

SORBONNE UNIVERSITES

4M045
TER
RAPPORT

Processus de branchement et coalescences

Élèves :

Salim AMOUKOU
Sylla ELHADJI GAGNY

Enseignant :
Quentin BERGER

29 avril 2018

Table des matières

1	Préléminaire	2
1.1	Définition du processus de Galton-Watson	2
1.2	Propriétés de Z_n	3
1.2.1	Proposition 1	3
1.2.2	Proposition 2	4
1.3	Étude asymptotique	4
2	Marches aléatoires branchantes	7
2.1	Définition	7
2.2	Outils fondamentaux	8
2.2.1	Many-to-one	8
2.2.2	Epine dorsale	9
2.2.3	Martingales associées	11
2.3	Applications des outils	13
2.3.1	Many-To-One avec l'épine dorsale	13
2.3.2	Limite de la particule la plus à gauche(Martingale additive)	14
2.3.3	Convergence faible de la particule la plus à gauche(Martingale dérivée)	14
2.3.4	Convergence forte de la particule la plus à gauche	16
3	Simulations	19
3.1	Galton-Watson	19
3.2	Processus avec coalescence	20
3.3	Processus avec individus de type différents	27

1 Prélinaire

Les modèles d'évolution de population ne datent pas d'aujourd'hui. Dès le XIII siècle la suite de Fibonacci fut introduite pour décrire la croissance d'une population de lapins. Au XIX siècle le royaume uni connut deux grands modèles d'étude de population. Le modèle de Malthus, qui est sans doute le modèle d'évolution de population le plus connu. Son étude repose principalement sur des outils d'analyse. Le deuxième modèle connu sous le nom du modèle de Galton Watson est une approche probabiliste de l'étude des populations. Pour comprendre son origine historique nous allons citer Francis Galton et le révérend Watson (1874).

« The decay of the families of men who occupied conspicuous positions in past times has been a subject of frequent research, and has given rise to various conjectures ... The instances are very numerous in which surnames that were once common have since become scarce or have wholly disappeared. The tendency is universal, and, in explanation of it, the conclusion has hastily been drawn that a rise in physical comfort and intellectual capacity is necessarily accompanied by a diminution in 'fertility' . . . ».

C'est ainsi qu'ils entreprennent l'étude probabiliste de la suivie d'une lignée et créèrent le processus de Galton-Watson dans l'optique d'apporter des réponses rigoureuses.

Dans un premier temps, nous allons définir le modèle de Galton-Watson ainsi que ses propriétés générale puis faire l'étude asymptotique de la population.

1.1 Définition du processus de Galton-Watson

Le but du modèle classique consiste à partir d'un seul individu à la génération 0, et d'étudier sa lignée.

- On considère notre individu initial que l'on appelle goku et X une variable aléatoire discrète représentant le nombre d'enfant de notre premier individu avec $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ est sa probabilité d'avoir k enfants.

- On pose Z_n le nombre d'individus à la génération n , alors $Z_0 = 1$ par hypothèse. Le passage de la génération n à la génération $n+1$ se fait de la façon suivante : tous les individus de la génération n meurent et laissent un nombre aléatoire d'enfant suivant la loi des Z_n variables aléatoires suivantes : $X_{n,1}, X_{n,1}, X_{n,1}, \dots, X_{n,Z_n}$. De manière plus formelle si on considère une famille $X_{n,k}$ de variable aléatoires discrètes, on peut alors poser que le nombre d'individus à la génération $n+1$ est :

$$Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n+1,k} \quad (1)$$

Le but initial étant d'étudier la descendance de goku, en l'occurrence la convergence de Z_n , nous allons émettre des hypothèses de base pour pouvoir arriver à nos fins.

Les hypothèses de bases :

- Les individus ont un nombre aléatoire d'enfant et indépendamment des autres
- Selon la même loi

Remarque : Les deux hypothèses reviennent à supposer que les $X_{n,k}$ soient iid.

On peut représenter le processus de Galton-Watson sous forme d'arbre :

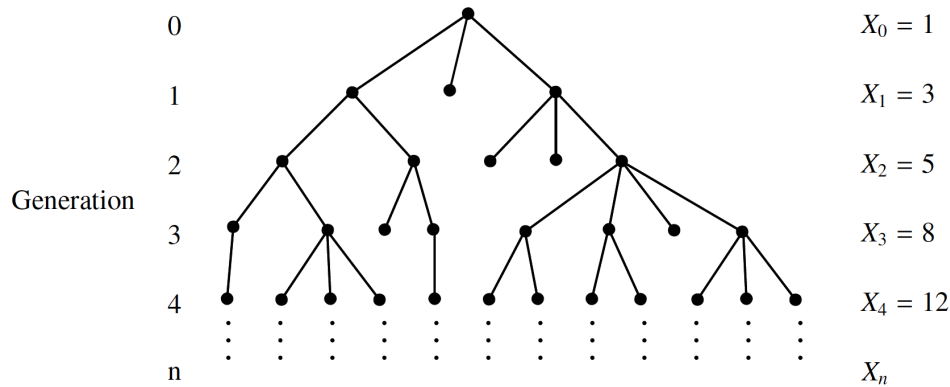


FIGURE 1 – Arbre de Galton-Watson

1.2 Propriétés de Z_n

Dans toute cette section nous allons poser :

$$m = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k \text{ moyenne du nombre d'enfant de chaque individu et } m < \infty \quad (2)$$

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k \text{ avec } \sigma^2 < \infty \quad (3)$$

1.2.1 Proposition 1

$\forall 0 < m < \infty$, la suite $(Z_n/m^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale positive qui converge ps vers une variable aléatoire W .

Démonstration. Considérons \mathcal{F}_n la tribu représentant toute l'information qu'on a à la génération n . il est alors évident que (Z_n/m^n) est mesurable pour tout n , et l'intégrabilité de (Z_n/m^n) vient de l'intégrabilité des $X_{n,k}$ d'espérance égale à m .

Par définition de Z_{n+1} ,

$$\begin{aligned} E\left(\frac{Z_{n+1}}{m^{n+1}} \middle| \mathcal{F}_n\right) &= \frac{1}{m^{n+1}} E\left(\sum_{k=1}^{Z_n} X_{n+1,k} \middle| \mathcal{F}_n\right) \\ &= \frac{1}{m^{n+1}} \sum_{k=1}^{Z_n} E(X_{n+1,k} \middle| \mathcal{F}_n) = \frac{1}{m^{n+1}} \sum_{k=1}^{Z_n} E(X_{n+1,k}) \\ &= \frac{1}{m^{n+1}} \sum_{k=1}^{Z_n} m = \frac{Z_n}{m^n} \end{aligned}$$

On en conclut que Z_n/m^n est martingale, de plus par définition Z_n est positive or une martingale positive converge toujours donc Z_n converge presque sûrement vers une variable aléatoire W . \square

Remarque 1 : On déduit facilement de la proposition 1 que $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$ car Z_n/m^n étant une martingale on a $\mathbb{E}(\frac{Z_n}{m^n}) = \mathbb{E}(Z_0) = 1$

1.2.2 Proposition 2

Soit $\phi_n(s) = \mathbb{E}(s^{Z_n})$ la fonction génératrice de Z_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \phi_{n+1} = \phi_n \circ \phi \quad (4)$$

Démonstration. On va montrer que $\mathbb{E}(s^{Z_n} | \mathcal{F}_{n-1}) = \phi(s)^{Z_{n-1}}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(s^{Z_n} | \mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}(s^{\sum_{k=0}^{Z_{n-1}} X_{n,k}} | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(\prod_{k=0}^{Z_{n-1}} s^{X_{n,k}} | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{1}(k \leq Z_{n-1}) \prod_{k=0}^{\infty} s^{X_{n+1,k}} | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \mathbb{1}(k \leq Z_{n-1}) \mathbb{E}(\prod_{k=0}^{\infty} s^{X_{n+1,k}} | \mathcal{F}_{n-1}) \text{ car } \mathcal{F}_{n-1} \text{ mesurable} \\ &= \mathbb{1}(k \leq Z_{n-1}) \prod_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(s^{X_{n,k}}) \text{ car les } X_{n,k} \text{ sont iid} \\ &= \phi(s)^{Z_{n-1}} \end{aligned}$$

On a donc $\phi_n(s) = \mathbb{E}(s^{Z_n}) = \mathbb{E}(\phi(s)^{Z_{n-1}}) = \phi_{n-1}(\phi(s))$ \square

Remarque 2 : On retrouve le même résultat de la remarque 1 en utilisant les fonctions génératrices. On a $\phi'(1) = m$ et $\phi_n'(1) = \phi'(1)\phi_{n-1}'(1)$ par récurrence on trouve que $\phi_n'(1) = m^n$ donc $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$.

1.3 Étude asymptotique

Pour entamer l'étude de notre lignée, posons :

$\tau := \{n \geq 0 : Z_n = 0\}$, $P_{ext} = \mathbb{P}(\tau < \infty)$ qui est le temps ou la population s'éteint et la probabilité d'extinction.

Avant de rentrer dans le vif du sujet, nous allons d'abord citer quelques cas triviaux .

Cas simple :

- si $p_0 = 0$, et $p_1 < 1$ alors $Z_{n+1} \geq Z_n$ p.s, et $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = +\infty$
- si $p_1 = 1$ alors $Z_n = 1$ p.s
- si $p_0 + p_1 = 1$, alors $\mathbb{P}(Z_n = 1) = p_1^n$ car 0 est un état absorbant donc par Borel-Cantelli on en déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = 0$

Lien entre la fonction génératrice et la proba d'extinction :

Par définition, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau < \infty) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \{Z_n = 0\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = 0\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) \text{ car } \{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(0) \text{ par définition}\end{aligned}$$

Donc on a $P_{ext} = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(0)$, de plus en utilisant la relation de récurrence de la fonction de répartition et sa continuité on a :

$$\begin{aligned}P_{ext} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(0) \\ &= \phi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{n-1}(0)\right) \\ P_{ext} &= \phi(P_{ext})\end{aligned}$$

On vient de démontrer que la probabilité d'extinction n'est que le point fixe de la fonction génératrice, ainsi la trouver revient à une simple étude de fonction. // faut démontrer que c'est le plus petit point fixe.

Lien entre la moyenne de la loi de reproduction et la proba d'extinction :

Rappelons que nous avons démontré que Z_n/m^n était une martingale, donc nous avons $\mathbb{E}(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n) = mZ_n$ (4) et qu'on peut voir le processus Z_n comme une chaîne de Markov avec 0 un état absorbant et tous les autres transients.

Nous allons alors étudier notre processus Z_n en fonction des valeurs de m .

— **si $m < 1$**

D'après l'équation (4), Z_n est une sur-martingale positive donc converge p.s, et même en L1 car Z_n est borné : $\forall n \geq 0, \mathbb{E}(Z_n) = m^n < 1$.

Soit Z_∞ sa limite, on a :

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \leq \mathbb{E}(Z_n) = m^n \rightarrow 0 \text{ (Inegalite de Markov)}$$

On en déduit Z_n converge en proba vers 0, alors $Z_\infty = 0$ et Z_n converge p.s vers 0.

Donc $P_{ext} = \mathbb{P}(\text{Extinction}) = 1$

— **si $m = 1$**

On sait qu'il existe $n \leq 2$: $p_n > 0$ car sinon $p_0 + p_1 = 1$ et donc $\mathbb{E}(X_{n,k}) = m = p_1 < 1$ chose qui est impossible car $m = 1$.

