OR - I

HW #4

OR - I

최인찬 교수님

산업경영공학과

2020020530 노해동

4.1-8 Label each of the following statements about Linear programming problems as true or false, and then justify your answer.

(a) For minimization problems, if the objective function evaluated at a CPF solution is no larger than its value at every adjacent CPF solution, then that solution is optimal.

(TRUE) : 최소화 문제에서 목적함수를 최소로 하는 CPF는 최적의 solution 이라 할수있다.

(b) Only CPF solutions can be optimal, so the number of optimal solutions can not exceed the number of CPF solutions.

(FALSE) : Solution의 optimal은 Corner Point Feasible (CPF) 뿐아니라 Edge에서도 존재 할수도있다.

(c) If multiple optimal solutions exist, then an optimal CPF solution may have an adjacent CPF solution that also is optimal (the same value of Z)

(TRUE) : 주어진 목적함수의 조건에 맞는 optimal solution들는 동일 직선상에 여러게 존재 할수도 있다.

4.4-8 Work through the simple method step by step to solve the following problem.

Maximize $Z = -x_1 + x_2 + 2x_3$

Subject to

$x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 20$

$-2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 60$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 50$

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0$

$Z = -6.67 + 2 \times 36.67 = 66.67$ ✓

$6.67 - 36.67 \leq 20$ ✓

$-2 \times 6.67 + 2 \times 36.67 \leq 60$ ✓

$2 \times 6.67 + 36.67 \leq 50$ ✓

iteration	basic variable	Z	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Right side	
0	Z	1	1	-1	-2	0	0	0	0	
	x4	0	1	2	**-1**	1	0	0	20	-20
	x5	0	**-2**	**4**	**2**	**0**	**1**	**0**	**60**	30
	x6	0	2	3	**1**	0	0	1	50	50
1	Z	1	-1	3	0	0	1	0	60	
	x4	0	**0**	4	0	1	0.5	0	50	x
	x3	0	**-1**	2	1	0	0.5	0	30	-30
	x6	0	**3**	**1**	**0**	**0**	**-0.5**	**1**	**20**	6.67
2	Z	1	0	**3.33** >0	0	0	**0.83** >0	**0.33** >0	66.67	
	x4	0	0	4	0	1	0.5	0	50	
	x3	0	0	2.33	1	0	0.33	0.33	36.67	
	x1	0	1	0.33	0	0	-0.17	0.33	6.67	

Iteration 1를 위해 목적함수를 가장 크게 변하게 하는 x_3을 선택하여 Entering Variable로 함. x_4 x_5 x_6 중에 증가가 가장 작은것은 x_5 이므로 table을 다시구한다.

Iteration 2를 위해서는 Entering variable으로 x_1을 선택하여 r.t들 보았을때 x_6을 선택하여 피벗을 진행하여 완성 한다. 여전히 Identity matrix 가 존재한다 그리고 Row operation을 수행한다. Unique optimal solution 이 존재한다. 왜냐하면 N.B의 coef 값들이 모두 0보다 크므로. non zero = { x_1, x_3 }, $x_1 = 6.67$. $x_3 = 36.67$ 일때 목적함수 Z는 최대이며 그값은 66.67을 갖는다.

4.5-1 Consider the following statement about linear programming and the simplex method. Label each statement as true or false, and then justify your answer.

(a) In a particular iteration of the simplex method, if there is a tie for which variable should be the leaving basic variable, then the next BF solution must have at least one basic variable equal to zero.

(TRUE) : entering basic variable이 증가함에 따라 모든 tied basic variable는 동시에 0에 도달하므로 이러한 모든 변수는 new BF solution에서 0을 갖게된다.

(b) If there is no leaving basic variable at some iteration, then the problem has no feasible solutions.

(TRUE) : 목적함수의 값은 entering basic variable 값을 증가시킬수록 증가시킬수 있고 이 때 optimal solution이 존재하지 않는다.

(c) If at least one of the basic variable has a coefficient of zero in row 0 of the final tableau, then the problem has multiple optimal solutions.

(FALSE) : row 0의 모든 basic variable의 coefficient 값은 0이어야 한다.

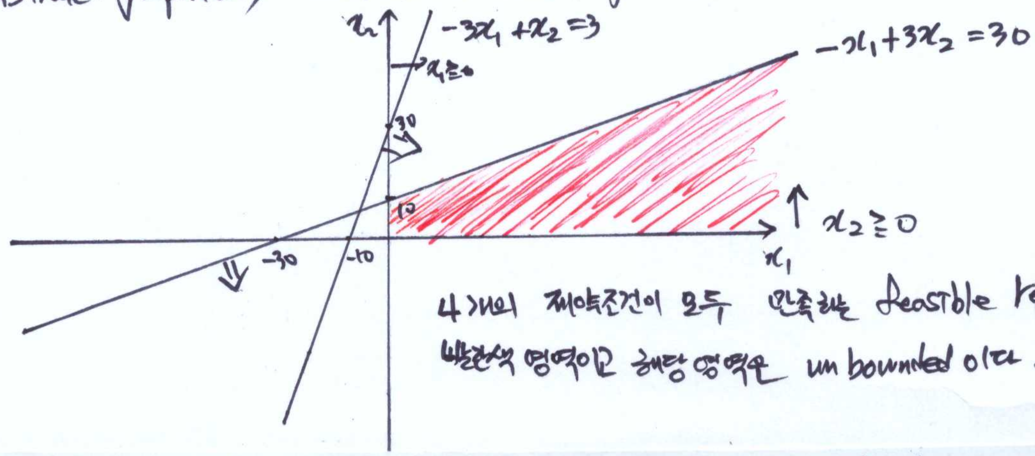
(d) If the problem has multiple optimal solutions, then the problem must have a bounded feasible region.

