

SORBONNE UNIVERSITES

4M045  
TER  
RAPPORT

---

# Processus de branchement et coalescences

---

*Élèves :*  
Salim AMOUKOU

*Enseignant :*  
Quentin BERGER

31 mai 2019

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Remerciements</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Preliminaire</b>	<b>3</b>
2.1	Définition du processus de Galton-Watson . . . . .	3
2.2	Propriétés de $Z_n$ . . . . .	4
2.2.1	Proposition 1 . . . . .	4
2.2.2	Proposition 2 . . . . .	5
2.3	Étude asymptotique . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Marches aléatoires branchantes</b>	<b>8</b>
3.1	Définition . . . . .	8
3.2	Outils fondamentaux . . . . .	9
3.2.1	Many-to-one . . . . .	9
3.2.2	Epine dorsale . . . . .	10
3.2.3	Martingales associées . . . . .	12
3.3	Applications des outils . . . . .	14
3.3.1	Many-To-One avec l'épine dorsale . . . . .	14
3.3.2	Limite de la particule la plus à gauche(Martingale additive ) . . . .	15
3.3.3	Convergence faible de la particule la plus à gauche(Martingale dérivée)	15
3.3.4	Convergence forte de la particule la plus à gauche . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Simulations</b>	<b>19</b>
4.1	Galton-Watson . . . . .	20
4.2	Processus avec coalescence . . . . .	21
4.3	Processus avec individus de type différents . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Annexes</b>	<b>31</b>

# 1 Remerciements

Mes premiers remerciements vont tout naturellement à mon directeur de recherche Quentin Berger. Cette aventure n'aurait pas été possible sans son soutien. Il a fait preuve d'une grande patience et m'a beaucoup aidé à améliorer la qualité de ma rédaction ; il n'a pas hésité à me donner de son temps, je lui en suis extrêmement reconnaissant. Merci aussi pour sa présence et ses conseils avisés lors des moments difficiles que j'ai pu passer durant ce travail.

Je remercie aussi Damien Simon pour son aide précieuse dans toute la partie programmation. Naim Assoumani et Frank A.Martini pour la relecture de ce travail.

## 2 Préliminaire

Les modèles d'évolution de population ne datent pas d'aujourd'hui. Dès le XIII<sup>e</sup> siècle, la suite de Fibonacci fut introduite pour décrire la croissance d'une population de lapins. Au XIX<sup>e</sup> siècle, le Royaume-Uni connut deux grands modèles d'étude de population : le modèle de Malthus, qui est sans doute le modèle d'évolution de population le plus connu, son étude repose principalement sur des outils d'analyse ; le deuxième modèle connu sous le nom du modèle de Galton-Watson est une approche probabiliste de l'étude des populations. Pour comprendre son origine historique, nous allons citer Francis Galton et le révérend Watson (1874).

« The decay of the families of men who occupied conspicuous positions in past times has been a subject of frequent research, and has given rise to various conjectures ... The instances are very numerous in which surnames that were once common have since become scarce or have wholly disappeared. The tendency is universal, and, in explanation of it, the conclusion has hastily been drawn that a rise in physical comfort and intellectual capacity is necessarily accompanied by a diminution in 'fertility' . . . ».

C'est ainsi qu'ils entreprirent l'étude probabiliste de la suivie d'une lignée et créèrent le processus de Galton-Watson dans l'optique d'apporter des réponses rigoureuses.

Dans un premier temps, nous allons définir le modèle de Galton-Watson ainsi que ses propriétés générales puis faire l'étude asymptotique de la population.

### 2.1 Définition du processus de Galton-Watson

Le but du modèle classique consiste à étudier la lignée d'un individu présent à la position 0 (instant initial).

- On associe à l'individu initial une variable aléatoire discrète  $X$  représentant son nombre d'enfants avec  $p_k = \mathbb{P}(X=k)$  qui est sa probabilité d'avoir  $k$  enfants.

- On pose  $Z_n$  le nombre d'individus à la génération  $n$ , alors  $Z_0 = 1$  par hypothèse. Le passage de la génération  $n$  à la génération  $n+1$  se fait de la façon suivante : tous les individus de la génération  $n$  meurent et laissent un nombre aléatoire d'enfants suivant la loi des  $Z_n$  variables aléatoires suivantes :  $X_{n+1,1}, X_{n+1,1}, X_{n+1,1}, \dots, X_{n+1,Z_n}$ . De manière plus formelle, si on considère une famille  $\{X_{n,k}, n \geq 0, k \geq 0\}$  de variables aléatoires discrètes, on peut alors poser que le nombre d'individus à la génération  $n+1$  est :

$$Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n+1,k} \quad (1)$$

Le but initial étant d'étudier la descendance de la particule initiale, en l'occurrence la convergence de  $Z_n$ , nous allons émettre des hypothèses de base pour pouvoir arriver à nos fins.

**Les hypothèses de base :**

- Les individus ont un nombre aléatoire d'enfants et indépendamment des autres
- Selon la même loi

**Remarque :** Les deux hypothèses reviennent à supposer que les  $X_{n,k}$  soient iid.

On peut représenter le processus de Galton-Watson sous forme d'arbre :

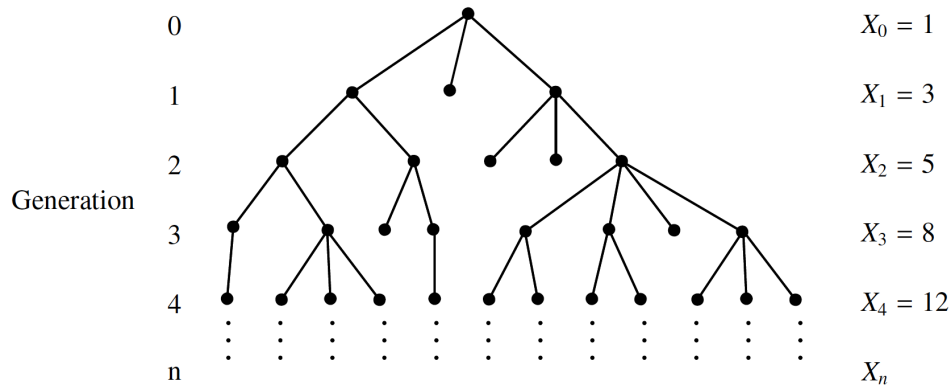


FIGURE 1 – Arbre de Galton-Watson

## 2.2 Propriétés de $Z_n$

Dans toute cette section nous allons poser :

$$m = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k < \infty \quad \text{moyenne de la loi de reproduction} \quad (2)$$

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k < \infty \quad \text{variance de la loi de reproduction} \quad (3)$$

### 2.2.1 Proposition 1

$\forall 0 < m < \infty$ , la suite  $(Z_n/m^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une martingale positive qui converge ps vers une variable aléatoire  $W$ .

*Démonstration.* Considérons  $\mathcal{F}_n$  la tribu représentant toute l'information à la génération n. Il est alors évident que  $(Z_n/m^n)$  est mesurable pour tout n, et l'intégrabilité de  $(Z_n/m^n)$  découle de l'intégrabilité des  $X_{n,k}$  d'espérance égale à m finie.

Par définition de  $Z_{n+1}$ ,

$$\begin{aligned} E\left(\frac{Z_{n+1}}{m^{n+1}} \middle| \mathcal{F}_n\right) &= \frac{1}{m^{n+1}} E\left(\sum_{k=1}^{Z_n} X_{n+1,k} \middle| \mathcal{F}_n\right) \\ &= \frac{1}{m^{n+1}} \sum_{k=1}^{Z_n} E(X_{n+1,k} | \mathcal{F}_n) = \frac{1}{m^{n+1}} \sum_{k=1}^{Z_n} E(X_{n+1,k}) \\ &= \frac{1}{m^{n+1}} \sum_{k=1}^{Z_n} m = \frac{Z_n}{m^n} \end{aligned}$$

On en conclut que  $Z_n/m^n$  est martingale, de plus par définition  $Z_n$  est positive or une martingale positive converge toujours donc  $Z_n$  converge presque sûrement vers une variable aléatoire  $W$ .  $\square$

**Remarque 1 :** On déduit facilement de la proposition 1 que  $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$  car  $Z_n/m^n$  étant une martingale on a  $\mathbb{E}(\frac{Z_n}{m^n}) = \mathbb{E}(Z_0) = 1$

### 2.2.2 Proposition 2

Soit  $\phi_n(s) = \mathbb{E}(s^{Z_n})$  la fonction génératrice de  $Z_n$  [1] pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \phi_{n+1} = \phi_n \circ \phi \quad (4)$$

*Démonstration.* On va montrer que  $\mathbb{E}(s^{Z_n} | \mathcal{F}_{n-1}) = \phi(s)^{Z_{n-1}}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(s^{Z_n} | \mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}(s^{\sum_{k=0}^{Z_{n-1}} X_{n,k}} | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(\prod_{k=0}^{Z_{n-1}} s^{X_{n,k}} | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{k \leq Z_{n-1}\}} \prod_{k=0}^{\infty} s^{X_{n,k}} | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \mathbb{1}_{\{k \leq Z_{n-1}\}} \mathbb{E}(\prod_{k=0}^{\infty} s^{X_{n,k}} | \mathcal{F}_{n-1}) \text{ car } \mathcal{F}_{n-1} \text{ mesurable} \\ &= \mathbb{1}_{\{k \leq Z_{n-1}\}} \prod_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(s^{X_{n,k}}) \text{ car les } X_{n,k} \text{ sont iid} \\ &= \phi(s)^{Z_{n-1}} \end{aligned}$$

On a donc  $\phi_n(s) = \mathbb{E}(s^{Z_n}) = \mathbb{E}(\phi(s)^{Z_{n-1}}) = \phi_{n-1}(\phi(s))$   $\square$

**Remarque 2 :** On retrouve le résultat de la remarque 1 en utilisant les fonctions génératrices. On a  $\phi'(1) = m$  et  $\phi'_n(1) = \phi'(1)\phi'_{n-1}(1)$  on trouve par récurrence que  $\phi'_n(1) = m^n$  donc  $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$ .

## 2.3 Étude asymptotique

Pour entamer l'étude de notre lignée, posons :

$\tau := \inf\{n \geq 0 : Z_n = 0\}$ ,  $P_{ext} = \mathbb{P}(\tau < \infty)$  représentant les temps et probabilité d'extinction.

Avant de rentrer dans le vif du sujet, nous allons d'abord citer quelques cas triviaux .

**Cas simple :**

- si  $p_0 = 0$ , et  $p_1 < 1$  alors  $Z_{n+1} \geq Z_n$  p.s, et  $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = +\infty$
- si  $p_1 = 1$  alors  $Z_n = 1$  p.s
- si  $p_0 + p_1 = 1$ , alors  $\mathbb{P}(Z_n = 1) = p_1^n$  car 0 est un état absorbant donc par Borel-Cantelli on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = 0$

### Lien entre fonction génératrice et probabilité d'extinction :

Par définition, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau < \infty) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \{Z_n = 0\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = 0\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) \text{ car } \{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(0) \text{ par définition}\end{aligned}$$

Donc on a  $P_{ext} = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(0)$ , de plus en utilisant la relation de récurrence de la fonction de répartition et sa continuité on a :

$$\begin{aligned}P_{ext} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(0) \\ &= \phi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{n-1}(0)\right) \\ P_{ext} &= \phi(P_{ext})\end{aligned}$$

On vient de démontrer que la probabilité d'extinction n'est que le point fixe de la fonction génératrice et c'est aussi le plus petit point fixe car : Soit  $\zeta$  un autre point fixe, comme la fonction  $\phi$  est croissante et convexe alors on a :  $\phi_n(0) \leq \phi(\zeta) = \zeta$  en passant à la limite, on aura  $P_{ext} = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(0) \leq \zeta$ .

### Lien entre moyenne de la loi de reproduction et la probabilité d'extinction :

Rappelons que nous avons démontré que  $Z_n/m^n$  était une martingale, donc nous avons  $\mathbb{E}(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n) = mZ_n$  (4) et qu'on peut voir le processus  $Z_n$  comme une chaîne de Markov avec 0 un état absorbant et tous les autres transients.

Nous allons alors étudier notre processus  $Z_n$  en fonction des valeurs de  $m$ .

— **si  $m < 1$**

D'après l'équation (4),  $Z_n$  est une sur-martingale positive donc converge p.s, et même en L1 car  $Z_n$  est bornée :  $\forall n \geq 0, \mathbb{E}(Z_n) = m^n < 1$ .