On a montré que $\mathbb{P}(\tau < \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(0) = \text{Point fixe de } \phi(x)$

Or $\phi'(x) =$

Or $\phi''(x) =$

donc ϕ est strictement croissante et convexe sur $[0,1]$, de plus $\phi(1) = 1$, montrons que c'est l'unique point fixe sur $[0,1]$.

Si ϕ admettait un point fixe sur $[0,1]$ alors elle couperait la droite d'équation $y = x$. la convexité de ϕ entraîne que celle ci soit au dessus de toutes ses tangentes or au point $(1,1)$ la tangente est de pente $\phi'(1) = m$. Donc si $m \leq 1$, la tangente sera au dessus la droite $y = x$ alors c'est impossible qu'il y est une intersection entre ϕ et y . Ainsi 1 est l'unique point fixe sur $[0,1]$.

Donc $\mathbb{P}(\tau < \infty) = P_{ext} = 1$

— si $m > 1$

En faisant la même étude qu'au cas précédent on remarque que si $m > 1$, on a la tangente de ϕ qui est en dessous de la droite $y = x$, ainsi la croissance et la convexité de la fonction entraîne qu'il existe un point fixe inférieur à 1.

Il existe donc un $q < 1$ tel que $P_{ext} = \mathbb{P}(Extinction) = q$

Remarque : On a montré que si $m > 1$, l'extinction n'est sure ainsi comme 0 est un état absorbant, et les autres transients on a que deux possibilités. $Z_n \in \{0, +\infty\}$

Conclusion :

- si $m \leq 1$, la population s'éteint presque sûrement.
- si $m > 1$, alors il n'y a que deux possibilités soit la population s'éteint soit elle croît vers l'infini.

On en conclut que le processus de Galton-Watson ne permet pas d'étudier des modèles où la population se stabilise ou oscille.

Pour étudier des dynamiques de populations plus réalistes, il nous faut ajouter des paramètres comme par la position de chaque individu dans leur milieu par exemple regarder comment se déplacent des individus en fonction des directions prises en plus de la génération d'un nombre aléatoire d'enfant, on parle alors marche aléatoire branchante. Ce dernier sera l'objet de notre étude dans toute la suite.

2 Marches aléatoires branchantes

Nous avons fait tout ce chemin dans le seul et unique but de pouvoir définir correctement les marches aléatoires branchantes. En effet, on peut voir les processus de branchements comme une amélioration du processus de Galton-Watson. Rappelons qu'on peut représenter le processus de Galton-Watson comme un arbre, ou chaque sommet x représente un individu ainsi on peut enrichir le processus en associant à chaque sommet une valeur $V(x)$ qui sera héritée du parent. Intuitivement, on peut comprendre cette valeur comme la date de naissance de l'individu, la présence d'une maladie ou sa position au cours du temps. On appelle ces arbres des arbres marqués aléatoire aussi connu sous le nom de marche aléatoire branchante.

Nous allons dans un premier temps définir de manière formelle ces processus, puis les étudier.

2.1 Définition

Pour définir proprement notre processus, nous allons d'abord donner la définition d'un processus ponctuel.

Processus de point : Un processus de point $\mathcal{L}=(x_i)_{i=1}^N$ est un processus stochastique dont une réalisation est une collection de point d'un ensemble S . On peut le voir comme une variable aléatoire générant un nombre N de variable réelle (N pouvant être aussi aléatoire). Dans notre contexte, le N représentera le nombre d'individus et les points peuvent représenter dans le cas discret la position de l'individu ou la date de naissance en temps continu.

Marche aléatoire branchante : Une marche aléatoire branchante est un arbre marqué aléatoire dont l'évolution se fait de la suivante :

- Soit un processus de point $\mathcal{L}=(x_i)_{i=1}^N$

1. A l'instant 0 il n'y a qu'une seule particule, situé à la génération 0.
2. A l'instant 1 la particule meurt, laissant un nombre aléatoire d'enfant suivant le processus \mathcal{L} .
3. On répète indéfiniment le même processus sur chaque enfant indépendamment du passé et des sœurs suivant une copie indépendante et translatée du processus \mathcal{L} .

Notation :

- Dans tout ce qui suit on notera pour tout individu x , $V(x)$ sa position, $|x|$ sa génération et x_0, x_1, \dots, x_n ses parents à la génération $0, 1, \dots, n$.
- On peut voir notre marche aléatoire branchante comme une variable aléatoire $V = (V(x) : x \in \mathbb{T})$ qui prends ses valeurs dans l'espace des arbres marqués et \mathbb{T} est l'arbre généalogique ou le processus de Galton-Watson associé.

Posons :

$$\psi(t) = \ln\left(\sum_{x:|x|=1} e^{tV(x)}\right) \text{ (la transformée de log-laplace de notre processus de point)}$$
(5)

On suppose dans la suite que $\psi(0) > 0$ qui entraîne que $\mathbb{E}(N) > 1$ donc que notre processus est super-critique.

2.2 Outils fondamentaux

2.2.1 Many-to-one

Dans nous allons introduire dans cette partie l'outil le plus important et utile des processus de branchements appelé Many-to-One ou en français le lemme de regroupement. Cet outils nous permettra de simplifier notre modèle en ramenant l'étude de notre processus de branchement à l'étude d'une marche aléatoire.

Pour cela, soit $t > 0$ tel que $\psi(t) < \infty$ et $S_0 = 0$, $(S_n - S_{n-1})_{n \geq 1}$ une suite de variable aléatoire i.i.d tel que :

$$\mathbb{E}(h(S_1)) = \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{x:|x|=1} h(V(x))e^{-tV(x)}}{\sum_{x:|x|=1} e^{-tV(x)}}\right) \quad (6)$$

Theorem 2.1. Soit $t > 0$ tel que $\psi(t) < \infty$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ une fonction borélienne alors :

$$\mathbb{E}\left[\sum_{x:|x|=n} g(V(x_1), V(x_2), \dots, V(x_n))\right] = \mathbb{E}[e^{tS_n + n\psi(t)} g(S_1, S_2, \dots, S_n)] \quad (7)$$

Démonstration. Nous allons le démontrer par récurrence. Pour $n = 1$, il n'y a rien à faire car c'est juste la définition de S_1 . Supposons alors la proposition vraie au rang n , et montrons le au rang $n+1$, pour cela nous allons conditionner notre espérance par rapport à la première génération.

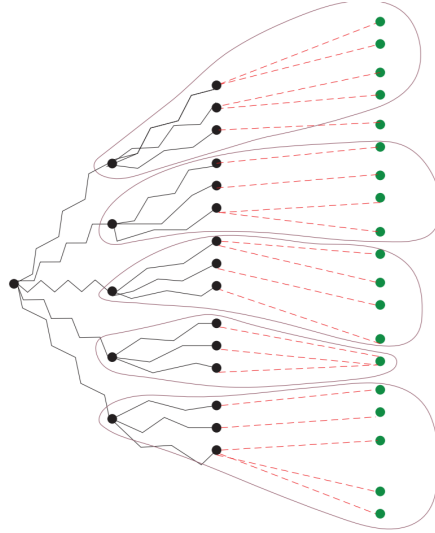


FIGURE 2 – Galton-Watson

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}\left[\sum_{x:|x|=n+1} g(V(x_1), V(x_2), \dots, V(x_{n+1}))\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{y:|y|=1} \sum_{z \in T: |z|=n} g(V(y), V(y) + \tilde{V}(z_1), \dots, V(y) + \tilde{V}(z_n))\right] \end{aligned}$$

Les z_i et les x_i sont identiques, ils ont juste des racines différentes (voir figure x). On a aussi :

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}\left[\sum_{z \in \mathbb{T}: |z|=n} g(V(y), V(y) + \tilde{V}(z_1), \dots, V(y) + \tilde{V}(z_n))\right] \\ &= \mathbb{E}[e^{tS_n + n\psi(t)} g(V(y), V(y) + \tilde{S}_1, \dots, V(y) + \tilde{S}_n)] \text{ (hypothèse de récurrence)} \end{aligned}$$

avec $(\tilde{S}_i, i \leq 1)$ des variables aléatoires indépendantes de $(V(y), |y| = 1)$ suivant la même loi que $(\tilde{S}_i, i \leq 1)$. on a enfin :

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{x: |x|=n+1} g(V(x_1), V(x_2), \dots, V(x_{n+1}))\right] \quad (8)$$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{y: |y|=1} e^{tS_n + n\psi(t)} g(V(y), V(y) + \tilde{S}_1, \dots, V(y) + \tilde{S}_n)\right] \quad (9)$$

$$= \mathbb{E}[e^{tS_1 + n\psi(t)} e^{tS_n + n\psi(t)} g(S_1, S_1 + \tilde{S}_1, \dots, S_1 + \tilde{S}_n)] (n = 1) \quad (10)$$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{x: |x|=n} g(V(x_1), V(x_2), \dots, V(x_n))\right] \quad (11)$$

$$= \mathbb{E}[e^{tS_n + n\psi(t)} g(S_1, S_2, \dots, S_n)] \text{ (car } S_i + \tilde{S}_i = S_{i+1}) \quad (12)$$

$$(13)$$

Remarque : Il est légitime de se demander pourquoi on a définie la variable aléatoire S_n ainsi, nous verrons dans la section suivante qu'elle est intimement liée à la loi de notre processus et que son choix n'est pas du tout aléatoire. \square

2.2.2 Epine dorsale

Comme nous avons vu précédemment, l'étude de notre processus peut s'avérer très compliquée à cause de sa croissance très rapide. Dans cette partie nous allons introduire un nouveau processus w appelé l'épine dorsale qui sera attaché à notre processus branchant. En particulier, ce processus nous permettra de comprendre la présence de la variable aléatoire S_n dans la formule du Many-to-One grâce au théorème de décomposition de l'épine dorsale. Nous allons dans ce qui suit présenter les bases nécessaires pour pouvoir invoquer le théorème.

Rappelons qu'on peut voir notre processus comme un arbre marqué $V = (V(x), x \in \mathbb{T})$. Posons : $\mathcal{F}_n = \sigma\{V(x) : x \in \mathbb{T}, |x| \geq n\}$ et $\mathcal{F}_\infty = \sigma\{V(x) : x \in \mathbb{T}\}$. Nous allons attacher un processus $w = (w_n, n \geq 1)$ à V , avec $w_n \in \mathbb{T} \forall n$ choisi parmi les individus x présents dans l'arbre avec une certaine probabilité.

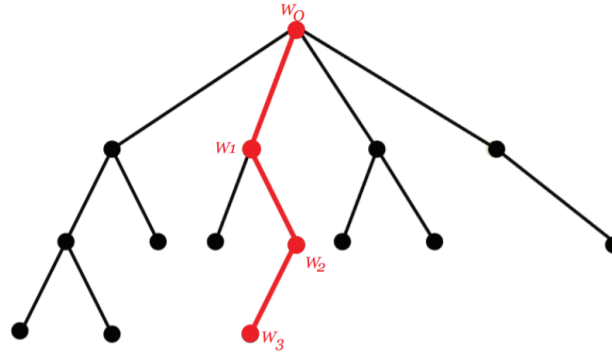


FIGURE 3 – Galton-Watson

Remarque : $|w_n| = n \forall n$ et nous noterons $\overleftarrow{w_{n-1}} = w_n$ pour rappeler que w_n est le pere de w_{n-1} .

Hypothèses : On peut supposer que $\psi(1) = 0 \leftrightarrow \mathbb{E}[\sum_{x:|x|=1} e^{-tV(x)}] = 1$.

