/* elice */

수포자를 위한 프로그래밍 수학

컴퓨터 비전의 세계로

조웅오 선생님

목차

개요

4장을 배우고 나면!

1. 벡터와 행렬의 개념과 특징을 알게 됩니다.
2. 벡터와 행렬의 기본적인 계산법을 알게 됩니다.
3. 행렬의 여러가지 형태를 알고 연립방정식에 이용할 수 있게 됩니다.
4. 컴퓨터 비전과 인공지능의 기본이 되는 컨볼루션 연산을 이해합니다.

벡터

숫자의 나열로 이루어진 자료형

행벡터

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{bmatrix}, \quad x_i \in \mathbb{R}$$

열벡터

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

벡터의 연산

더하기

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+4\\2+5\\3+6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\7\\9\end{bmatrix}$$

벡터의 연산

스칼라 곱

스칼라 : 벡터, 행렬과 달리 그냥 하나의 값을 가지는 수

$$2\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times 4\\2\times 5\\2\times 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\10\\12\end{bmatrix}$$

스칼라

벡터의 연산

내적

벡터를 원소별로 곱한 후 그 합을 구하는 연산

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 = 32$$

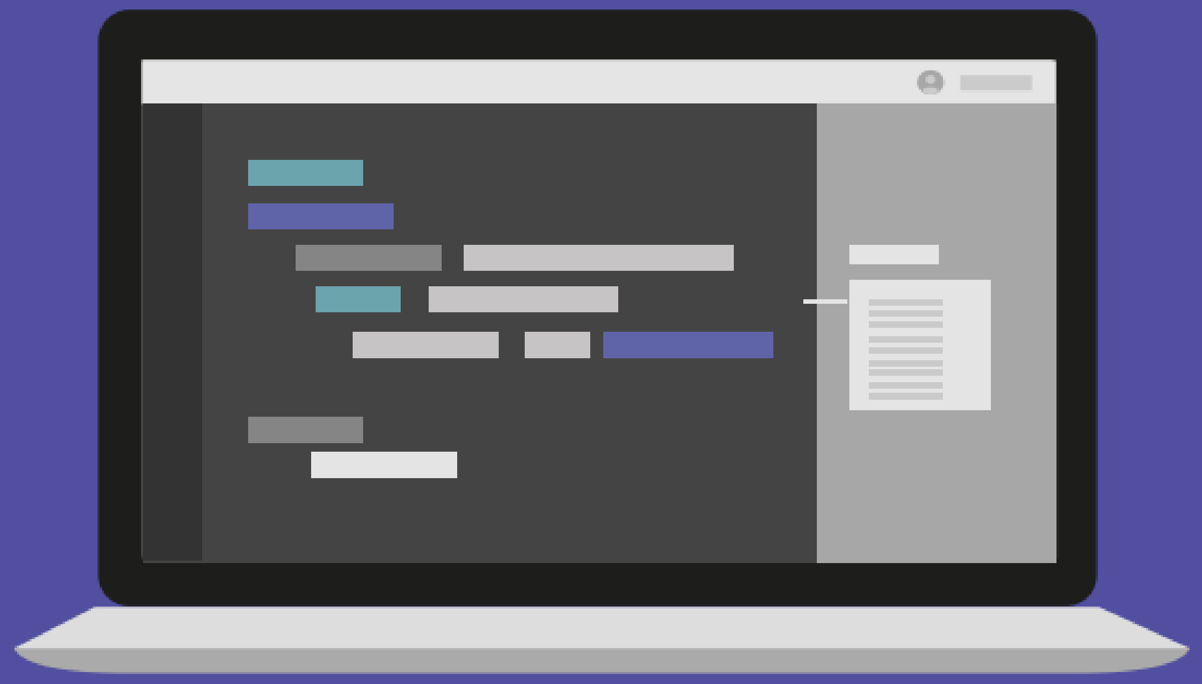
벡터의 연산

전치

행벡터->열벡터 OR 열벡터->행벡터로 변환

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \quad or \quad \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