Soit  $Z_\infty$  sa limite, on a :

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \leq \mathbb{E}(Z_n) = m^n \longrightarrow 0 \text{ (Inegalite de Markov)}$$

On en déduit  $Z_n$  converge en probabilité vers 0, alors  $Z_\infty = 0$  et  $Z_n$  converge p.s vers 0.

Donc  $P_{ext} = \mathbb{P}(\text{Extinction}) = 1$

— **si  $m = 1$**

On sait qu'il existe  $n \geq 2$  :  $p_n > 0$  car sinon  $p_0 + p_1 = 1$  et donc  $\mathbb{E}(X_{n,k}) = m = p_1 < 1$  chose qui est impossible car  $m = 1$ .

On a montré que  $\mathbb{P}(\tau < \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(0) = \text{Point fixe de } \phi(x)$

Or  $\phi'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 s^k p_k$

Or  $\phi''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k^2(k-1)s^k p_k$

donc  $\phi$  est strictement croissante et convexe sur  $[0,1]$ , de plus  $\phi(1) = 1$ , montrons que c'est l'unique point fixe sur  $[0,1]$ .

Si  $\phi$  admettait un point fixe sur  $[0,1]$  alors elle couperait la droite d'équation  $y = x$ . la convexité de  $\phi$  entraîne que celle ci soit au dessus de toutes ses tangentes or au point  $(1,1)$  la tangente est de pente  $\phi'(1) = m$ . Donc si  $m \leq 1$ , la tangente sera au dessus la droite  $y = x$  alors c'est impossible qu'il y ait une intersection entre  $\phi$  et  $y$ . Ainsi 1 est l'unique point fixe sur  $[0,1]$ .

Donc  $\mathbb{P}(\tau < \infty) = P_{ext} = 1$

— si  $m > 1$

En faisant la même étude qu'au cas précédent on remarque que si  $m > 1$ , la tangente de  $\phi$  sera en dessous de la droite  $y = x$ , ainsi la croissance et la convexité de la fonction entraîne qu'il existe un point fixe inférieur à 1.

Il existe donc un  $q < 1$  tel que  $P_{ext} = \mathbb{P}(\text{Extinction}) = q$

Remarque : On a montré que si  $m > 1$ , l'extinction n'est pas sûre ainsi comme 0 est un état absorbant, et les autres transients on a que deux possibilités.  $Z_n \in \{0, +\infty\}$

### Conclusion :

- si  $m \leq 1$ , la population s'éteint presque sûrement.
- si  $m > 1$ , alors il n'y a que deux possibilités : soit la population s'éteint, soit elle croît vers l'infini.

On en conclut que le processus de Galton-Watson ne permet pas d'étudier des modèles dans lesquels la population se stabilise ou oscille.

Pour étudier des dynamiques de populations plus réalistes, il nous faut ajouter des paramètres tels que la position de chaque individu dans leur milieu en observant la manière de se déplacer des individus en fonction des directions prises en plus de la génération d'un nombre aléatoire d'enfants, on parle alors de marche aléatoire branchante. Ce dernier sera l'objet de notre étude dans toute la suite.



## 3 Marches aléatoires branchantes

Nous avons fait tout ce chemin dans le seul et unique but de pouvoir définir correctement les marches aléatoires branchantes. En effet, on peut voir les processus de branchement comme une amélioration du processus de Galton-Watson. Rappelons qu'on peut représenter le processus de Galton-Watson comme un arbre, où chaque sommet  $x$  représente un individu ainsi on peut enrichir le processus en associant à chaque sommet une valeur  $V(x)$  qui sera héritée du parent. Intuitivement, on peut comprendre cette valeur comme la date de naissance de l'individu, la présence d'une maladie ou sa position au cours du temps. On appelle ces arbres, arbre marqué aléatoire aussi connu sous le nom de marche aléatoire branchante.

Nous allons dans un premier temps définir de manière formelle ces processus, puis les étudier.

### 3.1 Définition

Pour définir proprement notre processus, nous allons d'abord donner la définition d'un processus ponctuel.

Processus de point : Un processus de point  $\mathcal{L}=(x_i)_{i=1}^N$  est un processus stochastique dont une réalisation est une collection de point d'un ensemble  $S$ . On peut le voir comme une variable aléatoire générant un nombre  $N$  de variables réelles ( $N$  pouvant être aussi aléatoire). Dans notre contexte,  $N$  représentera le nombre d'individus et les points peuvent représenter dans le cas discret la position de l'individu ou la date de naissance en temps continu.

Marche aléatoire branchante : Une marche aléatoire branchante est un arbre marqué aléatoire dont l'évolution se fait de la suivante :

- Soit un processus de point  $\mathcal{L}=(x_i)_{i=1}^N$

1. A l'instant 0, il n'y a qu'une seule particule, situé à la position 0.
2. A l'instant 1, la particule meurt, laissant un nombre aléatoire d'enfants suivant le processus  $\mathcal{L}$ .
3. On répète indéfiniment le même processus sur chaque enfant indépendamment du passé et des sœurs suivant une copie indépendante et translatée du processus  $\mathcal{L}$ .

**Notation :**

- Dans tout ce qui suit, on notera pour tout individu  $x$ ,  $V(x)$  sa position,  $|x|$  sa génération et  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ses parents à la génération  $0, 1, \dots, n$ .
- On peut voir notre marche aléatoire branchante comme une variable aléatoire  $V = (V(x) : x \in \mathbb{T})$  qui prend ses valeurs dans l'espace des arbres marqués et  $\mathbb{T}$  est l'arbre généalogique ou le processus de Galton-Watson associé.

Posons :

$$\psi(t) = \ln \mathbb{E} \left( \sum_{x:|x|=1} e^{-tV(x)} \right) \text{ (la transformée de log-laplace de notre processus de point)}$$

(5)

On suppose dans la suite que  $\psi(0) > 0$  qui entraîne que  $\mathbb{E}(N) > 1$  donc que notre processus est super-critique.

## 3.2 Outils fondamentaux

### 3.2.1 Many-to-one

Dans nous allons introduire dans cette partie l'un des outils les plus importants et utiles des processus de branchements appelé Many-to-One formula ou en français le lemme de regroupement. Cet outil nous permettra de simplifier notre modèle en ramenant l'étude de notre processus de branchement à l'étude d'une marche aléatoire.

Pour cela, soit  $t > 0$  tel que  $\psi(t) < \infty$  et  $S_0 = 0$ ,  $(S_n - S_{n-1})_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d tel que :

$$\mathbb{E}(h(S_1)) = \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{x:|x|=1} h(V(x))e^{-tV(x)}}{\sum_{x:|x|=1} e^{-tV(x)}}\right) \quad (6)$$

#### Theorem 3.1. *Many-To-One*

Soit  $t > 0$  tel que  $\psi(t) < \infty$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$  une fonction borélienne alors :

$$\mathbb{E}\left[\sum_{x:|x|=n} g(V(x_1), V(x_2), \dots, V(x_n))\right] = \mathbb{E}[e^{tS_n + n\psi(t)} g(S_1, S_2, \dots, S_n)] \quad (7)$$

*Démonstration.* Nous allons le démontrer par récurrence. Pour  $n = 1$ , il n'y a rien à faire car c'est juste la définition de  $S_1$ . Supposons alors la proposition vraie au rang  $n$ , et montrons la au rang  $n+1$ , pour cela nous allons conditionner notre espérance par rapport à la première génération. En effet on voit facilement que regarder ce qui se passe à la génération  $n+1$  est équivalent à regarder ce qui passe à la génération  $n$  de chaque sous-arbre engendré par les individus de la première génération comme on voit sur l'image suivante.

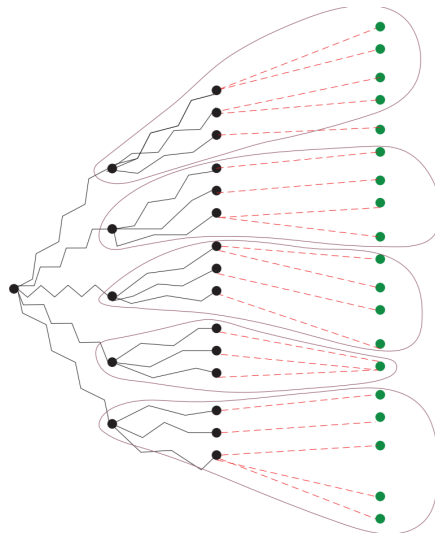


FIGURE 2 – Galton-Watson

On a donc :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\sum_{x:|x|=n+1} g(V(x_1), V(x_2), \dots, V(x_{n+1}))\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{y:|y|=1} \sum_{z \in \mathbb{T}: |z|=n} g(V(y), V(y) + \tilde{V}(z_1), \dots, V(y) + \tilde{V}(z_n))\right] \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\sum_{z \in \mathbb{T}: |z|=n} g(V(y), V(y) + \tilde{V}(z_1), \dots, V(y) + \tilde{V}(z_n))\right] \\ &= \mathbb{E}[e^{tS_n + n\psi(t)} g(V(y), V(y) + \tilde{S}_1, \dots, V(y) + \tilde{S}_n)] \text{ (hypothese de recurrence)} \end{aligned}$$

avec  $(\tilde{S}_i \text{ i} \leq 1)$  des variables aléatoires indépendantes de  $(V(y), |y| = 1)$  suivant la même loi que  $(S_i \text{ i} \leq 1)$ . on a enfin :

$$\mathbb{E}\left[\sum_{x:|x|=n+1} g(V(x_1), V(x_2), \dots, V(x_{n+1}))\right] \quad (8)$$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{y:|y|=1} e^{tS_n + n\psi(t)} g(V(y), V(y) + \tilde{S}_1, \dots, V(y) + \tilde{S}_n)\right] \quad (9)$$

$$= \mathbb{E}[e^{tS_1 + n\psi(t)} e^{tS_n + n\psi(t)} g(S_1, S_1 + \tilde{S}_1, \dots, S_1 + \tilde{S}_n)] \quad (10)$$

$$= \mathbb{E}[e^{tS_{n+1} + (n+1)\psi(t)} g(S_1, S_2, \dots, S_n)] \text{ (car } S_i + \tilde{S}_i = S_{i+1}) \quad (11)$$

$$(12)$$

**Remarque :** Nous verrons dans la section suivante que la variable aléatoire  $S_n$  est intimement liée à la loi de notre processus et que son choix n'est pas du tout anodin.  $\square$

### 3.2.2 Epine dorsale

Dans cette partie nous allons introduire un nouveau processus  $w$  appelé épine dorsale qui sera attaché à notre processus branchant. En particulier, ce processus nous permettra de comprendre la présence de la variable aléatoire  $S_n$  dans la formule du Many-to-One grâce au théorème de décomposition de l'épine dorsale. Nous allons dans ce qui suit présenter les bases nécessaires pour pouvoir invoquer le théorème.

Rappelons qu'on peut voir notre processus comme un arbre marqué  $V = (V(x), x \in \mathbb{T})$  Posons :  $\mathcal{F}_n = \sigma\{V(x) : x \in \mathbb{T}, |x| \leq n\}$  et  $\mathcal{F}_\infty = \sigma\{V(x) : x \in \mathbb{T}\}$

Nous allons attaché un processus  $w = (w_n, n \geq 1)$  à  $V$ , avec  $w_n \in \mathbb{T} \forall n$  choisi parmi les individus  $x$  présents dans l'arbre avec une certaine probabilité.

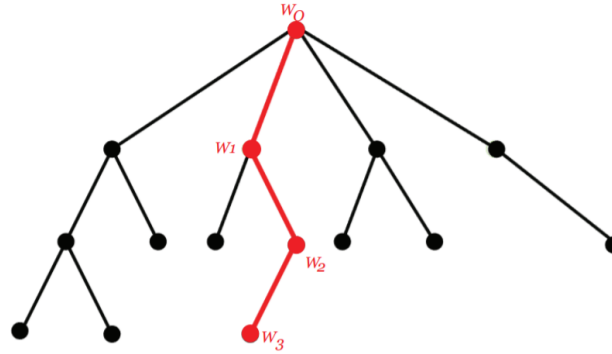


FIGURE 3 – Galton-Watson

**Remarque :**  $|w_n| = n \forall n$  et nous noterons  $\overleftarrow{w}_{n-1} = w_n$  pour rappeler que  $w_n$  est le parent de  $w_{n-1}$ .

