشوند.

$$۶۴ \times ۷ \times ۲۰ \times ۲$$

- حالات مطلوب: طبق اصل متمم برابر است با:

$$۶۴ \times ۶۳ \times ۶۲ - ۶۴ \times ۱۴ \times ۲۰$$

نکات:

N.III : نبود توضیحات کافی برای عبارت: به دلیل نبود توضیحات کافی، تشخیص چرایی غلط بودن جواب نهایی ممکن نیست.

پاسخ صحیح .

- کل حالات: به دلیل تمایز رخ ها برابر است با:

$$P(۶۴,۳) = ۶۴ \times ۶۳ \times ۶۲$$

- حالات نامطلوب: حالاتی که همه رخ ها تهدید بشوند.
دو حالت داریم:

۱. رخ اول رخ دوم را تهدید کند:
رخ اول برای قرار گیری در صفحه شطرنجی ۶۴ حالت دارد، حال چون رخ اول باید توسط رخ دوم تهدید بشود رخ دوم را باید در سطر یا ستون رخ اول قرار بدهیم که ۱۴ حالت دارد. چون رخ سوم هم باید تهدید بشود باید در سطر یا ستون یکی از رخ ها باشد که در مجموع شامل ۶ خانه در سطر یا ستون مشترک دو رخ قبلی و ۱۴ خانه در سطرها یا ستون های غیر مشترک دو رخ است. پس کل حالت ها برابر است با:

$$۶۴ \times ۱۴ \times ۲۰$$

۲. رخ اول رخ دوم را تهدید نکند:
رخ اول برای قرار گیری در صفحه شطرنجی ۶۴ حالت دارد، حال چون رخ اول نباید توسط رخ دوم تهدید بشود رخ دوم را در خانه ای به جز سطر یا ستون رخ اول قرار بدهیم که ۴۹ حالت دارد. حال رخ سوم باید هر دو رخ را تهدید کند پس باید در یکی از محل های تقاطع سطر و ستون رخ اول و رخ دوم قرار بگیرد که دو حالت دارد، پس کل حالت ها برابر است با:

$$۶۴ \times ۴۹ \times ۲$$

- حالات مطلوب: طبق اصل متمم برابر است با:

$$۶۴ \times ۶۳ \times ۶۲ - (۶۴ \times ۱۴ \times ۲۰ + ۶۴ \times ۴۹ \times ۲)$$

سؤال ۲.۱.

اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$۱^۲\binom{n}{۱} + ۲^۲\binom{n}{۲} + ۳^۲\binom{n}{۳} + \ldots + n^۲\binom{n}{n} = n(n+۱)۲^{n-۲}$$

پاسخ .

فرض کنید $P = \sum_{k=۰}^{n} k^۲ \binom{n}{k}$ بیانگر تعداد راه های انتخاب یک کمیته از بین n کاندیدا است به طوری که یک فرد یا دو فرد متمایز، رئیس کمیته باشند. حال این شمارش را به روش دیگری انجام می دهیم.

۱. با فرض داشتن یک رئیس، رئیس را انتخاب کرده و تصمیم می‌گیریم که بقیه افراد حضور داشته باشند یا خیر و حالات به دست آمده را جمع می‌کنیم با حالاتی که ۲ رئیس را انتخاب کردیم در مورد حضور یا عدم حضور بقیه افراد تصمیم گرفتیم:

$$P = n \times 2^{n-1} + n \times (n-1) \times 2^{n-2} = n \times (n+1) \times 2^{n-2}$$

از تساوی این ۲ حالت حکم مساله اثبات می‌شود:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n \times (n+1) \times 2^{n-2}$$

نکات:

E.IV : عدم تطابق توضیحات با فرمول نوشته شده، انتخاب دو رئیس از میان n نفر $\binom{n}{2}$ حالت دارد نه $n \times (n-1)$.

N.V : بهتر است روش اثبات (دوگانه شماری)ذکر شود.

E.VI : یک طرف دوگانه شماری که نیازمند اثبات است، بدیهی در نظر گرفته شده است.

پاسخ صحیح .

سوال را با دوگانه شماری حل می کنیم:
فرض کنید P بیانگر تعداد راه های انتخاب یک کمیته از بین n کاندیدا است به طوری که یک فرد رئیس کمیته و یک نفر معاون باشند و رئیس و معاون می توانند یک نفر باشند. شمارش این راه ها به ۲ روش امکان پذیر است.

