BAB 3

MATRIKS, SISTEM PERSAMAAN LINEAR, DAN DETERMINAN

Petemuan ke-	Pokok/Sub Pokok Bahasan	Tujuan Pembelajaran
6	**Matriks, Sistem Persamaan Linear, dan Determinan** Matriks dan operasinya Sistem Persamaan Linear; Eliminasi Gauss	Mahasiswa diharapkan mampu: ▪ memahami konsep dasar matriks, ▪ menjumlahkan matriks ▪ mengalikan matriks dengan skalar ▪ menghitung transpos matriks ▪ mengalikan matriks dengan matriks ▪ memahami sifat-sifat perkalian matriks ▪ menghitung solusi sistem persamaan linear dengan eliminasi Gauss
7	**Matriks, Sistem Persamaan Linear, dan Determinan** Rank Matriks Eksistensi dan Sifatsifat Umum Solusi Sistem Persamaan Linear Determinan; Aturan Cramer	Mahasiswa diharapkan mampu: ▪ menghitung rank matriks ▪ memahami eksistensi dan sifat-sifat umum solusi sistem persamaan linear ▪ menghitung determinan matriks orde 2 dan 3 ▪ menghitung determinan matriks orde n ▪ menghitung solusi persamaan linear dengan aturan Cramer

3.1 Matriks dan Operasinya

3.1.1 Pengertian Matriks

Matriks adalah susunan teratur beberapa bilangan atau fungsi di dalam sebuah kurung. Bilangan atau fungsi tersebut disebut unsur (elemen) matriks. Beberapa contoh matriks sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{bmatrix}.$$

Jalur horisontal di dalam matriks disebut baris, sedangkan jalur vertikalnya disebut kolom.

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \text{baris} \\ \\ \end{array} \\ \text{kolom} & \end{array}$$

Pada contoh matriks di atas, matriks pertama dikatakan berukuran 3 × 3 (terdiri dari 3 baris dan 3 kolom), matriks kedua 2 × 1, matriks ketiga 1 × 3, dan matriks keempat dan kelima 2 × 2. Matriks yang hanya terdiri dari satu baris disebut *matriks baris* atau *vektor baris*, sedangkan matriks yang hanya terdiri dari satu kolom disebut *matriks kolom* atau *vektor kolom*. Matriks yang jumlah barisnya sama dengan jumlah kolomnya disebut *matriks persegi*, sedangkan matriks yang jumlah baris dan kolomnya tidak sama disebut *matriks persegi panjang*.

Secara umum, matriks ditulis sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix}$$

Matriks ini berukuran $i \times j$. Unsur-unsur matriks A diberi tanda *subscript* ganda, yakni *ij*. Ini menunjukkan letak unsur tersebut dalam baris dan kolom. Unsur a_{11}, misalnya, terletak pada baris pertama kolom pertama, a_{21} terletak pada baris kedua kolom pertama, dan seterusnya.

3.1.2 Persamaan Matriks

Dua matriks dikatakan sama jika dan hanya jika ukuran dan unsur-unsur kedua matriks tersebut sama. Sebagai contoh, misalnya ada dua matriks A dan B,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

maka $A = B$ jika dan hanya jika $a_{ij} = b_{ij}$, yakni $a_{11} = b_{11}$, $a_{21} = b_{21}$, $a_{12} = b_{12}$, dan $a_{22} = b_{22}$.

CONTOH 1 Diketahui

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Jika $A = B$, tentukan a, b, c, dan d.

Penyelesaian

$a = 1$, $b = 5$, $c = 2$, dan $d = -4$.

3.1.3 Transposisi Matriks

Transposisi sebuah matriks diperoleh dengan cara menukarkan baris dan kolom matriks secara serempak. Misalnya,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix}$$

maka transposisi matriks A, ditulis A^T, adalah

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{i1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1j} & a_{2i} & \cdots & a_{ji} \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa jika matriks A berukuran $i \times j$, transposisi matriks A atau A^T berukuran $j \times i$.