[실습1] 벡터



행렬

m×n의 형태의 행과 열로 이루어진 자료형

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

행렬의 연산

더하기

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+7 & 2+8 \\ 3+9 & 4+10 \\ 5+11 & 6+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 14 \\ 16 & 18 \end{bmatrix}$$

행렬의 연산

스칼라 곱

$$2\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\times 1 & 2\times 2\\2\times 3 & 2\times 4\\2\times 5 & 2\times 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 4\\6 & 8\\10 & 12\end{bmatrix}$$

행렬의 연산

곱하기

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 \times 1) + (2 \times 3) + (3 \times 5) & (1 \times 2) + (2 \times 4) + (3 \times 6) \\ (4 \times 1) + (5 \times 3) + (6 \times 5) & (4 \times 2) + (5 \times 4) + (6 \times 6) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{bmatrix}$$

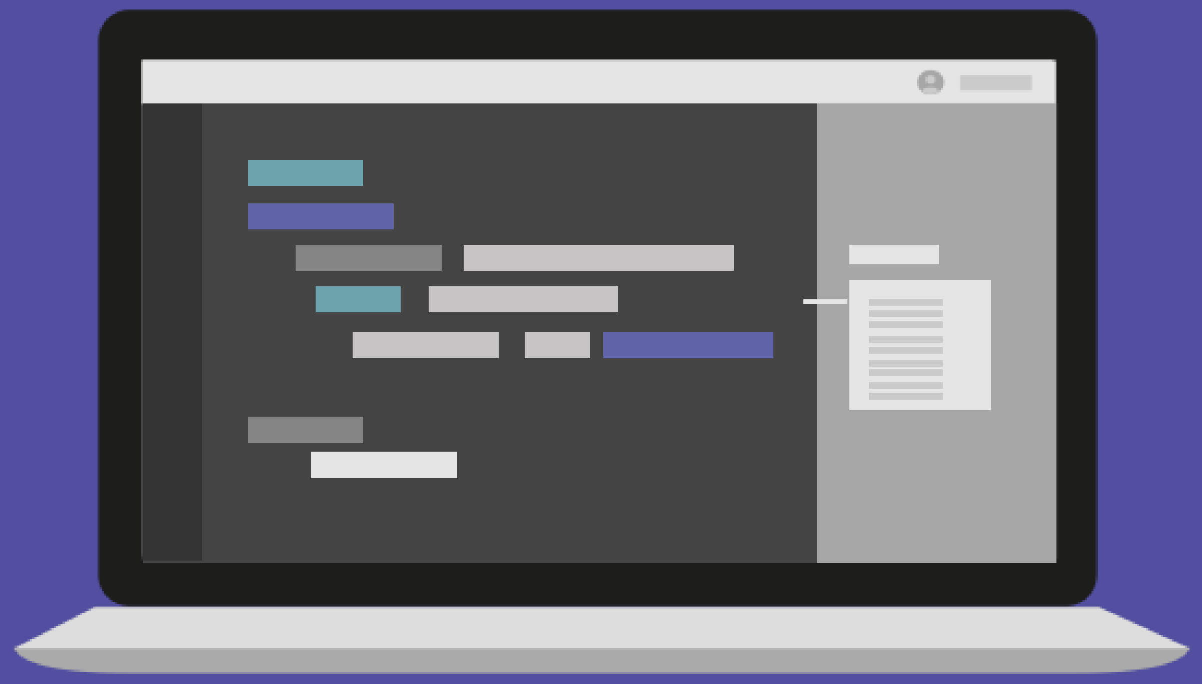
★ $AB \neq BA$

행렬의 연산

성분곱

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 & 2 \times -1 \\ 3 \times 1 & 4 \times -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

[실습2] 행렬



정사각행렬

행과 열의 수가 같은 행렬

열 3개!

