

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И КОНСТРУКТИВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ВОЛНОВЫХ ПЕРЕДАЧАХ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ТЕЛАМИ КАЧЕНИЯ

Б.С. Янгулов

Томский политехнический университет

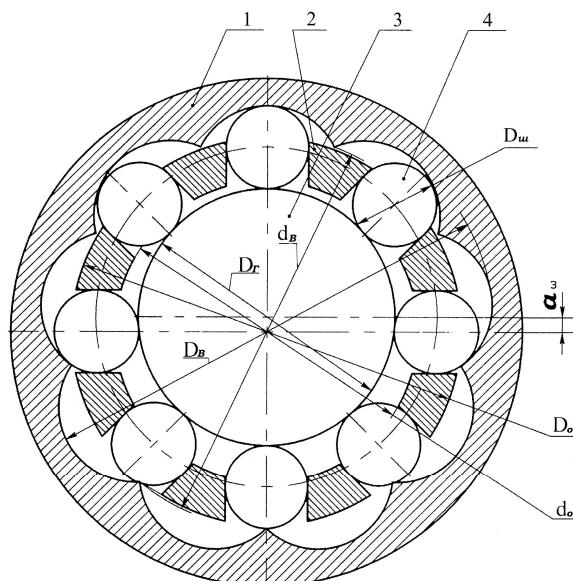
E-mail: dt�@lсg.tpu.ru

Представлена методика расчёта геометрических и конструктивных соотношений волновых передач с промежуточными телами качения. Предложена методика геометрического расчёта передач с адаптивным генератором и определено влияние погрешностей изготовления деталей на выходную функцию.

Создание волновых передач с промежуточными телами качения (ВППТК), в которых создается упругий натяг в зонах контакта тел качения (далее по тексту – шарики) с поверхностями генератора, обоймы и зубьями жесткого колеса [1–3], позволяет:

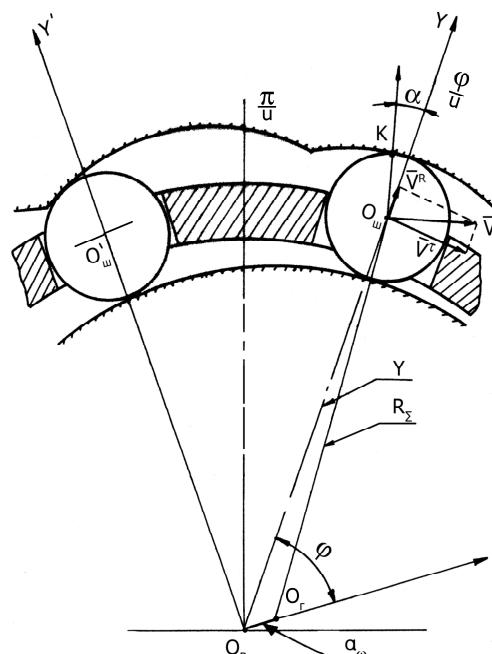
- практически устраниить мёртвый ход передач;
- повысить точность передач;
- обеспечить работоспособность передач на длительный ресурс.

В данных передачах генератор, наружная поверхность которого выполнена конусной под действием упругих элементов в процессе работы, совершают радиальные и осевые перемещения, обусловленные зазорами в зонах контакта промежуточных тел качения с пазами обоймы и зубьями жесткого колеса и погрешностями изготовления этих деталей. Очевидно, что необходимо проведение дополнительных исследований по определению изменений геометрических и конструктивных соотношений в ВППТК с упругим натягом в зацеплении.