- Soit $(S_n - S_{n-1})_{n \geq 1}$ une suite de variable aléatoire i.i.d tel que :

$$\mathbb{E}(h(S_1 - S_0)) = \mathbb{E}\left[\sum_{x:|x|=1} h(V(x)e^{-tV(x)})\right] \quad (14)$$

- $\forall a \in \mathbb{R}$, soit \mathbb{P}_a la probabilité tel que $\mathbb{P}_a(S_0 = a) = \mathbb{P}_a(V(\text{racine}) = a) = 1$

- Soit $D \subset \mathbb{R}$ borélien tel que :

$$\mathbb{P}_a(S_1 \in D) > 0 \forall a \in D \quad (15)$$

- Soit $h : D \rightarrow [0, \infty]$ une fonction harmonique positive tel que :

$$h(a) = \mathbb{E}_a[h(S_1)\mathbf{1}_{S_1 \in D}] \quad (16)$$

Maintenant que nous avons toutes les hypothèses, nous allons présenter le changement de probabilité introduit par Lyon qui permet de ramener l'étude de notre processus à l'étude d'une marche aléatoire simple.

Changement de probabilité : Soit $D \subset \mathbb{R}$ vérifiant (15), et $h : D \rightarrow [0, \infty]$ définie comme dans (16). on définit alors :

$$M_n^{(h)} = \sum_{x:|x|=n} h(V(x)e^{-tV(x)})\mathbf{1}_{\{V(y) \in D \ y \in [0, x]\}} \quad (17)$$

Lemma 2.2. Soit $a \in D$, alors sous \mathbb{P}_a $M_n^{(h)}$ est une martingale.

Démonstration. Par définition :

$$\begin{aligned} M_{n+1}^{(h)} &= \sum_{x:|x|=n+1} h(V(x)e^{-tV(x)})\mathbf{1}_{\{V(y) \in D \ y \in [0, x]\}} \\ &= \sum_{y:|y|=n} \sum_{x:|x|=n+1: \overleftarrow{x}=y} h(V(x)e^{-tV(x)})\mathbf{1}_{\{V(y) \in D \ y \in [0, x]\}} \\ &= \sum_{y:|y|=n} \mathbf{1}_{\{V(y) \in D \ y \in [0, y]\}} \sum_{x:|x|=n+1: \overleftarrow{x}=y} h(V(x)e^{-tV(x)})\mathbf{1}_{\{V(x) \in D\}} \quad (\text{separation de l'indicateur}) \end{aligned}$$

En condition par rapport au temps n , on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_a[M_{n+1}^{(h)}|\mathcal{F}_n] &= \sum_{y:|y|=n} \mathbf{1}_{\{V(z) \in D \ z \in [0,y]\}} \mathbb{E}_a\left[\sum_{x:|x|=n+1: \overleftarrow{x}=y} h(V(x))e^{-V(x)} \mathbf{1}_{\{V(x) \in D\}} |\mathcal{F}_n\right] \\
&= \sum_{y:|y|=n} \mathbf{1}_{\{V(z) \in D \ z \in [0,y]\}} \mathbb{E}_{V(y)}\left[\sum_{x:|x|=1} h(V(x))e^{V(x)} \mathbf{1}_{\{V(x) \in D\}} \right] \text{ (prop de branchement)} \\
&= \sum_{y:|y|=n} \mathbf{1}_{\{V(z) \in D \ z \in [0,y]\}} \mathbb{E}_{V(y)}[e^{V(y)} h(S_1) \mathbf{1}_{S_1 \in D}] \text{ (Many-to-One)} \\
&= \sum_{y:|y|=n} \mathbf{1}_{\{V(z) \in D \ z \in [0,y]\}} h(V(y)) e^{-V(y)} \\
&= M_n^{(h)}
\end{aligned}$$

On a alors $M_n^{(h)}$ qui est une martingale avec $\mathbb{E}[M_n^{(h)}] = e^{-a} h(a)$, ainsi le théorème d'extension de Kolmogorov nous dit qu'il existe une unique mesure de probabilité $\mathbb{Q}_a^{(h)}$ tel que :

$$\frac{d\mathbb{Q}_a^{(h)}}{d\mathbb{P}_a^{(h)}} = \frac{M_n^{(h)}}{\mathbb{E}[M_n^{(h)}]} = \frac{M_n^{(h)}}{e^{-a} h(a)} \quad (18)$$

□

Theorem 2.3. Décomposition en épine dorsale

Soit $\psi(1) = 0$, $D \subset \mathbb{R}$ vérifiant (14), $a \in D$, h une fonction harmonique sur D et $\mathbb{Q}_a^{(h)}$ une mesure de probabilité définie comme en (18).

— $\forall n$ et pour tout individu $x \in \mathbb{T} : |x| = n$ on a :

$$\mathbb{Q}_a^{(h)}[w_n = x | \mathcal{F}_n] = \frac{h(V(x))e^{-tV(x)} \mathbf{1}_{\{V(y) \in D \ y \in [0,x]\}}}{M_n^{(h)}} \quad (19)$$

avec $M_n^{(h)} = \sum_{x:|x|=n} h(V(x))e^{-tV(x)} \mathbf{1}_{\{V(y) \in D \ y \in [0,x]\}}$

— le processus $(V(w_n), n \geq 0)$ sous $\mathbb{Q}_a^{(h)}$ a la même loi que S_n sous $\mathbb{Q}_a^{(h)}$ conditionner à rester dans D .

On en déduit alors l'origine de la marche aléatoire S_n de la formule many-to-one qui n'est autre que la marche aléatoire simple $V(w_n)$ partant de a .

2.2.3 Martingales associées

L'étude des marches aléatoire branchantes se fait généralement par l'étude de certaines martingales que nous allons présenter dans cette section. Nous verrons plus loin certaines de leurs applications dans la partie suivante.

Martingale additive Supposons $\Psi(1) < \infty$. On pose :

$$W_n := \sum_{|x|=n} \exp(-n\Psi(1) - V(x)), n \geq 0 \quad (20)$$

$(W_n, n \geq 0)$ associé à la filtration naturelle du processus de point $\mathcal{F}_n = \sigma(V(x), x \in \mathbb{T}, |x| \leq n)$ est une martingale appelée martingale additive.

Démonstration.

$$W_{n+1} = \sum_{|y|=n+1} \exp(-(n+1)\Psi(1) - V(y)), n \geq 0$$

En conditionnant notre somme par rapport aux individus de la génération n et leurs descendants, on a :

$$W_{n+1} = \sum_{|x|=n} \sum_{|y|=n+1, \overleftarrow{y}=x} e^{-(n+1)\Psi(1)-(V(x)+V(y))}$$

En passant à l'espérance conditionnelle, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \sum_{|x|=n} \mathbb{E}\left(\sum_{|y|=n+1, \overleftarrow{y}=x} e^{-(n+1)\Psi(1)-(V(x)+V(y))} \mid \mathcal{F}_n\right) \\ &= \sum_{|x|=n} \mathbb{E}\left(\sum_{|z|=1} e^{-(n+1)\Psi(1)-(V(x)+V(z))}\right) \text{ par la prop de branchement} \\ &= \sum_{|x|=n} e^{-V(x)} \mathbb{E}\left(\sum_{|z|=1} e^{-(n+1)\Psi(1)-V(z)}\right) \\ &= \sum_{|x|=n} e^{-V(x)} \mathbb{E}(e^{S_1+\psi(1)} e^{-(n+1)\Psi(1)-S_1}) \text{ par many-to-one} \\ &= \sum_{|x|=n} e^{-n\psi(1)-V(x)} = W_n \end{aligned}$$

□

Martingale multiplicative On suppose $\Psi(1) = 0$ et $\Psi'(1) = 0$, nous avons

$$D_n = \sum_{|x|=n} V(x) \exp(-V(x)) \quad (21)$$

D_n est une martingale appelée la martingale dérivée. Cette dernière est probablement l'une des plus importantes martingales associées à la marche aléatoire branchante, et elle joue un rôle crucial dans l'étude des valeurs extrêmes de la marche aléatoire.

Démonstration. Rappelons que $\psi(1) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}(\sum_{|x|=1} e^{-V(x)}) = 1$ et $\psi'(1) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{E}(V(x) e^{-V(x)}) = 1$, on a alors :

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= \sum_{|x|=n+1} V(x) e^{-V(x)}, n \geq 0 \\ &= \sum_{|x|=n} \sum_{|y|=n+1, \overleftarrow{y}=x} (V(x) + V(y)) e^{-(V(x)+V(y))} \end{aligned}$$

En passant à l'espérance conditionnelle, on a :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(D_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \sum_{|x|=n} \mathbb{E}\left[\sum_{|y|=n+1, \overleftarrow{y}=x} (V(x) + V(y)) e^{-(V(x)-V(y))} \middle| \mathcal{F}_n \right] \\
 &= \sum_{|x|=n} \mathbb{E}\left[\sum_{|y|=1} (V(x) + V(y)) e^{-(V(x)-V(y))} \right] \\
 &= \sum_{|x|=n} \sum_{y=1} V(x) e^{-V(x)-V(y)} + \sum_{|x|=n} \sum_{|y|=1} V(y) e^{-V(x)-V(y)} \\
 &= \sum_{|x|=n} V(x) e^{-V(x)} \sum_{|y|=1} e^{-V(y)} + \sum_{|x|=n} \sum_{|y|=1} V(y) e^{-V(y)} e^{-V(x)} \\
 &= \sum_{|x|=n} V(x) e^{-V(x)}
 \end{aligned}$$

□

2.3 Applications des outils

Dans cette partie nous allons voir l'utilité des outils précédents à travers différentes applications.

2.3.1 Many-To-One avec l'épine dorsale

Nous allons démontrer la formule Many-to-one en appliquant le théorème de décomposition de l'épine dorsale. Soit h la fonction harmonique tel que $\forall a \in \mathbb{R} \ h(a) = 1$ et :

$$m = \mathbb{E}\left(\sum_{x:|x|=n} e^{-V(x)}\right) \quad M_n = \frac{\sum_{x:|x|=n} e^{-V(x)}}{m^n} \quad (22)$$

Il faut noter qu'on est parfaitement dans le cadre d'application de notre théorème, la seule différence est que $m \neq 1$ ce qui nous pousse à renormaliser pour que M_n reste une martingale. On a alors selon le théorème de l'épine dorsale sous $\mathbb{Q}_a(A) = \int_A M_n d\mathbb{P}_a$ que :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{\mathbb{P}_a}\left[\sum_{x:|x|=n} g(V(x_1), V(x_2), \dots, V(x_n))\right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_a}\left[\sum_{x:|x|=n} \frac{1}{M_n} g(V(x_1), V(x_2), \dots, V(x_n))\right] \\
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_a}\left[\sum_{x:|x|=n} e^{V(x)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_a}(\mathbf{1}_{w_n=x} | \mathcal{F}_n) g(V(x_1), V(x_2), \dots, V(x_n))\right] \\
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_a}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_a}\left[\sum_{x:|x|=n} e^{V(x)} \mathbf{1}_{w_n=x} g(V(x_1), V(x_2), \dots, V(x_n)) \middle| \mathcal{F}_n\right]\right] \\
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_a}[e^{-V(w_n)} g(V(w_1), V(w_2), \dots, V(w_n))]
 \end{aligned}$$

Dans les parties qui suivent nous allons mettre plus l'accent sur la limite des positions extrêmes (position la plus à gauche ou à droite).

Posons $X_n = \inf_{|x|=n} V(x)$ qui est la position la plus à gauche.

