



## رو به سعادت در نوشتار

ریاضیات گسسته

سودابه محمدهاشمی - کیمیا محمدطاهری - یارا کامکار - بهزاد شایق

هر کس که وارد مبحث علم ریاضیات میشود باید توانایی درست خواندن و درک کردن و نوشتن مسائل و اثبات ها را کسب کند. چیزی که برای ما اهمیت دارد درست نویسی است چرا که درست نوشتن اثبات ها نقش به سزایی در درست خواندن و درک کردن آن ها نیز دارد.

خیلی از اوقات پیش می آید که اثبات موضوعی بسیار منطقی ب نظر می آید ولی در واقع کاملاً اشتباه هست. به همین خاطر هست که ما نیاز داریم یاد بگیریم چگونه اثبات ها را دنبال کنیم. زمانی که اثبات ها را مرحله به مرحله با استدلال های منطقی و درست پیش ببریم میتوانیم از درست بودن و معتبر بودن نتیجه ای که به دست آورده ایم مطمئن باشیم. به علاوه این که در نهایت وقتی یاد بگیریم چگونه استدلال های به جا بیاوریم و اثباتمان را کامل کنیم، به فهم عمیق تری از ریاضیات و مسائل میرسیم.

پایه ی درست نویسی ساده است. فقط کافی است که دقت کنیم هر جمله ای که استفاده میکنیم یکی از موارد زیر باشد: ۱. فرض مسئله ۲. از جمله ی قبلی به طور شفاف نتیجه شده باشد. ۳. درستی آن قبلاً اثبات شده باشد.

در این جزوه ما سعی داریم شما را بیشتر با درست نویسی و نکاتی که در این جهت ما را سوق میدهند آشنا کنیم ( تا در نهایت یاد بگیریم در دیگر مراحل زندگی مان هم با منطق باشیم. )

## فصل ۱ : شمارش

سؤال ۱.۱.

سؤال ۲.۱.

سؤال ۳.۱.

۶۰ دانشجو در کلاس ریاضیات گسسته حضور دارند. در میان هر ۱۰ نفر از این کلاس، حداقل ۳ نفر نمره مبانی یکسانی دارند. ثابت کنید در این کلاس ۱۵ نفر وجود دارند که نمره مبانی آن ها یکسان است.

پاسخ .

(1.3.N.1) در نظر میگیریم حداکثر تعداد تکرار از یک نمره ۱۴ عدد است که در این صورت حداقل به ۵ نمره متفاوت نیاز است .  
(1.3.N.2) در این صورت باز میتوان گروه ۱۰ تایی را از دانش آموزان انتخاب کرد که حداکثر دو نفر نمره یکسان داشته باشند . پس فرض اولیه غلط بوده و مشخص میشود که لااقل از یکی از نمرات وجود دارد که ۱۵ دانش آموز یا بیشتر آن نمره را دارند. (1.3.T.3)

نکات:

۱.N.۳.۱: در پاسخ از برهان خلف استفاده شده ولی از آن نام برده نشده است و باید توجه کنیم فرض خلف را حتما بیان کنیم.

۲.N.۳.۱: باید اصل لانه کبوتری که از آن استفاده کرده است را نام میرد و نحوه استفاده از آن مشخص شود.

۱.T.۳.۱: پاسخ کامل نیست. پاسخ درست و کامل در پایین آمده است.

پاسخ صحیح .

از برهان خلف استفاده می کنیم. فرض خلف : فرض کنید در این کلاس هیچ ۱۵ نفری وجود نداشته باشند که نمره ی مبانی آن ها یکسان باشد. در این صورت حداکثر ۱۴ نفر وجود دارند که نمره ی یکسان داشته باشند. بنابراین طبق اصل لانه کبوتری حداقل به اندازه ی سقف  $\frac{60}{14}$  یعنی ۵ نمره ی متفاوت در کلاس وجود دارد. مسئله را به دو حالت تقسیم می کنیم :

۱. اگر پنج نمره ی متمایز وجود داشته باشند که از هر کدام ۲ عضو (دو نفر در کلاس که آن نمره را دارند) وجود داشته باشد؛ در این صورت از هر کدام از این نمرات دو عضو را در نظر گرفته و به مجموعه ای ۱۰ عضوی می رسیم که هیچ سه نفری در آن نمره ی یکسان ندارند که این خلاف فرض مسئله است و به تناقض رسیدیم. پس فرض خلف رد شده و حداقل ۱۵ نفر وجود دارند که نمره ی یکسانی داشته باشند.

۲. اگر پنج نمره ی متمایز، هر کدام دارای حداقل دو عضو وجود نداشته باشند؛ در این صورت  $k \leq 4$  نمره ی متمایز با بیش از یک عضو داریم (مجموعه ی این نمرات را A بنامیم) که با توجه به فرض خلف، حداکثر تعداد  $14 \times k$  عضو را پوشش می دهند. بنابراین حداقل  $60 - 14k$  نفر باقی مانده که هیچ دو تایی نمی توانند دارای نمره ی یکسان باشند (در غیر این صورت تعداد نمره های

متمایز دارای بیشتر مساوی ۲ عضو به حداقل  $k+1$  می‌رسد). بنابراین هر یک از این اعضا دارای نمره‌ای متمایز است (مجموعه‌ی این اعضا را  $B$  بنامیم). می‌توان با انتخاب دو عضو از هر نمره‌ی مجموعه‌ی  $A$  و تمام اعضای مجموعه‌ی  $B$  به مجموعه‌ای متشکل از  $N = 2k + 60 - 14k = 60 - 12k$  عضو رسید که  $k \leq 4 \Rightarrow N \geq 12$  و هیچ سه عضوی در آن دارای نمره‌ی یکسان نیستند. هر ده عضوی از این مجموعه انتخاب شود، نقض فرض مسئله است و به تناقض رسیدیم. پس فرض خلف رد شده و حداقل ۱۵ نفر وجود دارند که نمره‌ی یکسانی داشته باشند.

## فصل ۲ : شمارش

سؤال ۱.۲.

سؤال ۲.۲.

سؤال ۳.۲.

ضریب عبارت  $x^{12}$  در بسط عبارت  $(1 - 4x)^{-5}$  را بیابید.

پاسخ .

طبق بسط دوجمله ای داریم: (1.4.N.1)

$$\frac{1}{(1 - 4x)^5} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{k} 4^k x^k$$

جمله ۱۲ام دنباله  $a_n$  ضریب  $x^{12}$  است. (1.4.N.2)

$$\rightarrow a_{12} = \binom{16}{12} 4^{12}$$

نکات:

۱.N.۳.۲: بهتر است اصل بسط دوجمله ای هم نوشته شود.

۲.N.۳.۲: قبل از استفاده از متغیر باید آن را تعریف کرد. تعریف دنباله  $a_n$  ضروری است.

پاسخ صحیح .

طبق جدول Useful Generating Functions از کتاب Rosen که استاد نیز به آن اشاره کردند داریم:

$$(1 - x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k$$

بنابراین در این سوال داریم:

$$(1 - 4x)^{-5} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{5+k-1}{k} (4x)^k$$

جمله  $x^{12}$  به ازای مقدار  $k = 12$  ساخته می‌شود. بنابراین جواب برابر خواهد بود با:

$$\binom{16}{12} (4)^{12}$$