

Ce rapport traite de la modélisation de l'exploitation d'un aquifère, et est séparé en deux parties. La première concerne le développement et le test d'un solveur d'équation aux dérivées partielles de diffusion basé sur la méthode des différences finies, avec des approximations du second ordre. La seconde partie concerne plus précisément la modélisation d'un aquifère et le calcul de la production de puits.

Nos objectifs durant ce travail sont :

Programmer la méthode des différences finies sur un problème de diffusion stationnaire 2D, avec conditions aux bords de Dirichlet et de Neumann (solveur).

- Tester le solveur et la méthode sur des cas test proposés.
- Modéliser l'écoulement d'eau dans un aquifère en présence de puits de production et résoudre l'équation obtenue avec le solveur développé. Utiliser le modèle numérique obtenu pour optimiser l'endroit où les puits doivent être forés.

Partie 1 : développement et test d'un solveur

Nous avons réalisé un solveur d'EDP de diffusion stationnaire, basé sur la méthode des différences finies.

Cadre du solveur :

Pour Ω un rectangle de \mathbb{R}^2 , de frontière Γ , subdivisé en deux sous frontières, l'EDP à traiter est de la forme :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(-D(x, y)\nabla u(x, y)) &= f(x, y) \text{ pour } (x, y) \text{ dans } \Omega, \\ u(x, y) &= u_B(x, y) \text{ sur } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) &= g(x, y) \text{ sur } \Gamma_2 \end{aligned}$$

Où l'on a :

D est une fonction scalaire donnée de (x, y) (coefficient de diffusion).

F est une fonction scalaire donnée de (x, y) (terme source).

u est la fonction inconnue, g et u_B sont des fonctions (ou constantes) données sur les frontières.

Nous avons réalisé plusieurs tests sur notre solveur, et l'on présente les résultats de ces tests dans ce qui suit.

Premier test :

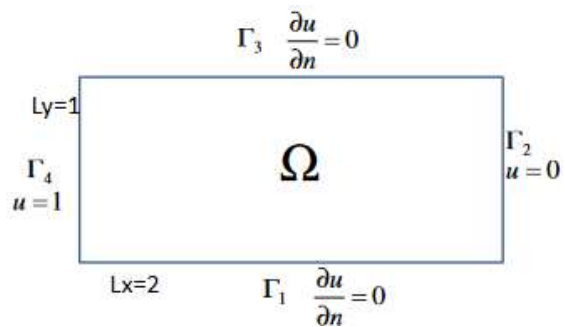
Test no 1 :

$\Delta u = 0$ pour (x, y) dans Ω , rectangle 2×1

$u(x, y) = 0$ sur Γ_2

$u(x, y) = 1$ sur Γ_4

$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = 0$ sur Γ_1 et Γ_3



Nous noterons dans la suite n_x et n_y respectivement le nombre de nœuds que l'on prend suivant l'axe x ou y .

Nous traçons la solution sur le plan (x, y) à l'aide d'une cartographie couleur, ainsi que le flux de u représenté par des flèches sur le plan :

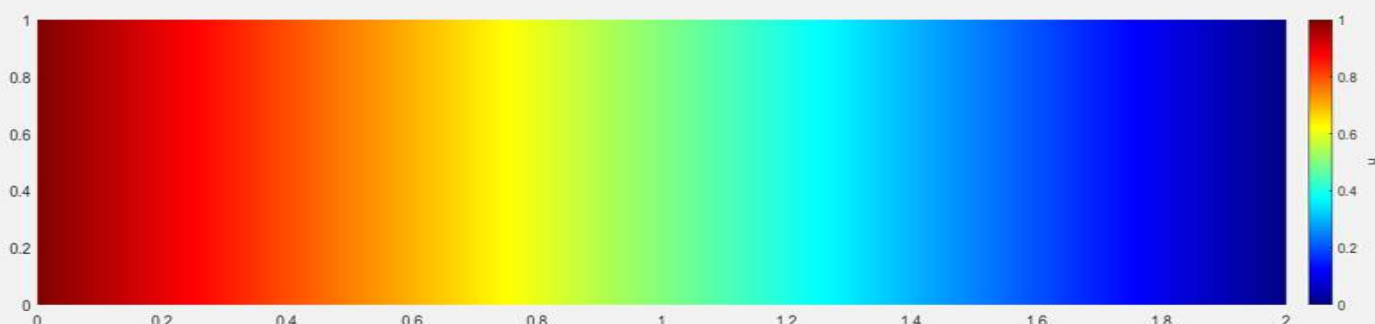
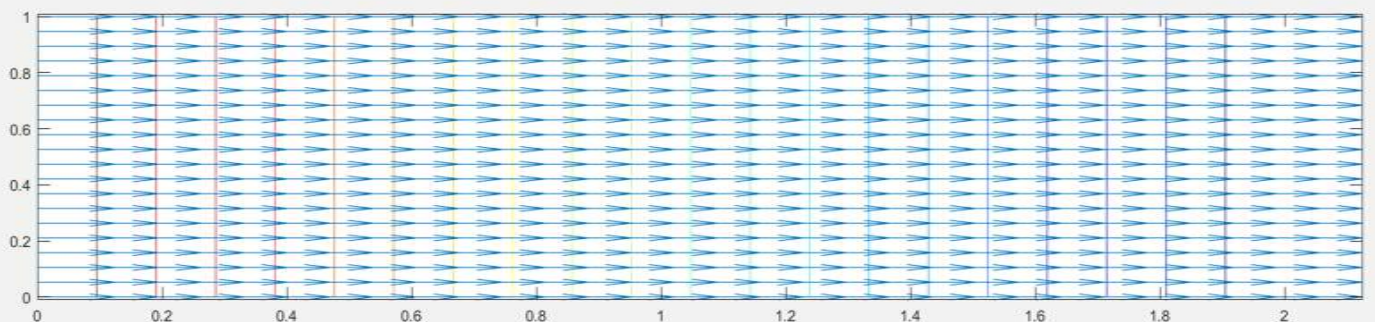


Figure 1 : Représentation de la solution numérique du test n°1 avec $n_x=30$ et $n_y=20$.

