

---

# Introduction au traitement des images

Cours de quatrième année de l'E.S.I.E.A.

---

**Version 1.3**

Auteur : Laurent BEAUDOIN

---



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction à l'imagerie numérique</b>	<b>5</b>
1.1	Généralités . . . . .	5
1.1.1	L'image numérique . . . . .	5
1.1.2	Les outils informatiques . . . . .	5
1.2	Quelques domaines d'application . . . . .	6
1.2.1	L'imagerie médicale . . . . .	6
1.2.2	L'imagerie pour la sécurité . . . . .	6
1.3	Un domaine d'étude : la télédétection . . . . .	7
1.3.1	Un secteur d'ingénierie promis à un bel avenir . . . . .	7
1.3.2	Quelques généralités sur la télédétection . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Acquisition d'une image optique</b>	<b>11</b>
2.1	La chaîne d'acquisition . . . . .	11
2.1.1	Définitions générales . . . . .	11
2.1.2	Deux grandes familles de capteurs imageurs optiques . . . . .	12
2.2	Acquisition d'image et télédétection . . . . .	14
2.2.1	Les capteurs imageurs en télédétection spatiale . . . . .	14
2.2.2	La résolution géométrique . . . . .	17
2.3	Visée au nadir : effets de l'aplatissement de la Terre . . . . .	19
2.4	Visée latérale : effet de la rotondité de la Terre . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Modification d'histogrammes</b>	<b>25</b>
3.1	Généralités . . . . .	25
3.1.1	Définitions : . . . . .	25
3.1.2	Transformation d'histogrammes . . . . .	26
3.2	Quelques exemples d'utilisation des histogrammes . . . . .	26
3.2.1	Estimation de la qualité de la numérisation . . . . .	26
3.2.2	Expansion de dynamique . . . . .	28
3.2.3	Égalisation d'histogrammes . . . . .	28
<b>4</b>	<b>La transformée de Fourier</b>	<b>31</b>
4.1	Définitions et propriétés générales . . . . .	31
4.1.1	Définitions . . . . .	32
4.1.2	Quelques propriétés . . . . .	33
4.2	La transformée de Fourier discrète 1 dimension . . . . .	35
4.2.1	La condition de Shannon . . . . .	36
4.2.2	Le phénomène de Gibbs . . . . .	37
4.2.3	Reconstruction . . . . .	38
4.3	La transformée de Fourier 2 dimensions . . . . .	38
4.4	Problèmes de rééchantillonnage d'image . . . . .	41
4.4.1	Mode d'acquisition et qualité intrinsèque de l'image . . . . .	41
4.4.2	Le changement d'orientation . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Filtrage d'images</b>	<b>49</b>
5.1	Généralités . . . . .	49
5.1.1	Le produit de convolution . . . . .	49
5.1.2	Le filtrage linéaire . . . . .	50
5.2	La détection de contours . . . . .	50
5.2.1	Opérateurs dérivatifs du premier ordre . . . . .	52

5.2.2	Opérateurs dérivatifs du second ordre . . . . .	52
5.2.3	Autres opérateurs de dérivation directionnelle . . . . .	53
<b>6</b>	<b>Morphologie mathématique</b>	<b>55</b>
6.1	La dilatation . . . . .	55
6.2	L'érosion . . . . .	56
6.3	L'ouverture $X_B$ . . . . .	56
6.4	La fermeture $X^B$ . . . . .	56
6.5	Le résidu par ouverture . . . . .	57
6.6	Le résidu par fermeture . . . . .	57
6.7	La forme de l'élément structurant . . . . .	57
6.8	La reconstruction géodésique . . . . .	58
6.9	L'érosion composée . . . . .	58
6.10	La reconstruction géodésique composée par un segment . . . . .	59
6.11	Quelques résultats en images . . . . .	59

# Chapitre 1

## Introduction à l'imagerie numérique

### 1.1 Généralités

#### 1.1.1 L'image numérique

Avant toute chose, il est nécessaire de définir les concepts fondamentaux que l'on va manipuler dans ce cours. Commençons tout d'abord par définir le concept d'image[PM96] :

*Image* :

- représentation physique d'un être ou du chose,
- représentation analogique (i.e. basée sur un rapport de ressemblance) d'un être, d'une chose ou d'une abstraction.

Dans le cadre de ce cours, nous nous intéresserons bien évidemment à la représentation physique d'une scène. Plus précisément, nous nous intéresserons aux représentations numériques, c'est-à-dire celles qui sont manipulables par un ordinateur. Dans ce contexte, on peut donc dire qu'une image numérique est un tableau (une matrice) de dimensions finies de valeurs numériques de précision finie. Chaque élément fondamental de ce tableau (chaque case) s'appelle un pixel (de l'anglais picture element). Chaque pixel est donc caractérisé par :

- sa position spatiale dans la matrice (ou tableau),
- sa valeur numérique qui représente sa valeur spectrale (ou radiométrique dans le cas d'images dans les longueurs d'onde visibles).

Les images archivées sur un ordinateur sont des fichiers un peu particuliers. Globalement, tous ces fichiers manipulent les mêmes données fondamentales qui sont le nombre de colonnes, de lignes et le tableau des valeurs numériques. Ces données peuvent être complétées par des informations complémentaires comme le type de codage des valeurs de la matrice (int, unsigned char, float...), le nom de l'image, la profondeur de l'image (1 plan pour une image en niveau de gris, 3 pour une image en couleur) etc... L'organisation de ces données dans le fichier image dépend bien entendu du format utilisé. Comme vous le savez déjà, il existe une multitude de formats d'image existants, chacun avec ses avantages et ses inconvénients. Sans être trop exhaustifs, voici quelques uns des formats les plus courants : BMP, GIF, JPEG, PNG, PS, SUNRAS, TIFF, XBM, XPM... Et moult d'autres formats encore, plus ou moins propriétaires. Bref, vous l'avez compris, le simple fait de charger une image en mémoire ne se fait pas tout seul. Pour vous aider dans la manipulation des images, vous avez à votre disposition des outils informatiques.

#### 1.1.2 Les outils informatiques

Ces outils sont :

- soit des logiciels clé en main commerciaux (PHOTOSHOP, ERDAS, ENVI...) ou libres (GIMP, KHOROS, OPENDX...) plus ou moins spécialisés,
- soit des langages dédiés haut niveau (IDL) ou des bibliothèques comme celles écrites en langage C (gtk+ par exemple).

Choisir parmi ces outils ceux qui sont le plus adaptés dépendra complètement des contraintes du moment. Ainsi, si l'image n'est qu'une composante mineure de votre travail et que vous n'avez qu'un traitement simple à faire sur peu de données, il vaudrait mieux utiliser un logiciel clé en main. Si par contre, l'image est au coeur de votre problématique et que vous avez à traiter un grand nombre d'images en entrée, alors le choix devrait se porter plutôt sur le développement de ses propres programmes. Ce développement peut se faire en utilisant des langages de programmation propriétaires (IDL, ENVI, MATHEMATICA, MATLAB...) ou libres

procédé physique	nom	organe(s)
rayon X	radiologie (radiographie, radioscopie) tomodensitométrie (scanner)	poumons, abdomen, squelette, seins tous
ultrasonographie	échographie dopler	abdomen, coeur, seins, muscles, tendons vaisseaux
magnétisme du noyau des atomes	IRM	tous
radio-activité	scintillographie	tous

TAB. 1.1 – Quelques méthodes d'imagerie médicale et organes imagés.