**Рис. 1.** Волновая передача с промежуточными телами качения:  $D_w$  – диаметр шарика;  $D_r$  – диаметр впадин зубчатого венца;  $d_b$  – диаметр выступов зубчатого венца;  $D_o$  – наружный диаметр обоймы;  $d_o$  – внутренний диаметр обоймы;  $D_r$  – диаметр генератора;  $a_\omega$  – эксцентриситет генератора

Основой рассматриваемых передач является конструкция, представленная на рис. 1. Генератор волн, эксцентрик – 3, вращаясь, вызывает радиальные перемещения шариков – 4 в пазах обоймы – 2. Шарики – 4 контактируют с поверхностями зубьев жесткого колеса – 1. Разность числа шариков и зубьев жесткого колеса обычно при эксцентриковом генераторе, равная единице, обеспечивает редукцию движения выходного звена передачи. Выходным звеном могут быть обойма с шариками или жесткое колесо при фиксации одного из них относительно корпуса. Геометрические соотношения в данной передаче описываются с использованием заменяющего аксиального кривошипно-шатунного механизма (рис. 2). Ведущим кривошипом является эксцентрик генератора. Длина ведущего эксцентрика равна величине эксцентриситета  $a_\omega$ . Линия, соединяющая центры шариков  $O_w$  и эксцентрика  $O_r$ , заменяет шатун. Назовём длину этой линии приведённым радиусом генератора  $R_\Sigma$ , очевидно, что линия проходит через точку контакта шарика с генератором, тогда  $R_\Sigma = 0,5(D_r + D_w)$ , где  $D_r$ ,  $D_w$  – диаметры генератора и шарика.



**Рис. 2.** Схема кривошипно-шатунного механизма, заменяющего ВППТК

Пазы обоймы, направляющие для шариков, выполнены радиальными, поэтому считаем, что центры шариков движутся по оси пазов. Обозначив  $Y$  расстояние от центра шарика  $O_{ш}$  до центра зубчатого венца жесткого колеса  $O_b$ , рис. 2, получаем выражение

$$Y = a_\omega \cos \varphi + \sqrt{R_\Sigma^2 - a_\omega^2 \sin^2 \varphi}, \quad (1)$$

где  $\varphi$  – текущий угол поворота входного звена.

Соотношение (1) определяет положение центра шарика. Для получения уравнений профиля зубьев жесткого колеса перейдём в систему координат, жестко связанную с вращающимся венцом. Венец вращается в  $u$  раз медленнее генератора, где  $u$  – число зубьев венца и передаточное число передачи (если  $Z$  – число шариков, то  $u=Z+1$ ), и переход осуществляется поворотом системы координат на угол  $\varphi/u$ . В новой системе координат центр шарика  $O_{ш}$  опишет центровой профиль. Профиль зуба описывает точка К на шарике. Отрезок  $O_{ш}K$  перпендикулярен касательной к профилю зуба, и угол  $\alpha$  является углом передачи движения профилю. Чтобы его определить, учтём, что скорость движения центра шарика  $V$  относительно венца имеет две составляющие: радиальную  $V^r$ , определить которую можно, продифференцировав (1) по  $\varphi$  с учётом того, что её производная по времени есть постоянная угловая скорость  $\omega$  вращения входного звена

$$V^r = -\frac{a_\omega \sin \varphi}{\sqrt{R_\Sigma^2 - a_\omega^2 \sin^2 \varphi}}$$

и тангенциальная составляющая  $V^\tau$ , возникающая из-за вращения венца жесткого колеса и равная  $Y\omega/u$ . Поскольку скорость шарика направлена по касательной к профилю, то  $\alpha$  определится следующим выражением

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V^r}{V^\tau} = \frac{u a_\omega \sin \varphi}{\sqrt{R_\Sigma^2 - a_\omega^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Параметрические уравнения профиля зуба

$$X_n = Y \sin \frac{\varphi}{u} + 0,5 D_{ш} \sin \left( \alpha + \frac{\varphi}{u} \right); \quad (2)$$

$$Y_n = Y \cos \frac{\varphi}{u} + 0,5 D_{ш} \cos \left( \alpha + \frac{\varphi}{u} \right). \quad (3)$$

