TD1 : Probabilités, rappels sur les notions de base

1 Une tribu est-elle stable par intersections dénombrables ?

Par stabilité de la tribu par union dénombrable et par passage au complémentaire :

$$\forall (A_n) \in \mathcal{F}^{\mathbf{N}}, \qquad \bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n = \overline{\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \overline{A_n}} \in \mathcal{F}$$

2 On répartit uniformément n boules dans d tiroirs. Quelle est la probabilité que tous les tiroirs soient occupés ?

$\Omega = \{1\dots d\}^n \qquad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) \qquad \mathbb{P} =$ équiprobabilité

Première solution : combinatoire

$A = \{$fonctions $\{1\dots n\} \to \{1\dots d\}$ surjectives$\}$

$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{d}(-1)^{d-k}\binom{d}{k}k^n}{d^n}$

Deuxième solution : probas

$A_j =$"le tiroir j est vide".

$A = \bigcap_{j=1}^{d} \complement_{A_j} = \complement_{\bigcup_{j=1}^{d} A_j}$

Formule du crible de Poincaré : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{d} A_j\right) = \sum_{r=1}^{d}(-1)^{r-1}\sum_{1\leq j_1<\dots<j_n\leq d}\mathbb{P}(A_{j_1}\cap\dots\cap A_{j_r})$Moyen mnémotechnique

Remarque. On peut imaginer une preuve utilisant la loi multinomial.

3 Exercice 3 : Soit n boules dans $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'événements, montrer que n boules dans $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$ si et seulement si $\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(A\cap A_n) = +\infty$ pour tout événement A de probabilité strictement positive.

Montrons $\Rightarrow$ par contraposée. On suppose qu'il existe un événement A de probabilité strictement positive telle que $\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(A\cap A_n) < +\infty$. Par Borel-Cantelli 1 : $\mathbb{P}(\limsup A\cap A_n) = 0$, or $\mathbb{P}(\limsup A\cap A_n) = \mathbb{P}(A\cap\limsup A_n)$, donc cette dernière quantité est nulle. Par l'absurde, si $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$ alors $\mathbb{P}(A\cap\limsup A_n) = \mathbb{P}(A) > 0$, ce qui est contradictoire. En conclusion, $\mathbb{P}(\limsup A_n) < 1$.