행 3개!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

삼각행렬

주대각선을 기준으로 어느 한 쪽이 모두 0인 행렬

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad or \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

대각행렬

주대각선을 제외한 모든 원소가 0인 행렬

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

단위행렬

주대각선의 모든 원소가 1인 대각행렬

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

단위행렬을 곱하면 그대로 나온다

전치행렬

주대각선을 기준으로 뒤집은 행렬

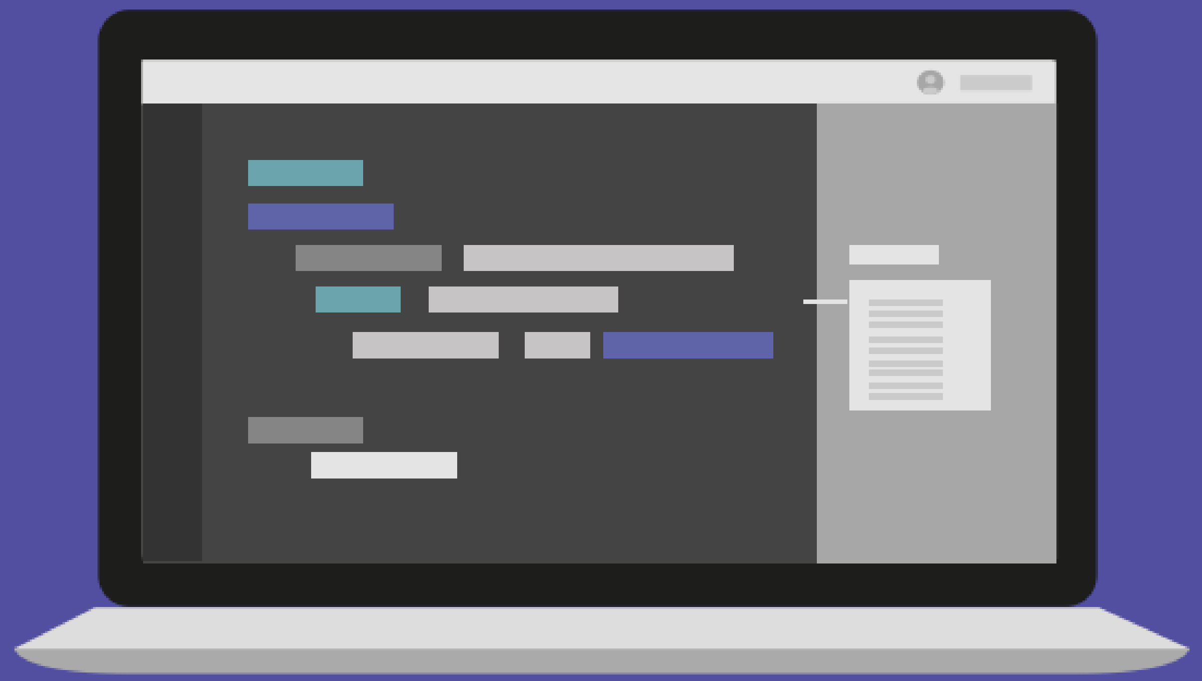
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

대칭행렬

원래 행렬과 전치 행렬이 동일한 행렬

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

[실습3] 대각행렬



역행렬

행렬곱의 역원

A의 역행렬!