CONTOH 2 Diketahui

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Tentukan A^T.

Penyelesaian

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

3.1.4 Perkalian Matriks dengan Skalar

Misalnya *k* = konstanta (bilangan skalar) dan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

maka

$$kA = k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{bmatrix}.$$

CONTOH 3 Tentukan –*A* dan 2*A* jika

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & -4 \end{bmatrix},$$

Penyelesaian

$$-A = (-1)A = (-1)\begin{bmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -7 & -5 \\ -2 & -3 & -1 \\ -4 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

dan

$$2A = 2\begin{bmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 14 & 10 \\ 4 & 6 & 2 \\ 8 & 12 & -8 \end{bmatrix}$$

3.1.5 Penjumlahan Matriks

Dua buah matriks, misalnya *A* dan *B*, dapat dijumlahkan apabila ukurannya sama. Matriks *A* + *B* diperoleh dengan menjumlahkan unsur-unsur yang letaknya sama.

CONTOH 4 Jika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 3 & 7 & 4 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

Tentukan C = A + B.

Penyelesaian

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 3 & 7 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & -7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 6-1 & -2+4 \\ 3+3 & 7-7 & 4+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 6 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

3.1.6 Perkalian Matriks dengan Matriks

Misalnya A dan B matriks. A × B dapat ditentukan jika dan hanya jika jumlah unsur dalam baris A sama dengan jumlah unsur pada kolom B, atau, dengan kata lain, jumlah kolom A sama dengan jumlah baris B. Sebagai contoh, jika

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} e & f & g \\ h & i & j \end{bmatrix}.$$

maka

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f & g \\ h & i & j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bh & af+bi & ag+bj \\ ce+dh & cf+di & cg+dj \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa A berukuran 2 × 2 dan B berukuran 2 × 3 maka AB berukuran 2 × 3. Secara umum, jika A berukuran $i \times j$ dan B berukuran $j \times k$ maka AB berukuran $i \times k$.

CONTOH 1 Tentukan hasil kali A dan B jika diketahui

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & -4 \end{bmatrix}.$$

Penyelesaian

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4\cdot 1 + 2\cdot 2 & 4\cdot 5 + 2\cdot 7 & 4\cdot 3 + 2(-4) \\ -3\cdot 1 + 1\cdot 2 & -3\cdot 5 + 1\cdot 7 & -3\cdot 3 + 1(-4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 34 & 4 \\ -1 & -8 & -13 \end{bmatrix}$$

CONTOH 2 Tentukan $(AB)^T$ dan $B^T A^T$ jika diketahui

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & -4 \end{bmatrix}.$$

Penyelesaian

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + (-2\cdot 2) & 1\cdot 5 + (-2\cdot 7) & 1\cdot 3 + (-2)(-4) \\ 4\cdot 1 + 6\cdot 2 & 4\cdot 5 + 6\cdot 7 & 4\cdot 3 + 6(-4) \\ 3\cdot 1 + 5\cdot 2 & 3\cdot 5 + 5\cdot 7 & 3\cdot 3 + 5(-4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -9 & 11 \\ 16 & 62 & 12 \\ 13 & 50 & -11 \end{bmatrix}$$

maka

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} -3 & 16 & 13 \\ -9 & 62 & 12 \\ 11 & 12 & -11 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya,

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 6 & 5 \end{bmatrix} \text{ dan } B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2(-2) & 1\cdot 4 + 2\cdot 6 & 1\cdot 3 + 2\cdot 5 \\ 5\cdot 1 + 7(-2) & 5\cdot 4 + 7\cdot 6 & 5\cdot 3 + 7\cdot 5 \\ 3\cdot 1 + (-4)(-2) & 3\cdot 4 + (-4\cdot 6) & 3\cdot 3 + (-4\cdot 5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 16 & 13 \\ -9 & 62 & 12 \\ 11 & 50 & -11 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa $(AB)^T = B^T A^T$, dan rumus ini berlaku umum.