(langages C, C++, JAVA par exemple). Dans ce dernier cas, le développement sera généralement plus long. Sachez cependant qu'il existe des bibliothèques qui peuvent grandement vous faciliter la tâche (GTK+, Qt...). Attention cependant à bien vérifier que votre développement n'est pas en contradiction avec la licence de ces bibliothèques généralement GNU. Pour vérifier cela, vous pouvez consulter le site <http://www.gnu.org>

Avant d'illustrer par l'exemple quelques uns des secteurs d'ingénierie qui font largement appel à l'image, continuons nos généralités en introduisant quelques notions élémentaires sur l'acquisition des images (ou imagerie). On peut distinguer essentiellement deux types d'imagerie :

- l'imagerie dite passive : le capteur traduit directement l'énergie reçue en une mesure numérique, pas forcément linéaire. Ainsi, le capteur n'agit pas sur son environnement,
- l'imagerie dite active : le capteur émet sa propre source d'éclairement de la scène observée et mesure l'énergie qui revient au capteur.

Dans tous les cas, l'acquisition de l'image peut se faire pixel à pixel, ligne par ligne, toute la matrice simultanément ou de manière différentielle en temps (radar à synthèse d'ouverture).

## 1.2 Quelques domaines d'application

Pour bien comprendre l'intérêt du traitement d'image, il est important de commencer par présenter quelques domaines d'ingénierie où l'image est très largement utilisée. Bien entendu, il est hors de question de faire une présentation exhaustive dans le cadre de ce cours. Seuls quelques domaines sont présentés sans être trop détaillés.

### 1.2.1 L'imagerie médicale

Cette thématique connaît une très forte expansion. Les principales raisons sont :

- l'aide au diagnostic,
- la numérisation des données,
- la télémédecine.

De très nombreux industriels se sont lancés sur ce marché qui représente au bas mot plusieurs milliards d'euros.

L'imagerie médicale est une imagerie active. Les différentes méthodes utilisent des rayons X, des ultrasons, des rayonnements de particules radio-actives ou le magnétisme du noyau des atomes. Le tableau 1.1 présente quelques unes de ces méthodes et les organes imagés.

Toutes ces méthodes sont basées sur la tomographie (du grec *tomos* (section) et *graphein* (écrire). Le patient est vu "en tranche(s)" comme illustré à la figure 1.1 [Gra02]. L'interprétation se fait soit directement sur l'image (imagerie directe comme en radiographie) soit après reconstruction "virtuelle" ou calculée à partir d'un ensemble de prises de vue sous différents angles (scanner/IRM/scintigraphie). L'outil mathématique de base en tomographie est la transformée de Radon.

### 1.2.2 L'imagerie pour la sécurité

Dans notre société actuelle, il y a une très forte demande (et peu d'offre) pour de nombreuses applications dédiées à la sécurité. On peut bien entendu citer :

- les applications de télésurveillance. Les deux pistes principales d'innovations portent soit sur le développement de nouveaux moyens d'acquisition (capteur multispectraux ou porteur comme un drone par exemple), soit

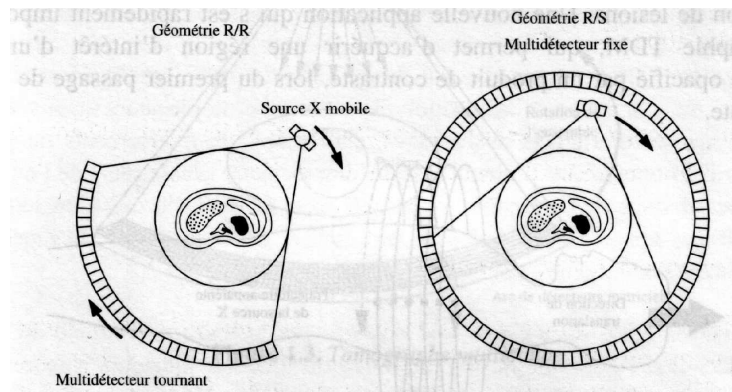


FIG. 1.1 – Principe de fonctionnement de tomographes modernes.

sur le traitement des données acquises comme par exemple la focalisation d'attention de l'opérateur humain qui doit surveiller en permanence plusieurs dizaines de caméras,

- la gestion de trafic en temps réel. Là, les travaux se concentrent plutôt sur le tracking de cibles et l'image peut servir d'initialisation aux modèles numériques de prévision de trafic,
- les applications de vérification d'identité. Ici, il s'agit de valider l'identité d'un individu à partir de ses données biométriques (empreintes digitales, rétine, taille etc...). Plusieurs systèmes sont actuellement en cours de validation dans plusieurs aéroports européens notamment et des systèmes sont prévus pour être déployés facilement à l'occasion des grands événements comme les jeux olympiques par exemple.

Comme on vient de le voir, il existe de nombreux secteurs d'ingénierie qui utilisent l'image. Les traitements associés sont très souvent spécifiques à chaque secteur. Or, dans le cadre de ce cours, on souhaite s'intéresser aux concepts et traitements fondamentaux communs à toutes ces disciplines. On va donc privilégier un domaine d'étude particulier mais suffisamment généraliste pour pouvoir illustrer un maximum de ces concepts théoriques par des cas pratiques. Ce domaine d'étude est la télédétection.

### 1.3 Un domaine d'étude : la télédétection

La télédétection spatiale permet facilement la généralisation des concepts fondamentaux en traitement d'images aux autres disciplines. Outre l'aspect pédagogique et didactique d'une telle spécialité, la télédétection est en pleine expansion de par :

- ses intérêts industriels importants comme la conception et l'intégration des satellites, leur mise en orbite, l'exploitation des données avec de nombreuses thématiques comme la pêche, l'agriculture, la gestion des forêts ou des villes, les applications militaires...,
- ses intérêts scientifiques (météorologie, océanologie, cartographie et occupation des sols),
- sa meilleure vue d'ensemble (changements globaux),
- la forte mobilisation européenne (ESA, EUMETSAT-METEOSAT ENVISAT).

#### 1.3.1 Un secteur d'ingénierie promis à un bel avenir

Il serait fastidieux, voire impossible, de faire une liste exhaustive de toutes les applications utilisant des images satellitaires. Quelques rares auteurs ont eu néanmoins le courage d'essayer de regrouper les principales thématiques concernées par la télédétection [Bon92]. Parmi celles-ci, on peut distinguer l'étude de la géosphère (géologie et géomorphologie), l'étude de l'atmosphère (météorologie et climatologie), l'étude de l'hydrosphère (océanographie, océanologie, hydrologie) l'étude de la biosphère (végétation forestière et herbacée, agriculture) et l'étude des activités humaines (occupation des sols de l'écoumène, urbanisation...). Bien entendu, il y a encore de nombreuses autres thématiques qui peuvent être vues comme une combinaison de celles précédemment citées telles que l'étude des changements globaux ou la prévention des risques. Le monde industriel, de la PME à la multinationale, est très largement présent dans toutes ces thématiques. Ceux qui maîtriseront l'information des images satellitaires pourront cartographier à large échelle, à moindre coût et en quasi temps réel des zones d'intérêt. On comprend mieux pourquoi cette maîtrise peut se révéler stratégiquement indispensable et pourquoi les investissements dans la télédétection sont de plus en plus nombreux et importants.

Le développement de l'ingénierie en télédétection peut se faire à plusieurs niveaux. Tout d'abord, ce développement peut se faire au niveau de la réalisation de l'image. Ainsi, la quête de l'excellence dans les caractéristiques

techniques des instruments spatiaux a de quoi alimenter le travail de générations d'ingénieurs. Ensuite, ce développement peut se faire au niveau de l'utilisation de l'image. Haute résolution, bandes spectrales plus nombreuses, accessibilité aux archives et temps de réactivité réduit, toutes ces nouvelles offres tendent vers un objectif commun : créer de nouvelles demandes, de nouveaux marchés. Pour créer ces nouveaux besoins, les sociétés qui commercialisent des données satellitaires ne se contentent plus de vendre une image brute. Elles proposent une large palette de produits dérivés comme par exemple des images automatiquement géorectifiées [Tou01], des modèles numériques de terrain [Hij85] ou des données interprétées directement utilisables dans un Système d'Information Géographique [EEB89]. En d'autres termes, la télédétection quitte un monde de spécialistes essentiellement scientifiques pour se tourner vers un plus large public : agriculteurs, géographes, urbanistes, spécialistes des réseaux de téléphonie mobile en sont des exemples parmi beaucoup d'autres. Or, tous ces nouveaux venus ne possèdent pas nécessairement toutes les compétences ou ne souhaitent pas investir du temps et de l'argent pour pouvoir extraire efficacement l'information présente dans l'image. Comme les fournisseurs d'images ne peuvent pas non plus s'adapter à toutes les demandes pour faire un produit sur-mesure à chaque besoin, force est de constater que le domaine de la télédétection représente un terreau particulièrement fertile pour le développement de sociétés d'ingénierie de haut niveau.