Важным кинематическим параметром передачи является коэффициент перекрытия, длина рабочего участка линии зацепления. Зацепление шарика с профилем кончается в точке пересечения его с соседним профилем. Координаты точки пересечения двух соседних профилей определяются из трансцендентного уравнения

$$X_n = \operatorname{tg} \frac{\pi}{u} Y_n. \quad (4)$$

Угол  $\varphi_1$  соответствует концу линии зацепления и определяется из уравнения (4). Начало зацепления определяется из известного условия – движение не передается, если угол передачи движения

меньше угла трения. Угол  $\varphi_0$ , соответствующий началу зацепления, находится из соотношения (1)

$$\varphi_0 = \arcsin \left( \frac{f R_\Sigma}{a_\omega \sqrt{u^2 + f^2}} \right),$$

где  $f$  – приведённый коэффициент трения.

Значение  $a_\omega$  в [4] рекомендуется принимать равным  $0,25 D_{ш}$ , что принимается и для данных передач. Для зубчатого венца жесткого колеса диаметр выступов  $d_b$  (рис. 1) определяется из уравнений (2) и (3), при  $\varphi=\varphi_1$ . Диаметр окружности впадин находится из простого соотношения

$$D_b = D_r + 2(a_\omega + D_{ш}).$$

Диаметры обоймы ( $D_0$  – наружный и  $d_0$  – внутренний), выбираются из условия обеспечения контакта генератора с шариками в начале и в конце зацепления, соответственно:

$$D_0 \geq 2\sqrt{Y^2(\varphi_0) + 0,25 D_{ш}^2}; \\ d_0 \leq 2\sqrt{Y^2(\varphi_1) + 0,25 D_{ш}^2}.$$

При этом должны быть выполнены условия, чтобы наружный диаметр обоймы был меньше диаметра выступов зубчатого венца жесткого колеса, а наружный диаметр эксцентрика не касался внутреннего диаметра обоймы, т. е.

$$D_0 \leq d_b; \quad d_0 \geq D_r + 2a_\omega.$$

Полученные выше соотношения относятся к идеальной ВППТК. Далее рассмотрим изменения в работе передачи, обусловленные отклонениями параметров от идеально точных. При реальном проектировании механизма необходимо точно знать круг параметров, значения которых могут отклоняться от заданных, диапазоны этих отклонений, возможность управлять ими, а также определить чувствительность выходной функции к отклонениям, входящих в неё параметров.

В линейной постановке задача определения чувствительности обобщенной выходной функции  $Y(X_1, \dots, X_n)$  решается с помощью известной [5] зависимости

$$Y(X_1 + \Delta X_1, \dots, X_n + \Delta X_N) = \\ = Y(X_1, \dots, X_N) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial Y(X_1, \dots, X_n)}{\partial X_i} \Delta X_i,$$

где  $X_1, \dots, X_n$  – значения параметров;  $\Delta X_1, \dots, \Delta X_n$  – отклонения параметров.

Выходной функцией передачи является функция  $Y$ , определяемая из (1). Чувствительность  $Y$  к отклонениям  $a_\omega$  и  $R_\Sigma$  определим как частные производные по этим параметрам

$$\frac{\partial Y}{\partial a_\omega} = \cos \varphi - \frac{a_\omega \sin^2 \varphi}{\sqrt{R_\Sigma^2 - a_\omega^2 \sin^2 \varphi}}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial R_\Sigma} = \frac{R_\Sigma}{\sqrt{R_\Sigma^2 - a_\omega^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (6)$$

Сложнее определить отклонения, связанные с несоосностью генератора, обоймы и зубчатого венца жесткого колеса. В работе [6] разработана конструкция прецизионного редуктора. Предложенная конструкция редуктора состоит из трёх ступеней, выполненная модульным построением кинематической цепи. Под модулем понимается унифицированная ВППТК, при этом каждая предыдущая передача размещена внутри последующей. Входная передача размещена внутри второй, обе они внутри третьей ступени. Выходные звенья первой и второй ступени редуктора являются входными звеньями второй и третьей соответственно без промежуточных звеньев (валов, муфт и т. п.). Такое построение конструкции редуктора обеспечивает максимально рациональное заполнение объёма и минимальные габариты редуктора, которые практически определяются габаритами выходной ступени. Выходными звеньями передач являются жесткие колеса, обоймы крепятся к корпусу. Жесткие колеса установлены в специальных шариковых опорах, позволяющих регулировать положение центра зубчатого венца. Поэтому задаётся только отклонениями от соосности генератора.