۱. با فرض یکسان بودن رئیس و معاون، رئیس را انتخاب کرده و تصمیم می‌گیریم که بقیه افراد حضور داشته باشند یا خیر و حالات به دست آمده را جمع می‌کنیم با حالاتی که رئیس و معاون متمایز را انتخاب کردیم و در مورد حضور یا عدم حضور بقیه افراد تصمیم گرفتیم:

$$P = n \times 2^{n-1} + n \times (n-1) \times 2^{n-2} = n \times (n+1) \times 2^{n-2}$$

۲. ابتدا این که چه اعضایی کمیته و رئیس و معاون را تشکیل دهند را انتخاب می‌کنیم که این تعداد می‌تواند هر عددی باشد، سپس رئیس و معاون یکسان یا متمایز را از بین آن ها انتخاب می‌کنیم:

$$P = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k(k-1) + k) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$$

از تساوی ۲ حالت فوق حکم مساله اثبات می‌شود:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n \times (n+1) \times 2^{n-2}$$

سؤال ۳.۱.

۶۰ دانشجو در کلاس ریاضیات گسسته حضور دارند.در میان هر ۱۰ نفر از این کلاس ، حداقل ۳ نفر نمره مبانی یکسانی دارند. ثابت کنید در این کلاس ۱۵ نفر وجود دارند که نمره مبانی آن ها یکسان است.

پاسخ .

در نظر میگیریم حداکثر تعداد تکرار از یک نمره ۱۴ عدد است که در این صورت حداقل به ۵ نمره متفاوت نیاز است . در این صورت باز میتوان گروه ۱۰ تایی را از دانش آموزان انتخاب کرد که حداکثر دو نفر نمره یکسان داشته باشند . پس فرض اولیه غلط بوده و مشخص میشود که لااقل از یکی از نمرات وجود دارد که ۱۵ دانش آموز یا بیشتر آن نمره را دارند.

نکات:

N.VII : در پاسخ از برهان خلف استفاده شده ولی از آن نام برده نشده است و باید توجه کنیم فرض خلف را حتما بیان کنیم.

N.VIII : باید اصل لانه کبوتری که از آن استفاده کرده است را نام میبرد و نحوه استفاده از آن مشخص شود.

T.IX : پاسخ کامل نیست. پاسخ درست و کامل در پایین آمده است.

پاسخ صحیح .

از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض خلف : فرض کنید در این کلاس هیچ ۱۵ نفری وجود نداشته باشند که نمره‌ی مبانی آن‌ها یکسان باشد. در این صورت حداکثر ۱۴ نفر وجود دارند که نمره‌ی یکسان داشته باشند. بنابراین طبق اصل لانه کبوتری حداقل به اندازه‌ی سقف $\frac{۶۰}{۱۴}$ یعنی ۵ نمره‌ی متفاوت در کلاس وجود دارد. مسئله را به دو حالت تقسیم می‌کنیم ؛

۱. اگر پنج نمره‌ی متمایز وجود داشته باشند که از هر کدام ۲ عضو (دو نفر در کلاس که آن نمره را دارند) وجود داشته باشد؛ در این صورت از هر کدام از این نمرات دو عضو را درنظر گرفته و به مجموعه‌ای ۱۰ عضوی می‌رسیم که هیچ سه نفری در آن نمره‌ی یکسان ندارند که این خلاف فرض مسئله است و به تناقض رسیدیم. پس فرض خلف رد شده و حداقل ۱۵ نفر وجود دارند که نمره‌ی یکسانی داشته باشند.

