DETERMINAN DAN MATRIKS ORDE TIGA

Matematika Industri I

TIP – FTP – UB

Determinan Orde-Ketiga

- Sebuah determinan orde-ketiga punya 3 baris dan 3 kolom.
- Setiap elemen determinan dikaitkan dengan minornya yang diperoleh dengan menghilangkan baris dan kolom yang berisi elemen yang bersangkutan.
- Sebagai contoh:

$$\text{the minor of } a_1 \text{ is } \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ obtained thus } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Determinan Orde-Ketiga

- Menentukan nilai determinan orde-ketiga
  - Untuk menguraikan determinan orde-ketiga, kita dapat menulis masing-masing elemen di sepanjang baris atas, mengalikannya dengan minornya, dan memberi suku-sukunya tanda plus dan minus secara bergantian

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Determinan Orde-Ketiga

- Menentukan nilai determinan dengan mengekspansi pada sebarang baris dan kolom

$$
\begin{array}{ccccccc}
+ & - & + & - & \cdots & \cdots & \cdots \\
- & + & - & + & \cdots & \cdots & \cdots \\
+ & - & + & - & \cdots & \cdots & \cdots \\
- & + & - & + & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

Contoh

- Contoh 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 54 + 12 = -30$$

- Contoh 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 12 - 64 + 22 = -30$$

Determinan Suatu Matriks Bujursangkar

- Kofaktor
  - Jika **A**=(a_{ij}) adalah suatu matriks bujursangkar, setiap elemen menghasilkan kofaktor, minor dari elemen dalam determinan beserta 'tanda tempatnya'

$$A=\begin{pmatrix}5&2&1\\0&6&3\\8&4&7\end{pmatrix}\rightarrow \det A=|A|=\begin{vmatrix}5&2&1\\0&6&3\\8&4&7\end{vmatrix}=150$$

$$kofaktor$$

$$5\rightarrow +(42-12)=+30$$

$$2\rightarrow -(0-24)=+24$$

Determinan Suatu Matriks Bujursangkar

- Adjoin suatu matriks bujursangkar
  - Misal matriks bujursangkar **C** dibentuk dari matriks bujursangkar **A** dimana elemen-elemen **C** secara respektif merupakan kofaktor dari elemen **A**, maka:

$$\mathbf{A}=\left(a_{ij}\right) \text{ and } A_{ij} \text{ is the cofactor of } a_{ij} \text{ then } \mathbf{C}=\left(A_{ij}\right)$$

  - Transpos dari **C** disebut adjoin **A**, dinotasikan adj **A**.

Determinan Suatu Matriks Bujursangkar

- Contoh $A = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{6} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$
- Jika **C** adalah matriks kofaktor dari **A**, maka $C = \begin{pmatrix} -24 & 6 & 15 \\ 20 & -5 & -5 \\ 13 & 8 & -10 \end{pmatrix}$
- Adj **A** = $C^T = \begin{pmatrix} -24 & 20 & 13 \\ 6 & -5 & 8 \\ 15 & -5 & -10 \end{pmatrix}$

Invers Suatu Matriks Bujursangkar

- Jika setiap elemen adjoin matriks bujursangkar **A** dibagi dengan determinan **A**, yaitu |**A**|, maka matriks yang dihasilkan disebut invers **A** dan dinyatakan dengan $\mathbf{A}^{-1}$.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}\left(\mathrm{adj}\,\mathbf{A}\right)$$

- *Note*: jika det **A**=0 maka invers tidak ada

Invers Suatu Matriks Bujursangkar

- $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{6} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \rightarrow detA = |A| = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{6} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = 45$
- Adj **A** = $C^T = \begin{pmatrix} -24 & 20 & 13 \\ 6 & -5 & 8 \\ 15 & -5 & -10 \end{pmatrix}$
- $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{24}{45} & \frac{20}{45} & \frac{13}{45} \\ \frac{6}{45} & -\frac{5}{45} & \frac{8}{45} \\ \frac{15}{45} & -\frac{5}{45} & -\frac{10}{45} \end{pmatrix} = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} -24 & 20 & 13 \\ 6 & -5 & 8 \\ 15 & -5 & -10 \end{pmatrix}$

TUGAS-2
(dikumpulkan Jum'at sebelum jam 11)

1. Tentukan invers dari matriks $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

2. Tentukan invers dari matriks $\begin{pmatrix} 8 & -56 & 38 \\ 6 & -4 & 0 \\ -5 & 35 & -19 \end{pmatrix}$

3. Diketahui matriks A= $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ dan matriks B = $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, tentukan matriks X berordo 2x2 yang memenuhi X.A=B.

TUGAS-2

4. Diketahui matriks A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; B = $\begin{pmatrix} x+y & 2 \\ 3 & y \end{pmatrix}$; dan C = $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Apabila B – A = C^T, maka nilai x.y adalah ...

5. Matriks A = $\begin{pmatrix} 3 & -x \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ adalah matriks singular, maka nilai x adalah ...