Запишем функцию положения для передачи, в которой центр вращения генератора  $O_g$  смещён относительно центра зубчатого венца  $O_b$  (рис. 3) на величину, определяемую расстоянием  $l$  и углом  $\theta$ , при условии, что обойма и зубчатый венец – соосны

$$Y = (a_\omega \cos \varphi + l \cos \theta) + \sqrt{R_\Sigma^2 - (a_\omega \sin \varphi + l \sin \theta)^2}.$$

Дифференцируя по  $l$ , найдём чувствительность функции положения к несоосности

$$\frac{\partial Y}{\partial l} = \cos \theta - \frac{a_\omega \sin \varphi \sin \theta}{\sqrt{R_\Sigma^2 a_\omega^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (7)$$

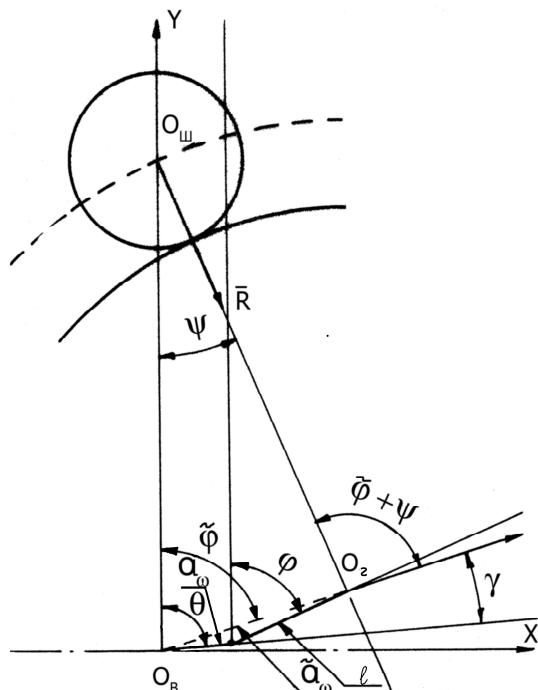


Рис. 3. Схема ВППТК с адаптивным генератором

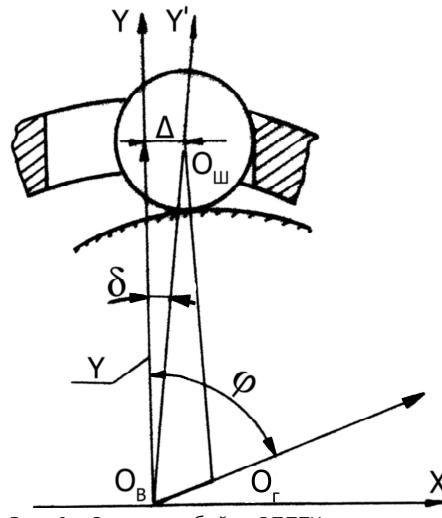


Рис. 4. Зазоры в обойме ВППТК

Учитывая смещение центра шарика  $O_{sh}$  от оси паза обоймы, из-за наличия зазора  $\Delta$ , как показано на рис. 4, можно записать

$$Y = [(a_\omega \cos \varphi + \sqrt{R_\Sigma^2 - a_\omega^2 \sin^2 \varphi})^2 + \Delta^2]^{0.5} = \sqrt{Y_0^2 + \Delta^2}.$$

Линеаризация по  $\Delta$  дает

$$Y = Y_0 + \frac{a_\omega \sin \varphi}{\sqrt{R_\Sigma^2 - a_\omega^2 \sin^2 \varphi}} \Delta + \frac{\Delta^2}{Y_0}. \quad (8)$$