### 1.3.2 Quelques généralités sur la télédétection

Un des objectifs premier de l'observation de la Terre est de prendre de la hauteur pour avoir une meilleure vision globale [Bea01, Ver82]. De plus, mettre un satellite en orbite et l'y maintenir suppose obéir aux lois de la physique qui s'imposent devant celles de la politique : un satellite, quelle que soit sa nationalité et pour peu qu'il soit placé sur une orbite adéquate, ignore les frontières territoriales et les contraintes diplomatiques, ce qui stratégiquement peut se révéler déterminant. On voit donc se profiler plusieurs familles de satellites d'observation de la Terre, chacune avec des objectifs bien déterminés. La première est celle des satellites de météorologie et est soumise aux contraintes de couverture globale et permanente de la planète. La seconde concerne la reconnaissance militaire et a plutôt comme objectif d'obtenir un maximum de détails pour pouvoir identifier les dangers sur des théâtres d'opération limités spatialement. Les satellites qui ne peuvent pas être classés dans l'une ou l'autre des catégories précédentes constituent la troisième famille, celle de l'observation civile au sens large et dont les contraintes sont spécifiques à chaque mission. Dans le reste de ce document nous excluons le cadre de l'imagerie militaire.

Il y a quelques années, plusieurs experts [Fri96, Fri99, Sto97, Lar97] annonçaient que 32 satellites opérationnels délivreraient des images avec une résolution inférieure à 30 mètres. Même si la plupart des programmes annoncés ont pris du retard ou connu des échecs parfois retentissants (perte d'IKONOS 1, EARLYBIRD, ORBVUEW 4), ils restent dans leur grande majorité maintenus. Plusieurs de ces satellites sont présentés dans les tableaux 1.2 et 1.3, sur les 32 prévus.

L'explosion du nombre de plateformes d'observation et la course effrénée à la haute résolution (60cm pour QUICKBIRD 2) ne sont pas les seules facettes du nouveau visage de la télédétection. En effet, ces nouveaux systèmes imageurs permettent notamment l'accès à des bandes spectrales de plus en plus nombreuses et de plus en plus fines, donc plus discriminantes. Selon le nombre  $nb_s$  de bandes spectrales disponibles, on dira d'un capteur qu'il est multi-spectral ( $nb_s \leq 10$ ) ou hyperspectral ( $nb_s > 10$ ). Les satellites du tableau 1.2 suivants ont un capteur multi-spectral et offrent quatre bandes spectrales (comprises entre 0,4 et  $1,8\mu m$ ) en plus de leur bande panchromatique : CBERS 1, IKONOS 2, IRS 1C/D, ORBVUEW 3/4, QUICKBIRD 2 et SPOT 4. LANDSAT 7 couvre lui un domaine spectral plus large (0,4 à  $12,5\mu m$ ) en 7 bandes non jointives. La gamme des capteurs hyperspectraux est elle beaucoup plus réduite. Fin septembre 2001, avec le malheureux échec de ORBVUEW 4 lors de sa mise en orbite et donc la perte de son capteur hyperspectral à 280 canaux et à haute résolution spatiale (8m), seul EOS AM, aussi appelé TERRA, est opérationnel avec son capteur MODIS à 36 bandes entre 0,62 et  $14,4\mu m$ , pour une résolution spatiale maximale de 250m.

Maintenant que nous avons montré pour plusieurs disciplines quel était l'intérêt de l'image, intéressons-nous maintenant à l'acquisition d'une image optique et ses conséquences.



nom	altitude ( <i>km</i> )	fauchée ( <i>km</i> )	résolution ( <i>m</i> )	visée latérale	lancement
CBERS 1 PAN (MS)	778	120(120)	20(80)	$\pm 32^\circ$	1999
EOS AM ASTER(PAN)	705	60	15	-	1999
EROS A PAN	480	12,5	1,8	$\pm 45^\circ$	2000
IKONOS 2 PAN (MS)	680	11(11)	1(4)	$\pm 45^\circ$	1999
IRS 1C/D PAN (MS)	817	70(141)	5,8(23)	$\pm 26^\circ$	1995
LANDSAT 7 PAN (MS)	705	185(185)	15(30)	-	1999
ORBVVIEW 3 PAN (MS)	470	8(8)	1(4)	$\pm 45^\circ$	2002
QUICKBIRD 2 PAN (MS)	450	16,5(16,5)	0,61(2,5)	$\pm 31^\circ$	2001
SPIN 2 PAN	220	189	2	-	1998
SPOT 4 PAN (MS)	822	60(60)	10(20)	$\pm 27^\circ$	1998

TAB. 1.2 – Quelques satellites de résolution inférieure à 30*m*, dotés de capteurs panchromatique (PAN) et/ou multispectral (MS).

nom	altitude ( <i>km</i> )	fauchée ( <i>km</i> )	meilleure résolution	lancement
EOS AM (MODIS)	705	2330	250 <i>m</i>	1999
IRS 1C/D (WIFS)	817	800	180 <i>m</i>	1995
METEOSAT 7	35683	16800	2.5 <i>km</i>	1997
MSG 1	35683	16800	1 <i>km</i>	2002
NOAA M	850	3000	1.1 <i>km</i>	2001
SEAWIFS	705	2800	1.1 <i>km</i>	1997

TAB. 1.3 – Quelques satellites de résolution supérieure à 30*m*.



# Chapitre 2

## Acquisition d'une image optique

Comme on l'a vu dans le chapitre précédent, il existe de nombreux types d'imageries différentes. Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser uniquement au cas de l'imagerie passive car ce type d'imagerie représente le cas le plus général. Le cas des acquisitions par imagerie active (radar, radiologie, IRM etc...), bien que passionnant, est tellement spécifique et complexe qu'il n'est pas envisageable de l'étudier dans le cadre de ce cours d'introduction générale.

### 2.1 La chaîne d'acquisition

#### 2.1.1 Définitions générales

Toutes les images optiques sont obtenues par un processus plus ou moins complexe qui peut cependant être simplifié pour ressembler à la chaîne d'acquisition illustré par la figure 2.1. L'image d'une scène de la Terre par exemple est formée au niveau du plan image d'un système optique. C'est sur ce plan qu'est placé le capteur passif. Le rôle de ce capteur est de convertir le flux énergétique provenant d'un secteur angulaire élémentaire  $d\Omega$  en courant électrique pour les capteurs électroniques par exemple. La mesure de ce courant électrique représente la valeur du pixel image. Attention : la relation entre le compte numérique et l'énergie reçue n'est pas forcément linéaire (comme par exemple le cas de l'oeil humain!).

Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de définir les notions fondamentales de photométrie [Bij84, Mar87, Mar97] comme le flux énergétique ou la luminance par exemple. Dans ce qui suit, on appelle source de lumière  $S$  soit une véritable source émettrice (soleil, lampe, étoile, rayonnement IR...) soit une scène éclairée par une source émettrice.