**Hypothèses :**

- Soit  $\psi(1) = \ln \mathbb{E}(\sum_{|x|=1} e^{-V(x)}) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}[\sum_{x:|x|=1} e^{-V(x)}] = 1$ .
- Soit  $(S_n - S_{n-1})_{n \geq 1}$  une suite de variable aléatoire i.i.d tel que :

$$\mathbb{E}(h(S_1 - S_0)) = \mathbb{E}\left[\sum_{x:|x|=1} h(V(x))e^{-V(x)}\right] \quad (13)$$

- $\forall a \in \mathbb{R}$ , soit  $\mathbb{P}_a$  la probabilité telle que  $\mathbb{P}_a(S_0 = a) = \mathbb{P}_a(V(\text{racine}) = a) = 1$
- Soit  $D \subset \mathbb{R}$  borélien telle que :

$$\mathbb{P}_a(S_1 \in D) > 0 \forall a \in D \quad (14)$$

- Soit  $h : D \rightarrow [0, \infty]$  une fonction harmonique positive tel que :

$$h(a) = \mathbb{E}_a[h(S_1)\mathbb{1}_{S_1 \in D}] \quad (15)$$

Maintenant que nous avons toutes les hypothèses, nous allons présenter le changement de probabilité introduit par Lyons[2] qui permet de ramener l'étude de notre processus à l'étude d'une marche aléatoire simple.

**Changement de probabilité :** Soit  $D \subset \mathbb{R}$  vérifiant (14), et  $h : D \rightarrow [0, \infty]$  définie comme dans (15). on définit alors :

$$M_n^{(h)} = \sum_{x:|x|=n} h(V(x))e^{-V(x)}\mathbb{1}_{\{V(z) \in D \ z \in [x_0, x]\}} \quad (16)$$

Avec la notation  $[x_0, x] = \{x_0, x_1, \dots, x_{|x|}\}$  représentant toute la lignée de l'individu  $x$  jusqu'à la racine.

**Lemma 3.2.** Soit  $a \in D$ , alors sous  $\mathbb{P}_a$   $M_n^{(h)}$  est une martingale.

*Démonstration.* Par définition :

$$\begin{aligned}
 M_{n+1}^{(h)} &= \sum_{x:|x|=n+1} h(V(x))e^{-V(x)} \mathbf{1}_{\{V(z) \in D \ \forall z \in [0,x]\}} \\
 &= \sum_{y:|y|=n} \sum_{x:|x|=n+1: \overleftarrow{x}=y} h(V(x))e^{-V(x)} \mathbf{1}_{\{V(z) \in D \ z \in [0,x]\}} \\
 &= \sum_{y:|y|=n} \mathbf{1}_{\{V(z) \in D \ \forall z \in [0,y]\}} \sum_{x:|x|=n+1: \overleftarrow{x}=y} h(V(x))e^{-V(x)} \mathbf{1}_{\{V(x) \in D\}} \quad (y \text{ étant le parent direct de } x)
 \end{aligned}$$

En conditionnant par rapport à  $\mathcal{F}_n$ , on a :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_a[M_{n+1}^{(h)} | \mathcal{F}_n] &= \sum_{y:|y|=n} \mathbf{1}_{\{V(z) \in D \ z \in [0,y]\}} \mathbb{E}_a \left[ \sum_{x:|x|=n+1: \overleftarrow{x}=y} h(V(x))e^{-V(x)} \mathbf{1}_{\{V(x) \in D\}} | \mathcal{F}_n \right] \\
 &= \sum_{y:|y|=n} \mathbf{1}_{\{V(z) \in D \ z \in [0,y]\}} \mathbb{E}_{V(y)} \left[ \sum_{x:|x|=1} h(V(x))e^{-V(x)} \mathbf{1}_{\{V(x) \in D\}} \right] \\
 &= \sum_{y:|y|=n} \mathbf{1}_{\{V(z) \in D \ z \in [0,y]\}} \mathbb{E}_{V(y)} [e^{S_1-S_0} h(S_1) e^{-S_1} \mathbf{1}_{S_1 \in D}] \quad (Many - to - One) \\
 &= \sum_{y:|y|=n} \mathbf{1}_{\{V(z) \in D \ z \in [0,y]\}} h(V(y)) e^{-V(y)} \quad (\text{def de } h, S_0 = V(y)) \\
 &= M_n^{(h)}
 \end{aligned}$$

On a alors  $M_n^{(h)}$  qui est une martingale avec  $\mathbb{E}_a[M_n^{(h)}] = e^{-a} h(a)$ , ainsi le théorème d'extension de Kolmogorov nous dit qu'il existe une unique mesure de probabilité  $\mathbb{Q}_a^{(h)}$  tel que :

$$\frac{d\mathbb{Q}_a^{(h)}}{d\mathbb{P}_a^{(h)}} = \frac{M_n^{(h)}}{\mathbb{E}[M_n^{(h)}]} = \frac{M_n^{(h)}}{e^{-a} h(a)} \quad (17)$$

□

### Theorem 3.3. Décomposition en épine dorsale

Soit  $\psi(1) = 0$ ,  $D \subset \mathbb{R}$  vérifiant (14),  $a \in D$ ,  $h$  une fonction harmonique sur  $D$  et  $\mathbb{Q}_a^{(h)}$  une mesure de probabilité définie comme en (17).

—  $\forall n$  et pour tout individu  $x \in \mathbb{T} : |x| = n$  on a :

$$\mathbb{Q}_a^{(h)}[w_n = x | \mathcal{F}_n] = \frac{h(V(x))e^{-V(x)} \mathbf{1}_{\{V(y) \in D \ y \in [0,x]\}}}{M_n^{(h)}} \quad (18)$$

avec  $M_n^{(h)} = \sum_{x:|x|=n} h(V(x))e^{-V(x)} \mathbf{1}_{\{V(y) \in D \ y \in [0,x]\}}$

— le processus  $(V(w_n), n \geq 0)$  sous  $\mathbb{Q}_a^{(h)}$  à la même loi que  $S_n$  sous  $\mathbb{Q}_a^{(h)}$  contrainte à rester dans  $D$ .

On en déduit alors l'origine de la marche aléatoire  $S_n$  de la formule many-to-one qui n'est autre que la marche aléatoire simple  $V(w_n)$  partant de  $a$ .

### 3.2.3 Martingales associées

L'étude des marches aléatoires branchantes se fait généralement par l'étude de certaines martingales que nous allons présenter dans cette section. Nous verrons plus loin certaines de leurs applications dans la partie suivante.

**Martingale additive** Supposons  $\psi(1) < \infty$ . On pose :

$$W_n := \sum_{|x|=n} \exp(-n\psi(1) - V(x)), n \geq 0 \quad (19)$$

$(W_n, n \geq 0)$  associée à la filtration naturelle du processus de point  $\mathcal{F}_n = \sigma(V(x), x \in T, |x| \leq n)$  est une martingale appelée martingale additive.

*Démonstration.* En conditionnant notre somme par rapport aux individus de la génération  $n$  et leurs descendants, on a :

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= \sum_{|x|=n+1} e^{-(n+1)\psi(1)-V(x)} \\ &= \sum_{|x|=n} \sum_{|y|=1} e^{-(n+1)\psi(1)-(V(x)+\tilde{V}(y))} \end{aligned}$$

Avec  $\tilde{V}(y)$  suivant la loi du processus de départ  $\mathcal{L}$  et indépendante de  $\mathcal{F}_n$ . En passant à l'espérance conditionnelle, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{|x|=n} \sum_{|y|=1} e^{-(n+1)\psi(1)-(V(x)+\tilde{V}(y))} \middle| \mathcal{F}_n\right) \\ &= \sum_{|x|=n} e^{-n\psi(1)-V(x)} \mathbb{E}\left(\sum_{|y|=1} e^{-\tilde{V}(y)-\psi(1)}\right) \\ &= \sum_{|x|=n} e^{-n\psi(1)-V(x)} e^{S_1+\psi(1)} e^{-S_1-\psi(1)} \text{ Many-to-one} \\ &= \sum_{|x|=n} e^{-n\psi(1)-V(x)} = W_n \end{aligned}$$

□

**Martingale dérivée** On suppose  $\psi(1) = 0$  et  $\psi'(1) = 0$ , nous avons

$$D_n = \sum_{|x|=n} V(x) \exp(-V(x)) \quad (20)$$

$D_n$  est une martingale appelée la martingale dérivée. Cette dernière est probablement l'une des plus importantes martingales associées à la marche aléatoire branchante, et elle joue un rôle crucial dans l'étude des valeurs extrêmes de la marche aléatoire.

*Démonstration.* Rappelons que  $\psi(1) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}(\sum_{|x|=1} e^{-V(x)}) = 1$  et  $\psi'(1) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}(V(x) e^{-V(x)}) = 0$ , on a alors :

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= \sum_{|x|=n+1} V(x) e^{-V(x)}, n \geq 0 \\ &= \sum_{|x|=n} \sum_{|y|=1} (V(x) + \tilde{V}(y)) e^{-(V(x)+\tilde{V}(y))} \end{aligned}$$

En passant à l'espérance conditionnelle, on a :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(D_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \sum_{|x|=n} \mathbb{E}\left[\sum_{|y|=1} (V(x) + \tilde{V}(y)) e^{-(V(x)+\tilde{V}(y))} \middle| \mathcal{F}_n\right] \\
 &= \sum_{|x|=n} \mathbb{E}\left(\sum_{|y|=1} V(x) e^{-V(x)-\tilde{V}(y)} \middle| \mathcal{F}_n\right) + \sum_{|x|=n} \mathbb{E}\left(\sum_{|y|=1} \tilde{V}(y) e^{-V(x)-\tilde{V}(y)} \middle| \mathcal{F}_n\right) \\
 &= \sum_{|x|=n} V(x) e^{-V(x)} \mathbb{E}\left(\sum_{|y|=1} e^{-\tilde{V}(y)}\right) + \sum_{|x|=n} e^{-V(x)} \mathbb{E}\left(\sum_{|y|=1} \tilde{V}(y) e^{-\tilde{V}(y)}\right) \\
 &= \sum_{|x|=n} V(x) e^{-V(x)}
 \end{aligned}$$

□

### 3.3 Applications des outils

Dans cette partie nous allons voir l'utilité des outils précédents à travers différentes applications.

#### 3.3.1 Many-To-One avec l'épine dorsale

Nous allons démontrer la formule Many-to-one en appliquant le théorème de décomposition de l'épine dorsale. Soit  $h$  la fonction harmonique tel que  $\forall a \in \mathbb{R} \ h(a) = 1$  et :

$$\mu = \mathbb{E}\left(\sum_{x:|x|=n} e^{-V(x)}\right) \quad M_n = \frac{\sum_{x:|x|=n} e^{-V(x)}}{\mu^n} \quad (21)$$

Il faut noter qu'on est parfaitement dans le cadre d'application de notre théorème, la seule différence est que  $\psi(1) \neq 1$  ce qui nous pousse à renormaliser pour que  $M_n$  reste une martingale d'espérance égale 1 nécessaire pour le changement de variable. On a alors selon le théorème de l'épine dorsale sous  $\mathbb{Q}_a(A) = \int_A M_n d\mathbb{P}_a$  que :

$$\mathbb{Q}_a(w_n = x | \mathcal{F}_n) = \frac{e^{-V(x)}}{M_n} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E}_{\mathbb{P}_a}\left[\sum_{x:|x|=n} g(V(x_1), V(x_2), \dots, V(x_n))\right] \\
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_a}\left[\sum_{x:|x|=n} \frac{1}{M_n} g(V(x_1), V(x_2), \dots, V(x_n))\right] \text{ (changement de proba)} \\
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_a}\left[\sum_{x:|x|=n} e^{V(x)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_a}(\mathbf{1}_{w_n=x} | \mathcal{F}_n) g(V(x_1), V(x_2), \dots, V(x_n))\right] \text{ (en remplaçant par (22))} \\
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_a}[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_a}\left[\sum_{x:|x|=n} e^{V(x)} \mathbf{1}_{w_n=x} g(V(x_1), V(x_2), \dots, V(x_n)) \middle| \mathcal{F}_n\right]] \\
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_a}[e^{V(w_n)} g(V(w_1), V(w_2), \dots, V(w_n))] \text{ (Many-to-One)}
 \end{aligned}$$

Dans les parties qui suivent, nous allons mettre davantage l'accent sur la limite des positions extrêmes (position la plus à gauche ou à droite).

Posons  $X_n = \inf_{|x|=n} V(x)$  qui est la position la plus à gauche.