SOAL-SOAL LATIHAN 3.1

Diketahui

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

1. $A - B^T$
2. AB
3. BA
4. $A^T B^T$
5. $(BA)^T$

3.2 Sistem Persamaan Linear: Eliminasi Gauss

Tinjau sistem persamaan linear yang terdiri dari *i* baris dan *j* peubah, yakni x_1, x_2, …, x_j, berikut.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j &= b_j
\end{aligned}
$$

Jika b = 0, sistem persamaan linearnya disebut sistem homogen, sedangkan jika b ≠ 0, disebut sistem takhomogen.

Sistem persamaan linear di atas dapat dituliskan dalam bentuk matriks:

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_j \end{bmatrix}
$$

dan secara sederhana ditulis

$$Ax = b$$

dengan

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix}, \qquad
x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \end{bmatrix}, \quad \text{dan} \quad
b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_j \end{bmatrix}
$$

Sistem persaman linear di atas juga dapat dituliskan dalam bentuk "*matriks yang diperluas*" sebagai berikut.

$$
\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & b_j \end{array}\right].
$$

Tiga Kemungkinan Solusi Sistem Persamaan Linear.

(1) Memiliki solusi tunggal

(2) Memiliki banyak solusi (takhingga)

(3) Tidak memiliki solusi

CONTOH 1 Tentukan solusi sistem persamaan linear berikut.

$$\begin{aligned} 2x \quad\quad\quad - z &= 2, \\ 6x + 5y + 3z &= 7, \\ 2x - y \quad\quad\quad &= 4. \end{aligned}$$

Penyelesaian

Matriks yang diperluas yang sesuai dengan sistem persamaan di atas adalah

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 6 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

Tahapan penyelesaiannya sebagai berikut.

(1) Baris pertama dibuat tetap. Baris kedua diubah sedemikian sehingga unsur matrik baris pertama kolom kedua menjadi nol. Caranya sebagai berikut: Baris kedua dikurangi oleh 3 kali baris pertama ($B_2 - 3 \times B_1$), hasilnya simpan di baris kedua sehingga diperoleh matriks baru berikut.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

(2) Baris ketiga diubah juga dengan cara mengurangkan baris ketiga oleh baris pertama ($B_3 - B_1$), diperoleh

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

(3) Baris ketiga diubah lagi sedemikian sehingga unsur pada baris ketiga kolom kedua menjadi nol. Caranya, kalikan baris ketiga dengan 5 kemudian tambahkan oleh baris kedua ($5 \times B_3 + B_2$), diperoleh

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 11 \end{array}\right]$$

(4) Bagi baris ketiga oleh 11, diperoleh

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Sistem persamaan linear yang sesuai dengan matriks terakhir adalah

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & & & - & z & = & 2, \\ & & 5y & + & 6z & = & 1, \\ & & & & z & = & 1. \end{array}$$

Masukkan $z = 1$ ke persamaan 2, diperoleh

$$5y + 6 \cdot 1 = 1 \rightarrow y = -1$$

Selanjutnya, masukkan $z = 1$ dan (secara umum) $y = -1$ ke persamaan 1, diperoleh

$$2x - (-1) = 2 \rightarrow x = \tfrac{3}{2}$$

Jadi, solusi sistem persamaan linear di atas adalah (x, y, z) = ($\frac{3}{2}$,–1, 1).

Metode penyelesaian sistem persamaan linear seperti di atas disebut metode **eliminasi Gauss**. Dengan cara ini, peubah terakhir (dalam contoh di atas: z) ditemukan terlebih dahulu, kemudian *y*, dan *x*. Prosesnya disebut substitusi mundur (*back subtitution*). Unsur matriks pada baris yang dibuat tetap yang tepat berada di atas unsur yang di”nol”kan pada baris dibawahnya disebut pivot. Pada contoh 1 di atas, angka 2 pada baris pertama dan angka 5 pada baris kedua adalah pivot.

