Beispiel Kleisli Kategorie

Richard Stewing

07.08.2018

1 Definition Kleisli

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $M = (T, \mu, \eta)$ eine Monade. Mit $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ als Endofunktor und $\mu : T(T(A)) \to T(A)$ und $\eta : A \to T(A)$ die Monoid-Operationen. Dann ist die Kleisli-Kategorie $\mathcal{C}_M$ definiert mit:

- $Obj(\mathcal{C}_M) = Obj(\mathcal{C})$
- $Mor_{\mathcal{C}_M}(X, Y) = Mor_{\mathcal{C}}(X, T(Y))$

und

- $id_A = \eta_A$
- $f \circ_{\mathcal{C}_M} g = \mu \circ_{\mathcal{C}} T(f) \circ_{\mathcal{C}} g$

2 Beispiel mit der Listen-Monad $\_^*$

- Sei A eine Menge, A^* ist die Menge aller Wörter über A
- Sei $f : A \to B$, dann ist $f^*([a_0, \ldots]) = [f(a_0), \ldots] \in B^*$ (wie das Haskell *map*)
- $\eta : A \to A^*, \eta(a) = [a]$
- $\mu : A^{**} \to A^*, \mu = concat$

2.1 Kleisli-Kategorie zur Listen-Monad

- $Obj(\mathcal{S}_{List}) = Obj(\mathcal{S})(= Alle\ Mengen)$
- $id_A = \eta_A$

- Seien A, B, C beliebig $\in \mathcal{S}$
- $g : A \to B^*$
- $f : B \to C^*$
- $f^* : B^* \to C^{**}$
- $f \circ_{\mathcal{S}_{List}} g = concat \circ_{\mathcal{S}} f^* \circ_{\mathcal{S}} g$
- Sei $a \in A$
- $(f \circ_{\mathcal{S}_{List}} g)(a) = cancat(f^*(g(a)))$