(FALSE) : 목적 함수의 그래프가 basic feasible region의 경계 여부와 관계 없이 제약조건 중 하나와 평행하다면 optimal solution은 여러개를 갖는다. 따라서 feasible region이 bounded 일수도 있고 아닐수도 있다

4.5-2 Suppose that the following constraints have been provided for a linear programming model with decision variable x_1 and x_2.

$$-x_1 + 3x_2 \leq 30$$
$$-3x_1 + x_2 \leq 30$$
$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

(a) Demonstrate graphically that the feasible region is unbounded.



4개의 제약조건이 모두 만족하는 feasible region은 빨간색 영역이고 해당 영역은 unbounded이다.

(b) If the objective is the maximize $Z = -x_1 + x_2$, does the model have an optimal solution? If so, find it. If not, explain why not.

iteration	basic variable	Coef. Z	x1	x2	x3	x4	Right side	
0	Z	1	1	**-1**	0	0	0	
	x3	0	**-1**	**3**	**1**	**0**	**30** ≥ 0	10
	x4	0	-3	**1**	0	1	30	30
1	Z	1	**0.67** ≥ 0	0	**0.33** ≥ 0	0	10	
	x2	0	-0.33	1	0.33	0	10 ≥ 0	
	x4	0	-2.67	0	-0.33	1	20	

존재한다. optimal solution은 $x_1 = 0$, $x_2 = 10$ 일때 $Z = 10$을 갖는다.

(c) Repeat part(b) when the objective is to maximize $Z = x_1 - x_2$.
optimal solution이 존재하지 않는다. simple method를 사용해서 보면 변화비 최대가 되는 x_1을 선택해서 진행시 x_3, x_4에 대해 만족하지 못한다.

iteration	basic variable	Coef. Z	x1	x2	x3	x4	Right side	
0	Z	1	-1	1	0	0	0	
	x3	0	-1	3	1	0	30 ≥ 0	X -30
	x4	0	-3	1	0	1	30	-10

(d) For objective functions where this model has no optimal solution, does this mean that there are no good solutions according to the model? Explain.
What probably went wrong when formulating the model?

↳ 주어진 조건식에서는 optimal solution이 존재하지 않고 unbounded 영역에 존재한다.
따라서 조건식을 x_1이나 x_2에 제한을 걸면 CPF에서 최적의 solution을 도출할수있을것.

(e) select an objective function for which this model has no optimal solution, Then work through the simplex method step by step to demonstrate that Z is unbounded.

iteration	basic variable	Coef.					Right side	
		Z	x1	x2	x3	x4		
0	Z	1	**-2**	2	0	0	0	
	x3	0	**-1**	3	1	0	30	-30
	x4	0	-3	1	0	1	30	-10

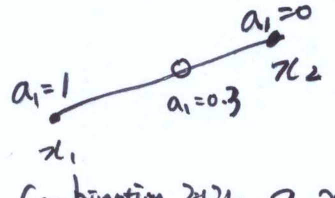
$Z = 2x_1 - 2x_2$로 선택하면 해당 모델은 optimal solution을 갖지 않는다.
Simplex method를 통해 확인해본 결과. 변화를 초래로 하는 x_1에 대해 $x_3, x_4 \geq 0$ 라는 조건을 만족하는 solution이 없다.

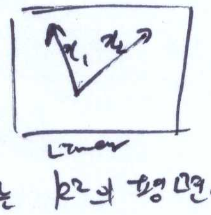
$\boxed{4.5\text{-}5}$ (a) Show that any covex combination of any set of feasible solution must be a feasible solution (so that any convex combination of CPF solutions must be feasible)

↳ 점들을 Linear combination 할때 계수가 양수이고 계수의 합을 1로 제한하면 이를 convex combination이라고 한다. $\{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k \quad \sum_{i=1}^{k} a_k = 1, \quad a_i \geq 0 \quad i=1 \sim k\}$
이제 convex set의 정의를 convex combination 개념을 이용해서 일반화 해볼수 있다.
즉, 어떤 집합 C에 속하는 임의의 여러 점들의 convex combination이 집합 C에 속하면 convex set이다.

(b) Use the result quoted in part (a) to show that any convex combination of BF solutions must be a feasible solution.

↳





Linear Combination 결과 x_1과 x_2를 포함하는 R^2의 평면에 생성(span)된다.
2차원 공간의 covex set은 x_1과 x_2를 연결하는 선분이다.