$$xA = y \rightarrow x = yA^{-1}$$

역행렬

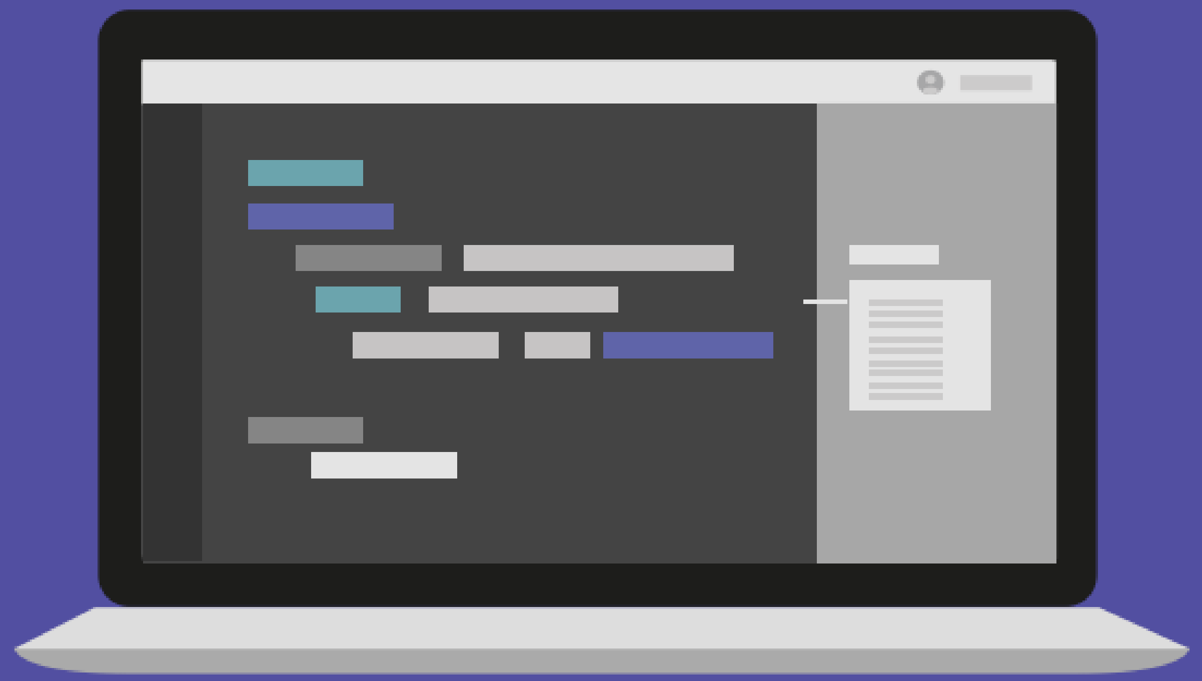
2×2행렬의 역행렬 계산

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\boxed{ad - bc}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