Remarque : Notons qu'on peut facilement passer à la position la plus à droite (sup) en changeant les signes.

2.3.2 Limite de la particule la plus à gauche(Martingale additive)

Lemma 2.4. Soit $\psi(0) > 0$, si $\exists t > 0$ tel que $\psi(t) < \infty$ alors :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{|x|=n} V(x) = +\infty \quad (23)$$

Démonstration. On peut supposer que $t = 1$ sans perte de généralité() et munissons nous de la martingale additive :

$$W_n = \sum_{|x|=n} e^{n\psi(1)+V(x)} \quad (24)$$

On remarque que W_n est une martingale positive, on en déduit qu'elle converge ps. Posons W_∞ sa limite par le lemme de fatou on sait que $\mathbb{E}(W_\infty) \leq \mathbb{E}(W_n) = 1$.

Posons : $Y = \limsup_{n \rightarrow \infty} e^{-\inf_{|x|=n} V(x)}$

On remarque que $\mathbb{E}(Y) \leq \mathbb{E}(W_\infty) \leq 1$ et en conditionnant par rapport à la première génération que :

$$Y = \sup_{|x|=1} [e^{-V(x)} Y(x)] \quad (25)$$

Ou $Y(x)$ est une copie indépendante de Y , et de $(V(x), |x| = 1)$ partant de x , on a ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\sup_{|x|=1} [e^{-V(x)} Y(x)]) &\leq \mathbb{E}(\sum_{|x|=1} e^{-V(x)} Y(x)) \leq \mathbb{E}(\sum_{|x|=1} e^{-V(x)}) \mathbb{E}(Y) \\ &\leq e^{\psi(1)} \mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$

□

On en déduit que $\mathbb{E}(Y) = 0$ donc $\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{|x|=n} V(x) = +\infty$

2.3.3 Convergence faible de la particule la plus à gauche(Martingale dérivée)

Theorem 2.5.

Supposons que $\psi(0) > 0$, $\psi(1) = \psi'(1) = 0$, On a alors :

$$\inf_{|x|=n} V(x) \longrightarrow \frac{3}{2} \log(n) \quad (26)$$

Nous allons démontrer que la convergence pour les valeurs supérieures pour une preuve complète voir (ref).

Démonstration. Montrons que pour tout $\epsilon > 0$,

$$P(\inf_{|x|=n} V(x) \geq (\frac{3}{2} - \epsilon) \log(n)) \longrightarrow 1. \quad (27)$$

Nous avons montré dans la partie précédente que $\inf_{|x|=n} V(x) = \infty$, on en déduit alors l'existence d'un $\alpha > 0$ potentiellement grand tel que $V(x_i) \geq -\alpha \forall x, \forall 1 \leq i \leq n$.

Posons $Z_n = \sum_{|x|=n} \mathbb{1}_{(V(x) \leq (\frac{3}{2} - \epsilon) \log(n), V(x_i) \geq -\alpha, \forall 1 \leq i \leq n)}$ qui sera le nombre de particule en

dessous de $a \log(n)$ avec $a < 3/2$.

En utilisant la many-to-one formula, on arrive à :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sum_{|x|=n} \mathbb{1}_{(V(x) \leq (\frac{3}{2}-\epsilon) \log(n), V(x_i) \geq -\alpha, \forall 1 \leq i \leq n)}\right) &= \mathbb{E}(\exp(S_n) \mathbb{1}_{(S_i \leq (\frac{3}{2}-\epsilon) \log(n), S_i \geq -\alpha, \forall 1 \leq i \leq n)}) \\ &\leq n^{\frac{3}{2}-\epsilon} \mathbb{P}(S_i \leq (\frac{3}{2}-\epsilon) \log(n), S_i \geq -\alpha, \forall 1 \leq i \leq n) \end{aligned}$$

Ainsi nous avons transformé notre problème en une majoration de marche aléatoire. Nous allons alors utiliser un argument de majoration de marche aléatoire introduit par Addario-Berry et Reed(ref) et adapté par Zhan Shi pour notre modèle.

Lemma 2.6. *Soit S_n une marche aléatoire tel que $\mathbb{E}(S_n) < \infty$ alors Il existe $c > 0$ tel que : pour tout $a \leq 0$, $b \leq -a$:*

$$\mathbb{P}(S_n \geq -a, S_n \leq b) \leq \frac{c}{n^{3/2}} \quad (28)$$

On achève ainsi notre preuve grâce a ce lemme.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sum_{|x|=n} \mathbb{1}_{(V(x) \leq (\frac{3}{2}-\epsilon) \log(n), V(x_i) \geq -\alpha, \forall 1 \leq i \leq n)}\right) &\leq n^{\frac{3}{2}-\epsilon} \mathbb{P}(S_i \leq (\frac{3}{2}-\epsilon) \log(n), S_i \geq -\alpha, \forall 1 \leq i \leq n) \\ &\sim kn^{\frac{3}{2}-\epsilon} n^{\frac{3}{2}} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathbb{P}(\inf_{|x|=n} V(x) \leq (3/2 - \epsilon) \log(n)) \longrightarrow 0$ ps donc $\mathbb{P}(\inf_{|x|=n} V(x) \geq (3/2 - \epsilon) \log(n)) \longrightarrow 1$ ps \square

2.3.4 Convergence forte de la particule la plus à gauche

Theorem 2.7. *Supposons que $\Psi(0) > 0$ et $\forall t > 0, \Psi(t) > 0$ alors sur l'ensemble de non-extinction :*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \inf_{|x|=n} V(x) = \lambda \quad (29)$$

$$\text{avec } \lambda = - \inf_{s > 0} \frac{\Psi(s)}{s} \quad (30)$$

Posons $X_n = \inf_{|x|=n} V(x)$

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin du théorème et du lemme suivant.

Theorem 2.8. *Kingman (1968)*

Supposons $\{X_{m,n}\}$ une famille de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité donné et indexée par des entiers tels que $0 \leq m < n$ tel que :

$$X_{l,n} \leq X_{l,m} + X_{m,n}, \quad 0 \leq l < m < n \quad (31)$$

$$\{X_{m+1,n+1}, 0 \leq m < n\}, \{X_{m,n}, 0 \leq m < n\} \text{ suivent la meme loi} \quad (32)$$

$$\forall n, E(|X_{0,n}|) < \infty \text{ et } E(X_{0,n}) \geq -cn \text{ pour une constante } c \quad (33)$$

alors on a :

$$X = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_{0,n}}{n} \text{ existe p et dans } L^1 \quad (34)$$

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E(X_{0,n}) = \inf_n \frac{1}{n} E(X_{0,n})$$

$$E(X) = \gamma$$

A présent, on passe à la version faible de Ligget. On supposera $l = 0$ dans (1) et les hypothèses (2) et (3) par les conditions suivantes :

$$X_{0,n} \leq X_{0,m} + X_{m,n} \quad 0 < m < n \quad (35)$$

$$\{X_{m+1,n+k+1}, k \geq 1\}, \{X_{m,n+k}, k \geq 1\} \text{ suivent la meme loi } \forall m \geq 0 \quad (36)$$

$$\forall k \geq 1 \{X_{nk,(n+1)k}, n \geq 1\} \text{ est un processus stationnaire} \quad (37)$$

alors nous avons les mêmes conclusions que le théorème de Kingman.

Lemma 2.9. *$\forall n, k$ entier positive on a : $X_{n+k} \leq X_n + \tilde{X}_k$ avec \tilde{X}_k qui suivant la même loi que X_k .*

Démonstration. Posons $X_{n+k} = \inf_{|x|=n+k} V(x)$, il suffit juste de remarquer que la position la plus à droite de l'arbre au temps $n+k$ sera inférieure ou égale à la position la plus à droite au temps k du sous arbre engendré par $X_n = \inf_{|x|=n} V(x)$ car soit la position la plus à droite au temps $n+k$ est issu du sous-arbre engendré par X_n , soit non et par définition sa position sera plus grande. On peut alors poser que $\tilde{X}_k = \inf_{|x|=k} \tilde{V}(x)$ ou \tilde{V} est la position de l'arbre engendré par X_n .

□

Démonstration du théoreme :

Grace à notre Lemme, le théoreme de ergodique de Kinsman améliorer (ref) nous dit que :

$$\frac{X_n}{n} \longrightarrow \inf_{n \geq 1} \frac{E(X_n)}{n} \quad (38)$$

Ainsi notre preuve revient à montrer que $\inf_{n \geq 1} \frac{E(X_n)}{n} = \lambda$

— Montrons que $\inf_{n \geq 1} \frac{E(X_n)}{n} \leq \lambda$

On a $\forall n \geq 1$:

$$e^{E(\inf_{|x|=n} -tV(x))} \leq E(e^{-\inf_{|x|=n} tV(x)}) \quad (Jensen)$$

$$E(-\inf_{|x|=n} tV(x)) \leq \ln(E(e^{-\inf_{|x|=n} tV(x)})) \leq \ln(E(\sum_{|x|=n} e^{-tV(x)})) \quad (max \leq somme)$$

$$\frac{1}{n} E(-\inf_{|x|=n} tV(x)) \leq \frac{1}{n} \ln(E(\sum_{|x|=n} e^{-tV(x)})) = \frac{1}{n} \ln(E(e^{tS_n + k\Psi(t)} e^{-tS_n})) \quad (Many - To - One)$$

$$\frac{1}{n} E(-\inf_{|x|=n} tV(x)) \leq \frac{1}{n} \ln(E(e^{n\psi(t)})) \leq \psi(t) \leq \inf_{t \geq 0} \frac{\psi(t)}{t}$$

$$\text{Donc } \inf_{n \geq 1} \frac{E(X_n)}{n} \leq \lambda$$

— Montrons que $\inf_{n \geq 1} \frac{E(X_n)}{n} \geq \lambda$

Soit $\epsilon > 0$, on se propose pour un entier $m \geq 1$ dépendant de ϵ d'établir :

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{jm} \inf_{|x|=jm} V(x) \leq -\inf_{s > 0} \frac{\Psi(s)}{s} + \epsilon \quad (39)$$

Soit $t > 0$ tel que :

$$\frac{\Psi(t)}{t} > \Psi'(t) > \inf_{s > 0} \frac{\Psi(s)}{s} - \epsilon \quad (40)$$

On pose : $a = \inf_{s > 0} \frac{\Psi(s)}{s} - \epsilon$. On construit un nouvel arbre de Galton-Watson T' tiré du premier T par la sélection suivante : les éléments de la première génération de l'arbre T' sont les éléments de la m -ième génération de l'arbre T tels que : $V(x) \leq -am$. De manière générale, les individus x_n de la génération n de l'arbre T' sont tel que :

— x_n appartient à la génération $(n+1)m$ de l'arbre T

— $V(x_n) - v(x_{n-1}) \leq am$.