Le flux énergétique  $\phi$  émis par une source de lumière est l'énergie totale rayonnée par seconde par cette source dans toutes les directions de l'espace. L'unité de mesure est le watt car il s'agit d'une puissance. Dans le cas général, le spectre d'émission (ou de rayonnement)  $C(\lambda)$  de la source de lumière est étendu sur une plage de longueurs d'onde, contrairement au cas très particulier des sources lumineuses mono-chromatiques. La figure 2.2 montre le rayonnement solaire hors atmosphère et au niveau de la mer, c'est-à-dire après filtrage des radiations solaires par l'atmosphère [GG99]. Le flux énergétique  $\phi$  émis par une source lumineuse est donc dans le cas général :

$$\phi = \int_0^\infty C(\lambda) d\lambda \quad (2.1)$$

L'intensité  $I$  d'une source ponctuelle dans une direction donnée est le flux énergétique par unité d'angle solide.

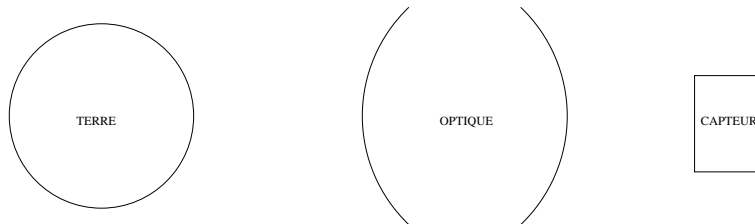


FIG. 2.1 – Synoptique général d'un système d'acquisition optique.

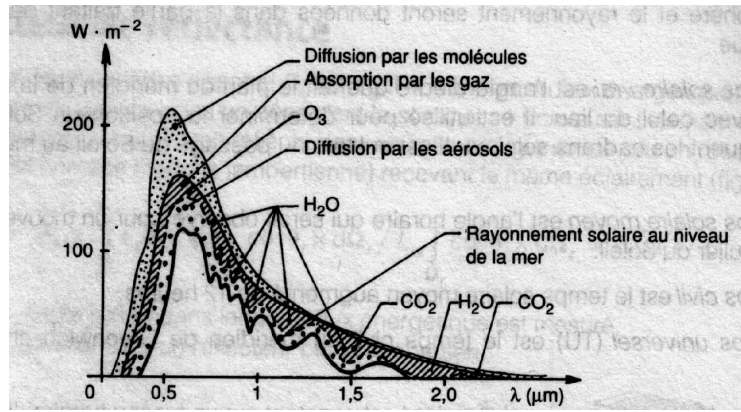


FIG. 2.2 – Rayonnement solaire hors atmosphère et au niveau de la mer.

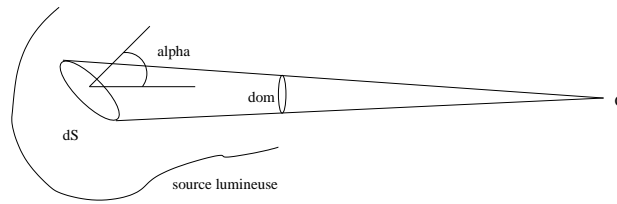


FIG. 2.3 – Luminance d'une source lumineuse étendue.

Son unité est le watt par stéradian.

$$I = \frac{d\phi}{d\Omega} \quad (2.2)$$

Si la source est étendue, il suffit de généraliser l'équation précédente en posant :

$$I = \int dI \text{ avec } dI = \frac{d^2\phi}{d\Omega} \quad (2.3)$$

où  $dI$  (l'intensité élémentaire) est le flux élémentaire émis par la surface élémentaire  $dS$  dans l'angle solide élémentaire  $d\Omega$ . Élémentaire, non ?

La luminance  $L$  est l'intensité élémentaire émise par unité de surface apparente vue depuis le capteur. Pour simplifier, supposons que le capteur  $C$  soit ponctuel. La surface élémentaire  $dS$  émettrice est vue par le capteur sous un angle  $\alpha$  (c.f. la figure 2.3). On a donc :

$$L = \frac{dI}{dS \cdot \cos \alpha} \quad (2.4)$$

L'unité de la luminance est le watt par stéradian et par mètre carré.

## 2.1.2 Deux grandes familles de capteurs imageurs optiques

Par rapport au synoptique de la figure 2.1, on peut dire qu'il existe deux grandes familles de capteurs imageurs passifs optiques. La première famille concerne les capteurs analogiques et la seconde concerne les capteurs numériques.

### Les capteurs analogiques

On appelle un capteur analogique un capteur qui mesure un signal continu et qui renvoie une mesure continue de ce signal. Ce qui est donc sous-entendu avec ce type de capteurs est que l'on suppose qu'ils ont une précision infinie (i.e. non limitée par la technologie). Bien qu'en toute rigueur ce ne soit pas exactement le cas, l'appareil photographique est souvent utilisé pour illustrer cette première famille. Cela s'explique par le fait que les grains photo-sensibles de la pellicule sont si proches les uns des autres qu'en première approximation, on peut considérer qu'une photographie est une représentation fidèle et continue de la scène observée.

Le processus photographique [Mar97] est composé de plusieurs étapes :

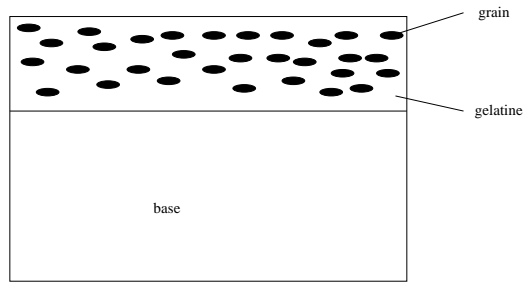


FIG. 2.4 – Coupe d'une pellicule photographique.

- l'exposition. Un film photographique est composé d'une émulsion de gélatine riche en grains d'un sel d'argent et déposée sur une base (c.f. figure 2.4). Selon la scène observée, chaque unité de surface de la pellicule recevra un flux de photons plus ou moins important qui provoquera des réactions chimiques en nombre proportionnel à la quantité de photons et conduisant à la fixation de molécules d'argent. Chaque grain éclairé est devenu un germe et l'image ainsi obtenue est appelée image latente. En effet, elle n'est pas définitive car une nouvelle exposition permet de la modifier.
- le développement. À partir des germes, le révélateur chimique va agir comme un amplificateur dont le gain (de l'ordre de  $10^6$  tout de même) est proportionnel à la surface du grain qui a réagi.
- le fixage. On élimine les grains qui n'ont pas été exposés. En fait, il est technologiquement impossible d'éliminer durant cette étape tous ces grains ce qui se traduit par un léger voile sur la photographie.

On obtient pour chaque unité de surface de la pellicule une opacité d'autant plus grande que le flux de photons reçu est important. On obtient donc un négatif. Pour obtenir un positif, il suffit de prendre une photographie du négatif éclairé en transparence.

Pour pouvoir être utilisée par l'ordinateur, il est nécessaire de numériser la photographie. On expliquera plus en détails plus loin quelles sont les conséquences du point de vue du traitement du signal de cette opération. Cependant, on peut néanmoins déjà pointer quelques problèmes importants du point de vue opérationnel. Tout d'abord, l'étape de numérisation implique de la main d'oeuvre, dont le coût est toujours très important sur le prix de revient du produit. La numérisation implique aussi un ajout de bruit sur le signal image, comme par exemple l'apparition de poussières, cheveux et autres. Aussi, il est généralement préférable de travailler avec des capteurs qui fournissent directement une image numérique de la scène observée. De plus, le prix de tels capteurs s'étant littéralement effondré ces dernières années, il serait donc particulièrement regrettable de s'en priver.

### Les capteurs numériques

Un capteur numérique optique remplit la même mission qu'un capteur analogique : il donne une réponse proportionnelle (mais pas nécessairement linéaire, on insiste) à un éclairement. Cependant, la différence fondamentale avec les capteurs numériques est que cette fois le signal analogique d'entrée (i.e. la scène observée) est doublement discrétisée. En effet, il y a discrétisation spatiale (i.e. le nombre de lignes et de colonnes sont des entiers finis) ainsi qu'une discrétisation spectrale (énergétique) de chaque pixel (i.e. chaque pixel admet une valeur radiométrique finie). Dit autrement, la précision d'un système numérique dans la description d'une scène continue est finie tant du point de vue spatial que spectral.