**Remarque :** Notons qu'on peut facilement passer à la position la plus à droite (sup) car  $\inf(x) = -\sup(-x)$ .

### 3.3.2 Limite de la particule la plus à gauche(Martingale additive )

**Lemma 3.4.** Soit  $\psi(0) > 0$ , si  $\exists t > 0$  tel que  $\psi(t) \leq 0$  alors :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{|x|=n} V(x) = +\infty \quad (23)$$

*Démonstration.* On peut supposer que  $t = 1$  sans perte de généralité(on revient au cas général en remplaçant  $tV(x)$  par  $V(x)$ ), munissons nous aussi de la martingale additive :

$$W_n = \sum_{|x|=n} e^{-n\psi(1)-V(x)} \quad (24)$$

On remarque que  $W_n$  est une martingale positive, on en déduit qu'elle converge ps. Posons  $W_\infty$  sa limite par le lemme de fatou, on sait que  $\mathbb{E}(W_\infty) \leq \mathbb{E}(W_n) = 1$ .

Posons :  $Y = \limsup_{n \rightarrow \infty} e^{-\inf_{|x|=n} V(x)}$

On a  $e^{-\inf_{|x|=n} V(x)} \leq \sum_{|x|=n} e^{-V(x)}$  donc que  $\mathbb{E}(Y) \leq \mathbb{E}(W_\infty) \leq 1$  et en conditionnant par rapport à la première génération que :

$$Y = \sup_{|x|=1} [e^{-V(x)} Y(x)] \quad (25)$$

Où  $Y(x)$  est une copie indépendante de  $Y$  et de  $(V(x), |x| = 1)$  partant de  $x$ , on a ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(\sup_{|x|=1} [e^{-V(x)} Y(x)]) \leq \mathbb{E}(\sum_{|x|=1} e^{-V(x)} Y(x)) \leq \mathbb{E}(\sum_{|x|=1} e^{-V(x)}) \mathbb{E}(Y) \\ &\leq e^{\psi(1)} \mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$

Comme  $\psi(1) \leq 0$ , on en déduit que  $\mathbb{E}(Y) = 0$  donc  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{|x|=n} V(x) = +\infty$  □

### 3.3.3 Convergence faible de la particule la plus à gauche(Martingale dérivée)

**Theorem 3.5.**

Supposons que  $\psi(0) > 0$ ,  $\psi(1) = \psi'(1) = 0$ , On a alors :

$$\inf_{|x|=n} V(x) \longrightarrow \frac{3}{2} \log(n) \quad (26)$$

Nous n'allons démontrer qu'une borne supérieure, pour une preuve complète voir [3].

*Démonstration.* Montrons que pour tout  $\epsilon > 0$ ,

$$\mathbb{P}(\inf_{|x|=n} V(x) \geq (\frac{3}{2} - \epsilon) \log(n)) \longrightarrow 1. \quad (27)$$

Nous avons montré dans la partie précédente que  $\inf_{|x|=n} V(x) = \infty$ , on en déduit alors l'existence d'un  $\alpha > 0$  éventuellement grand tel que  $V(x_i) \geq -\alpha \forall x, \forall 1 \leq i \leq n$ .



Posons  $Z_n = \sum_{|x|=n} \mathbb{1}_{(V(x) \leq (\frac{3}{2}-\epsilon) \log(n), V(x_i) \geq -\alpha, \forall 1 \leq i \leq n)}$  qui sera le nombre de particules en dessous de  $a \log(n)$  avec  $a < 3/2$ .

En utilisant many-to-one formula, on arrive à :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sum_{|x|=n} \mathbb{1}_{(V(x) \leq (\frac{3}{2}-\epsilon) \log(n), V(x_i) \geq -\alpha, \forall 1 \leq i \leq n)}\right) &= \mathbb{E}(\exp(S_n) \mathbb{1}_{(S_n \leq (\frac{3}{2}-\epsilon) \log(n), S_i \geq -\alpha, \forall 1 \leq i \leq n)}) \\ &\leq n^{\frac{3}{2}-\epsilon} \mathbb{P}(S_n \leq (\frac{3}{2}-\epsilon) \log(n), S_i \geq -\alpha, \forall 1 \leq i \leq n) \end{aligned}$$

Ainsi nous avons transformé notre problème en un problème majoration de marche aléatoire. Nous allons alors utiliser un argument de majoration de marche aléatoire introduit par Addario-Berry et Reed [1] et adapté par Zhan Shi pour notre modèle.

**Lemma 3.6.** *Soit  $S_n$  une marche aléatoire tel que  $\mathbb{E}(S_n) < \infty$  alors Il existe  $c > 0$  tel que : pour tout  $a \leq 0$ ,  $b \leq -a$  :*

$$\mathbb{P}(S_n \geq -a, S_n \leq b) \leq \frac{c}{n^{3/2}} \quad (28)$$

On achève ainsi notre preuve grâce a ce lemme.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sum_{|x|=n} \mathbb{1}_{(V(x) \leq (\frac{3}{2}-\epsilon) \log(n), V(x_i) \geq -\alpha, \forall 1 \leq i \leq n)}\right) &\leq n^{\frac{3}{2}-\epsilon} \mathbb{P}(S_n \leq (\frac{3}{2}-\epsilon) \log(n), S_i \geq -\alpha, \forall 1 \leq i \leq n) \\ &\sim kn^{\frac{3}{2}-\epsilon} n^{\frac{3}{2}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

On en déduit que  $\mathbb{P}(\inf_{|x|=n} V(x) \leq (3/2 - \epsilon) \log(n)) \rightarrow 0$  ps donc  $\mathbb{P}(\inf_{|x|=n} V(x) \geq (3/2 - \epsilon) \log(n)) \rightarrow 1$  ps  $\square$

### 3.3.4 Convergence forte de la particule la plus à gauche

**Theorem 3.7.** *Supposons que  $\psi(0) > 0$  et  $\forall t > 0, \psi(t) > 0$  alors sur l'ensemble de non-extinction :*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \inf_{|x|=n} V(x) = \lambda \quad (29)$$

$$\text{avec } \lambda = - \inf_{s > 0} \frac{\Psi(s)}{s} \quad (30)$$

Posons  $X_n = \inf_{|x|=n} V(x)$

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin du théorème et du lemme suivant.

**Theorem 3.8. Kingman (1968)**

*Supposons  $\{X_{m,n}\}$  une famille de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité donné et indexée par des entiers tels que  $0 \leq m < n$  vérifiant :*

$$X_{l,n} \leq X_{l,m} + X_{m,n}, \quad 0 \leq l < m < n \quad (31)$$

$$\{X_{m+1,n+1}, 0 \leq m < n\}, \{X_{m,n}, 0 \leq m < n\} \text{ suivent la même loi} \quad (32)$$

$$\forall n, E(|X_{0,n}|) < \infty \text{ et } E(X_{0,n}) \geq -cn \text{ pour une constante } c \quad (33)$$

alors on a :

$$X = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_{0,n}}{n} \text{ existe ps et dans } L^1 \quad (34)$$

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E(X_{0,n}) = \inf_n \frac{1}{n} E(X_{0,n})$$

A présent, on passe à la version faible de Liggett. On supposera  $l = 0$  dans (1) et les hypothèses (2) et (3) par les conditions suivantes :

$$X_{0,n} \leq X_{0,m} + X_{m,n} \quad 0 < m < n \quad (35)$$

$$\{X_{m+1,n+k+1}, k \geq 1\}, \{X_{m,n+k}, k \geq 1\} \text{ suivent la même loi } \forall m \geq 0 \quad (36)$$

$$\forall k \geq 1 \{X_{nk,(n+1)k}, n \geq 1\} \text{ est un processus stationnaire} \quad (37)$$

alors nous avons les mêmes conclusions que le théorème de Kingman.

**Lemma 3.9.**  $\forall n, k$  entiers positifs on a :  $X_{n+k} \leq X_n + \tilde{X}_k$  avec  $\tilde{X}_k$  suivant la même loi que  $X_k$  et indépendante de  $X_n$ .

*Démonstration.* Posons  $X_{n+k} = \inf_{|x|=n+k} V(x)$ , il suffit juste de remarquer que la position la plus à droite de l'arbre au temps  $n+k$  sera inférieure ou égale à la position la plus à droite au temps  $k$  du sous arbre engendré par  $X_n = \inf_{|x|=n} V(x)$  car soit la position la plus à droite au temps  $n+k$  est issu du sous-arbre engendré par  $X_n$ , soit non et par définition sa position sera plus grande. On peut alors poser que  $\tilde{X}_k = \inf_{|x|=k} \tilde{V}(x)$  ou  $\tilde{V}$  est la position de l'arbre engendré par  $X_n$ .

□

### Démonstration du théorème :

Grace à notre Lemme, le théorème ergodique de Kingman amélioré nous dit que :

$$\frac{X_n}{n} \longrightarrow \inf_{n \geq 1} \frac{E(X_n)}{n} \quad (38)$$

Ainsi notre preuve revient à montrer que  $\inf_{n \geq 1} \frac{E(X_n)}{n} = \lambda$

— Montrons que  $\inf_{n \geq 1} \frac{E(X_n)}{n} \leq \lambda$

On a  $\forall n \geq 1$  :

$$e^{E(\inf_{|x|=n} -tV(x))} \leq E(e^{-\inf_{|x|=n} tV(x)}) \quad (Jensen)$$

$$E(-\inf_{|x|=n} tV(x)) \leq \ln(E(e^{-\inf_{|x|=n} tV(x)})) \leq \ln(E(\sum_{|x|=n} e^{-tV(x)}))$$

$$\frac{1}{n} E(-\inf_{|x|=n} tV(x)) \leq \frac{1}{n} \ln(E(\sum_{|x|=n} e^{-tV(x)})) = \frac{1}{n} \ln(E(e^{tS_n + nqsq\Psi(t)} e^{-tS_n})) \quad (Many - To - One)$$

$$\frac{t}{n} E(-\inf_{|x|=n} V(x)) \leq \frac{1}{n} \ln(E(e^{n\psi(t)})) \leq \psi(t)$$

$$\text{Donc } \inf_{n \geq 1} \frac{E(X_n)}{n} \leq \frac{\psi(t)}{t} \leq \inf_{t > 0} \frac{\psi(t)}{t} = \lambda$$

— Montrons que  $\inf_{n \geq 1} \frac{E(X_n)}{n} \geq \lambda$

Soit  $\epsilon > 0$ , on se propose pour un entier  $m \geq 1$  dépendant de  $\epsilon$  d'établir :

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{jm} \inf_{|x|=jm} V(x) \leq -\inf_{s > 0} \frac{\psi(s)}{s} + \epsilon \quad (39)$$

Soit  $t > 0$  tel que :

$$\frac{\psi(t)}{t} > \psi'(t) > \inf_{s > 0} \frac{\psi(s)}{s} - \epsilon \quad (40)$$

On pose :  $a = \inf_{s > 0} \frac{\psi(s)}{s} - \epsilon$ . On construit un nouvel arbre de Galton-Watson  $T'$  tiré du premier  $T$  par la sélection suivante : les éléments de la première génération de l'arbre  $T'$  sont les éléments de la  $m$ -ième génération de l'arbre  $T$  tels que :  $V(x) \leq -am$ . De manière générale, les individus  $x_n$  de la génération  $n$  de l'arbre  $T'$  sont tels que :

- $x_n$  appartient à la génération  $(n+1)m$  de l'arbre  $T$
- $V(x_n) - v(x_{n-1}) \leq am$ .