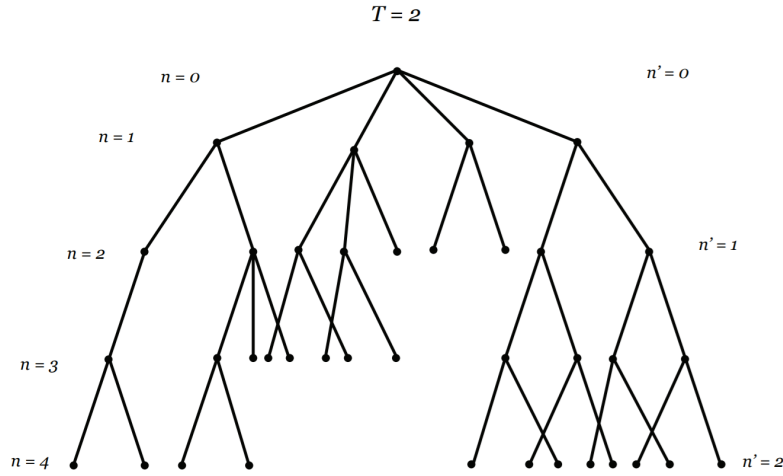


FIGURE 4 – Décomposition si $T = 2$

Posons $m(T')$ la moyenne du nombre de particule à la première génération sur l'arbre T' :

$$m(T') = E\left(\sum_{|x|=m} \mathbb{1}_{V(x) \leq -am}\right) \quad (41)$$

En appliquant many-to-one, on parvient à :

$$m(T') = E(\mathbb{1}_{S_m \leq -am} e^{tS_m + m\Psi(t)}) \quad (42)$$

Avec $\Psi'(t) < \frac{\Psi(t)}{t}$ et b fixé pris dans l'intervalle $(\Psi'(t), \frac{\Psi(t)}{t})$, on a :

$$m(T') \geq E(\mathbb{1}_{-bm \leq S_m \leq -am} e^{tS_m + m\Psi(t)}) \geq \mathbb{P}(-bm \leq S_m \leq -am) \mathbb{E}(e^{m(\psi(t) + bt)})$$

En dérivant $\Psi(t)$, on a :

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &= \frac{E(\sum_{|x|=1} -V(x) \exp(-tV(x)))}{E(\sum_{|x|=1} \exp(-tV(x)))} \\ &= -E(S_1) \end{aligned}$$

Or par construction $a < \Psi'(t) < b$, ce qui donne :

$$-b < E(S_1) < -a \quad (43)$$

En écrivant : $\mathbb{P}(-bm \leq S_m \leq -am) = \mathbb{P}(-b \leq \frac{\sum_{i=0}^m (S_i - S_{i-1})}{m} \leq -a)$ on peut appliquer la loi des grands nombres à la suite de variable aléatoire $(S_i - S_{i-1})_{i \geq 1}$ i.i.d et suivant la même loi que S_1 , on parvient à :

$$\mathbb{P}(-bm \leq S_m \leq -am) \longrightarrow 1 \text{ et } \exp([\Psi(t)] - bt)m \longrightarrow \infty, m \longrightarrow \infty \quad (44)$$

On peut choisir m aussi grand que l'on veut, on fixe alors m tel que $\zeta(T') > 1$. Ainsi notre nouvelle arbre de Galton-Watson T' devient supercritique (probabilité strictement positive de survie), on a sur l'ensemble de non-extinction :

$$\begin{aligned} \inf_{|x|=jm} V(x) \leq -ajm &= (\inf_{s>0} \frac{\Psi(s)}{s} - \epsilon)jm \\ \text{Donc } \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{jm} \inf_{|x|=jm} V(x) &\leq -\inf_{s>0} \frac{\Psi(s)}{s} + \epsilon \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \inf_{|x|=n} V(x) = \inf_{n \geq 1} \frac{E(X_n)}{n} = - \inf_{s > 0} \frac{\Psi(s)}{s}$$

3 Simulations

Dans cette partie nous allons simuler quelques processus de branchement, notons que tout nos processus seront sur un espace de temps discret. En premier lieu nous allons observer l'ordre de croissance de la population en générale, ensuite introduire un modèle avec coalescence et observer son effet sur la dynamique de la population et aussi déterminer la vitesse de convergence des position extrêmes, enfin nous allons observer un autre type de processus de branchement avec des individus de types différents .

3.1 Galton-Watson

Voici quelques simulations d'évolution de population d'un processus de Galton-Watson.

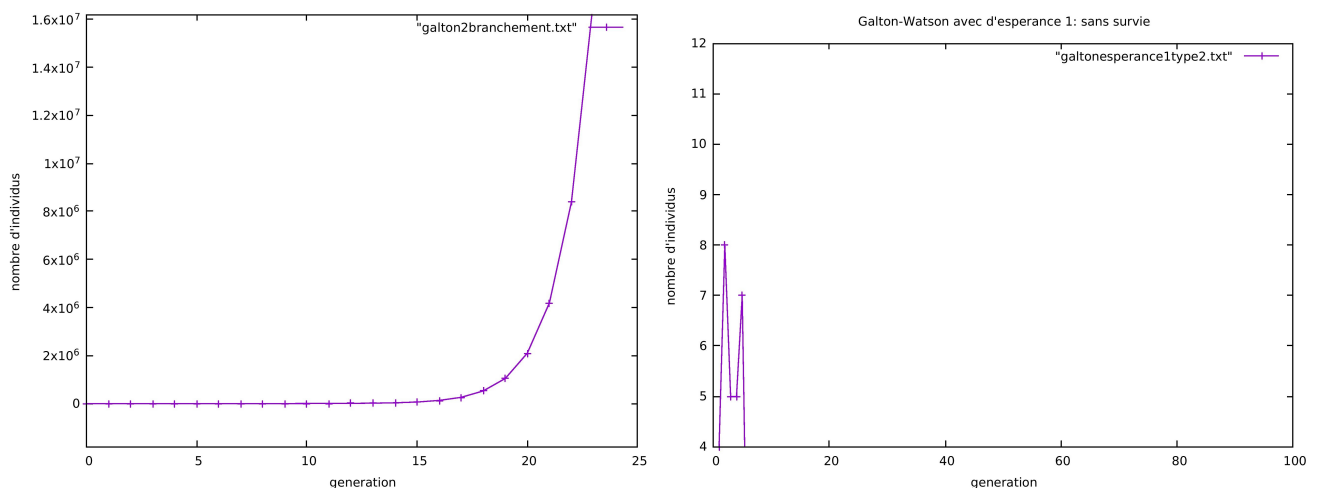


FIGURE 5 – Galton-Watson

Dans le cas de non extinction de la population la population croit très vite, une croissance de maniere exponentielle. Cependant il y a des cas ou la population s'éteint et dans ce dernier cas elle le fait aussi très vite, les individus ne dépassent généralement pas les 10 premières génération comme on le voit sur la figure 2.

On observe aussi dans le cas super-critique ou $\mathbb{E}(N) = 1$ que la population croît aussi de manière exponentielle cependant beaucoup moins vite que le cas où $\mathbb{E}(N) > 1$.

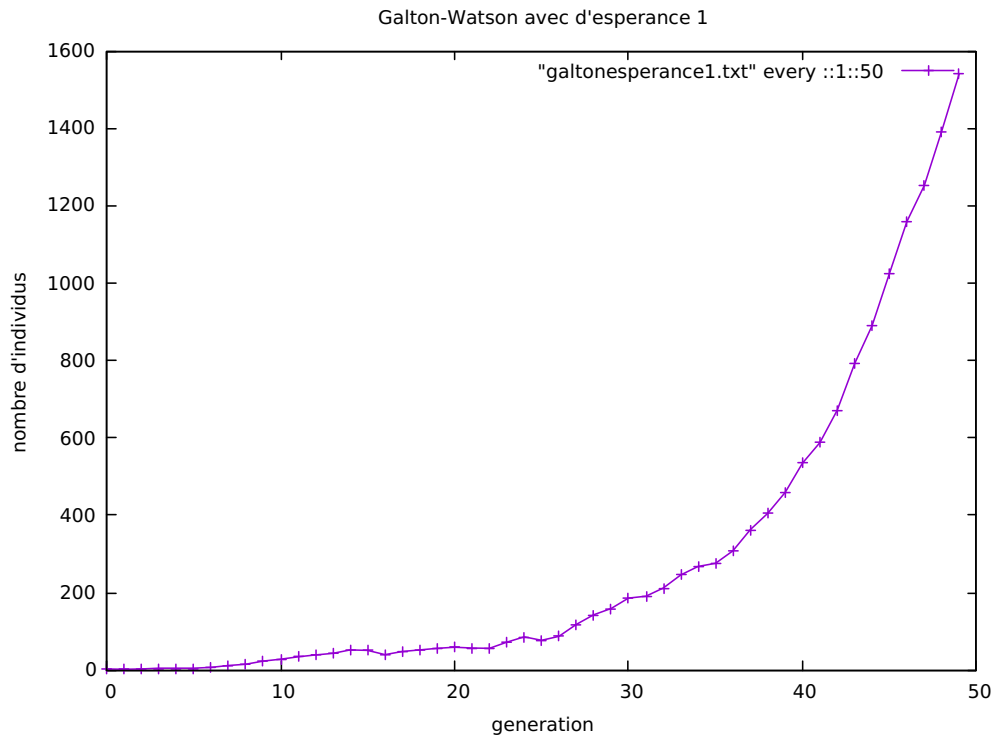


FIGURE 6 – Galton-Watson

3.2 Processus avec coalescence

Dans cette partie nous étudierons un processus avec coalescence. La dynamique de notre processus est la suivante :

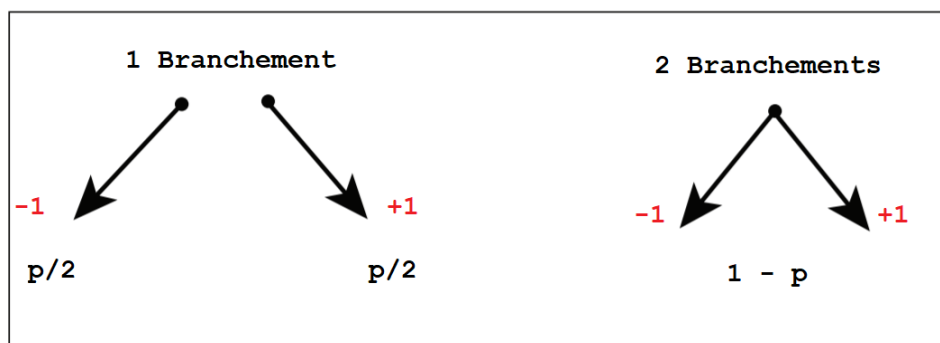


FIGURE 7 – Galton-Watson

Observons d'abord le cas sans coalescence avec probabilités uniformes :

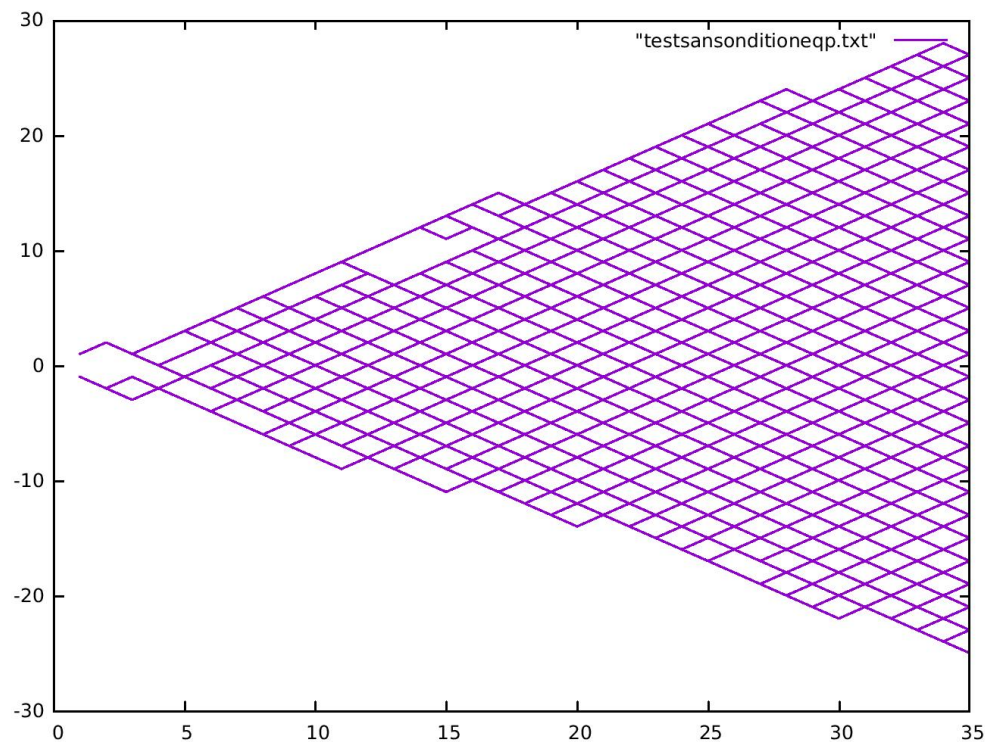


FIGURE 8 – Légende de la figure

On remarque alors que notre processus est symétrique ce qui est cohérent avec les résultats théoriques car nous avons montré que la vitesse de convergence des deux extrêmes était identique. La probabilité d'avoir 2 branchements étant pas négligeable dans ce cas entraîne une croissance exponentielle de la population nous empêche de simuler sur des générations plus grandes. Nous allons alors diminuer la probabilité d'avoir 2 enfants pour pouvoir simuler sur un temps plus long.