**Discrétisation spectrale** : l'intérêt du numérique par rapport à l'analogique ne s'arrête pas au fait que l'on supprime une étape dans la numérisation d'une scène. Outre le fait que le signal sur lequel on travaille est beaucoup moins bruité, on peut aussi régler lors de l'acquisition la sensibilité du détecteur en jouant par exemple sur le gain et l'offset. Supposons que le détecteur ait une réponse linéaire ce qui signifie que le compte numérique  $C_n$  du pixel soit proportionnel à l'éclairement  $E$  correspondant selon la formule :

$$C_n = Gain.E + Offset \quad (2.5)$$

Si on n'a aucune information a priori sur la scène, c'est-à-dire que la densité de probabilité de distribution  $PE$  est équiprobable, alors on aura un *Offset* nul et un *Gain* permettant de faire correspondre le compte numérique maximal (255 pour un capteur sur 8 bits par exemple) à la valeur maximale attendue pour  $E$  (c.f. figure 2.5 à gauche). Si au contraire on a une information a priori sur la scène, on peut alors adapter le gain et l'offset de manière à obtenir un contraste maximal (c.f. figure 2.5 à droite).

**Discrétisation spatiale** : intuitivement, puisque l'on a un nombre réduit (mais qui peut être grand en relatif) de pixels pour représenter une scène, alors on sait que l'on sera limité dans la précision de description de la scène

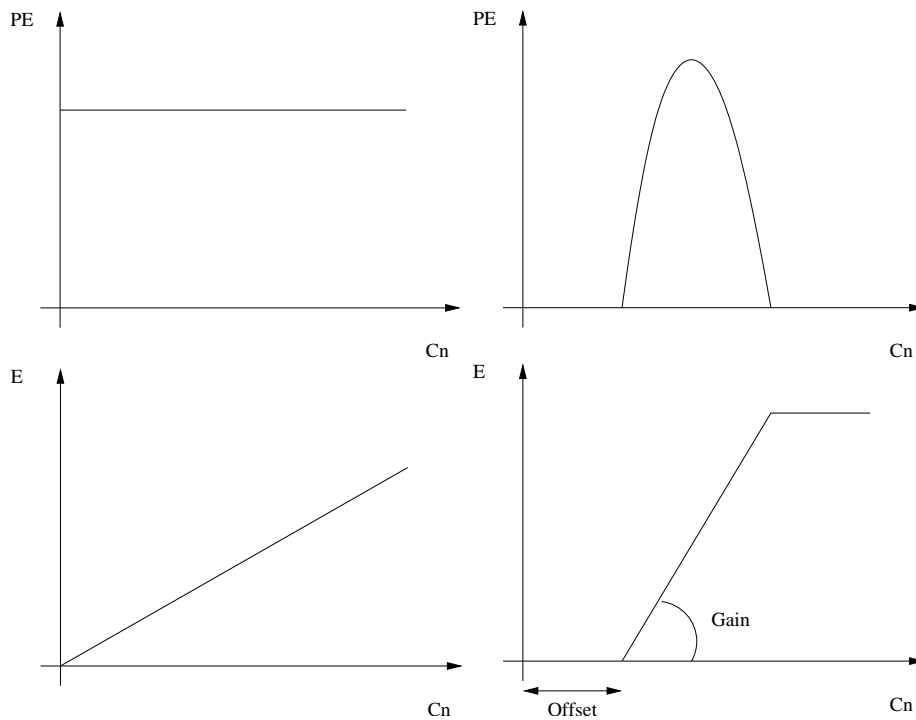


FIG. 2.5 – Gain et offset en fonction de l'éclairement. À gauche, pas d'information a priori sur la scène observée : la densité de probabilité de l'éclairement  $E$  est uniforme. À droite, le gain et l'offset sont adaptés à la nouvelle distribution de probabilité de  $E$  et maximise le contraste de la scène dès la détection.

par l'image (sauf dans les films à grand spectacle où il semble que l'on peut agrandir à l'infini une image sans perdre en qualité...). Mais cette limitation due au nombre de pixels disponibles n'est pas la seule. En effet, toute la chaîne d'acquisition entraîne des limitations. Ainsi, choisir une optique ou une carte d'acquisition par exemple de plus ou moins bonne qualité n'est pas sans conséquence. Dans les nombreuses applications qui nécessitent de faire correspondre à un repère image une réalité spatiale (vision par ordinateur, reconstruction 3D à partir d'image 2D, réalisation de modèles numérique de terrain...), maîtriser ces déformations est essentiel. En pratique, on n'aborde pas ce type de problème en modélisant chaque élément de la chaîne d'acquisition mais plutôt en déterminant les paramètres globaux de déformation, appelés dans la littérature paramètres de calibration ou de calibrage en utilisant des mires (figure 2.6). Une fois connu ces paramètres, il est alors aisé de modifier l'image pour la rendre compatible avec la réalité (figure 2.7 et figure 2.8). Le lecteur intéressé par cette partie du traitement peut se reporter à la référence [HM95] ou au site web <http://www-rocq.inria.fr/~fleuret/distort.fr.html> par exemple.

## 2.2 Acquisition d'image et télédétection

Comme on l'a dit en introduction, on va s'appuyer sur la télédétection pour illustrer les notions théoriques.

### 2.2.1 Les capteurs imageurs en télédétection spatiale

Commençons par présenter les deux caractéristiques majeures des systèmes imageurs : la nature du capteur et sa fauchée.

Les capteurs ont pour fonction de mesurer le rayonnement électromagnétique provenant d'un champ géométriquement défini [Pau97]. On peut distinguer deux grandes familles de capteurs de télédétection. La première, par ordre chronologique, mesure le champ électromagnétique émis par une source naturelle. La mesure est soit directe, comme celle du rayonnement propre des sols en IR thermique, soit indirecte, comme l'éclairement solaire réfléchi par la surface de la Terre. Un capteur de cette famille est dit passif. La deuxième famille se distingue par le fait qu'elle emporte avec elle sa propre source d'éclairement, ce qui lui permet notamment d'avoir la capacité d'imager des sites en permanence comme les capteurs radar. On parle alors de capteur actif. Dans ce qui suit, on ne s'intéressera qu'au cas des capteurs passifs.

Parmi eux, on peut faire la distinction entre les capteurs analogiques et numériques. Historiquement, les capteurs analogiques furent les premiers utilisés et à des fins exclusivement militaires. Ces capteurs, des appareils photographiques, permettent l'acquisition instantanée de l'image de la portion terrestre survolée. En

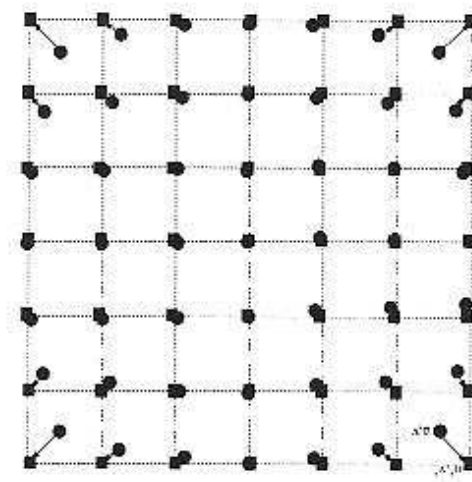


FIG. 2.6 – Principe de calibrage d'une caméra : lien entre l'image (les ronds) et la réalité (les carrés).

