

L'essentiel pour comprendre les TDs (récap)

Hadrien Bigo-Balland - version 2026



This work is licensed under CC BY-NC-SA 4.0.

Base

- $P(A) \in [0, 1]$; $P(\Omega) = 1$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A) \approx \frac{\text{succès}}{\text{essais}}$ (fréquence)
- Cas équiprobables : $P(A) = \frac{\text{cas favorables}}{\text{cas totaux}}$

Opérations

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$
- Incompatibles : $P(A \cap B) = 0$
- Indépendants : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ou $P_A(B) = P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$

Probabilités conditionnelles

- $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$; $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- Bayes : $P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}$

Probabilités totales

- Si B_1, \dots, B_n partition : $P(A) = \text{somme des } P(A \cap B_i) = \text{somme des } P_{B_i}(A)P(B_i)$

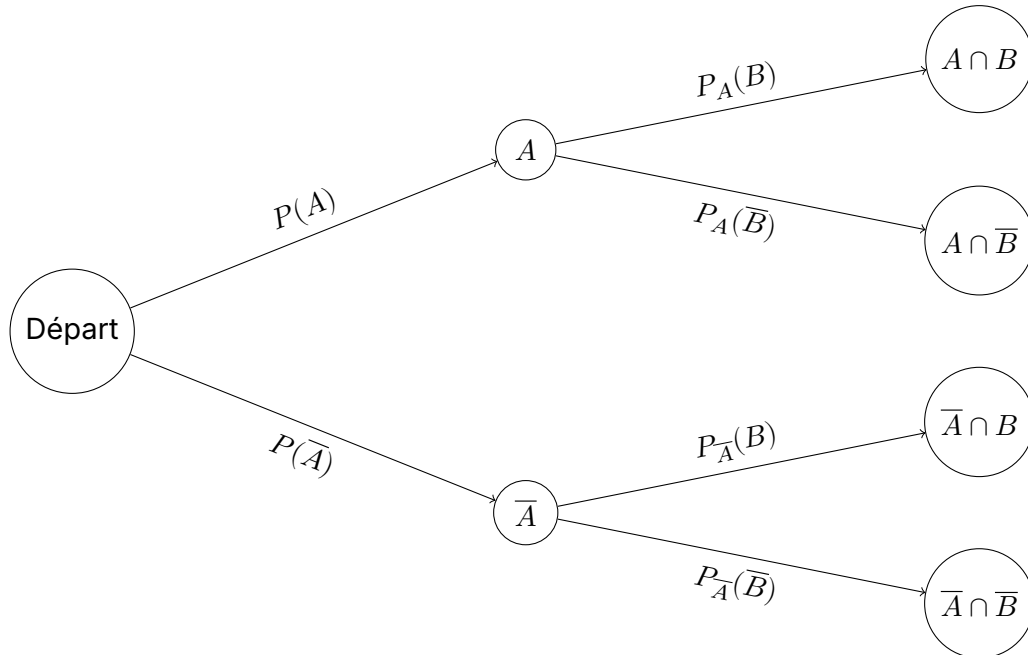
Tableaux de probabilités (de contingence)

- **Chaque case** = $P(A_i \cap B_j)$ (conjointe)
- **Somme ligne** = $P(A_i)$; **Somme colonne** = $P(B_j)$ (marginales)
- Probabilité conditionnelle : $P_{A_i}(B_j) = \frac{P(A_i \cap B_j)}{P(A_i)}$

	A	\bar{A}	Total
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
\bar{B}	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
Total	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1

Arbres de probabilités

- Produit le long du chemin : $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$
- Somme des chemins pour les unions



Lois de probabilité

Discrètes

Bernoulli $X \sim \mathcal{B}(p)$

- $P(X = 1) = p$; $P(X = 0) = 1 - p$
- $\mathbb{E}(X) = p$; $\text{Var}(X) = p(1 - p)$

Binomiale $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

- $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$
- $\mathbb{E}(X) = np$; $\text{Var}(X) = np(1 - p)$

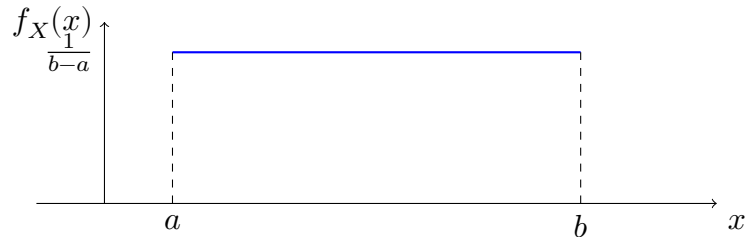
Poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

- $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$
- $\mathbb{E}(X) = \text{Var}(X) = \lambda$

Continues

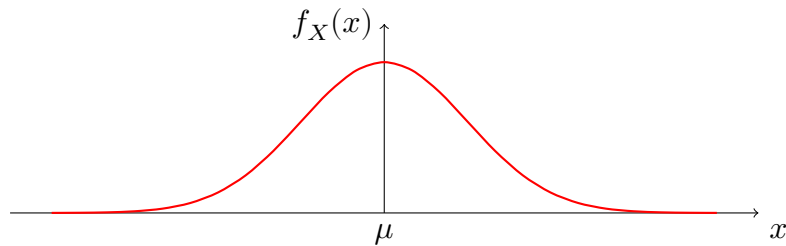
Uniforme $X \sim \mathcal{U}(a, b)$

- $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ sur $[a, b]$
- $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$; $\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$



Normale $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

- $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$
- $\mathbb{E}(X) = \mu$; $\text{Var}(X) = \sigma^2$



Tests statistiques

Test du χ^2 d'indépendance

- Pour tester l'indépendance de deux variables aléatoires.
- Hypothèses :
 - H_0 : variables indépendantes
 - H_1 : variables liées
- Effectifs attendus : $E_{ij} = \frac{\text{total ligne}_i \times \text{total colonne}_j}{\text{total général}}$
- Statistique : $\chi^2 = \sum \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$
- Degrés de liberté : $ddl = (\text{nb lignes} - 1)(\text{nb colonnes} - 1)$
- Décision : comparer à χ^2 critique (table) au seuil α (souvent 5%)

Test de Student (moyenne) :

- Pour comparer la moyenne μ d'un échantillon à une valeur μ_0 de référence donnée.
- Hypothèses : $H_0 : \mu = \mu_0$; $H_1 : \mu \neq \mu_0$
- Statistique : $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$
- ddl = $n - 1$
- Décision : comparer $|t|$ à la valeur critique $t_{\alpha/2}$ de la table de Student