행렬식

[실습4] 역행렬



벡터와 연립방정식

연립방정식을 행렬로 변환

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

벡터와 연립방정식

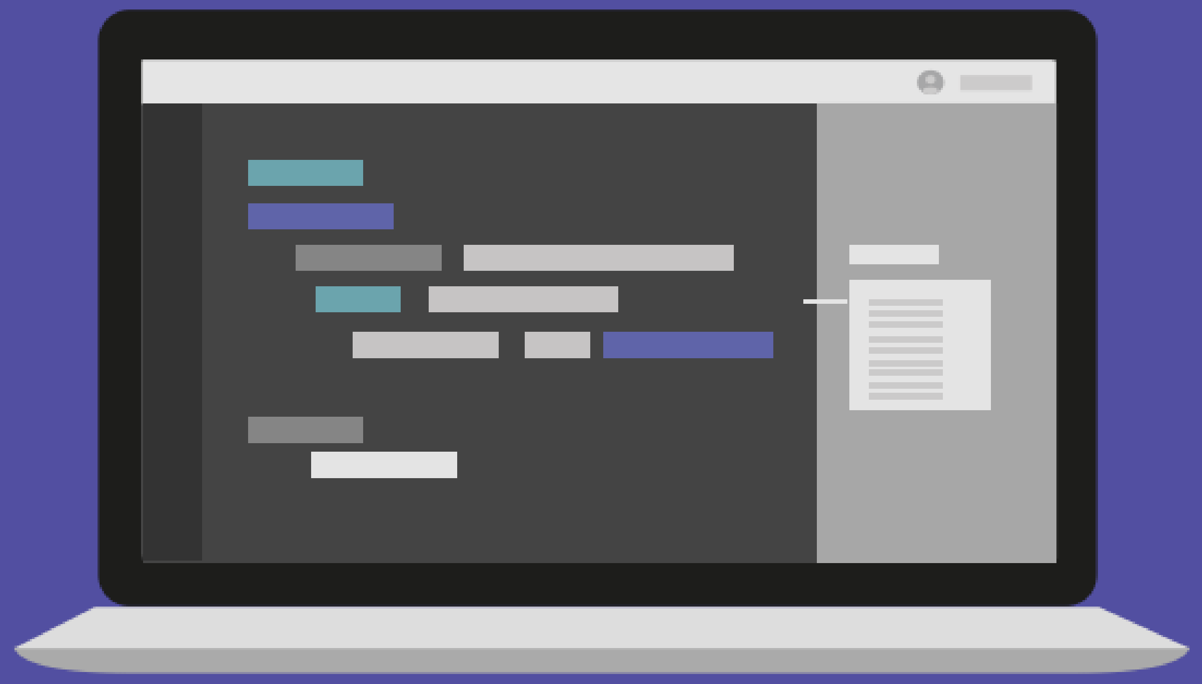
역행렬을 이용하여 해 구하기

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

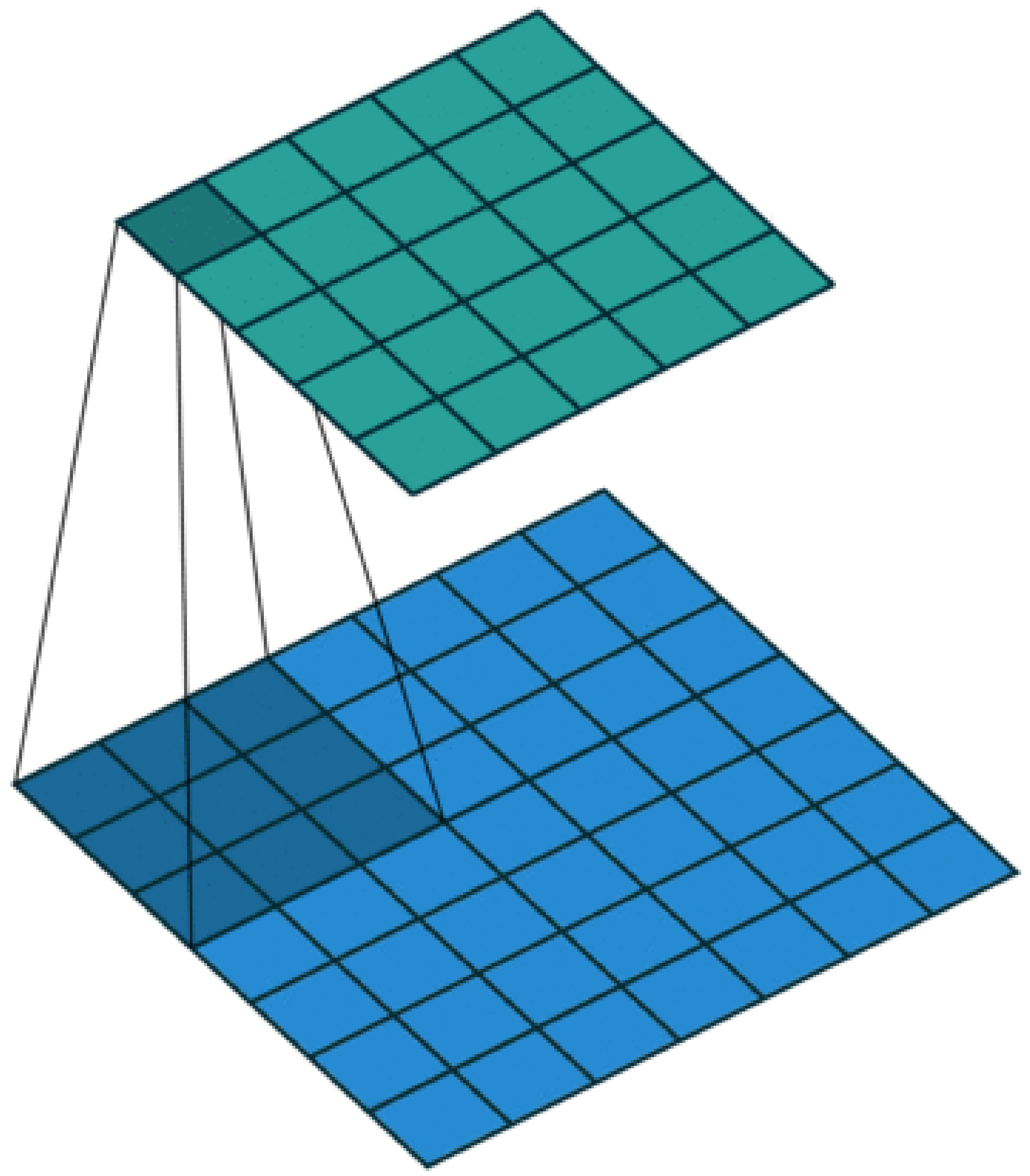
$$= -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