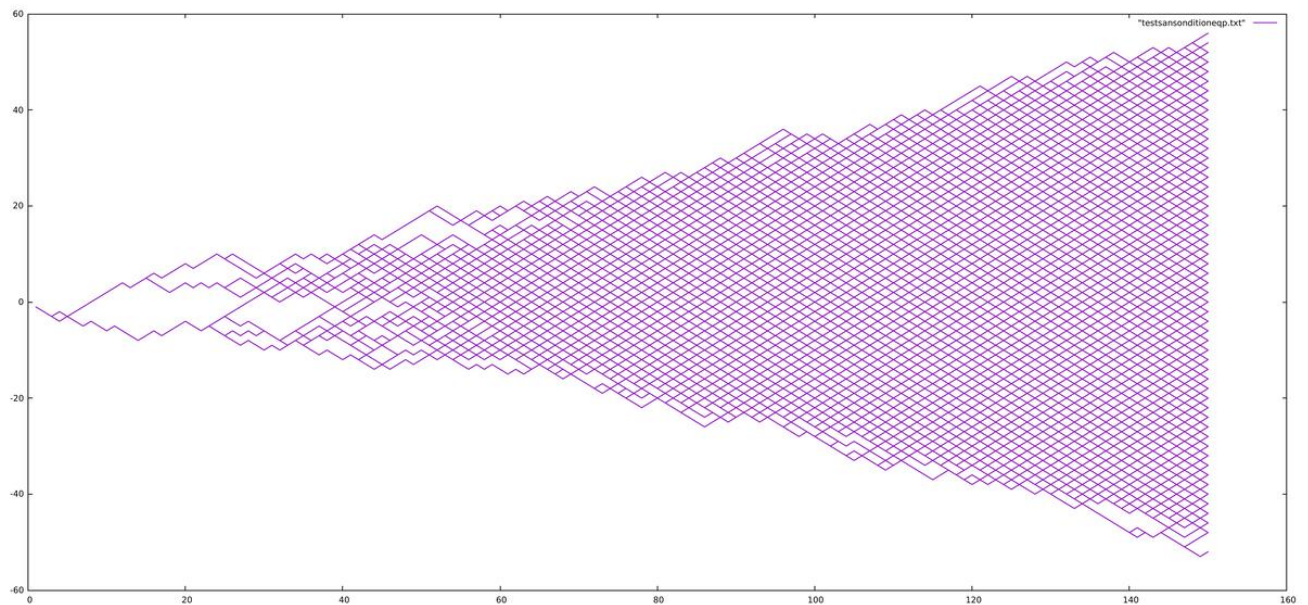


FIGURE 9 – 1 branchelent

On remarque la présence de beaucoup de fluctuation au début, mais cette dernière disparaît et l'évolution semble se stabiliser quand la population augmente. Cependant notons que c'est seulement visuel car l'espace étant très limité y 'a beaucoup de particule sur chaque position.

Observons maintenant le cas avec coalescence et équiprobabilité :

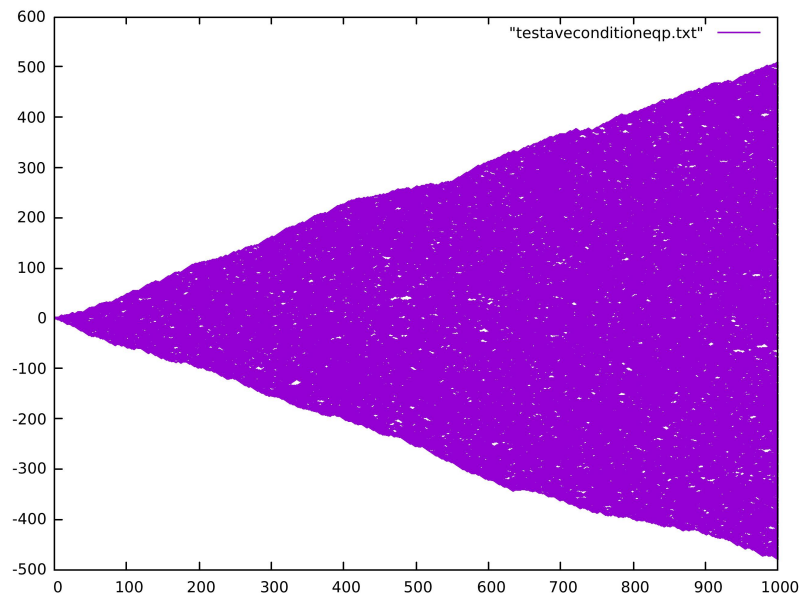


FIGURE 10 – 1 branchelent

On voit alors une figure presque parfaitement symétrique et compacte, il y 'a juste quelques points dans la figure ce qui s'explique par la forte densité de la population.

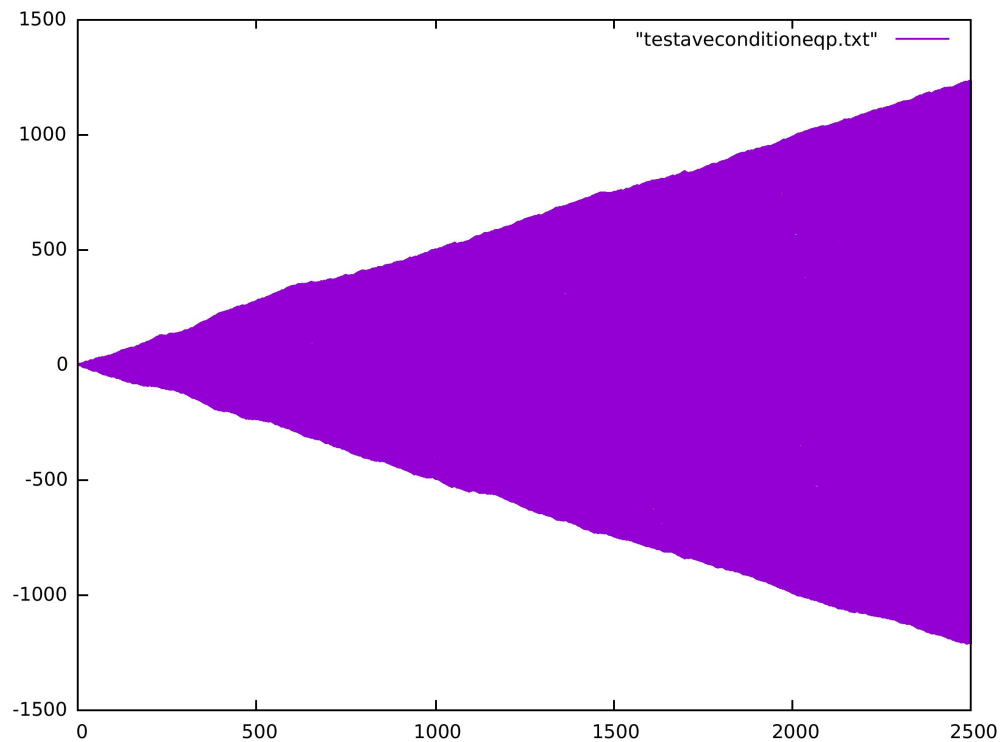


FIGURE 11 – 1 branchelent

On remarque en allant plus le loin dans le temps qu'on retrouve plus les irrégularité, et on observe presque un triangle isocèle. De plus on commence a voir l'allure des extrêmes qui à l'air d'être linéaire.

Cependant essayons de voir si on augmente la probabilité d'avoir qu'un seul branchement si on va observer plus d'irrégularité.

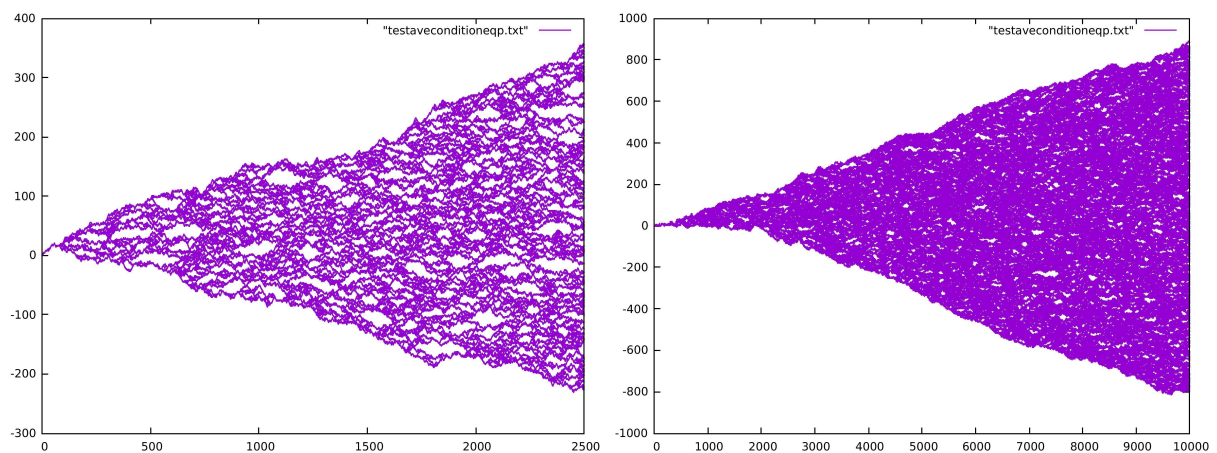


FIGURE 12 – 1 branchelent

Comme on s'y attendait la trajectoire est complètement irrégulière, cependant on remarque qu'elle se stabilise légèrement avec le temps ce qui nous laisse une chance d'obtenir une vitesse des extrêmes linéaire comme dans les autres précédents.

Nous pouvons alors rentrer dans le vif du sujet et essayer d'approximer la vitesse des extrêmes (la position plus à gauche ou droite).

Posons alors $v = \frac{\inf_{|x|=n} V(x)}{n}$ qui sera la vitesse (dx/dt).