Чтобы центр шарика  $O_{sh}$  попал на теоретический профиль, выражение для  $Y$  с учётом того, что из-за ухода  $O_{sh}$  с оси паза обоймы угол поворота входного звена изменился и равен  $\varphi - \delta$  (рис. 4) должно выглядеть так

$$Y = Y_0 - \frac{\partial Y_0}{\partial \varphi} \frac{\Delta}{Y_0}.$$

Используя (1), приводим к виду

$$Y = Y_0 + \frac{a_\omega \sin \varphi}{\sqrt{R_\Sigma^2 - a_\omega^2 \sin^2 \varphi}} \Delta. \quad (9)$$

Сравнивая (8) и (9), можно отметить, что погрешность в функции положения из-за наличия зазора в пазах обоймы есть величина 2-го порядка малости относительно величины зазора и ею можно пренебречь.

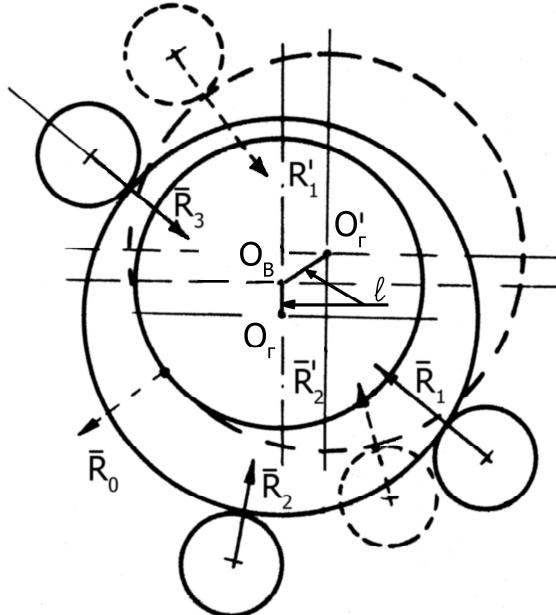
В передачах [1–3] применены адаптивные генераторы с «плавающими» осями и с переменными радиусами генератора. Такой генератор фиксируется относительно зубчатого венца жесткого колеса в контакте с шариками, которых должно быть три – по числу свободных параметров. Для определения свободных параметров, т. е. нахождения положения адаптивного генератора, нужно выполнить равенство для любых трёх шариков, которые одновременно находятся в контакте с зубчатым венцом и генератором,

$$Y + \frac{\partial Y}{\partial R_\Sigma} \Delta R_\Sigma + \frac{\partial Y}{\partial l} l + \frac{\partial Y}{\partial a_\omega} \Delta a_\omega = Y + \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \Delta \varphi \quad (10)$$

и следует выполнить неравенство в остальных теоретически возможных зацеплениях

$$Y + \frac{\partial Y}{\partial R_\Sigma} \Delta R_\Sigma + \frac{\partial Y}{\partial l} l + \frac{\partial Y}{\partial a_\omega} \Delta a_\omega \leq Y + \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \Delta \varphi, \quad (11)$$

где  $\frac{\partial Y}{\partial \varphi} = -\frac{a_\omega \sin \varphi Y}{\sqrt{R_\Sigma^2 - a_\omega^2 \sin^2 \varphi}}$ , а остальные члены определены в (5)–(7).



**Рис. 5.** Самоустановка генератора в ВПТК. Сплошная линия – на три шарика; штриховая на два шарика и опору генератора

Смысль (10) и (11) состоит в следующем. Их левая часть определяет положение центра шарика, которое задаётся генератором, а правая часть – зубчатым венцом жесткого колеса. При этом (10) выражает требование контакта в трёх произвольных зацеплениях, а (11) – требование зазора во всех остальных. Учитываются обе стороны профиля: «силовая», по которой шарик обкатывается, двигаясь вверх по пазу обоймы, и «кинематическая», по которой он обкатывается, двигаясь вниз по пазу. Для шариков, находящихся в контакте, должно выполняться условие, чтобы их реакции  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  уравновешивали генератор (рис. 5). Отсюда следует, что хотя бы один шарик будет в контакте с «кинематической» стороной профиля зуба.