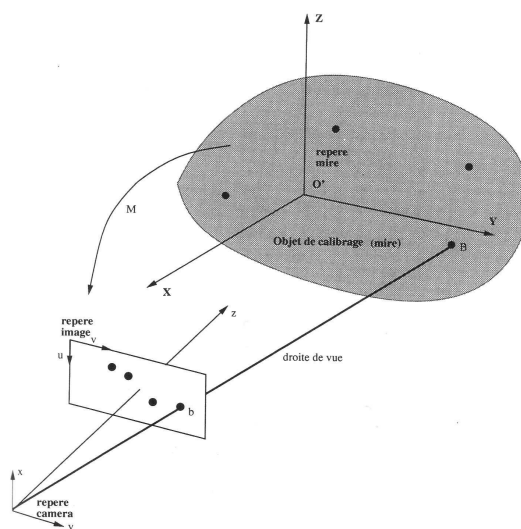


FIG. 2.7 – Un exemple de déformation entre les pixels d'une image (ronds) et l'endroit où ils devraient être (carrés) si la chaîne d'acquisition était parfaite.



FIG. 2.8 – Un exemple de déformation d'une webcam. En haut, une mire et en bas un exemple de scène (à gauche dans la géométrie de la caméra et à droite en corrigeant les effets de la distorsion).



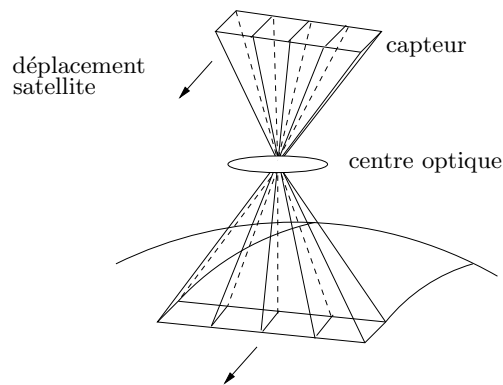


FIG. 2.9 – Capteur de type pushbroom.

fonction de la qualité recherchée, ces appareils peuvent avoir plusieurs objectifs photographiques pour changer de distance focale, des dispositifs assurant la parfaite planéité du film et une compensation dans le sens du déplacement du satellite pendant le temps d'exposition. Ces technologies ont été particulièrement développées par les soviétiques. Parmi les appareils les plus célèbres, citons les TK-350 et KVR-1000 russes (RESURS F-SPIN 2) et la Large Format Camera américaine (vol CHALLENGER 41G). L'inconvénient essentiel de ce type d'appareil est d'utiliser de la pellicule, ce qui en limite :

- l'utilisation car il n'est possible d'imager en permanence. Ainsi, seuls les sites en rapport direct avec la mission du satellite seront photographiés. Pour illustrer cela, on peut par exemple s'intéresser aux scènes prises par les appareils russes et commercialisées par la société Sovinformspoutnik et méditer sur la densité de photographies de la zone du proche orient,
- la disponibilité des données car il faut que la pellicule soit renvoyée sur Terre soit en fin de mission, ce qui implique une durée de vie des satellites très courte et explique le nombre très important de lancements russes pendant la guerre froide (jusqu'à 46 satellites militaires d'observation par an [Ver97]), soit en cours de mission mais un nombre fini de fois.

Les capteurs numériques ont été développés pour s'affranchir de ces problèmes. Leur rôle est de quantifier de façon discrète le signal analogique physique, ici le flux radiatif. Comme il n'y a plus recours à un support physique, les données sont immédiatement disponibles au sol et un même capteur peut prendre un très grand nombre de scènes (plusieurs millions pour SPOT par exemple). L'inconvénient est que la maîtrise de ces techniques en environnement spatial n'a permis d'obtenir des résultats comparables à ceux analogiques que très récemment. L'avenir est résolument tourné vers les capteurs numériques.

Le capteur numérique le plus simple est le capteur composé d'une seule cellule sensible appelée radiomètre. Ce capteur image donc un point du sol à la fois. La réalisation d'une ligne se fait soit par rotation du satellite sur lui-même, comme c'est le cas pour METEOSAT, soit par rotation d'une partie de son optique (NOAA). L'image est elle obtenue soit grâce au mouvement propre du satellite par rapport au sol (NOAA), soit par basculement de tout le satellite (METEOSAT). Un capteur numérique plus évolué est composé de plusieurs cellules alignées. Ce capteur s'appelle whiskbroom (moins de 10 radiomètres) si ces cellules sont alignées dans le sens de déplacement du satellite, ce qui permet d'imager plusieurs lignes simultanément [Sch97]. Si l'alignement de ces cellules est perpendiculaire au sens de déplacement du satellite, on parle alors de pushbroom (SPOT-6000 radiomètres), ce qui permet l'acquisition de plusieurs colonnes simultanément comme le montre la figure 2.9. Enfin, on appelle une matrice CCD le capteur numérique composé d'un réseau bi-dimensionnel de cellules (EARLYBIRD-1000×1000 radiomètres). Ce capteur est pour l'instant marginal en télédétection spatiale.

Une autre caractéristique importante est la fauchée de l'instrument imageur, c'est-à-dire la longueur au sol d'une ligne de l'image. Les satellites, comme IKONOS, qui s'intéressent aux détails métriques ont une petite fauchée. À l'inverse, les satellites limbe à limbe, c'est-à-dire les satellites qui balaient d'un bord à l'autre le disque terrestre comme METEOSAT, ont une fauchée très grande. Les détails sur ces images ont alors une taille kilométrique. Le tableau 2.1 illustre cela. Ainsi donc, on voit apparaître avec cette dernière caractéristique la notion de résolution.

### 2.2.2 La résolution géométrique

La résolution spatiale est souvent, et parfois à tort, le paramètre utilisé pour illustrer à lui seul les performances et les capacités potentielles d'un système imageur. La récente surenchère des agences comme Eosat, Orbimage et Space Imaging illustre bien l'importance stratégique, commercialement, de ce paramètre. Ainsi, les campagnes marketing associent systématiquement le nom du satellite à un chiffre précis : la résolution au

satellite	fauchée	résolution
IKONOS 2	11km	1m
SPOT 4 HRVIR PAN	60km	10m
LANDSAT 7	185km	30m
IRS 1D WIFS	800km	180m
NOAA M	3000km	1,1km
METEOSAT 7	16800km	2,5km

TAB. 2.1 – Fauchée et résolution de quelques satellites optiques de télédétection.



FIG. 2.10 – Extraits d'une image panchromatique SPOT de Paris. A gauche, le parc de Sceaux, à droite l'île Saint Louis.

sol. Prenons par exemple le cas d'une image panchromatique SPOT de Paris, dont deux extraits sont illustrés à la figure 2.10. La résolution spatiale est donnée à 10m. Et pourtant, sur l'image du parc de Sceaux, on peut nettement voir des chemins dont la largeur est inférieure à 10m. Sur l'image de l'île Saint Louis, les ponts sont parfaitement visibles alors que des rues de même largeur ne le sont parfois pas. Autre exemple : il est possible d'observer des péniches au milieu d'un fleuve mais il est très difficile de discerner les avions sur les pistes et parkings d'aéroport alors que les dimensions sont comparables. On voit donc à travers ces exemples que la notion de résolution spatiale n'est quantifiable qu'à la seule condition de comparer des objets de radiométrie semblable : en cas de fort contraste, il est possible de distinguer des objets dont la dimension spatiale est faible en comparaison de la résolution.

En fait, selon le photo-interprète et l'application concernée, la résolution peut dépendre :

- d'autres paramètres du système imageur comme la résolution radiométrique,
- de l'illumination et de la clarté de l'atmosphère,
- de la géométrie et du contraste de la cible,
- de la position de la cible par rapport au nadir.