[실습5] 행렬과 연립방정식



컨볼루션 연산

2D 컨볼루션의 계산



컨볼루션 연산

합성곱 후 합 연산

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix} \circledast \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{-1} & \\ & \end{bmatrix}$$

컨볼루션 연산

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circledast \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \boxed{-1} & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

컨볼루션 연산

$$\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\1&0&0&1\end{bmatrix} \circledast \begin{bmatrix}1&-1\\1&-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1&-1&\boxed{0}\\ & & \end{bmatrix}$$

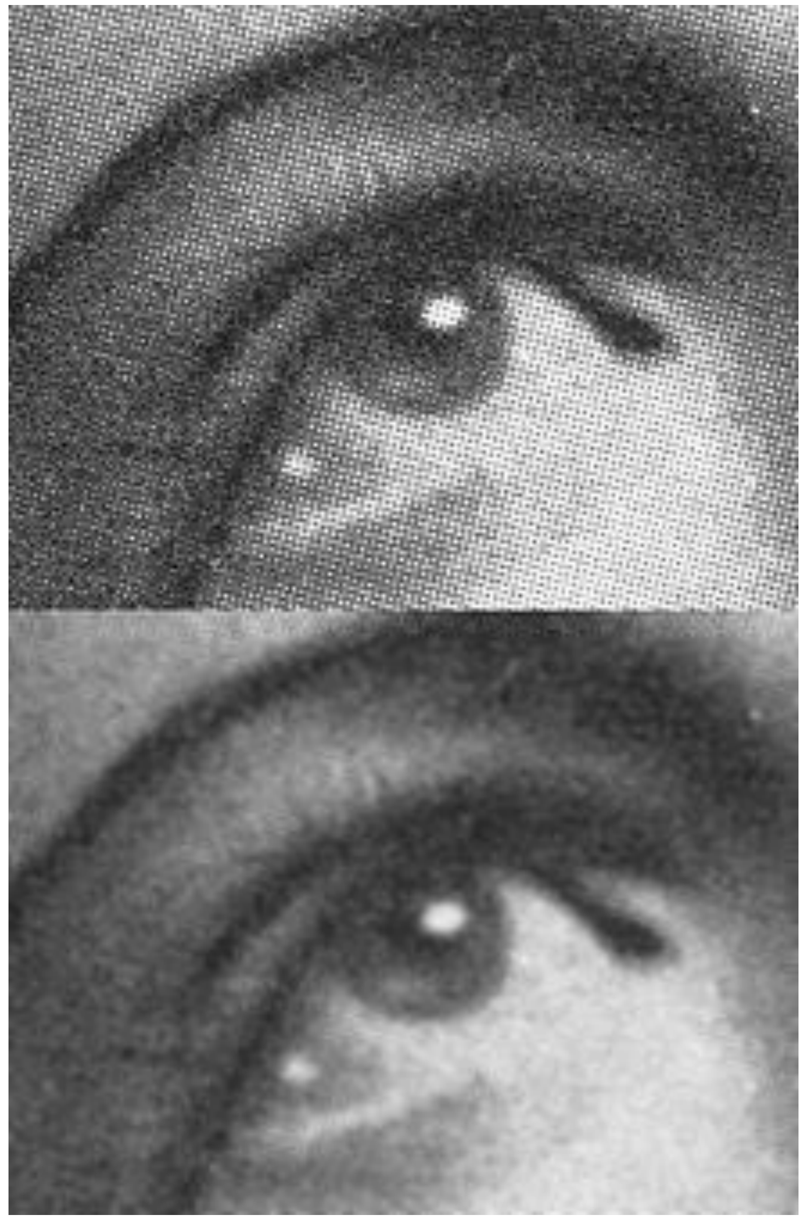
컨볼루션 연산

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{1} \\ 1 & 0 & \boxed{0} & \boxed{1} \end{bmatrix} \circledast \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \boxed{-2} \end{bmatrix}$$