Rappelons que nous avons démontré dans la première partie que cette vitesse convergeait vers l'inf d'une certaine fonction dans le cas général. Cependant nous aurons même pas besoin d'invoquer ce théorème pour la déterminer grâce à la particularité de notre modèle. En effet comme on le voit dans l'image suivante : $\inf_{|x|=n} V(x) = \inf_{|x|=n-1} V(x) \pm 1$

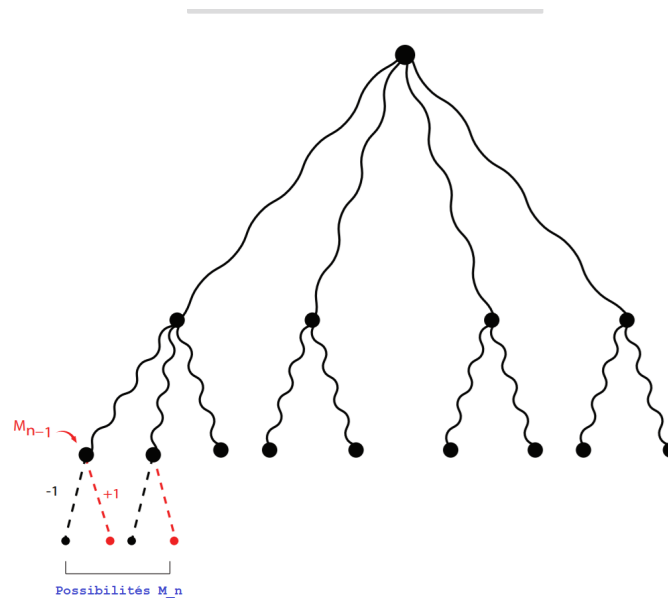


FIGURE 13 – Evolution du min dans le modèle

On déduit alors le lemme suivant :

Lemma 3.1. *Soit $M_n = \inf_{|x|=n} V(x)$, si le processus suit la dynamique suivante :*

— *proba 1 Branchement en ± 1 : $p/2$*

— *proba 2 branchement en $+1$ et -1 : $1 - p$*

alors $(M_n - M_{n-1}, n \geq 1)$ est une suite de variable aléatoire iid de loi :

$$\mathbb{P}(M_n = M_{n-1} - 1) = p/2 \quad \mathbb{P}(M_n = M_{n-1} + 1) = 1 - p/2 \quad (45)$$

$$\frac{M_n}{n} \longrightarrow 1 - p \text{ ps} \quad (46)$$

Démonstration. La probabilité sont triviales. Pour la convergence, posons :

$$\frac{M_n}{n} = \frac{\sum_{k=1}^n M_k - M_{k-1}}{n} \quad (47)$$

$$\frac{M_n}{n} \longrightarrow \mathbb{E}(M_k - M_{k-1}) = 1 - p \text{ par la LFGN} \quad (48)$$

□

On a ainsi dans notre notre modèle avec coalescences si $p = 1/2$, alors $v = 1/2$.

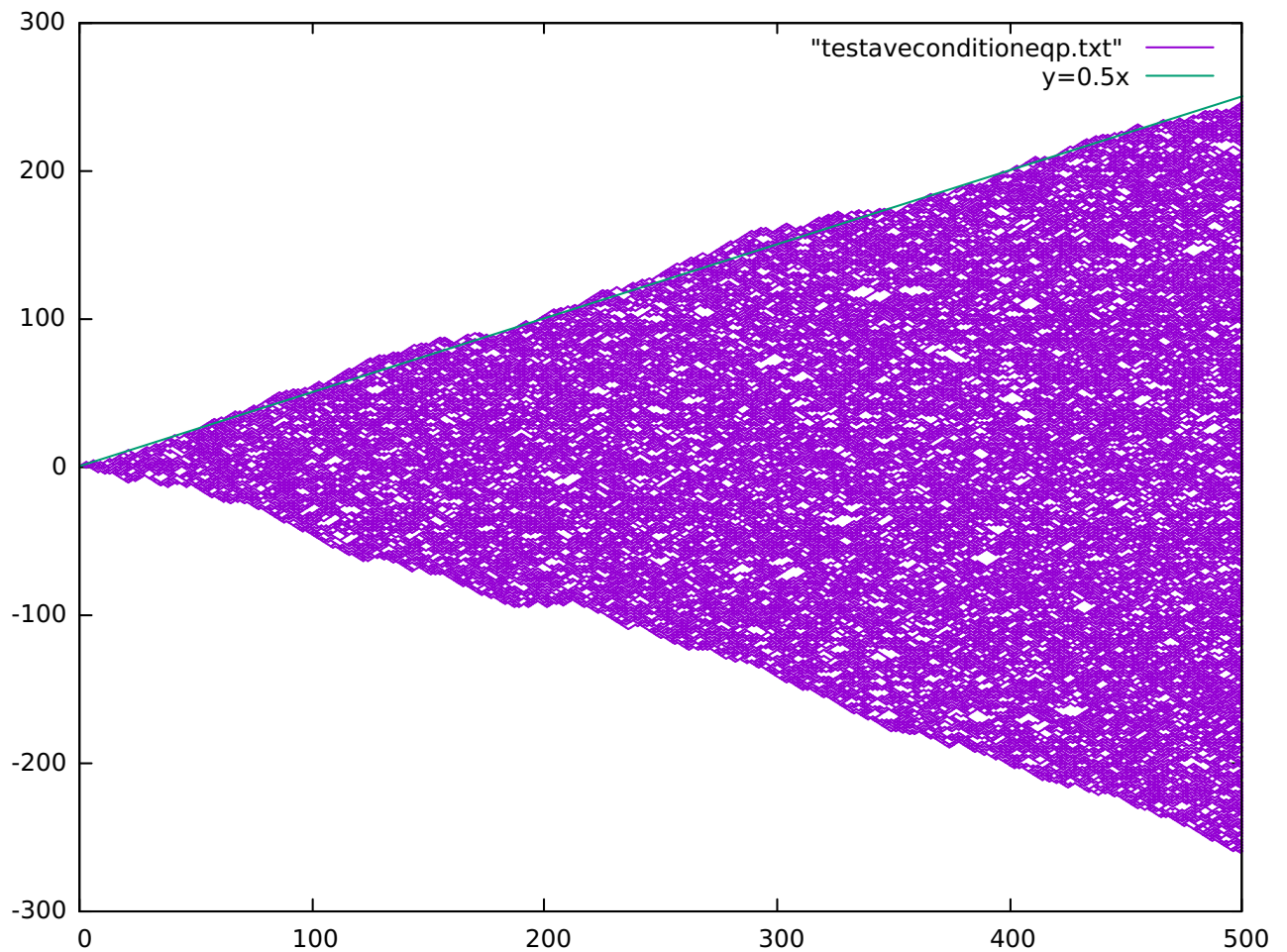


FIGURE 14 – 1 branchelent

On conclut alors que la droite approche parfaitement la position la plus à gauche.

3.3 Processus avec individus de type différents

Dans tout ce qui précède nous avons observé des individus de même type, dans cette partie nous allons introduire un nouveau type de processus où chaque individu a un trait et la descendance et la transmission du trait dépendent du trait.

Le modèle qu'on va étudier suit la dynamique suivante :

Il y a 3 types d'individus :

- Juvéniles
- Adolescents
- Reproducteur

Il y a 3 types d'évolution :

- Un individu juvénile peut devenir adolescent avec probabilité P_j
- Un individu adolescent peut devenir reproducteur avec probabilité P_a
- Un individu reproducteur peut engendrer une descendance avec probabilité P_r

Le nombre de descendance suit une loi de Poisson.

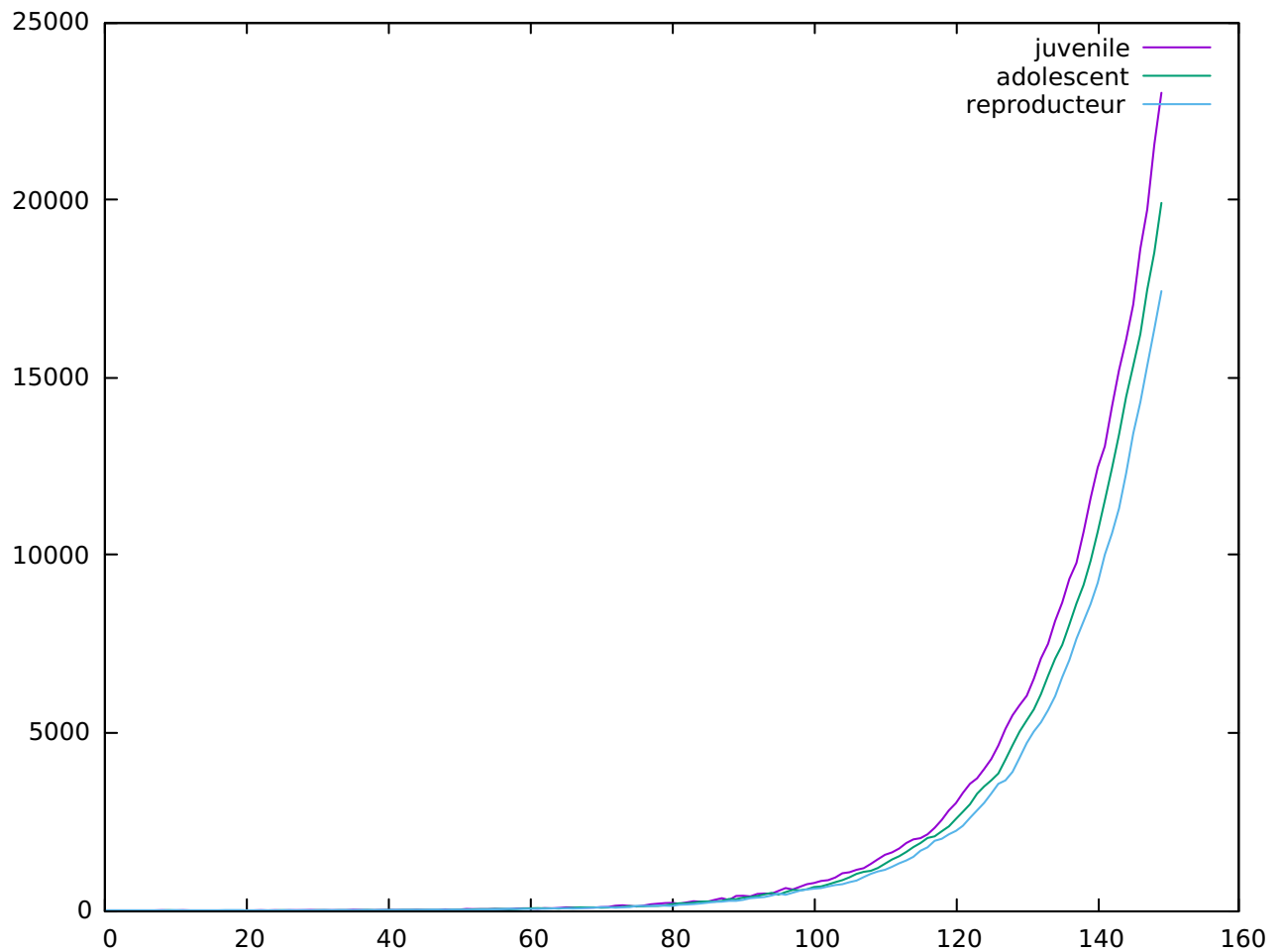


FIGURE 15

Une première simulation avec équiprobabilité nous montre que la population croît de manière exponentielle comme on s’y attendait, de plus on voit qu’asymptotiquement que le nombre de reproducteur est légèrement en dessous du nombre d’adolescent qui elle est en dessous du nombre de juvéniles.