Ainsi, il existe de nombreuses définitions de la résolution spatiale qui peuvent être groupées en quatre catégories [Rob95, FHM<sup>+</sup>83] selon que l'on s'intéresse :

- à la capacité à distinguer deux sources lumineuses de même intensité (limite due à la diffraction de la lumière et utilisant le critère de Rayleigh),
- à la capacité à mesurer les caractéristiques spectrales d'un objet en fonction de sa taille (Effective Resolution Element [Wil88]),
- à la capacité à enregistrer la périodicité d'une cible (fonction de transfert de modulation),
- aux propriétés géométriques du système optique et notamment au champ correspondant au cône d'analyse d'un capteur élémentaire donné (Instantaneous Field Of View [Pau97]) dans le cas où l'on souhaite séparer deux cibles de même radiométrie.

Cette dernière définition reste la plus utilisée en pratique et c'est celle que nous retiendrons pour la suite de ce document.

Pour simplifier, retenons que plus un capteur est proche de la Terre, plus on peut s'attendre à avoir une résolution fine. Ainsi, on voit apparaître deux grandes familles d'orbites : celles qui sont proches de la Terre et

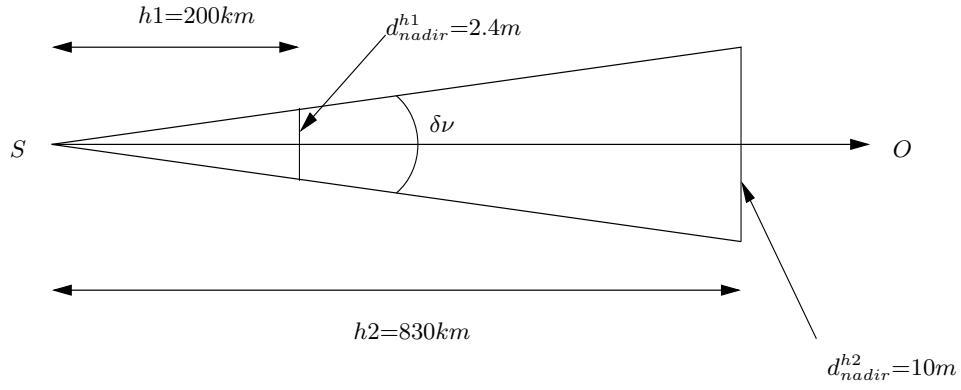


FIG. 2.11 – Résolution géométrique  $d_{nadir}^h$  en fonction de l'altitude  $h$  et de la résolution angulaire  $\delta\nu$  pour une visée au nadir.

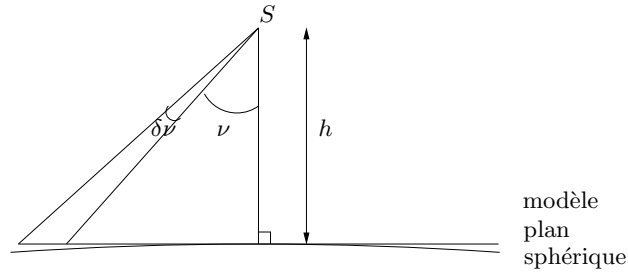


FIG. 2.12 – Visée dans la direction faisant un angle  $\nu$  avec la verticale.

celles qui sont éloignées. Cependant, pour obtenir des images avec des résolutions spatiales comparables quel que soit l'endroit survolé, il faut donc que l'altitude du satellite soit constante. On vient d'obtenir la première caractéristique des orbites d'observation de la Terre : elles sont quasi-circulaires.

### 2.3 Cas d'une visée au nadir : effets de l'aplatissement de la Terre

Supposons que la Terre soit sphérique et prenons le cas d'un radiomètre regardant au nadir, c'est-à-dire à la verticale du satellite  $S$  en direction du centre de la Terre  $O$ . La figure 2.11, où le capteur élémentaire a une résolution angulaire  $\delta\nu$  de  $1,2 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$  et se trouve à l'altitude  $h$  illustre cela. La résolution au sol, qui est en toute rigueur la longueur d'un arc de cercle, peut être approximée par la longueur d'un segment, noté  $d_{nadir}^h$  et qui vaut :

$$d_{nadir}^h = 2.h.\tan\left(\frac{\delta\nu}{2}\right) \simeq h.\delta\nu \quad (2.6)$$

Nous avons supposé que la Terre était sphérique ce qui n'est qu'une approximation. Le principal écart à ce modèle est l'aplatissement aux niveaux des pôles, d'une vingtaine de kilomètres et un renflement au niveau de l'équateur, ce qui explique que le modèle ellipsoïdal soit préféré au modèle sphérique par de nombreuses communautés scientifiques, notamment celle des géographes. Il existe bien entendu de nombreux modèles d'ellipsoïdes modélisant la Terre selon que l'on souhaite avoir un bon modèle local ou global [Rad91]. L'Union Géodésique et Géophysique Internationale recommande [CNE91] le modèle (GRS80) admettant pour demi-grand axe  $6378.137 \text{ km}$  (rayon équatorial) et pour demi-petit axe  $6356.752 \text{ km}$  (rayon polaire). En conséquence, l'altitude du satellite ne sera pas strictement constante, mais dépendra de la latitude. On peut aisément vérifier que la variation de la résolution n'excède pas 3% [Bea01]. Par conséquent, on peut considérer en première approximation que la résolution spatiale au nadir est constante en fonction de la latitude. Pour l'imagerie aérienne, l'équation (2.6) permet de lier une variation de l'altitude du capteur avec la variation de la résolution. Ainsi, on peut facilement se convaincre que quand l'avion est suffisamment haut, on peut considérer la résolution comme constante. Attention cependant lorsque vous utilisez plusieurs vues d'un même site à bien vérifier que vous avez des altitudes comparables.

La distance scène-capteur peut être fortement modifiée lorsque le capteur vise latéralement et non plus au nadir comme précédemment.

Supposons dans un premier temps que la zone observée puisse être approximée par un plan et que le radiomètre vise dans une direction qui fait un angle  $\nu$  avec la verticale comme cela est illustré à la figure 2.12. La résolution

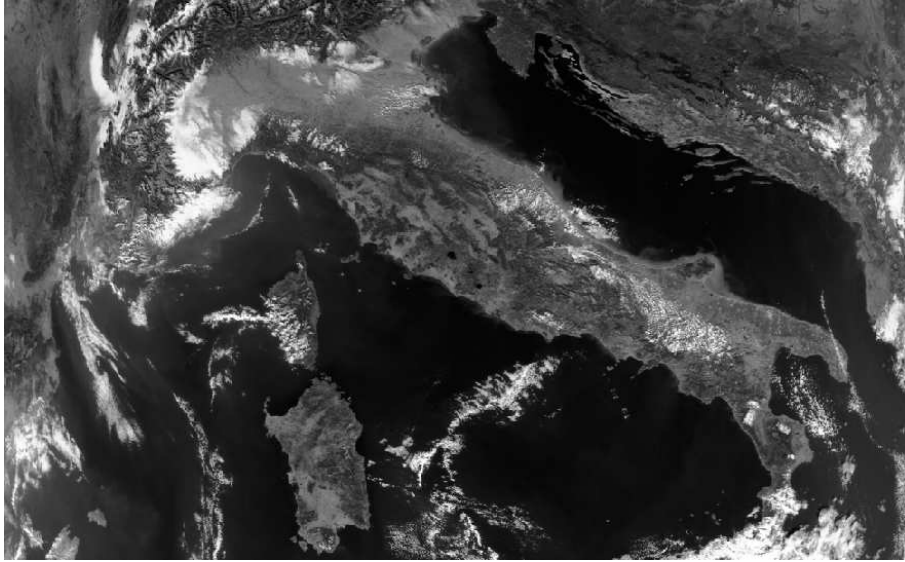


FIG. 2.13 – Déformation géométrique quand on s'éloigne du nadir (jusqu'à  $\pm 60^\circ$  sur cette image SEAWIFF de l'Italie).