Penulisan tahapan penyelesaian dengan metode eliminasi Gauss dapat disingkat. Untuk contoh 1 di atas dapat ditulis sebagai berikut.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 6 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[B_3 - B_1]{B_2 - 3B_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 11 \end{array}\right] \xrightarrow{B_3 : 11} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Secara umum, prosedur sistematik untuk menyelesaikan sistem persamaan linear menggunakan metode eliminasi Gauss sebagai berikut.

(1) Pastikan sistem persamaan linear tersebut dalam keadaan standar, kemudian tulis matriks yang bersesuaian dengannya.

(2) Jika perlu, pertukarkan barisnya untuk mendapatkan pivot yang cocok.

(3) Buat semua bilangan di bawah pivot menjadi nol.

(4) Sekarang, abaikan baris pertama dan kolom pertama. Ulangi 2 dan 3 pada submatriks yang tersisa. Untuk matriks yang lebih dari tiga baris, selanjutnya abaikan dua baris pertama dan dua kolom pertama, ulangi 2 dan 3. Demikian seterusnya sehingga diperoleh bentuk matriks segitiga atas yang diperluas.

(5) Terakhir, tulis sistem persamaan yang sesuai dengan matriks segitiga atas yang diperluas. Lakukan substitusi mundur untuk mendapatkan solusinya.

CONTOH 2 Pecahkan sistem persamaan linear berikut.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & 5x & + & 2y & - & z & = & 10 \\ -3w & - & 5x & + & y & - & 2z & = & -10 \\ w & + & x & + & y & & & = & 6 \\ 2w & - & x & + & 3y & + & 5z & = & 6 \end{array}$$

Penyelesaian

Gunakan metode eliminasi Gauss maka

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 5 & 2 & -1 & 10 \\ -3 & -5 & 1 & -2 & -10 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 5 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{B_1 \Leftrightarrow B_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ -3 & -5 & 1 & -2 & -10 \\ 0 & 5 & 2 & -1 & 10 \\ 2 & -1 & 3 & 5 & 6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[B_4-2B_1]{B_2+3B_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 5 & 2 & -1 & 10 \\ 0 & -3 & 1 & 5 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow[2B_4-3B_2]{2B_3+5B_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 24 & -12 & 60 \\ 0 & 0 & -10 & 16 & -36 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{B_2:(-2) \\ B_3:12 \\ B_4:(-2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -8 & 18 \end{array}\right] \xrightarrow{2B_4-5B_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 11 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{B_4:(-11)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Sistem persamaan linear yang sesuai dengan matriks terakhir adalah

$$\begin{array}{ccccccccc} w & + & x & + & y & & & = & 6 \\ & & x & - & 2y & + & z & = & -4 \\ & & & & 2y & - & z & = & 5 \\ & & & & & & z & = & -1 \end{array}$$

Dari baris terakhir diperoleh $z=-1$. Dari persamaan ke-3 diperoleh

$$y = \frac{z+5}{2} = \frac{-1+5}{2} = 2,$$

dari persamaan ke-2 diperoleh

$$x = -4 + 2y - z = -4 + 2(2) - (-1) = 1,$$

dan dari persamaan ke-1 diperoleh

$$w = 6 - x - y = 6 - 1 - 2 = 3$$

Dengan demikian, solusi sistem persamaan linear di atas adalah $(w, x, y, z) = (3,\ 1,\ 2,\ -1)$.

SOAL-SOAL LATIHAN 3.2

Tentukan solusi sistem persamaan linear di bawah ini menggunakan metode eliminasi Gauss.