Nous remarquons que la solution numérique ne semble pas dépendre de y . Avec cette hypothèse, on peut facilement en déduire par intégration et utilisation des conditions de bords pour déterminer les constantes d'intégration que la solution tracée est : $u(x,y)=1-0.5x$. Cette fonction est notoirement harmonique, ce qui concorde avec nos hypothèses.

Il est inutile d'étudier la variation de l'erreur en fonction du pas, puisque la solution étant un polynôme de degré <2 , l'approximation par différence finie d'ordre 2 de notre solveur donne la solution exacte, ce que l'on a vérifié numériquement avec une erreur max nulle.

On fait également le test avec $-\Delta u=1$ cette fois-ci. On trace la solution :

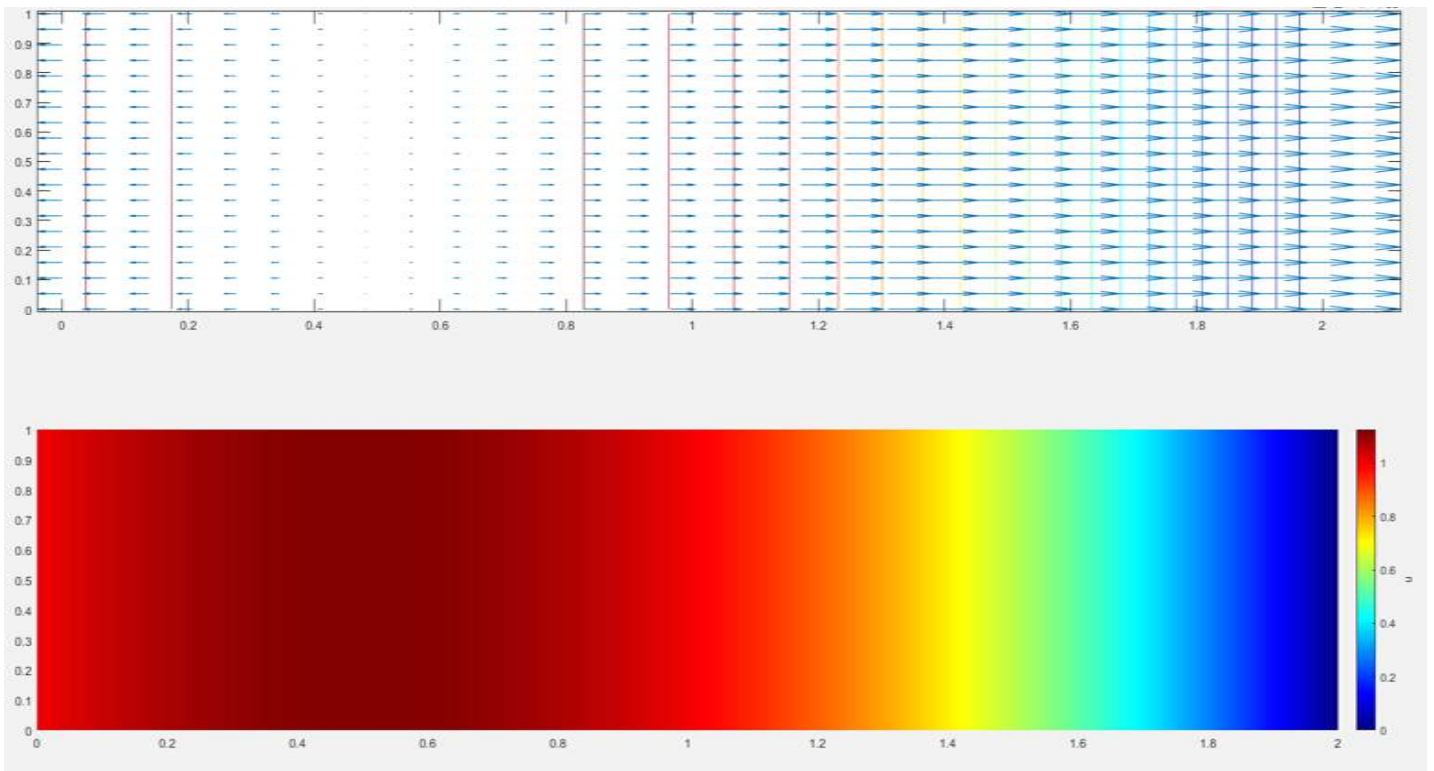


Figure 2 : Représentation de la solution numérique du test n°1 où $\Delta u=-1$ avec $n_x=30$ et $n_y=20$.

A nouveau la solution semble ne pas dépendre de y . Avec cette hypothèse, on conclut facilement par intégration et utilisation des conditions de bords pour déterminer les constantes d'intégration que la solution tracée est : $u(x,y)=-0.5x^2+0.5x+1$.

A nouveau, comme c'est un polynôme de degré 2, il est inutile d'étudier l'erreur max puisque notre solveur fournit une approximation d'ordre 2. On vérifie néanmoins numériquement l'erreur max qui est bien nulle peu importe le pas.