۲. اگر پنج نمره‌ی متمایز، هرکدام دارای حداقل دو عضو وجود نداشته باشند؛ در این صورت $k \leq ۴$ نمره‌ی متمایز با بیش از یک عضو داریم (مجموعه‌ی این نمرات را A بنامیم) که با توجه به فرض خلف، حداکثر تعداد $k \times ۱۴$ عضو را پوشش می‌دهند. بنابراین حداقل $۶۰ - ۱۴k$ نفر باقی مانده که هیچ دو تایی نمی‌توانند دارای نمره‌ی یکسان باشند (در غیر این صورت تعداد نمره‌های متمایز دارای بیشتر مساوی ۲ عضو به حداقل k+1 می‌رسد). بنابراین هر یک از این اعضا دارای نمره‌ای متمایز است (مجموعه‌ی این اعضا را B بنامیم). می‌توان با انتخاب دو عضو از هر نمره‌ی مجموعه‌ی A و تمام اعضای مجموعه‌ی B به مجموعه‌ای متشکل از $N = ۲k + ۶۰ - ۱۴k = ۶۰ - ۱۲k$ عضو رسید که $k \leq ۴ \Rightarrow N \geq ۱۲$ و هیچ سه عضوی در آن دارای نمره‌ی یکسان نیستند. هر ده عضوی از این مجموعه انتخاب شود، نقض فرض مسئله است و به تناقض رسیدیم. پس فرض خلف رد شده و حداقل ۱۵ نفر وجود دارند که نمره‌ی یکسانی داشته باشند.

سؤال ۴.۱.

ضریب عبارت $x^{۱۲}$ در بسط عبارت $(۱ - ۴x)^{-۵}$ را بیابید.

پاسخ .

طبق بسط دوجمله ای داریم:

$$\frac{۱}{(۱-۴x)^{۵}} = \sum_{k=۰}^{\infty} \binom{k+۴}{k} ۴^k x^k$$

جمله ۱۲ ام دنباله a_n ضریب $x^{۱۲}$ است. $(E.XI)$

$$\longrightarrow a_{۱۲} = \binom{۱۶}{۱۲} ۴^{۱۲}$$

نکات:

N.X : بهتر است اصل بسط دوجمله ای هم نوشته شود.

E.XI : قبل از استفاده از متغیر باید آن را تعریف کرد. تعریف دنباله a_n ضروری است.

پاسخ صحیح .

طبق جدول Useful Generating Functions از کتاب Rosen که استاد نیز به آن اشاره کردند داریم:

$$(۱-x)^{-n} = \sum_{k=۰}^{\infty} \binom{n+k-۱}{k} x^k$$

بنابراین در این سوال داریم:

$$(۱-۴x)^{-۵} = \sum_{k=۰}^{\infty} \binom{۵+k-۱}{k} (۴x)^k$$

جمله $x^{۱۲}$ به ازای مقدار $k = ۱۲$ ساخته می‌شود. بنابراین جواب برابر خواهد بود با:

$$\binom{۱۶}{۱۲} (۴)^{۱۲}$$

سؤال ۵.۱.

چند عدد طبیعی حداکثر ۹ رقمی وجود دارد که مجموع ارقام آن برابر با ۳۲ باشد؟

پاسخ .

سوال را با اصل شمول و عدم شمول حل می کنیم:

$$|A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_۹| = \binom{۹}{۱}|A_۱| + \binom{۹}{۲}|A_۱ \cap A_۲| + \ldots + \binom{۹}{۹}|A_۱ \cap A_۲ \cap \ldots \cap A_۹|$$

حال مقدار عبارت ها را حساب می کنیم:

$$|A_۱| = \binom{۳۰}{۸}$$

$$|A_۱ \cap A_۲| = \binom{۲۰}{۸}$$

$$|A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = \binom{۱۰}{۸}$$

برای بقیه جمله ها جواب برابر ۰ است.
حال از اصل متمم برای به دست آوردن جواب نهایی استفاده می کنیم:
-کل حالات:

$$\binom{۴۰}{۸}$$

- حالات مطلوب:

$$\binom{۴۰}{۸} - \binom{۹}{۱}\binom{۳۰}{۸} + \binom{۹}{۲}\binom{۲۰}{۸} - \binom{۹}{۳}\binom{۱۰}{۸}$$

نکات:

E.XII : تعریف متغیر های A_i ضروری است، چون در غیر این صورت منظور از بقیه استدلال ها به هیچ وجه مشخص نیست.

E.XIII : اثبات و یا در صورت وضوح، اشاره به تقارن میان مجموعه ها برای استفاده از اصل شمول و عدم شمول به این شکل ضروری است.

پاسخ صحیح .