Posons  $m(T')$  la moyenne du nombre de particule à la première génération sur l'arbre  $T'$  :

$$m(T') = E(\sum_{|x|=m} \mathbb{1}_{V(x) \leq -am}) \quad (41)$$

En appliquant many-to-one, on parvient à :

$$m(T') = E(\mathbb{1}_{S_m \leq -am} e^{tS_m + m\psi(t)}) \quad (42)$$

Avec  $\psi'(t) < \frac{\psi(t)}{t}$  et  $b$  fixé pris dans l'intervalle  $(\Psi'(t), \frac{\Psi(t)}{t})$ , on a :

$$m(T') \geq E(\mathbb{1}_{-bm \leq S_m \leq -am} e^{tS_m + m\psi(t)}) \geq \mathbb{P}(-bm \leq S_m \leq -am) E(e^{m(\psi(t) + bt)})$$

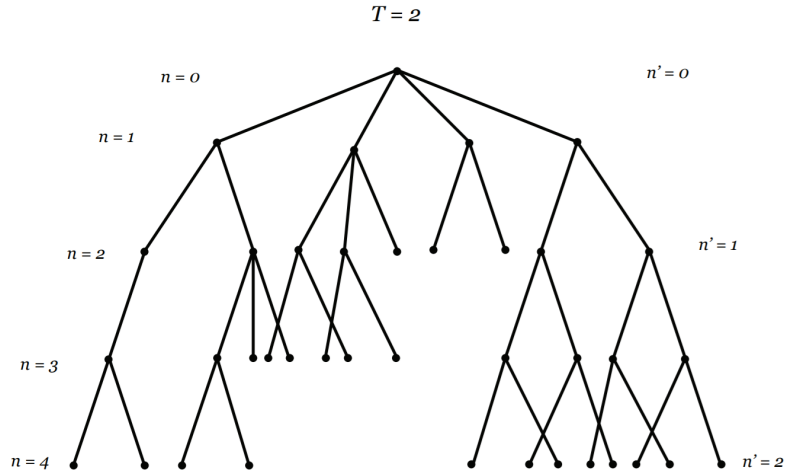


FIGURE 4 – Décomposition si  $T = 2$

En dérivant  $\Psi(t)$ , on a :

$$\begin{aligned}\psi'(t) &= \frac{E(\sum_{|x|=1} -V(x) \exp(-tV(x)))}{E(\sum_{|x|=1} \exp(-tV(x)))} \\ &= -E(S_1)\end{aligned}$$

Or par construction  $a < \psi'(t) < b$ , ce qui donne :

$$-b < E(S_1) < -a \quad (43)$$

En écrivant :  $P(-bm \leq S_m \leq -am) = P(-b \leq \frac{\sum_{i=0}^m (S_i - S_{i-1})}{m} \leq -a)$  on peut appliquer la loi des grands nombres à la suite de variables aléatoires  $(S_i - S_{i-1})_{i \geq 1}$  i.i.d et suivant la même loi que  $S_1$ , on parvient à :

$$P(-bm \leq S_m \leq -am) \longrightarrow 1 \text{ et } \exp([\psi(t)] - bt)m \longrightarrow \infty, m \longrightarrow \infty \quad (44)$$

On peut choisir  $m$  aussi grand que l'on veut, on fixe alors  $m$  tel que  $m(T') > 1$ . Ainsi notre nouvel arbre de Galton-Watson  $T'$  devient supercritique (probabilité strictement positive de survie), on a sur l'ensemble de non-extinction :

$$\begin{aligned}\inf_{|x|=jm} V(x) &\leq -ajm = (\inf_{s>0} \frac{\psi(s)}{s} - \epsilon)jm \\ \text{Donc } \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{jm} \inf_{|x|=jm} V(x) &\leq -\inf_{s>0} \frac{\psi(s)}{s} + \epsilon\end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \inf_{|x|=n} V(x) = \inf_{n \geq 1} \frac{E(X_n)}{n} = -\inf_{s>0} \frac{\psi(s)}{s}$$

## 4 Simulations

Dans cette partie nous allons simuler quelques processus de branchement, notons que tous nos processus seront sur un espace de temps discret. En premier lieu, nous allons

observer l'ordre de croissance de la population en générale, ensuite introduire un modèle avec coalescence et observer son effet sur la dynamique de la population et aussi déterminer la vitesse de convergence des positions extrêmes, enfin nous allons observer un autre type de processus de branchement avec des individus de types différents .

## 4.1 Galton-Watson

Voici quelques simulations d'évolution de populations d'un processus de Galton-Watson.

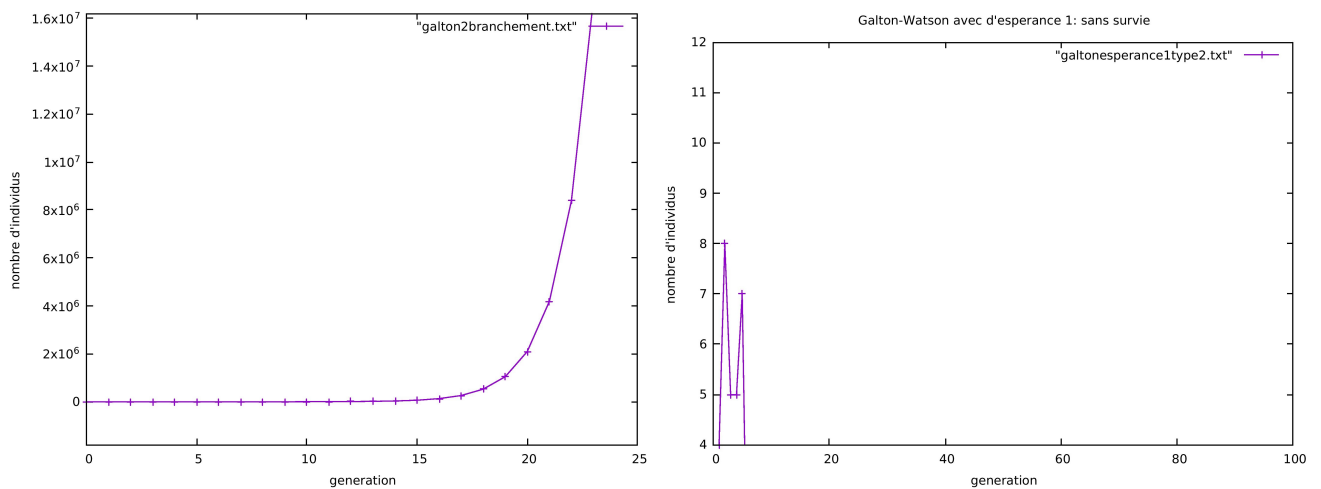


FIGURE 5 – Evolution d'une population de GW

Dans le cas de non-extinction de la population, celle-ci croît très vite, de manière exponentielle. Cependant il y a des cas où la population s'éteint et dans ce dernier cas elle le fait aussi très vite, les individus ne dépassent généralement pas les 10 premières générations comme on le voit sur la figure 2.

On observe aussi dans le cas super-critique ou  $\mathbb{E}(N) = 1$  que la population croît aussi de manière exponentielle cependant beaucoup moins vite que le cas où  $\mathbb{E}(N) > 1$ .

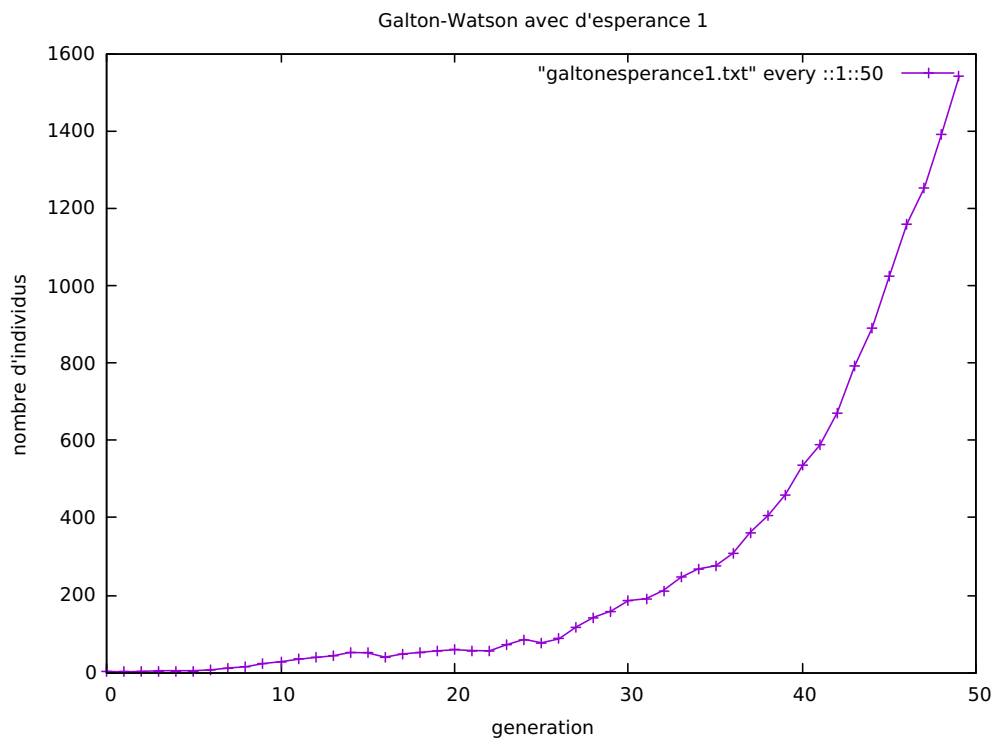


FIGURE 6 – Galton-Watson

## 4.2 Processus avec coalescence

Un processus de coalescence est un processus aléatoire qui décrit l'évolution au cours du temps d'un ensemble d'objets susceptibles de fusionner. Dans la suite on étudiera une marche aléatoire branchante avec coalescence : si deux particules se trouvent à la même position alors elles fusionnent. La dynamique de notre processus est la suivante :

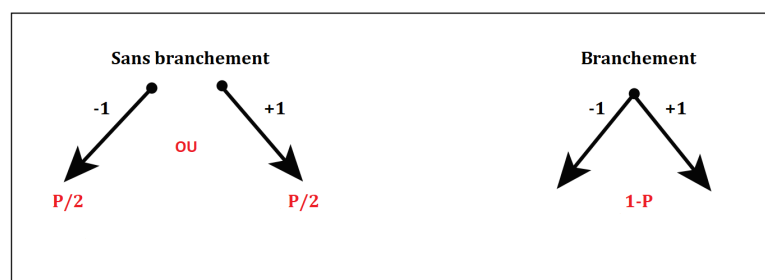


FIGURE 7 – Branchements

Observons d'abord le cas sans coalescence avec probabilités uniformes :

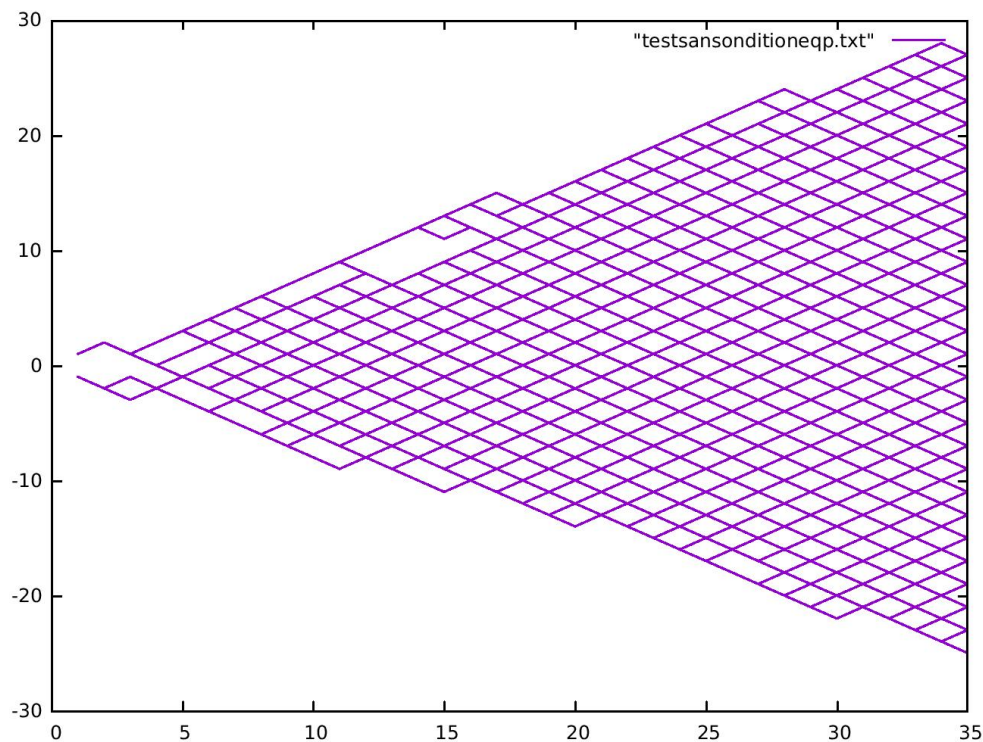


FIGURE 8 – pas de branchement =  $(0.25, 0.25)$  branchement = 0.5

On remarque alors que notre processus est symétrique ce qui est cohérent avec les résultats théoriques car nous avons montré que la vitesse de convergence des deux extrêmes était identique. Dans ce cas la probabilité d'avoir deux branchements n'étant pas négligeable entraîne une croissance exponentielle de la population nous empêchant ainsi de simuler sur des générations plus grandes. Nous allons alors diminuer la probabilité d'avoir deux enfants pour pouvoir simuler sur un temps plus long.