Réalisons maintenant le test avec une solution analytique non polynomiale, on suppose maintenant $-\Delta u=5\sin(5x)$. On trace la solution numérique :

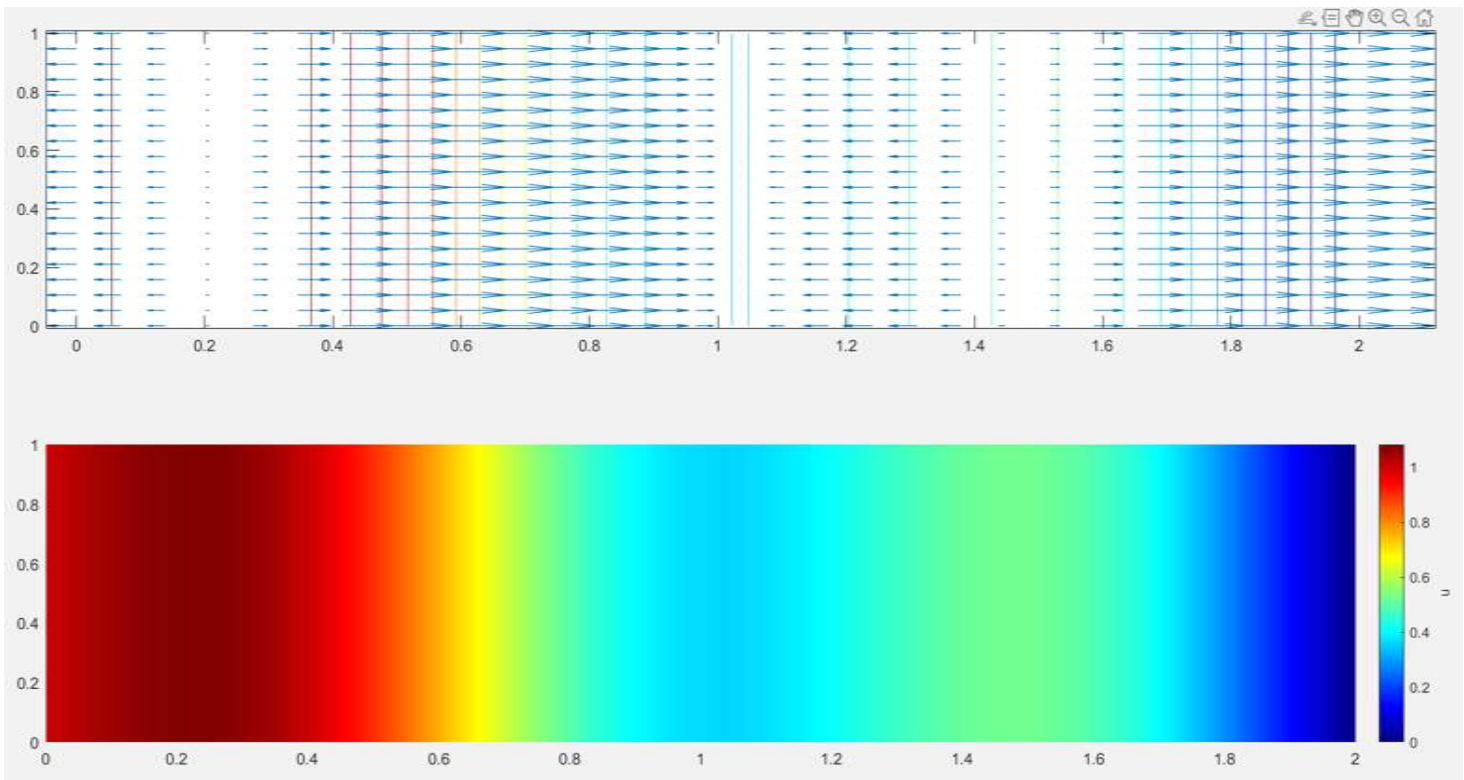


Figure 3 : Représentation de la solution numérique du test n°1 où $-\Delta u = 5\sin(5x)$, avec $n_x=30$ et $n_y=20$.

Il semblerait qu'à nouveau la solution ne dépende pas de y . Avec cette hypothèse, on en déduit facilement une solution analytique par intégration et utilisation des conditions de bords pour déterminer les constantes d'intégration : $u(x,y) = \sin(5x)/5 + Kx + 1$ où $K = (\sin(10) \cdot 0.1 - 0.5)$.

Cette fois-ci, la solution analytique n'est pas polynomiale d'ordre 2 donc il est utile d'étudier l'influence du pas sur l'erreur max qui ne sera pas nulle :

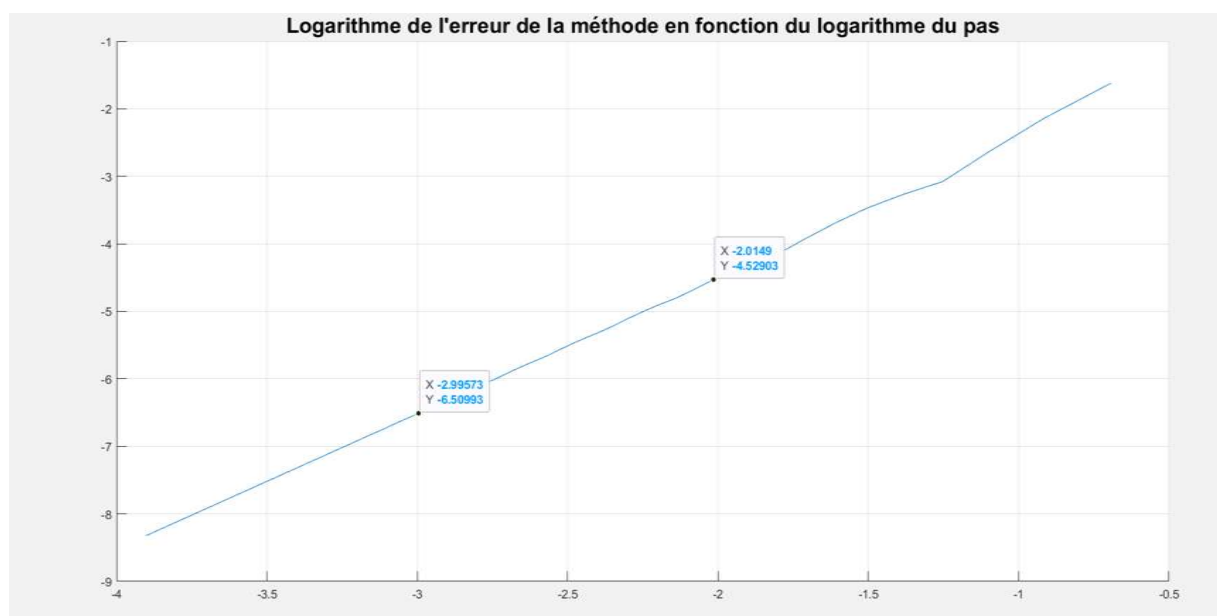


Figure 4 : Tracé du logarithme de l'Erreur max en fonction du logarithme du pas h_x pour le test n°1.