1. $$\begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & 4 \\ 7x & - & 2y & = & 3 \end{array}$$

2. $$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & & & = & 4 \\ 5x & & & + & z & = & 7 \\ x & + & 2y & - & z & = & 3 \end{array}$$

3. $$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2w & + & x & & & & & = & 1 \\ w & & & - & y & & & = & 6 \\ & & 2x & & & - & z & = & -3 \\ -2w & + & x & & & + & 3z & = & 0 \end{array}$$

4. Hukum tegangan Kirchoff menyatakan bahwa jumlah tegangan pada suatu lintasan tertutup adalah nol. Jika prinsip ini diterapkan pada gambar rangkaian di bawah ini, diperoleh sistem persamaan linear sebagai berikut.

$$(R_1 + R_2 + R_3)I_1 + R_3 I_2 + R_4 I_3 = E_1$$

$$R_3 I_1 + (R_2 + R_3 + R_5)I_2 - R_5 I_3 = E_2$$

$$R_4 I_1 - R_5 I_2 + (R_4 + R_5 + R_6)I_3 = E_3$$

Gunakan metode eliminasi Gauss untuk menentukan nilai I_1, I_2, dan I_3 jika diketahui:

$R_1 = R_2 = R_4 = 1\ \Omega$,

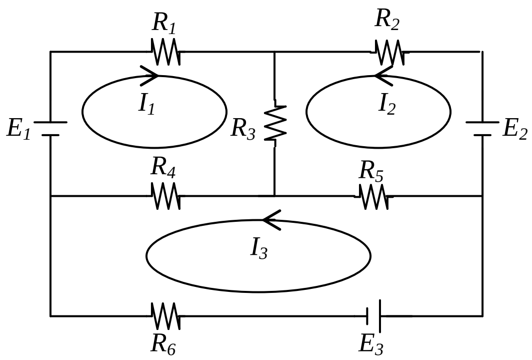
$R_3 = R_5 = 2\ \Omega$,

$R_6 = 4\ \Omega$,

$E_1 = 25$ V,

$E_2 = 18$ V, dan

$E_3 = 8$ V.



3.3 Determinan; Aturan Cramer

3.3.1 Menentukan Determinan

Determinan didefinisikan untuk matriks persegi. Untuk matriks 2 × 2:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

determinannya adalah

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Perhatikan perbedaaan penulisan matriks dan determinan matriks. Unsur-unsur matriks A berada di dalam tanda kurung [ ], sedangkan unsur-unsur determinan A ditulis di dalam | |.

CONTOH 1 Tentukan det A jika $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Penyelesaian

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (-1)(5) - (3)(2) = -11$$

Untuk matriks $n \times n$:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Menentukan nilai determinan A di atas dapat dilakukan dengan cara berikut. Misalnya kita ingin mencari

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Kita keluarkan satu baris dan satu kolom maka akan diperoleh determinan dengan orde lebih rendah 1. Misalnya kita keluarkan baris dan kolom yang mengandung unsur a_{23}, yakni unsur pada baris ke-2 dan kolom ke-3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

maka tersisa

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = M_{23}$$

M_{23} disebut minor dari a_{23}. Minor bertanda $(-1)^{i+j} M_{ij}$ disebut kofaktor dari a_{ij}. Setelah mendapatkan kofaktor dari a_{ij}, kita dapat menentukan determinannya sebagai berikut:

> *Kalikan setiap unsur salah satu baris (atau kolom) dengan kofaktornya dan jumlahkan hasilnya.*

Untuk memudahkan mengingat, tanda dari kofaktor (+ atau −) untuk setiap unsur sebagai berikut.

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \\ - & + & - & dst \\ + & - & + & \\ dst & & & \end{vmatrix}$$

CONTOH 2 Tentukan determinan A jika

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian

Misalnya kita gunakan baris pertama. Unsurnya adalah -1, 7, dan 5. Minor dari -1 adalah

$$\begin{vmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}$$

Minor dari 7 adalah

$$\begin{vmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}$$

Minor dari 5 adalah

$$\begin{vmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

Dengan mengingat tanda dari kofaktor

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \\ - & + & - & dst \\ + & - & + & \\ dst & & & \end{vmatrix}$$

maka diperoleh

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -1(-18) - 7(-12) + 5(0) = 102$$

Hasil yang sama akan diperoleh jika kita ambil baris atau kolom yang lain. Untuk mengecek, ambil kolom 2 maka diperoleh

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -7\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -7(-12) + 3(-16) - 6(-11) = 102$$