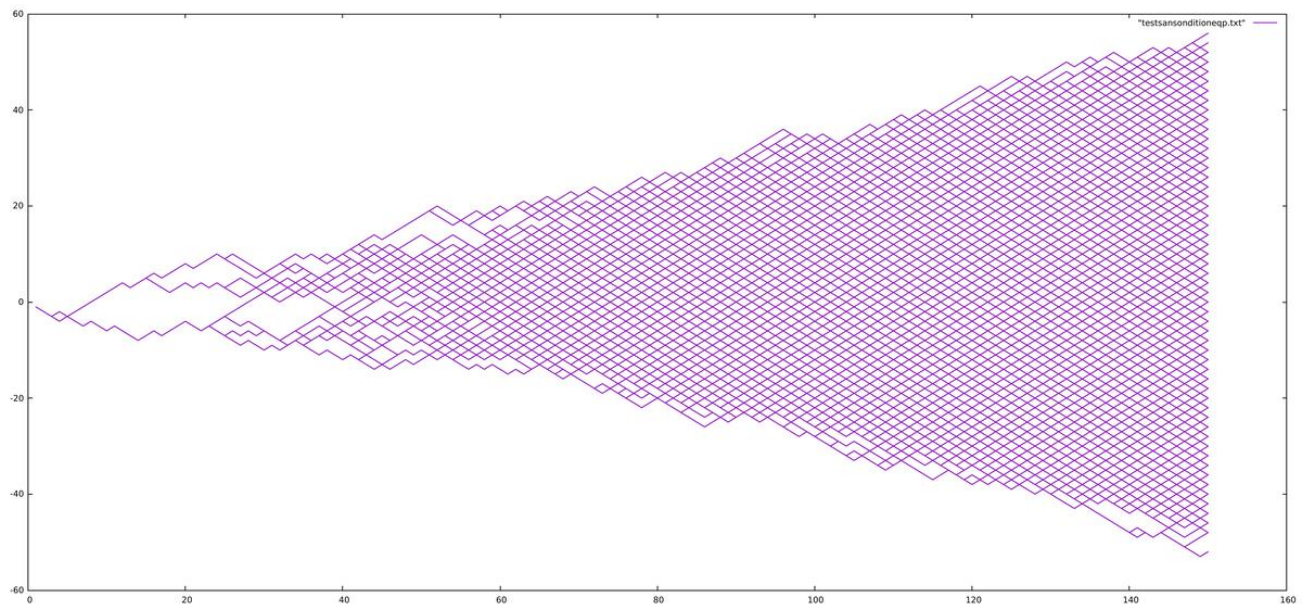


FIGURE 9 – pas de branchement = (0.45, 0.45) branchement = 0.1



On remarque la présence de beaucoup de fluctuations au début, mais ces dernières disparaissent et l'évolution semble se stabiliser quand la population augmente. Cependant notons que c'est seulement visuel car l'espace étant très limité il y'a beaucoup de particules sur chaque position.

Observons maintenant le cas avec coalescence et équiprobabilité :

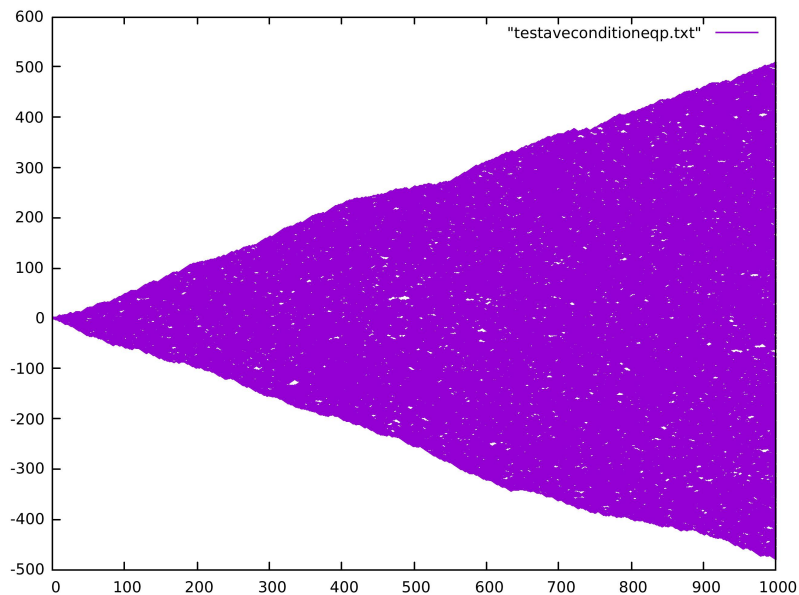


FIGURE 10 – pas de branchement =  $(0.25, 0.25)$  branchement =  $0.5$

On voit alors une figure presque parfaitement symétrique et compacte, il y 'a juste quelques points dans la figure ce qui s'explique par la forte densité de la population.

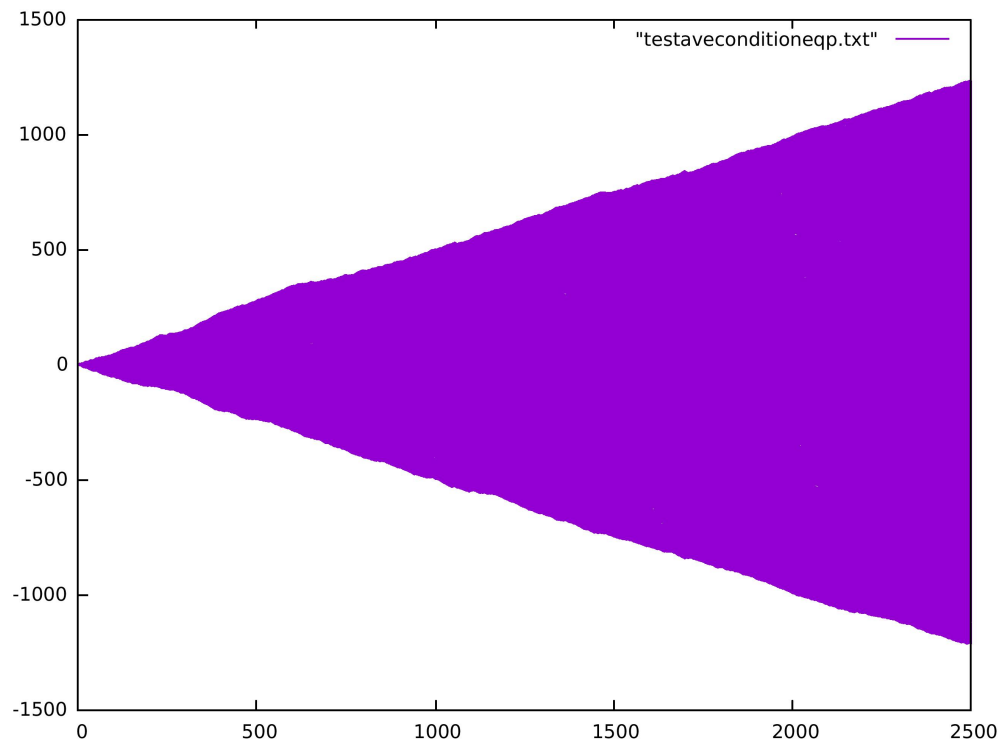


FIGURE 11 – pas de branchement =  $(0.5, 0.5)$  branchement = 0.5

On remarque en allant plus loin dans le temps que les irrégularités sont trop petites par rapport à la taille du système, et on observe presque un triangle isocèle. De plus on commence à voir l'allure des extrêmes qui à l'air d'être linéaire.

Cependant essayons de mesurer l'influence de la probabilité d'absence de branchement sur la présence d'irrégularité.

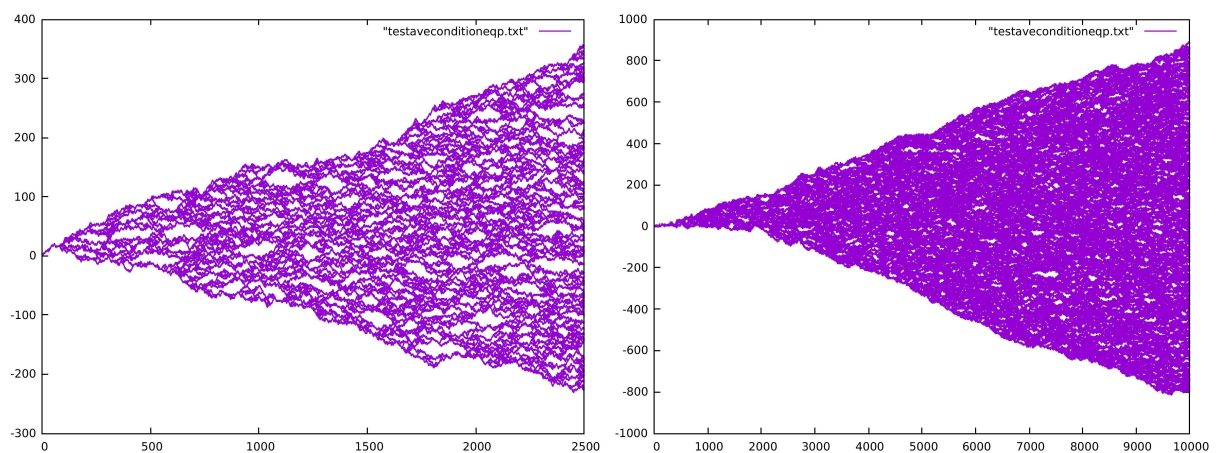


FIGURE 12 – pas de branchement =  $(0.45, 0.45)$  branchement = 0.1

Comme on s'y attendait la trajectoire est plus irrégulière, cependant on remarque qu'elle se stabilise légèrement avec le temps ce qui nous laisse une chance d'obtenir une vitesse des positions extrêmes linéaire comme dans les cas précédents.

Nous pouvons alors rentrer dans le vif du sujet et essayer d'approcher la vitesse des extrêmes (la position plus à gauche ou droite).

Posons alors  $v = \frac{\inf_{|x|=n} V(x)}{n}$  qui sera la vitesse ( $dx/dt$ ).

En effet comme on le voit sur l'image suivante :  $\inf_{|x|=n} V(x) = \inf_{|x|=n-1} V(x) \pm 1$

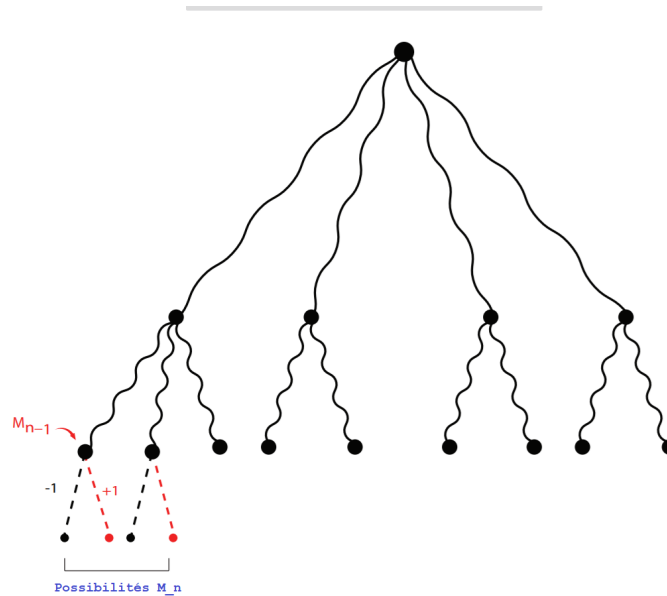


FIGURE 13 – Evolution du min dans le modèle défini

On déduit alors le lemme suivant :

**Lemma 4.1.** *Soit  $M_n = \inf_{|x|=n} V(x)$ , si le processus suit la dynamique suivante :*

— *proba pas de branchement en  $\pm 1$  :  $p/2$*

— *proba branchement en  $+1$  et  $-1$  :  $1 - p$*

*alors  $(M_n - M_{n-1}, n \geq 1)$  est une suite de variables aléatoires iid de loi :*

$$\mathbb{P}(M_n = M_{n-1} - 1) = p/2 \quad \mathbb{P}(M_n = M_{n-1} + 1) = 1 - p/2 \quad (45)$$

$$\frac{M_n}{n} \longrightarrow 1 - p \text{ ps} \quad (46)$$

*Démonstration.* Les probabilités sont triviales. Pour la convergence, posons :

$$\frac{M_n}{n} = \frac{\sum_{k=1}^n M_k - M_{k-1}}{n} \quad (47)$$

$$\frac{M_n}{n} \longrightarrow \mathbb{E}(M_k - M_{k-1}) = 1 - p \text{ par la LFGN} \quad (48)$$

□

On a ainsi dans notre modèle avec coalescence si  $p = 1/2$ , alors  $v = 1/2$ .