On remarque un coefficient directeur de 2, ce qui est en accord avec le fait que notre approximation de la dérivée seconde $u''(x)$ soit d'ordre 2.

Deuxième test :

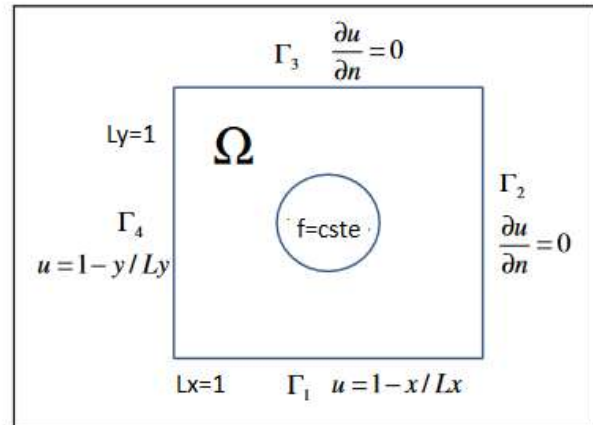
$-\Delta u = f$ pour (x, y) dans Ω , carré de côté 1

$u(x, y) = 1 - (x/Lx)$ sur Γ_1

$u(x, y) = 1 - (y/Ly)$ sur Γ_4

$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = 0$ sur Γ_2 et Γ_3

f est constante = -20 sur un disque centré sur le centre du carré et de rayon $1/4$, nulle ailleurs



Réolvons numériquement cette équation et traçons la solution :

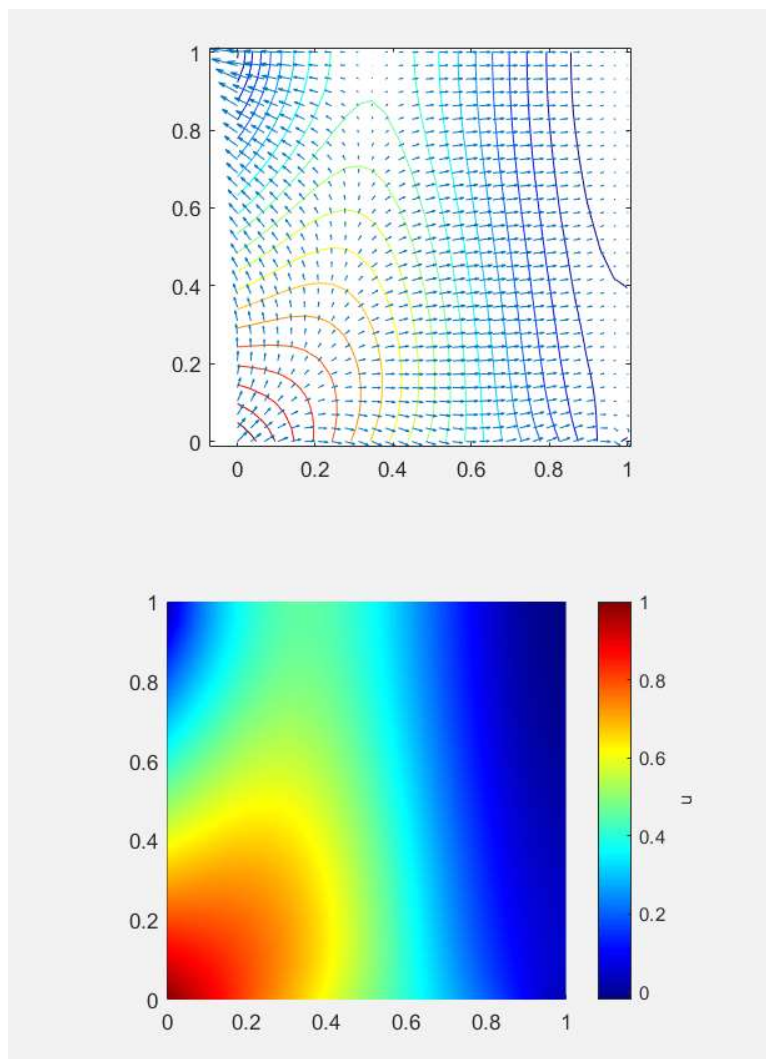


Figure 5 : Représentation de la solution numérique du test n°2.

Cette fois-ci, nous ne disposons pas de solution analytique qui nous permettrait de calculer l'erreur. Néanmoins, on remarque que les conditions de Dirichlet aux bords sont bien respectées pour la solution numérique de notre solveur, qui paraît donc cohérente avec les données en entrée.