Metode menentukan determinan seperti yang telah kita lakukan di atas merupakan salah satu bentuk dari pengembangan Laplace dari suatu determinan. Jika determinannya orde ke-4 atau lebih, menggunakan pengembangan Laplace memerlukan waktu yang panjang. Metode ini dapat disederhanakan melalui kenyataan-kenyataan berikut:

1. Jika setiap unsur dari satu baris atau kolom dari determinan dikalikan dengan bilangan *k*, nilai determinan dikalikan dengan *k*.
2. Nilai determinan sama dengan nol jika (a) semua unsur dalam satu baris atau kolom adalah nol, atau (b) dua baris atau dua kolom identik, atau (c) dua baris atau dua kolom sebanding/proporsional.
3. Jika dua baris atau dua kolom dari determinan dipertukarkan, nilai determinan berganti tanda (dari + menjadi − atau sebaliknya).
4. Nilai determinan *tidak* berubah jika (a) baris ditulis sebagai kolom atau sebaliknya, atau (b) kita menambahkan pada setiap unsur salah satu baris (atau kolom), *k* kali dari unsur pada baris (atau kolom) lain, dengan *k* suatu bilangan.

Selanjutnya, determinan dapat ditentukan menggunakan reduksi baris Dalam hal ini, jadikan pivot selalu bernilai 1, kemudian unsur di bawahnya menjadi nol (seperti pada eliminasi Gauss untuk matriks). Kita mulai dari contoh yang paling sederhana.

CONTOH 3 Tentukan determinan $D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$.

Penyelesaian

Baris pertama merupakan kelipatan dari 2 maka determinan di atas dapat ditulis menjadi

$$D = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Selanjutnya, baris ke-2 dikurangi oleh 3 kali baris ke-1. Prosesnya ditulis sebagai berikut

$$D = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{B3-3B_1} 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} \xrightarrow{\textit{Pengembangan Laplace}} 2|-7| = -14$$

Jadi,

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -14.$$

Kita cek dengan menggunakan rumus determinan 2 × 2:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (2)(-1) - (3)(4) = -14.$$

CONTOH 4 Tentukan $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix}$.

Penyelesaian

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{K1:2} 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow[B3-3B1]{B2-2B1} 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -8 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Laplace}]{\text{Pengembangan}} 2\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -8 & 10 \end{vmatrix} = 2\{(-1)(10) - (-8)(4)\} = 2(-10+32) = 44.$$

Jadi,

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 44.$$

CONTOH 5 Tentukan determinan $D = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 7 & 3 \\ 8 & 2 & -9 & 5 \\ -4 & 6 & 8 & 4 \\ 2 & -9 & 3 & 8 \end{vmatrix}$

Penyelesaian

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 7 & 3 \\ 8 & 2 & -9 & 5 \\ -4 & 6 & 8 & 4 \\ 2 & -9 & 3 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow{K1:(-2)} D = -2\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 & 3 \\ -4 & 2 & -9 & 5 \\ 2 & 6 & 8 & 4 \\ -1 & -9 & 3 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{B2+4B1 \\ B3-2B1 \\ B4+B1}}$$

$$-2\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & 18 & 19 & 17 \\ 0 & -2 & 8 & -6 \\ 0 & -5 & 10 & 11 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{Laplace}]{\text{Pengembangan}} -2\begin{vmatrix} 18 & 19 & 17 \\ -2 & 8 & -6 \\ 5 & 10 & 11 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{determinan berganti}]{B_1 \Leftrightarrow B_2,\ \text{tanda}}$$

$$2\begin{vmatrix} -2 & 8 & -6 \\ 18 & 19 & 17 \\ 5 & 10 & 11 \end{vmatrix} \xrightarrow{B_1:(-2)} -4\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 18 & 19 & 17 \\ 5 & 10 & 11 \end{vmatrix} \xrightarrow[B_3-5B_1]{B_2-18B_1} -4\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 91 & -37 \\ 0 & 30 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Laplace}]{\text{Pengembangan}} -4\begin{vmatrix} 91 & -37 \\ 30 & -4 \end{vmatrix} = -4\{(91)(-4)-(30)(-37)\}$$

$$= -4\{-364+1110) = 2984$$

Jadi,

$$D = -2\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 & 3 \\ -4 & 2 & -9 & 5 \\ 2 & 6 & 8 & 4 \\ -1 & -9 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 672$$