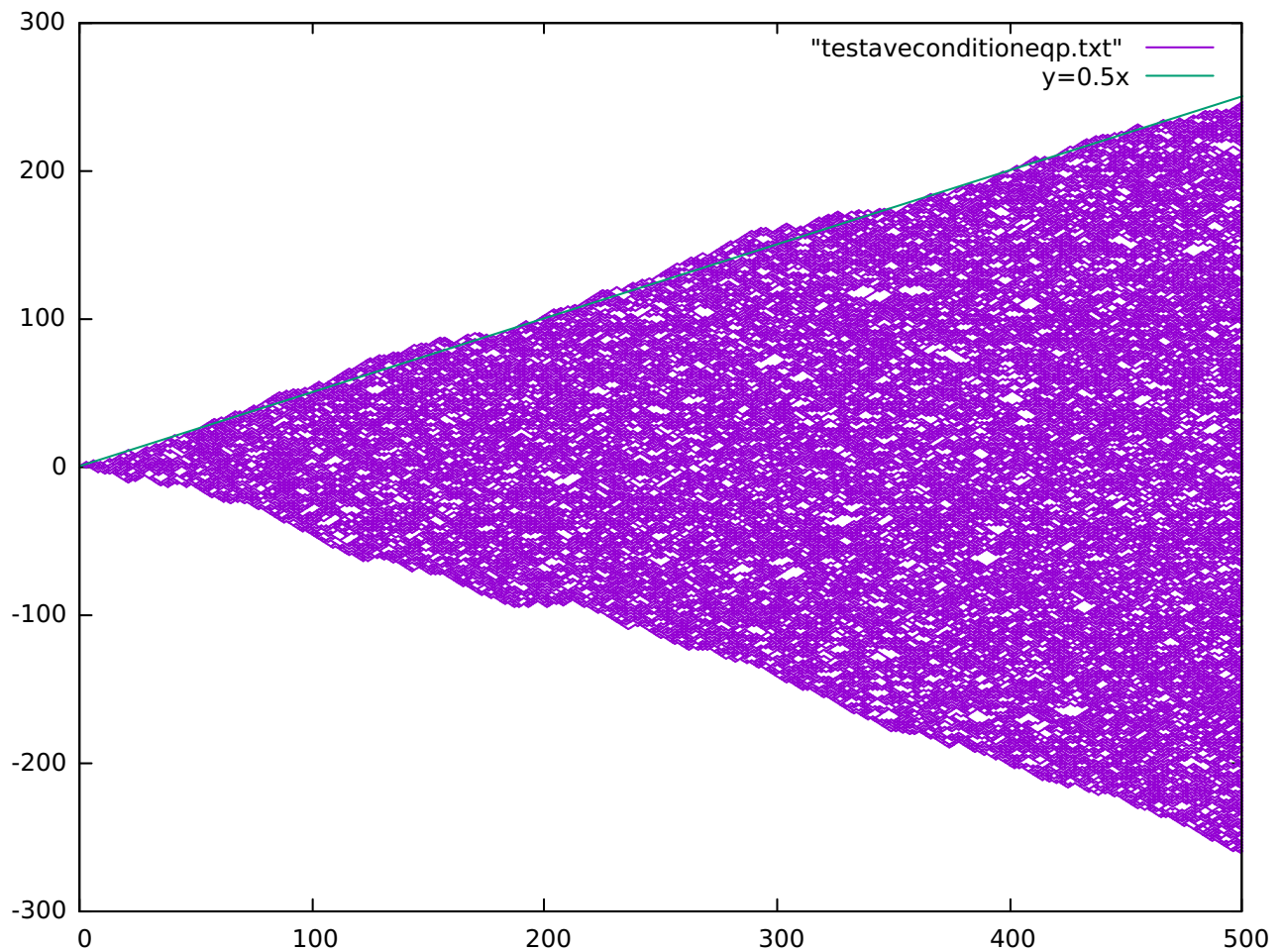


FIGURE 14 – Approximation si  $p = 1/2$

On conclut alors que la droite approche parfaitement la position la plus à gauche.

### 4.3 Processus avec individus de type différents

Dans tout ce qui précède nous avons observé des individus de même type, dans cette partie nous allons introduire un nouveau type de processus où chaque individu a un trait et la descendance et la transmission du trait dépendent du trait.

Le modèle qu'on va étudier suit la dynamique suivante :

Il y a 3 types d'individus :

- Juvéniles
- Adolescents
- Reproducteurs

Il y a 3 types d'évolution :

- Un individu juvénile peut devenir adolescent avec probabilité  $P_j$
- Un individu adolescent peut devenir reproducteur avec probabilité  $P_a$
- Un individu reproducteur peut engendrer une descendance avec probabilité  $P_r$

Le nombre de descendants suit une loi de Poisson.

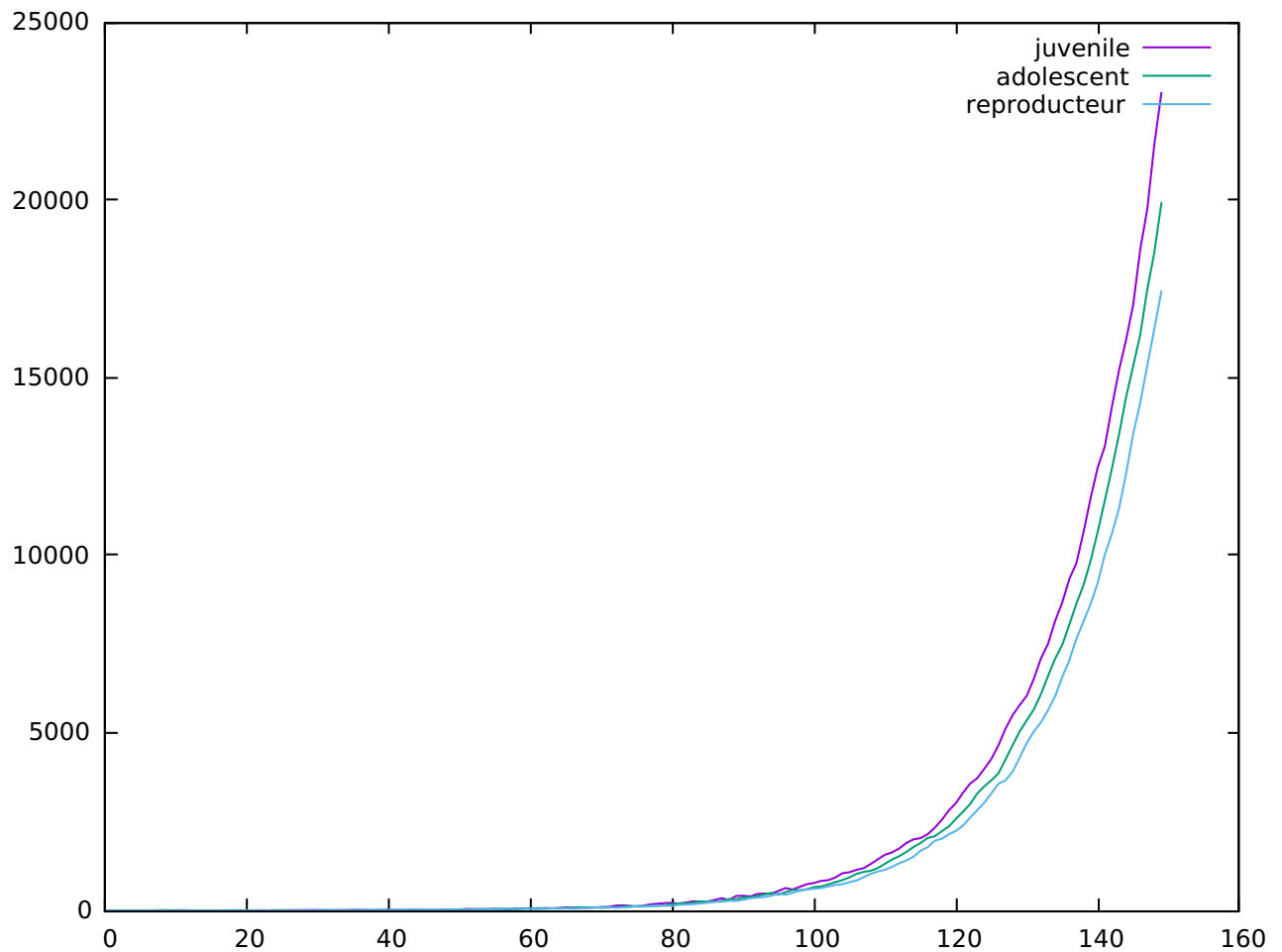


FIGURE 15

Une première simulation avec équiprobabilité nous montre que la population croît de manière exponentielle comme on s’y attendait, de plus on voit qu’asymptotiquement que le nombre de reproducteurs est légèrement en dessous du nombre d’adolescents qui lui est en dessous du nombre de juvéniles.

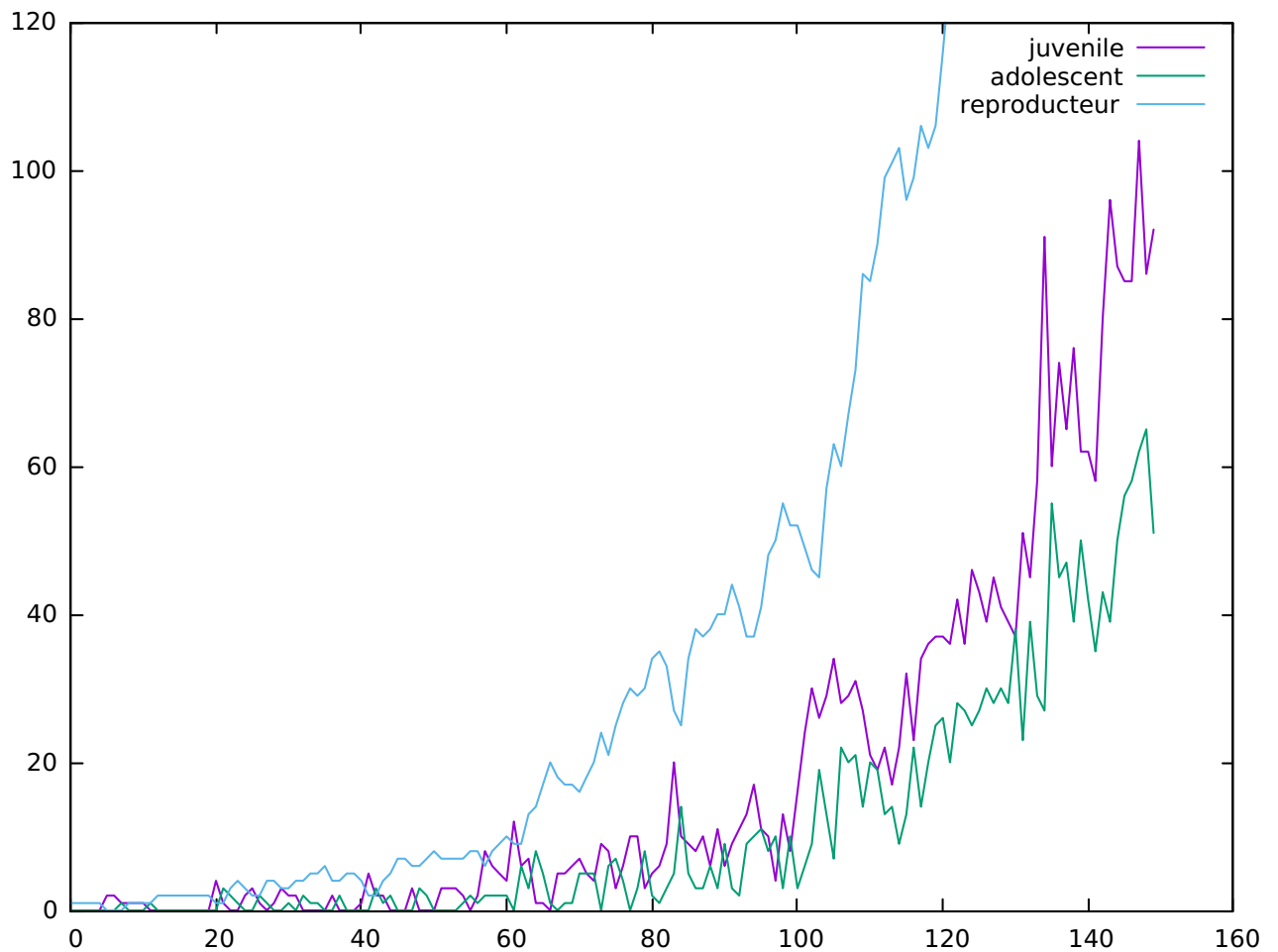


FIGURE 16

On remarque alors qu'il y a vraiment une interaction entre les individus, car en changeant les lois, on observe que la tendance change complètement. Cependant c'est le cas simulé où nous avons observé une inversion des tendances car après de nombreuses simulations en changeant les probabilités, nous avons remarqué que la tendance reste toujours la même. En général le nombre de reproducteurs est toujours le plus bas, vient ensuite le nombre d'adolescents puis les juvéniles ce qui s'explique par la croissance très rapide des enfants générés.