Troisième test :

$\text{div}(-D(x, y)\nabla u) = 0$ pour (x, y) dans Ω (carré, le même que pour le test 2)

$u(x, y) = 0$ sur Γ_2

$u(x, y) = 1$ sur Γ_4

$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = 0$ sur Γ_1 et Γ_3

$D(x, y) = 0.1x$ sur le disque centré sur le centre du carré et de rayon $1/3$, $D(x, y) = 1$ ailleurs

Réolvons cette équation avec notre solveur et traçons la solution :

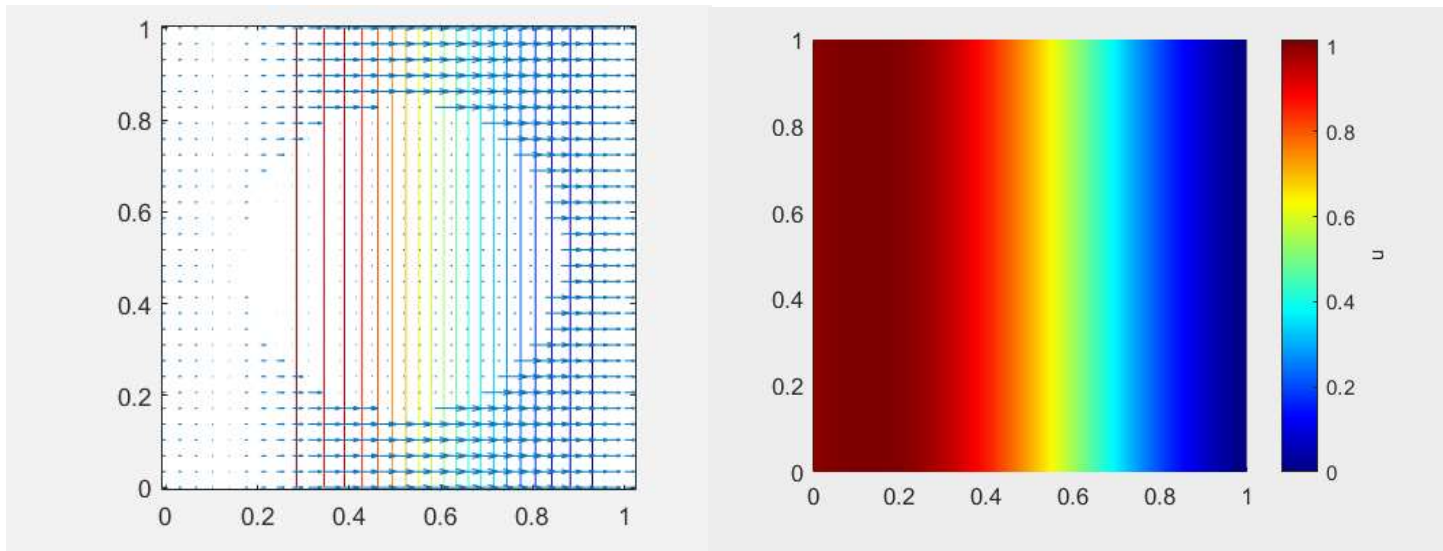


Figure 6 : Représentation de la solution numérique du test n°3.

Du fait du coefficient de diffusion très diminué à l'intérieur du cercle en comparaison avec l'extérieur du cercle, on voit un flux quasi nul à l'intérieur du cercle en comparaison avec l'extérieur. On remarque également que la valeur de u ne dépend pas de y et que l'on a une symétrie du flux suivant la droite $y=0.5$, ce qui est attendu de part les conditions de bord et l'équation de départ.

On pourrait définir si l'on le souhaite un défaut de symétrie Δ_{Max} comme étant la norme du max de différence de flux entre deux nœuds symétriques par rapport à la droite $y=0.5$, afin d'avoir une unité de mesure quantitative du défaut de symétrie de la solution numérique. On décide de ne pas exposer les résultats de cette analyse sur ce rapport car bien que l'on puisse définir une mesure du défaut de symétrie, on ne voit pas immédiatement la relation de cette mesure avec les données d'entrée de notre problème et nous décidons de ne pas creuser la relation qui régit les deux et de plutôt analyser d'autres aspects de la modélisation afin de maintenir l'intérêt synthétique de ce rapport.

Quatrième test :

On reprend la toute première équation et l'on rajoute un puits au milieu du rectangle avec une valeur imposée $u=0.1$. On trace la solution obtenue avec 30x30 noeuds.