3.3.2 Aturan Cramer

Tinjau sistem persamaan linear berikut.

$$\begin{aligned} ax &+ by &= e \\ cx &+ dy &= f \end{aligned}$$

Untuk mendapatkan x, kalikan persamaan ke-1 dengan d dan persamaan ke-2 dengan b, kemudian kurangi persamaan ke-1 oleh persamaan ke-2, maka diperoleh

$$x = \frac{ed - bf}{ad - bc}$$

Dengan cara serupa, diperoleh

$$y = \frac{af - ce}{ad - bc}$$

Dalam notasi determinan,

$$ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \equiv D, \quad ed - bf = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} \equiv D_x, \quad af - ce = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} \equiv D_y,$$

Solusi dari sistem persamaan di atas secara umum dapat ditulis

$$x = \frac{D_x}{D} \quad \text{dan} \quad y = \frac{D_y}{D}.$$

Dalam bentuk matriks, sistem persamaan linear di atas ditulis

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

Untuk mendapatkan D_x, kita tinggal ganti kolom pertama dengan unsur kolom paling kanan, sedangkan untuk mendapatkan D_y, ganti kolom kedua dengan unsur kolom paling kanan.

CONTOH 6 Gunakan aturan Cramer untuk memecahkan sistem persamaan linear berikut.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ 5x - y &= 9 \end{aligned}$$

Penyelesaian

Dalam bentuk matriks, sistem persamaan linear di atas ditulis: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1) - (5)(3) = -17$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} = 7(-1) - (9)(3) = -34$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 2(9) - (5)(7) = -17$$

Dengan demikian diperoleh

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-34}{-17} = 2 \qquad \text{dan} \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-17}{-17} = 1$$

CONTOH 7 Gunakan aturan Cramer untuk menentukan solusi sistem persamaan linear berikut.

$$\begin{aligned} -2x + 3y + 4z &= 12 \\ 3x + 4y - 2z &= -15 \\ 5x + 6y - 3z &= -22 \end{aligned}$$

Penyelesaian

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & 6 & -3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -2(0) - 3(1) + 4(-2) = -11$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 12 & 3 & 4 \\ -15 & 4 & -2 \\ -22 & 6 & -3 \end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -15 & -2 \\ -22 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -15 & 4 \\ -22 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 12(0) - 3(1) + 4(-2) = -11$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -2 & 12 & 4 \\ 3 & -15 & -2 \\ 5 & -22 & -3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -15 & -2 \\ -22 & -3 \end{vmatrix} - 12\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & -15 \\ 5 & -22 \end{vmatrix}$$

$$= -2(1) - 12(1) + 4(9) = 22$$

$$D_z = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 12 \\ 3 & 4 & -15 \\ 5 & 6 & -22 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 4 & -15 \\ 6 & -22 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & -15 \\ 5 & -22 \end{vmatrix} + 12\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -2(2) - 3(9) + 12(-2) = -55$$

Dengan demikian diperoleh

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-11}{-11} = 1, \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{22}{-11} = -2, \qquad z = \frac{D_x}{D} = \frac{-55}{-11} = 5$$

SOAL-SOAL LATIHAN 3.3

Tentukan determinan berikut.

1. $D = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

2. $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$

3. $D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ 8 & 5 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

Tentukan solusi sistem persamaan linear berikut menggunakan aturan Cramer.

4. $$\begin{aligned} -x + y - z &= 4 \\ x - y + 2z &= 3 \\ 2x - 2y + 4z &= 6 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} 2x + y - 5z &= 7 \\ x - 2y &= 1 \\ 3x - 5y - z &= 4 \end{aligned}$$