컨볼루션 연산

가우시안 필터

$$\frac{1}{273}\begin{bmatrix}1 & 4 & 7 & 4 & 1\\4 & 16 & 26 & 16 & 4\\7 & 26 & 41 & 26 & 7\\4 & 16 & 26 & 16 & 4\\1 & 4 & 7 & 4 & 1\end{bmatrix}$$



컨볼루션 연산

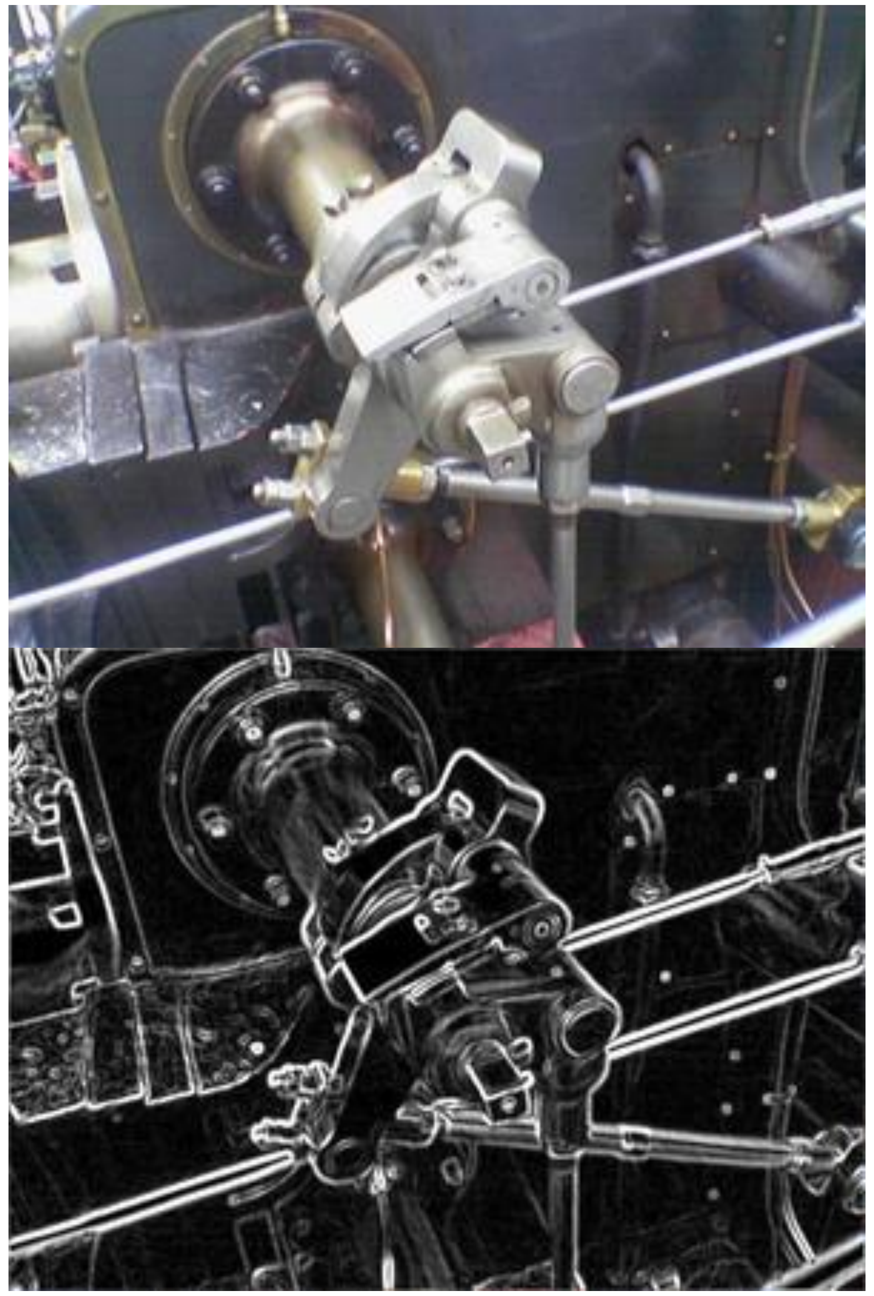
소벨 필터

-1	0	+1
-2	0	+2
-1	0	+1

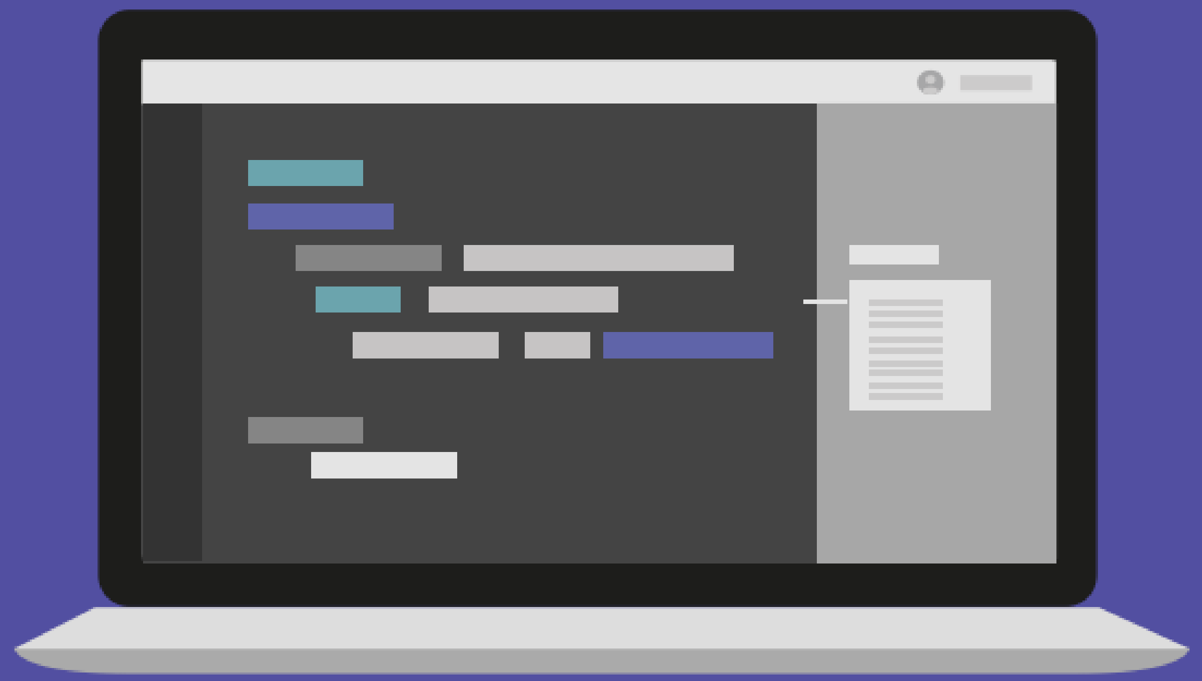
Gx

+1	+2	+1
0	0	0
-1	-2	-1

Gy



[실습6] 컨볼루션 연산



이번 장에서는!

1. 벡터와 행렬의 정의와 연산 방법에 대해 배웠습니다.
2. 행렬의 여러가지 형태에 대해 알아보았습니다.
3. 역행렬과 이를 이용한 연립방정식 해결법을 배웠습니다.
4. 컨볼루션 연산의 계산법과 용도에 대해 배웠습니다.

/* elice */

문의 및 연락처

academy.elice.io
contact@elice.io
facebook.com/elice.io
medium.com/elice