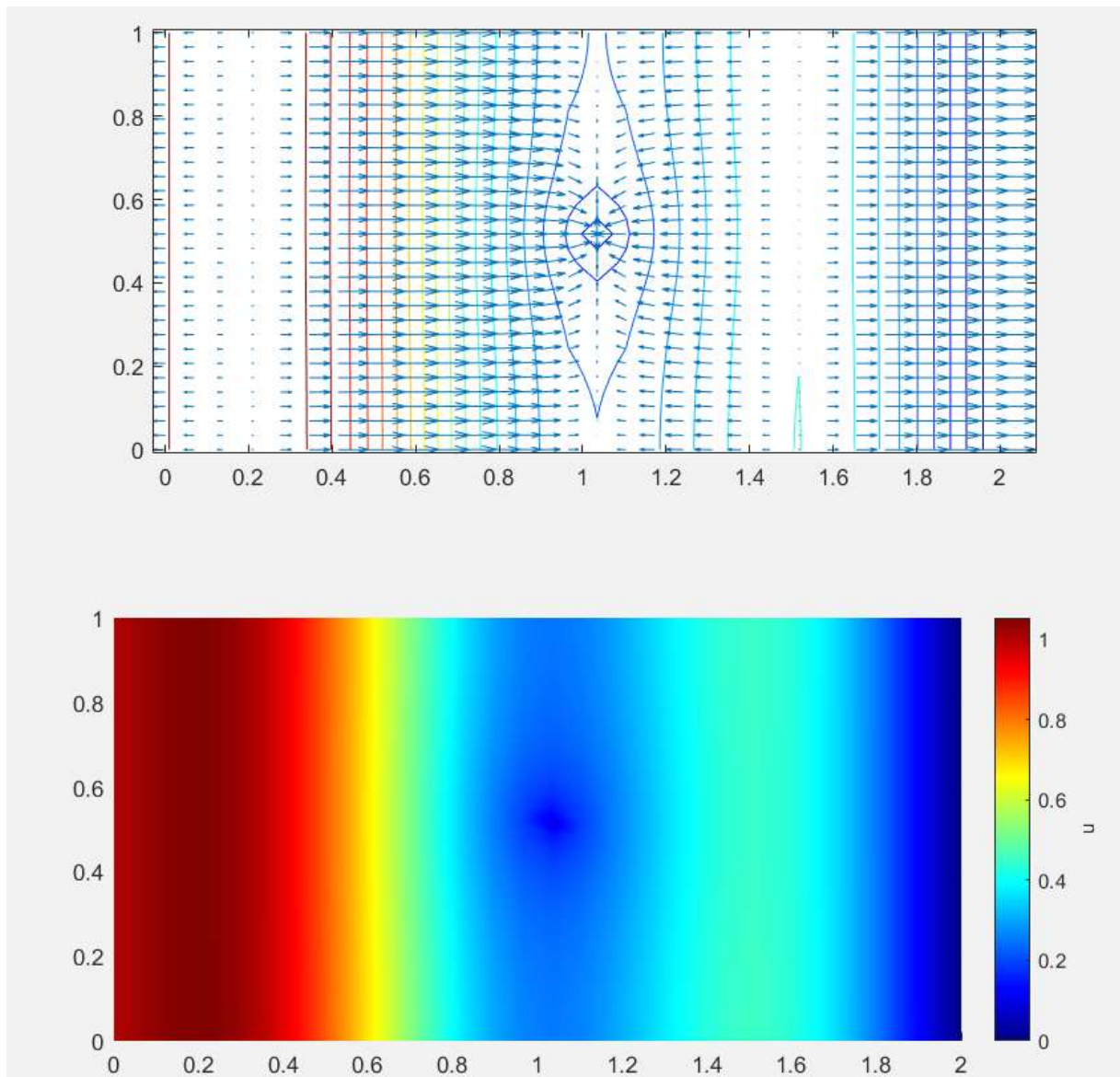


Figure 7 : Représentation de la solution numérique du test n°4.

On remarque une convergence du flux vers l'unique puits avec une valeur de u au puits conforme aux conditions données à l'entrée. En dehors de la zone du puits, la figure ressemble à la première solution. Le résultat semble très cohérent avec les données entrées.

Partie 2 : Application à l'optimisation de l'exploitation d'un aquifère.

On voudrait prévoir et optimiser la production d'eau d'un aquifère. On modélise l'aquifère en 2D (coupe horizontale) par un rectangle de côtés L_x et L_y . En utilisant la loi de Darcy, on obtient l'EDP suivant pour l'écoulement de l'eau :

$$\operatorname{div}\left(-\frac{K(x, y)}{\mu} \nabla P(x, y)\right)=0$$

On imposera les conditions aux bords suivantes :

- sur les deux faces $y=0$ et $y=L_y$, sur la moitié inférieure de la face $x=0$, et sur la moitié supérieure de la face $x=L_x$ le flux sortant est nul, on a la condition de Neumann : $\frac{\partial P}{\partial n}=0$
- sur la moitié supérieure de la face $x=0$, la pression (d'entrée) est fixée à P_{in}
- sur la moitié inférieure de la face $x=L_x$, la pression (de sortie) est fixée à P_{out} (valeurs numériques plus loin)

Nous adaptons notre solveur pour résoudre cette équation en prenant comme valeurs numériques :

$L_x=2000\text{m}$ $L_y=1200\text{m}$;

$n_x=40$, $n_y=20$ (donc le pas en x est différent du pas en y);

Pressions entrée et sortie : $P_{in}= 15\text{ bars}$ $P_{out}= 10\text{ bars}$

Nous traçons la solution avec notre solveur modifié (qui correspond aux fichiers Fsource1, FixCond5, Ksurmu et EDP_Diff5_aquifere disponibles en fichiers joints à ce rapport) :

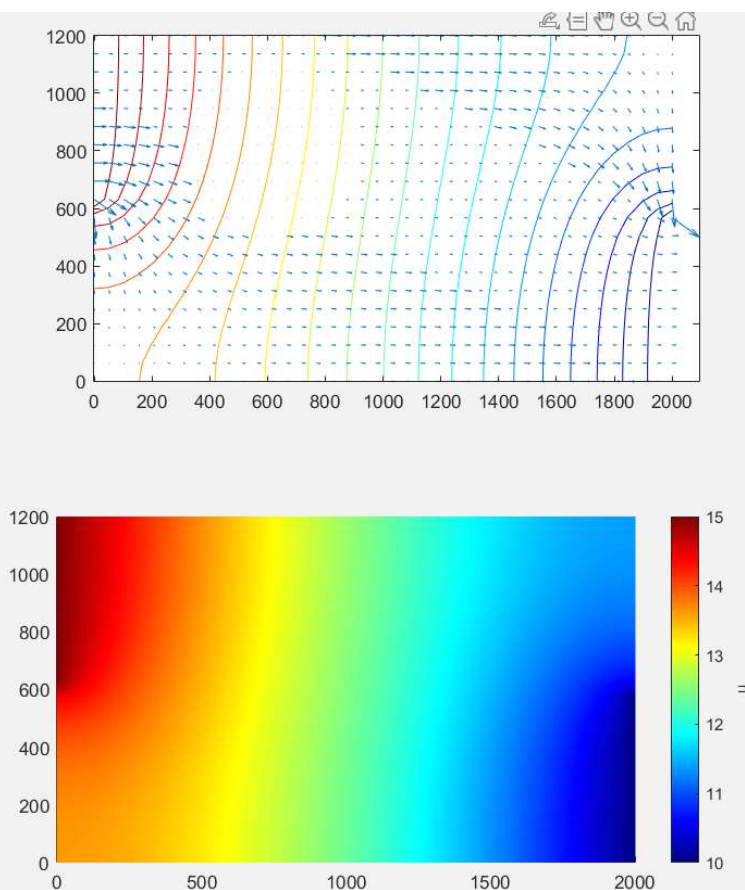


Figure 7 : Représentation de la solution numérique du test aquifère sans puits.