رقم i ام این عدد را با x_i نشان می دهیم، بنابراین به دنبال یافتن تعداد جواب های صحیح معادله زیر هستیم:

$$\sum_{۱}^{۹} x_i = ۳۲$$

$$\forall i \in [۱,۹], i \in N : x_i \leq ۹$$

تعداد جواب های صحیح این معادله را به کمک اصل متمم پیدا می کنیم:
-کل حالات:تعداد جواب های صحیح نامنفی معادله $\sum_{۱}^{۹} x_i = ۳۲$.این یک معادله سیاله است و تعداد جواب های صحیح آن برابر است با:

$$\binom{۴۰}{۸}$$

-حالات نامطلوب:تعداد جواب های صحیح نامنفی معادله $\sum_{۱}^{۹} x_i = ۳۲$ به طوری که:
$(\exists i \in [۱,۹], i \in N : x_i \geq ۱۰)$
حال اگر مجموعه حالت هایی که در آن $x_i \geq ۱۰$ است را با A_iنشان دهیم، کافی است تعداد اعضای اجتماع این مجموعه ها را بیابیم طبق اصل شمول و عدم شمول و با توجه به تقارن میان A_i ها داریم:

$$|A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_۹| = \binom{۹}{۱}|A_۱| + \binom{۹}{۲}|A_۱ \cap A_۲| + \ldots + \binom{۹}{۹}|A_۱ \cap A_۲ \cap \ldots \cap A_۹|$$

برای محاسبه مقدار عبارت ها، در معادله سیاله متناظر، در صورتی که $x_i \geq ۱۰$ بود قرار می دهیم $x_i = y_i + ۱۰$ و در غیر این صورت قرار می دهیم $x_i = y_i$، حال اگر تعداد i هایی را که به ازای آن ها $x_i \geq ۱۰$ است را با k نشان بدهیم، حال به دنبال تعداد جواب های صحیح نامنفی معادله سیاله $\sum_{۱}^{۹} y_i = ۳۲ - ۱۰k$ هستیم، که برابر است با:

$$\binom{۴۰ - ۱۰k}{۸}$$

حال مقدار عبارت ها را حساب می کنیم:

$$|A_۱| = \binom{۳۰}{۸} \qquad\qquad (k = ۱)$$

$$|A_۱ \cap A_۲| = \binom{۲۰}{۸} \qquad\qquad (k = ۲)$$

$$|A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = \binom{۱۰}{۸} \qquad\qquad (k = ۳)$$

برای بقیه جمله ها جواب برابر ۰ است.
پس کل حالات نامطلوب برابر است با:

$$\binom{۹}{۱}\binom{۳۰}{۸} - \binom{۹}{۲}\binom{۲۰}{۸} + \binom{۹}{۳}\binom{۱۰}{۸}$$

- حالات مطلوب: طبق اصل متمم برابر است با:

$$\binom{۴۰}{۸} - \binom{۹}{۱}\binom{۳۰}{۸} + \binom{۹}{۲}\binom{۲۰}{۸} - \binom{۹}{۳}\binom{۱۰}{۸}$$

سؤال ۱.۶.

با استفاده از توابع مولد نشان دهید تعداد روش های انتخاب ۴ عضو دو به دو نامتوالی از مجموعه اعداد n ،...،۱،۲،۳ برابر با انتخاب ۴ از n-۳ است.

پاسخ .

یک زیرمجموعه از این نوع مثلا ۱و۳و۷و۱۰ را انتخاب و نابرابری های اکید
$۰ < ۱ < ۳ < ۷ < ۱۰ < n + ۱$
را در نظر میگیریم. و بررسی میکنیم چند عدد صحیح بین هر دو عدد متوالی از این اعداد وجود دارند. در اینجا ۰ و ۱ و۳ و 2 و n-۱۰ را به دست می آوریم: ۰ زیرا عددی صحیح بین 0 و ۱ وجود ندارد و ۱ زیرا تنها عدد ۲ بین ۱ و۳ وجود دارد و 3 زیرا اعداد صحیح ۴ و۵ و۶ بین ۳ و۷ وجود دارند و ... . مجموع این ۵ عدد صحیح برابر $0 + 1 + 3 + 2 + n - 10 = n - 4$ است. $(E.XIV)$

پس تابع مولد زیر را داریم.