Отклонение угла поворота выходного звена  $\Delta\varphi$  будет решением (10) и (11). Возможна ситуация, когда решение (10) будет таким, что значение  $l$  превысит величину зазора в подшипнике или посадке. Это означает, что коническое кольцо генератора касается под-

шипника или вал генератора касается опоры (рис. 5, штриховые линии). Тогда в контакте будут всего два шарика и выражение (10) составят два уравнения, а  $l$  необходимо приравнять к величине зазора. Генератор уравновешивают реакции от двух шариков  $R_1$ ,  $R_2$  и реакция  $R_0$  в точке касания генератора опоры. В этом случае (7) следует преобразовать к виду

$$\frac{\partial Y}{\partial l} = \frac{R_\Sigma}{\sqrt{R_\Sigma^2 - a_\omega^2 \sin^2 \varphi}} \cos \left( \theta + \operatorname{arctg} \frac{a_\omega \sin \varphi}{\sqrt{R_\Sigma^2 - a_\omega^2 \sin^2 \varphi}} \right).$$

Значение угла  $\theta$  определяет положение точки касания, в которой будет приложена реакция опоры.

### Заключение

Рассмотрен алгоритм расчёта геометрических и конструктивных соотношений в волновых передачах с промежуточными телами качения, включая передачи с адаптивным, самоустанавливающимся генератором. Для расчёта последних передач была использована линейная методика учёта погрешностей, хотя в процессе анализа выявлены погрешности, имеющие порядок малости выше первого.

Полученный алгоритм расчёта волновых передач с промежуточными телами качения с адаптивным генератором существенно отличается от алгоритма расчёта передач с жестко фиксированным генератором. Адаптивная схема предполагает ряд новых варьируемых параметров для компенсации погрешностей изготовления деталей и монтажа при сборке. При этом не все возможные погрешности были учтены, например, предполагается, что профиль жесткого колеса выполнен без погрешности.

Значительно изменяется распределение усилий в волновых передачах с промежуточными телами качения с адаптивным генератором. Как показал анализ, самоустановка генератора приводит к частичной или даже полной разгрузке его опор. Поскольку, под нагрузкой оказывается «кинематическая» часть профиля, то создаётся дополнительный тормозящий момент. Отклонение угла поворота выходного звена от номинального – кинематическая погрешность передачи определяется по приведённой методике.

Полученные результаты позволят продолжить работы по разработке методик расчёта нагрузок и относительных скоростей шарика в точках контакта его с генератором, обоймой и зубьями жесткого колеса, что должно обеспечить качественную разработку редукторов на стадии расчётов, включая и оценку долговечности.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.с. 212950 СССР. МКИ<sup>5</sup> F16Н 1/00. Волновая передача / В.С. Янгулов. Заявлено 19.03.1984; Зарегистр. 27.12.1984.
2. А.с. 315418 СССР. МКИ<sup>5</sup> F16Н 1/00. Волновая передача / В.С. Янгулов и др. Заявлено 20.01.1988; Зарегистр. 3.07.1990.
3. А.с. 317718 СССР. МКИ<sup>5</sup> F16Н 1/00. Волновая передача / В.С. Янгулов и др. Заявлено 20.01.1988; Зарегистр. 3.09.1990.
4. Беляев А.Е. Механические передачи с промежуточными телами повышенной точности и долговечности. – Томск: ТПИ, 1986. – 60 с.
5. Бахвалов Н.С. Численные методы. Ч. 1. – М.: Наука, 1975. – 631 с.
6. Янгулов В.С. Прецизионный редуктор повышенной долговечности // Известия Томского политехнического университета. – 2007. – Т. 311. – № 2. – С. 18–23.

Поступила 26.12.2006 г.