Aucun puits n'est encore foré dans la zone. De ce fait, aucune perturbation n'est visible dans le champ de pression. Néanmoins, on voit facilement que les conditions de bords sont bien vérifiées sur notre figure ce qui rend le résultat cohérent.

Plaçons maintenant un premier puits aux coordonnées (1500,250) avec une pression au puits de 5 bars :

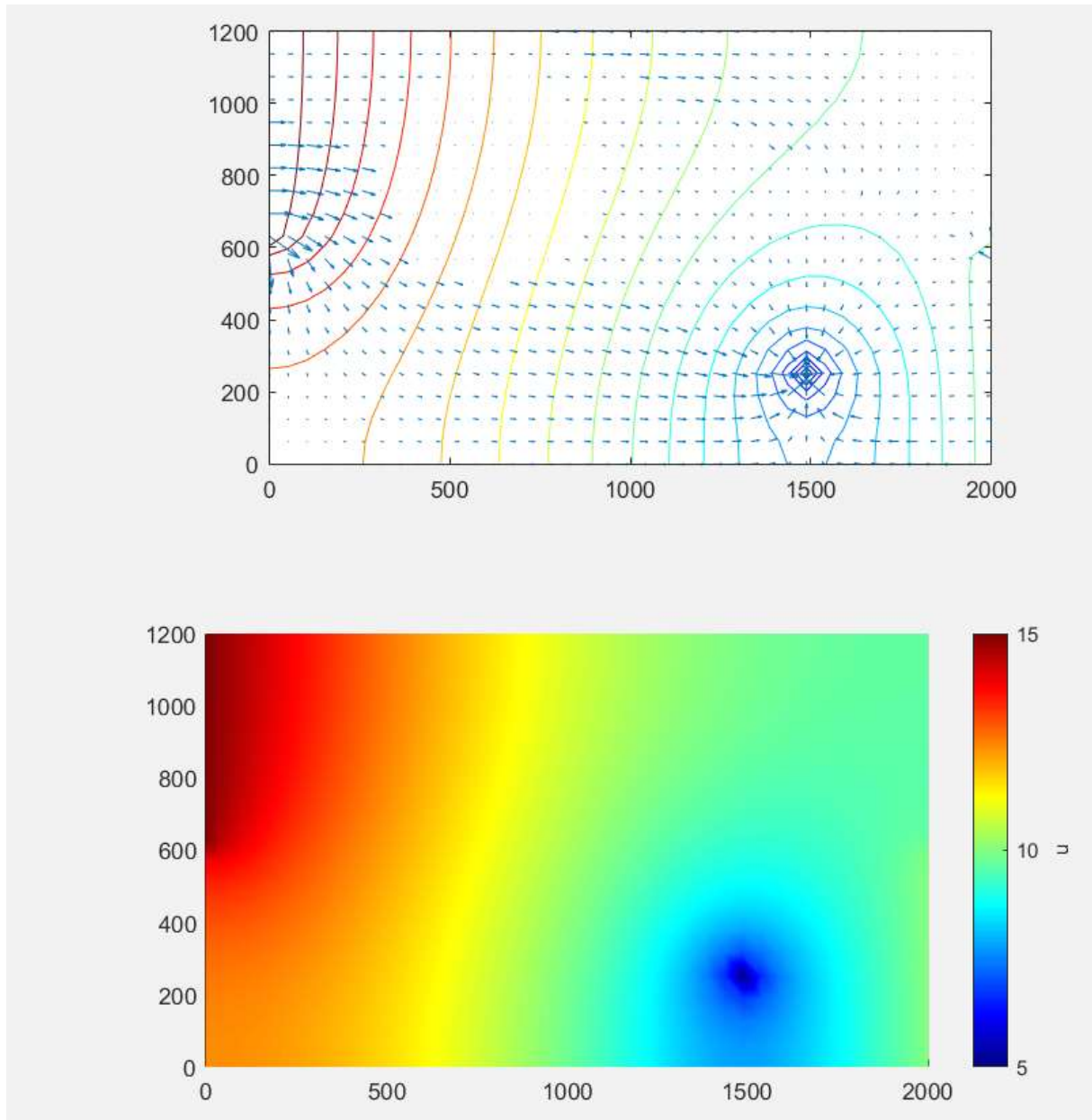


Figure 8 : Représentation de la solution numérique du test aquifère avec un premier puits.

On observe clairement un creux de pression généré par le puits autour de ses coordonnées. On calcule également la production de ce puits, obtenue en calculant le débit total convergeant vers ce point :

Production puits 1 : 106.61

Production totale : 106.6

La fonction de calcul de production (FProduction.m) est disponible avec les fichiers joints à ce rapport.