$$G(x) = (۱ + x^۲ + x^۳ + ...)^۲(x + x^۲ + x^۳ + ...)^۳ = (\sum_{k=۰}^{\infty} x^k)^۲(\sum_{k=۰}^{\infty} x^{k+۱})^۳ =$$
$$\frac{۱}{(۱-x)^۲}.(\frac{x}{۱-x})^۳ = \frac{x^۳}{(۱-x)^۵} = x^۲(۱-x)^{-۵} = x^۳\sum_{k=۰}^{\infty}\binom{k+۴}{k}x^k =$$
$$\sum_{k=۰}^{\infty}\binom{k+۴}{k}x^{k+۳} = (E.XV) \quad \sum_{k=۰}^{\infty}\binom{k+۱}{k-۳}x^k$$

به دنبال ضریب $x^{n-۴}$ میگشتیم پس $k = n - ۴$ و جواب نهایی برابر است با $\binom{n-3}{n-7} = \binom{n-3}{4}$

نکات:

E.XIV : مثال زدن باید به صورتی باشد که حذف آن اختلالی در فهم جواب ایجاد نکند . در اینجا اگر مثال پاراگراف اول را حذف کنیم مشخص نیست تابع مولد برچه اساسی نوشته شده است. پس باید توضیحی درمورد تابع مولد و جمله ای که به دنبال ضریب آن هستیم بدهیم .

E.XV : نیاز هست که کاملا گفته شود چه تغییر متغیری انجام میشود . در اینجا تغییر متغیر $k \rightarrow k+۳$ را داریم. همیشه به هنگام تغییر متغیر توجه کنیم ممکن است کران ها تغییر کنند. در اینجا کران پایین از صفر به سه میرود. صورت اصلاح شده: $\sum_{k=۳}^{\infty}\binom{k+۱}{k-۳}x^k$

N.XVI : در طی پاسخ به سوال خوب است دقت کنیم همه ی اعداد را یا فارسی یا انگلیسی بنویسیم.

پاسخ .

تابع مولد فاصله از مبدا:

$$G(x) = (۱ + x + x^۲ + ...)(x + x^۲ + x^۳ + ...)^۳$$

در مجموع ۴-n عدد داریم . توان های x باید بین مبدا و مقصد باشند پس باید توانی از x را که کوچک تر یا مساوی ۴-n هستند را بیابیم:

$$G(x) = \frac{x^۳}{(۱-x)^۴} = x^۳(۱-x)^{-۴} = x^۳\sum_{k=۰}^{\infty}\binom{k+۳}{۳}x^k$$

$$\longrightarrow \sum_{k=۰}^{\infty}\binom{x+k}{k} = \frac{۱}{(۱+x)^{k+۱}} \longrightarrow k+۳ \leq n-۴ \rightarrow k \leq n-۷$$

$$\binom{n+۱}{r+۱} = \sum_{k=r}^{n}\binom{k}{r} \qquad (۱)$$

مجموع حالات:

$$\longrightarrow \sum_{k=۰}^{n-۷}\binom{k+۳}{۳} \xrightarrow{(۱)} \binom{n-۷+۴}{۴} = \binom{n-۳}{۴}$$

نکات:

E.XVII : به هنگام جایگذاری در فرمول باید جایگذاری ها واضح باشد. در این مثال در فرمول (۱) کران پایین از r هست ولی در قسمتی که از آن استفاده شده کران پایین از ۰ است. همین مطلب گویای آن است که به توضیحات بیشتری نیاز هست.

عبارت زیر صورت کامل شده این نکته است:

$$\longrightarrow \sum_{k=۰}^{n-۷}\binom{k+۳}{k} = \sum_{k=۳}^{k-۴}\binom{k}{k-۳} = \sum_{k=۳}^{n-۴}\binom{k}{۳} \xrightarrow[r\rightarrow۳, n\rightarrow n-۴]{(۱)} \binom{n-۳}{۴}$$

پاسخ صحیح .