## 5 Annexes

```
#include <cmath>
#include <iostream>
#include <ctime>
#include <fstream>
#include <string>
#include <vector>
#include <set>
#include <algorithm>
#include <random>

class Point {
    private:
        int _x;
        int _y;
    public:
        Point():_x(),_y(){};
        Point(int x0, int y0){ _x = x0; _y = y0;};
        int x() const{ return _x;}
        int y() const{ return _y;}

};

class BRW{
    private:
        int _x;
        int _y;
        std::vector<Point> ensemble; //Qui va stocker les
                                     enfants

    public:
        BRW(): ensemble(), _x(), _y(){}
        BRW(int x, int y): ensemble(), _x(x), _y(y){}
        BRW(Point p): ensemble(), _x(p.x()), _y(p.y()){}
        int x() const{ return _x;}
        int y() const{ return _y;}
        std::vector<Point> const ens(){ return ensemble
                                     ;}
        unsigned int const size(){ ensemble.size();};
        void ajoute_enfant();
};
```



```

        void generation(int N, std::ostream & file);
        void condition();
        void condition2();

};

#include "brw.hpp"

std::mt19937 G(time(NULL));

void BRW::ajoute_enfant() {

    Point haut(_x+1,_y+1);
    Point bas(_x+1,_y-1);
    std::bernoulli_distribution berl(0.5);
    std::uniform_int_distribution<int> uniform(1,2);
    if( berl(G) == 1){
        if( uniform(G) == 1) { ensemble.resize(1);
            ensemble[0] = haut; }
        else { ensemble.resize(1); ensemble[0] = bas;}
    }
    else { ensemble.resize(2); ensemble[0] = haut; ensemble
        [1] = bas;}
}

void BRW::generation(int N, std::ostream & file){
    int n =0;

    int taille = 0;

    std::vector<Point> newgeneration;

    // ajoute la premiere generation
    ajoute_enfant();
    newgeneration.resize(ensemble.size());
    newgeneration = ensemble;
    //écriture premiere generation
    for(int i =0; i < newgeneration.size(); i++){
        file << newgeneration[i].x() << "└" <<
            newgeneration[i].y() << "┘" << std::endl <<

```

```

        newgeneration[0].x() << "└" << newgeneration
        [0].y() << std::endl << std::endl;
    }
    //écriture toutes les generations jusqu'a N
    for( int time = 2; time <= N; time++){
        newgeneration.clear();
        for( int enfant = 0; enfant < ensemble.size(); enfant++){
            BRW parent((ensemble[enfant]));
            parent.ajoute_enfant();
            for(int nouveau=0;nouveau<parent.ens().size(); nouveau++)
            {
                newgeneration.push_back(parent.ens()[nouveau]);
                file << parent.ens()[nouveau].x() << "└" << parent.ens()[nouveau]
                ].y() << "└" << std::endl << parent.x() << "└" << parent.y() <<
                std::endl << std::endl;
                std::cout << parent.ens()[nouveau].x() << "└" << parent.ens()[
                nouveau].y() << "└" << std::endl << parent.x() << "└" << parent.
                y() << std::endl << std::endl;
            }
        }

        ensemble.resize(newgeneration.size());
        ensemble = newgeneration;
        condition();
    }
    //file << 500 << " " << 260 << " " << std::endl << 0 << "
    "<< 0 << std::endl << std::endl;
}

//A chaque fois qu'il y 'a deux individus dans la meme
generation, y'a qu'un seul qui survit
void BRW::condition(){
    for(int i =0; i < ensemble.size(); i++){
        for(int j=i+1; j < ensemble.size(); j++){
            {
                if( ensemble[i].y() == ensemble[
                j].y()){
                    ensemble.erase(ensemble.
                    begin() + j);
                }
            }
        }
    }
}

#include <random>

```

```
#include <vector>
#include <iostream>
class Discret {
    private:
        std::uniform_real_distribution<double> loi;
        std::mt19937& _generator;
        double _p0;
        double _p1;
        double _p2;
    public:
        Discret();
        Discret(std::mt19937& gen, double p0, double p1,
            double p2): _p0(p0), _p1(p1), _p2(1-_p1+_p2),
            _generator(gen), loi(0,1){}
        std::vector<int> operator()(int N) {
            std::vector<int> echantillon(N);
            for (int i=0;i<N;++i) {
                if (loi(_generator) <= _p0){
                    echantillon[i] = 0;}
                if ((loi(_generator) <= _p1+_p0)
                    && (loi(_generator) >= _p0))
                    {echantillon[i] = 1;}
                if (((loi(_generator) <= 1) && (
                    loi(_generator) >= _p0+_p1
                    ) ) { echantillon[i] = 2;}
            }
            return echantillon;
        }
};

class Poisson {
    private:
        std::poisson_distribution<int> _distribution;
        std::uniform_int_distribution<int> loi;
        std::mt19937& _generator;
    public:
        Poisson();
        Poisson(std::mt19937& gen, double lambda):
            _distribution(lambda), _generator(gen){}
        std::vector<int> operator()(int N) {
            std::vector<int> echantillon(N);
            for (int i=0;i<N;++i) {
                echantillon[i] = _distribution(
                    _generator);
                //echantillon[i] = 2;
            }
            return echantillon;
        }
};
```

```

    }

};

class Individu{
    template<class LoiReproduction>
    friend class GaltonWatson;
protected:
    int _generation;
    std::vector<Individu *> enfants;
public:
    Individu();
    Individu(int generation): enfants(0){
        _generation=generation; }
    ~Individu();
    int get_generation() const{ return _generation;}
    int get_nbr_enfant() const{ return enfants.size
        ();}
    int nb_descendants(int n) const;
    Individu * enfant(int i) const{ return enfants[i
        ];}
    std::vector<Individu *> ajouter_enfants(int
        nb_nouveaux_enfants);

};

int Individu::nb_descendants(int n)const{
    int s = 0;
    //if(n == 1){return get_nbr_enfant(); }
    for(int i =0; i < get_nbr_enfant(); i++){
        if(get_generation()!=n-1){
            s+=enfants[i]->nb_descendants(n)
                ;
        }
        else{ s =get_nbr_enfant();}
    }
    return s;
}

Individu::Individu(): _generation(0), enfants(0){}

Individu::~~Individu(){
    _generation = 0;
    for(int i =0; i < enfants.size(); i++){
        delete enfants[i];
    }
}

```

```

}

std::vector<Individu *> Individu::ajouter_enfants(int
    nb_nouveaux_enfants){
    std::vector<Individu *> nouveau(nb_nouveaux_enfants);
    enfants.resize(nb_nouveaux_enfants);
    for(int i =0; i < nouveau.size(); i++){
        nouveau[i] = new Individu(get_generation()+ 1);
        enfants[i] = nouveau[i];
    }
    return nouveau;
}

#include "individu.hpp"
#include <iostream>

int Individu::nb_descendants(int n)const{
    int s = 0;
    //if(n == 1){return get_nbr_enfant(); }
    for(int i =0; i < get_nbr_enfant(); i++){
        if(get_generation()!=n-1){
            s+=enfants[i]->nb_descendants(n)
            ;
        }
        else{ s =get_nbr_enfant();}
    }
    return s;
}

Individu::Individu():_generation(0), enfants(0){}
Individu::~Individu(){
    _generation = 0;
    for(int i =0; i < enfants.size();i++){
        delete enfants[i];
    }
}

std::vector<Individu *> Individu::ajouter_enfants(int
    nb_nouveaux_enfants){
    std::vector<Individu *> nouveau(nb_nouveaux_enfants);
    enfants.resize(nb_nouveaux_enfants);
    for(int i =0; i < nouveau.size(); i++){
        nouveau[i] = new Individu(get_generation()+ 1);
        enfants[i] = nouveau[i];
    }
    return nouveau;
}

```

```

}

#include "individu.hpp"

template<class LoiReproduction>
class GaltonWatSon{
protected:
    Individu * _racine;
    std::vector<Individu *> _population;
    int _temps;
    LoiReproduction _loi;
public:
    GaltonWatSon(LoiReproduction loi_repr);
    ~GaltonWatSon();
    int nb_individus(int n);
    GaltonWatSon<LoiReproduction>& operator++();
    int get_nb_lastgen();
};

template<class LoiReproduction>
GaltonWatSon<LoiReproduction>::GaltonWatSon(LoiReproduction
    loi_repr): _loi(loi_repr){
    _racine = new Individu;
    _temps = 0;
    _population.resize(1);
    _population[0] = _racine;
}

template<class LoiReproduction>
GaltonWatSon<LoiReproduction>::~~GaltonWatSon(){
    delete _racine;
}

template<class LoiReproduction>
int GaltonWatSon<LoiReproduction>::nb_individus(int n){
    if(n <= _temps){
        return _racine->nb_descendants(n);
    }
    else { return 0;}
}

template<class LoiReproduction>
int GaltonWatSon<LoiReproduction>::get_nb_lastgen(){
    return _population.size();
}

template<class LoiReproduction>

```

GaltonWatSon<LoiReproduction> & GaltonWatSon<LoiReproduction>::

```
operator ++(){
    _temps = _temps + 1;
    std::vector<int> kids = _loi(get_nb_lastgen());
    std::vector<Individu *> newpopulation(0);
    std::vector<Individu *> adresskids(0);
    for(int i =0; i < kids.size();i++){
        adresskids = _population[i]->ajouter_enfants(
            kids[i]);
        //ajoutons les enfants dans la nouvelle pop
        for(int j =0; j < adresskids.size();j++){
            newpopulation.push_back(adresskids[j]);
        }
        adresskids.clear();
    }
    _population = newpopulation;
}
/*
```

Definition de la classe lynx a fournir en  
parametre template a la classe population

\*/

```
#ifndef _LYNX_HPP_
#define _LYNX_HPP_
```

```
#include<random>
```

```
class lynx {
    private:
        // Les parametres
        double __ja; double __ar;
        double __rj;
        double __lambda;

        // les lois.
        std::bernoulli_distribution __dja;
        std::bernoulli_distribution __dar;
        std::bernoulli_distribution __drj;
        std::poisson_distribution<int> __descendance;

    public:
```

```
// Le constructeur
lynx(double ja, double ar, double rj, double lambda) :
    __ja(ja), __ar(ar), __rj(rj), __lambda(lambda)
    ,
    __dja(ja), __dar(ar), __drj(rj), __descendance
    (lambda)
{}

// La methode simulant les enfants d'un individu de type i.
std::vector<int> operator()(int i, std::mt19937 & G) {
    std::vector<int> tirage(3);
    if (i==0)
    {
        if (__dja(G))
            tirage[1] = 1;
        else
            tirage[0] = 1;
    }
    if (i==1)
    {
        if (__dar(G))
            tirage[2] = 1;
        else
            tirage[1] = 1;
    }
    if (i==2)
    {
        if (__drj(G))
            tirage[0] = __descendance(G);
        else
            tirage[2] = 1;
    }

    return tirage;
}

};

#endif
```



## Références

- [1] L. Addario-Berry. Ballot, minima in branching random walks. *ann. probab.* 37. pages 1044–1079, 2009.
- [2] R. Lyons. *A simple path to Biggins' martingale convergence for branching random walk*, 1997.
- [3] Shi Zhan. *Branching random walks*. Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour, Springer, 2012.