Etudions maintenant la relation entre la production et la pression au puits (fonctions modifiées avec un intitulé `relation_pression`) :

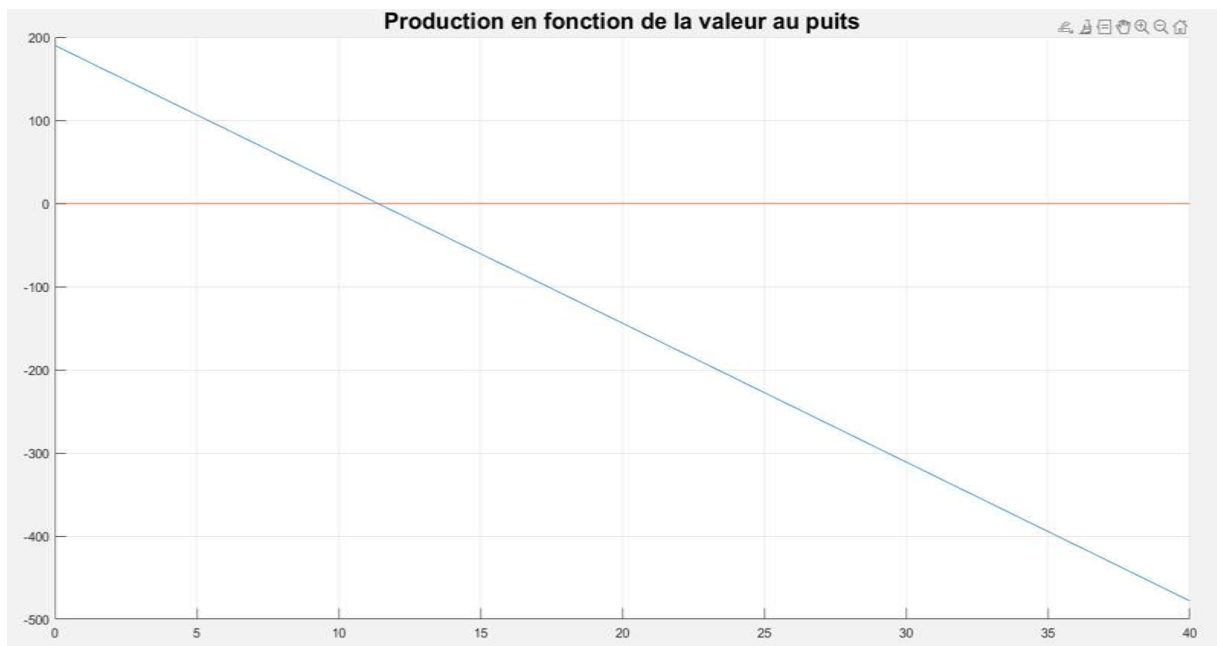


Figure 9 : Tracé de la production du puits en fonction de la pression aux puits.

La production est une fonction affine inversement proportionnelle à la valeur de pression au puits, la décroissance est un résultat cohérent que l'on attendait, le fait que ce soit une fonction affine aurait également pu être anticipé en faisant un peu de calcul sur la condition de Neumann de notre puits et son influence sur la solution u .

Ajoutons maintenant un second puits, aux coordonnées (800,1000) :

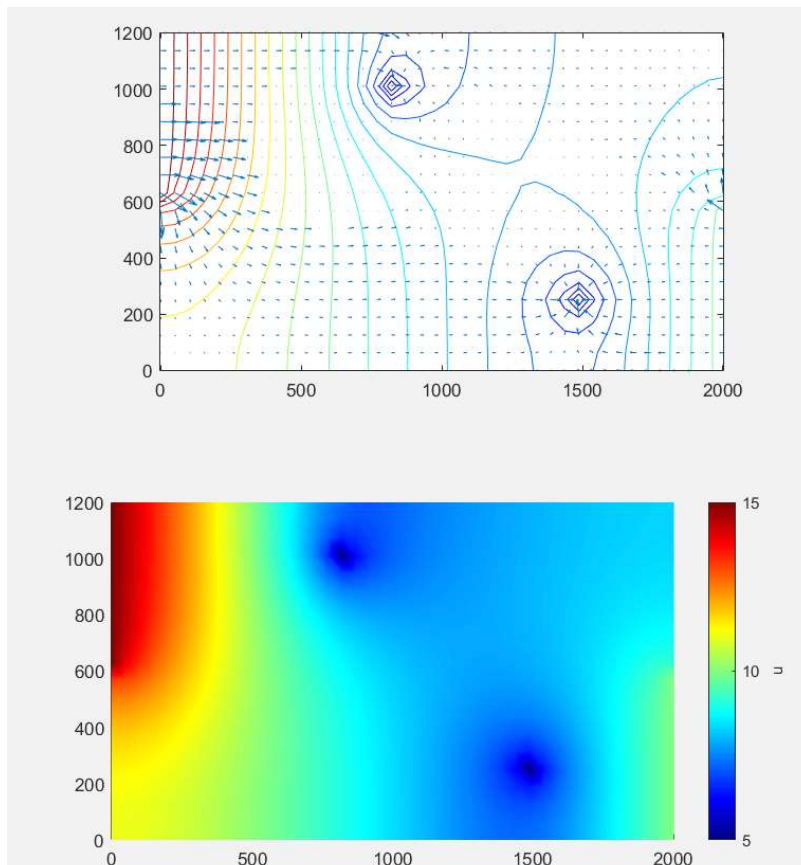


Figure 10 : Représentation de la solution numérique du test aquifère avec 2 puits.

La représentation est en accord avec les données entrée et on observe bien deux creux de pression générés par les deux puits. Le calcul des productions fournit :

Production puits 1 : 83.28

Production puits 2 : 94.74

Production totale : 178.02

On remarque donc une augmentation logique de la production totale avec 2 puits, néanmoins l'installation d'un second puits baisse la production du premier puits. En plaçant maintenant le second puits aux coordonnées (800,700), on obtient :

Production puits 1 : 78.56

Production puits 2 : 13.97

Production totale : 92.54

Soit une production totale inférieure à ce que l'on aurait obtenu avec uniquement un puits ! On remarque donc l'importance de bien positionner le second puits en fonction du premier pour optimiser la production totale car celle-ci peut aller du simple au double suivant ce positionnement comme vu avec nos exemples. Le problème de déterminer la position optimisant la production du second puits tout en connaissant la position fixée du premier puits est un problème d'optimisation multicritère qu'il serait intéressant d'étudier dans un prochain rapport.