تعداد عضوهای انتخاب نشده کوچکتر از عضو اول انتخاب شده را $x_۱$، عضوهای انتخاب نشده بین عضو اول و دوم انتخاب شده را $x_۲$، عضوهای انتخاب نشده بین عضو دوم و سوم انتخاب شده را $x_۳$، عضوهای انتخاب نشده بین عضو سوم و چهارم انتخاب شده را $x_۴$ و عضوهای انتخاب نشده بزرگ‌تر از چهارمین عضو انتخاب شده را $x_۵$ می‌گیریم. کافی است تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله زیر را با شرایط $x_۲x_۳, x_۴ \geq ۱$ $x_۱, x_۵ \geq ۰$ بشماریم

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = n - ۴$$

که برابر است با ضریب $x^{n-۴}$ در عبارت:

$$(۱+x+x^۲+\ldots)(x+x^۲+x^۳+\ldots)(x+x^۲+x^۳+\ldots)(x+x^۲+x^۳+\ldots)(۱+x+x^۲+\ldots) = \frac{x^۳}{(۱-x)^۵}$$

بنابراین کافی است ضریب $x^{n-۷}$ را در بسط $(۱-x)^{-۵}$ بشماریم .

طبق جدول Useful Generating Functions از کتاب Rosen که استاد نیز به آن اشاره کردند داریم:

$$(۱-x)^{-n} = \sum_{k=۰}^{\infty} \binom{n+k-۱}{k} x^k$$

بنابراین در این سوال داریم:

$$(۱-x)^{-۵} = \sum_{k=۰}^{\infty} \binom{۵+k-۱}{k} x^k = \sum_{k=۰}^{\infty} \binom{k+۴}{k} x^k = \sum_{k=۰}^{\infty} \binom{k+۴}{۴} x^k$$

$x^{n-۷}$ به ازای $k = n - ۷$ ساخته می‌شود. بنابراین جواب برابر است با:

$$\binom{n-۳}{۴}$$

سؤال ۷.۱.

اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sum_{i=۰}^{n} i \binom{n}{i}^۲ = \frac{n}{۲}\binom{۲n}{n}$$

پاسخ .

$$A = \sum_{i=۰}^{n} i \binom{n}{i}^۲ \xrightarrow{\times ۲} ۲A = \sum_{i=۰}^{n} i \binom{n}{i}^۲ + \sum_{i=۰}^{n} i \binom{n}{i}^۲ \xrightarrow{j=n-i}$$

$$۲A = \sum_{i=۰}^{n} i \binom{n}{i}^۲ + \sum_{j=۰}^{n} (n-j) \binom{n}{n-j}^۲ \rightarrow ۲A = \sum_{i=۰}^{n} i \binom{n}{i}^۲ + \sum_{j=۰}^{n} (n-j) \binom{n}{j}^۲ =$$

$$\sum_{i=۰}^{n} (i + (n-i)) \binom{n}{i}^۲ \rightarrow ۲A = n \sum_{i=۰}^{n} \binom{n}{i}^۲ \rightarrow ۲A = n \sum_{i=۰}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$$

بنابراین میدانیم که:

$$۲A = n\binom{۲n}{n} \rightarrow A = \tfrac{n}{۲}\binom{۲n}{n}$$

نکات:

N.XVIII : باید فرمول و اتحاد های مورد استفاده و رفرنس معتبر آن ذکر شود . به عنوان رفرنس اسم اتحاد هم کافی است.

پاسخ صحیح .
طبق اتحاد واندرموند داریم:

$$\sum_{i=۰}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k} \qquad (۱)$$

$$A = \sum_{i=۰}^{n} i\binom{n}{i}^۲ \xrightarrow{\times ۲} ۲A = \sum_{i=۰}^{n} i\binom{n}{i}^۲ + \sum_{i=۰}^{n} i\binom{n}{i}^۲ \xrightarrow{j=n-i}$$

$$۲A = \sum_{i=۰}^{n} i\binom{n}{i}^۲ + \sum_{j=۰}^{n}(n-j)\binom{n}{n-j}^۲ \rightarrow ۲A = \sum_{i=۰}^{n} i\binom{n}{i}^۲ + \sum_{j=۰}^{n}(n-j)\binom{n}{j}^۲ =$$

$$\sum_{i=۰}^{n}(i+(n-i))\binom{n}{i}^۲ \rightarrow ۲A = n\sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i}^۲ \rightarrow ۲A = n\sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i} \xrightarrow[m=n=k]{(۱)}$$

$$۲A = n\binom{۲n}{n} \rightarrow A = \frac{n}{۲}\binom{۲n}{n}$$