Changeons les probabilités pour voir si la dynamique changera.

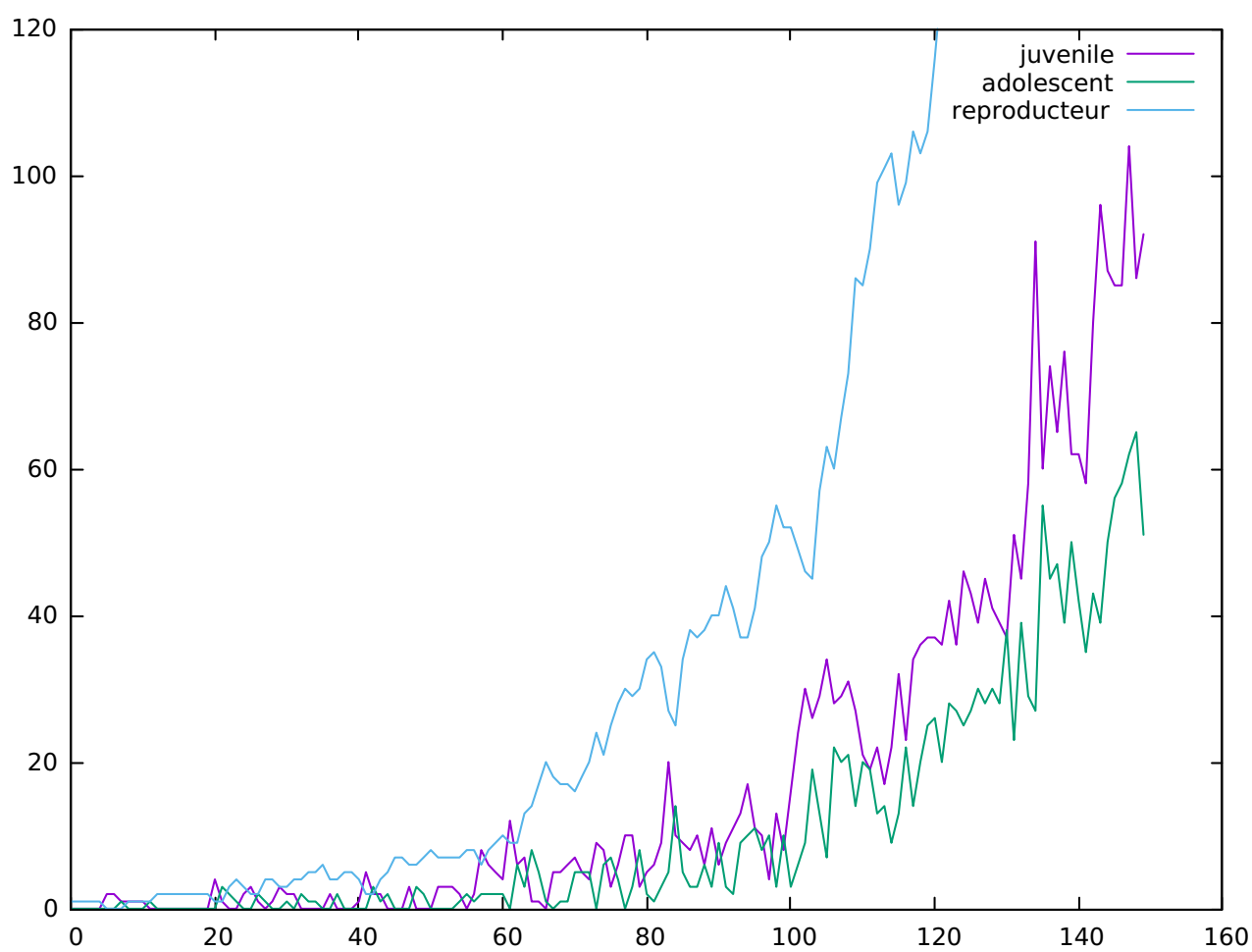


FIGURE 16

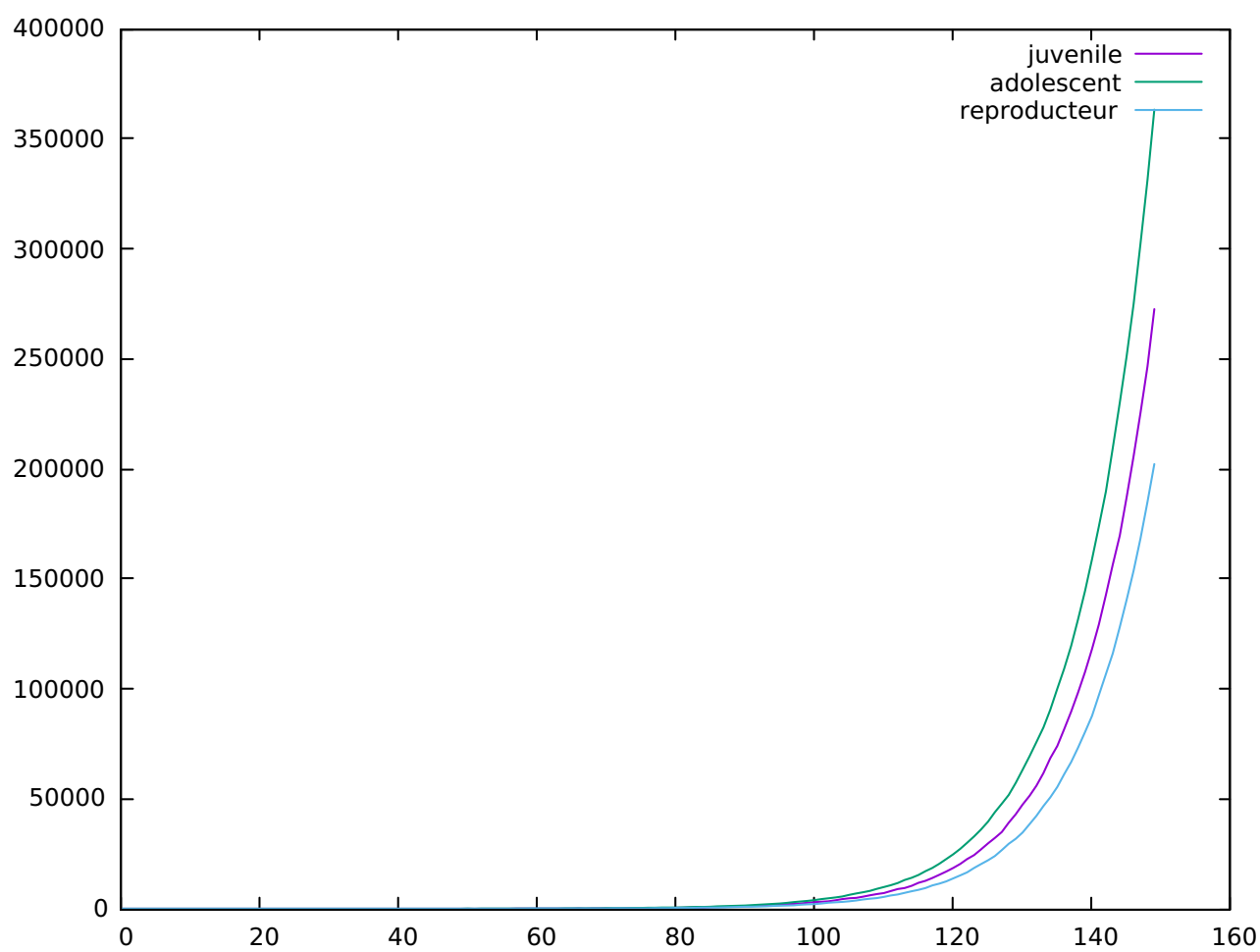


FIGURE 17

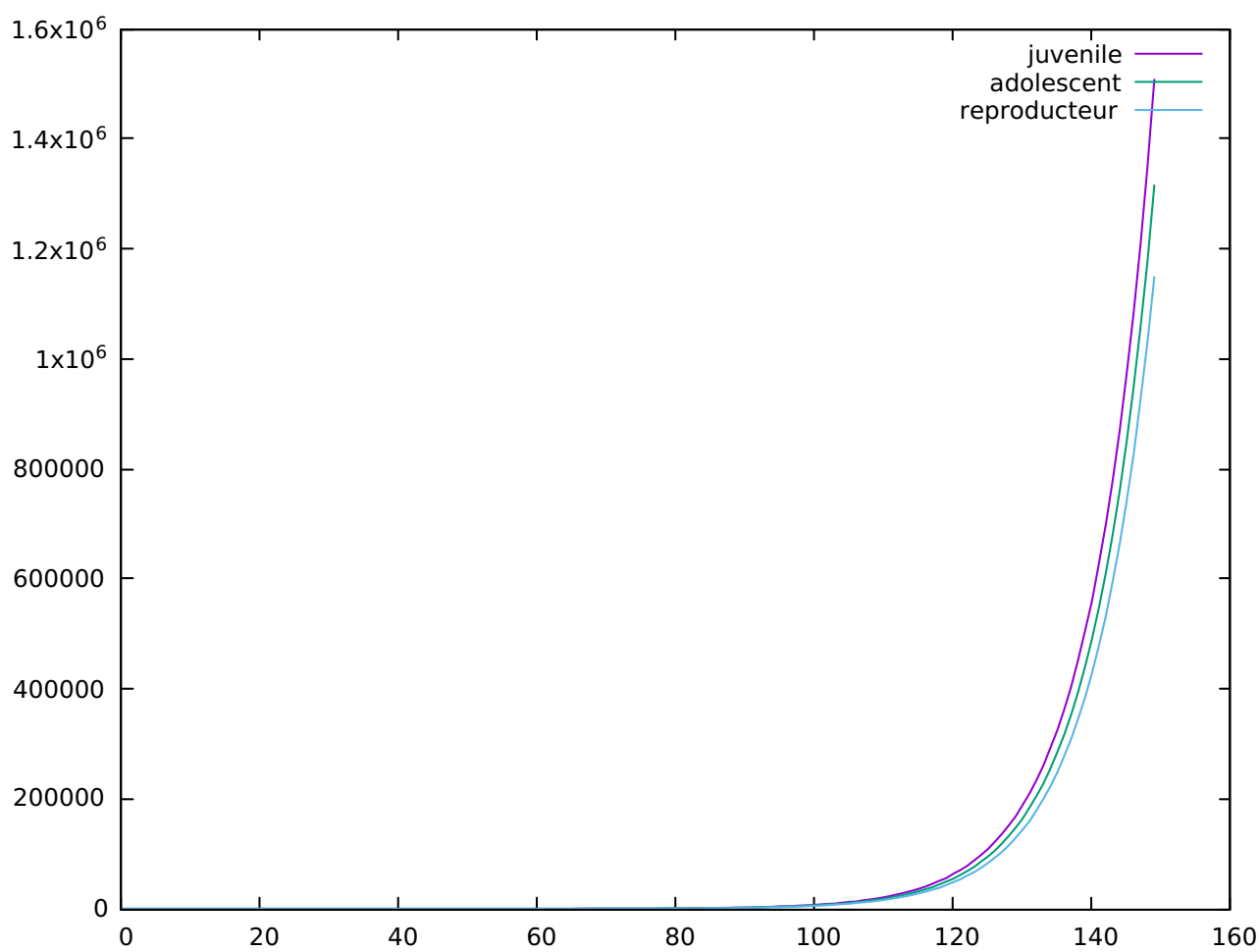


FIGURE 18