$d_{plan}^h$  en fonction de l'angle  $\nu$  est égale à :

$$d_{plan}^h(\nu) = h \cdot \tan(\nu + \delta\nu) - h \cdot \tan(\nu) \simeq \frac{h \cdot \delta\nu}{\cos^2(\nu)} \quad (2.7)$$

Cependant, on s'attend à ce que cette modélisation plane s'éloigne de la réalité physique au fur et à mesure que l'angle  $\nu$  augmente, le cas le plus défavorable étant celui des satellites limbe à limbe. La figure 2.13 illustre cela. Il s'agit d'une image SEAWIFF<sup>1</sup> de l'Italie prise en 1997 et gracieusement mise à notre disposition par le club de télédétection du lycée du Parc Impérial de Nice. On notera en particulier la déformation au niveau du Golfe du Lion.

La modélisation plane de la zone observée étant insuffisante lorsque l'on s'éloigne du nadir, il est donc nécessaire de faire intervenir la rotondité de la Terre dans le calcul de la résolution.

## 2.4 Cas d'une visée latérale : effet de la rotondité de la Terre

Les déformations liées à la courbure de la Terre vont être de plus en plus importantes lorsque l'on s'éloigne du nadir. Pour estimer ces déformations, introduisons les notations suivantes illustrées par la figure 2.14 :

$S$ =satellite d'observation,

$T$ =point observé à la surface de la Terre,

$O$ =centre de la Terre et origine des référentiels,

$\nu$ =l'angle de visée  $\widehat{OST}$  et positif à gauche par rapport au sens de déplacement de  $S$ ,

$\nu_{max}^{capt}$ =angle  $\nu$  maximal accessible par le capteur,

$\phi$ =l'angle  $\widehat{TOS}$ ,

$h$ =altitude du satellite,

$R$ =rayon terrestre.

Si, au niveau du système d'acquisition, l'angle de visée  $\nu$  est le plus significatif, les calculs font préférentiellement appel à une variable auxiliaire  $\phi$ , que nous commençons par calculer.

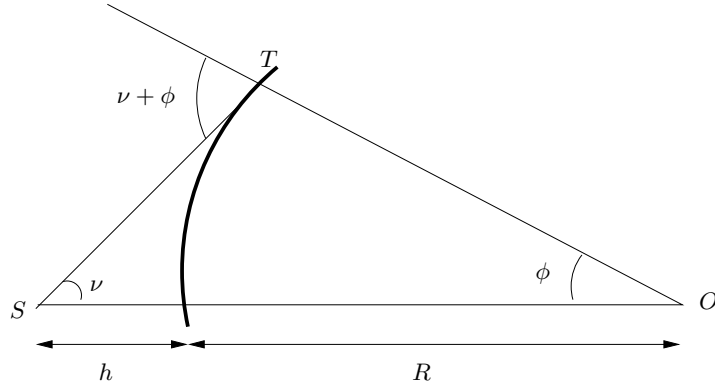
En considérant le triangle  $OST$ , on a [Bro79] :

$$\frac{OT}{\sin(\nu)} = \frac{OS}{\sin(\pi - \nu - \phi)} \quad (2.8)$$

et en posant que  $OT = R$ ,  $OS = R + h$ , il vient :

$$\frac{R}{\sin(\nu)} = \frac{R + h}{\sin(\nu + \phi)} \quad (2.9)$$

<sup>1</sup>Rappelons que le capteur SEAWIFF, en orbite quasi-polaire, est limbe à limbe.


 FIG. 2.14 – Calcul de l'angle  $\phi$ .

ce qui donne :

$$\sin(\nu + \phi) = \frac{R + h}{R} \cdot \sin(\nu) \quad (2.10)$$

d'où :

$$\phi = \arcsin \left( \left(1 + \frac{h}{R}\right) \cdot \sin(\nu) \right) - \nu \quad (2.11)$$

Cette expression n'est valide que si  $(1 + \frac{h}{R}) \cdot \sin(\nu) \leq 1$ , la valeur 1 correspondant à l'angle  $\widehat{STO}$  droit. La visée est alors rasante et on a les expressions :

$$\phi_{max} = \arccos \left( \frac{R}{R + h} \right) \quad \nu_{max} = \arcsin \left( \frac{R}{R + h} \right) \quad (2.12)$$

Considérons maintenant le cas d'un capteur pushbroom en visée latérale. Deux pixels voisins d'une même ligne de l'image seront imagés par deux éléments consécutifs  $n$  et  $n + 1$ . Soient  $T_n$  et  $T_{n+1}$  les points au sol correspondants aux centres des pixels  $n$  et  $n + 1$ . Soient  $\phi_n$ ,  $\nu_n$  et  $\phi_{n+1}$ ,  $\nu_{n+1}$  les angles  $\phi$  et  $\nu$  obtenus pour ces détecteurs.  $\nu_n$  et  $\nu_{n+1}$  sont liés à  $\delta\nu$  par la relation :

$$\nu_{n+1} = (n + 1) \cdot \delta\nu = \nu_n + \delta\nu \quad (2.13)$$

Les angles  $\phi_n$  et  $\phi_{n+1}$  se déduisent des relations (2.11) et (2.13). Soit  $\Delta\phi(\nu_n)$  leur différence :

$$\Delta\phi(\nu_n) = \arcsin \left( \left(1 + \frac{h}{R}\right) \cdot \sin(\nu_n + \delta\nu) \right) - \arcsin \left( \left(1 + \frac{h}{R}\right) \cdot \sin(\nu_n) \right) - \delta\nu \quad (2.14)$$

Un développement limité au premier ordre permet d'écrire :

$$\Delta\phi(\nu_n) = \left( \frac{(1 + \frac{h}{R}) \cdot \cos(\nu_n)}{\sqrt{1 - (1 + \frac{h}{R})^2 \sin^2(\nu_n)}} - 1 \right) \cdot \delta\nu \quad (2.15)$$

La résolution au sol  $d_{sol}^h(\nu_n)$  en fonction de l'angle de visée  $\nu_n$  est la distance  $T_n T_{n+1}$ , qui s'obtient par :

$$T_n T_{n+1} = d_{sol}^h(\nu_n) = R \cdot \Delta\phi(\nu_n) \quad (2.16)$$

Le tableau 2.2 donne un ordre de grandeur de la variation de la taille du pixel entre une visée au nadir et une visée à la limite des capacités instrumentales.

Grâce aux équations (2.7) et (2.16), nous sommes maintenant capables d'estimer le pourcentage d'erreur entre  $d_{sol}^h$  et  $d_{plan}^h$  en fonction de l'altitude  $h$  du capteur et de l'angle de visée  $\nu_n$  (figure 2.15). On voit ainsi que lorsque  $h$  est faible (cas de l'imagerie aérienne, de 1 à 10km), l'approximation plane est justifiée. Par contre, plus  $h$  augmente, plus on est sensible rapidement à la courbure de la Terre. L'altitude des satellites d'observation étant généralement comprise entre 500 et 1000km, l'approximation plane ne se justifie plus. A titre d'illustration, la figure 2.16 représente la résolution au sol  $d_{sol}^h$  en fonction de l'angle de visée pour les satellites IKONOS 2 et NOAA.

Puisque la résolution augmente avec l'angle de visée, alors la surface équivalente à un pixel en bord d'image va être plus importante que la surface équivalente d'un pixel au nadir. Prenons le cas des satellites NOAA

nom satellite	$h$ (km)	$\nu_{max}$ (°)	$d_{nadir}^h$ (m)	$d_{\nu_{max}}^h$ (m)
SPOT 4	822	$\pm 27$	10	13,3
IRS 1	817	$\pm 26$	5,8	7,5
CBERS	778	$\pm 32$	20	30,2
IKONOS 2	680	$\pm 45$	1	2,52
ORBVIEW 3/4	470	$\pm 45$	1	2,52

TAB. 2.2 – Ordre de grandeur de la taille du pixel  $d_{\nu}^h$  pour une visée au nadir et une visée à l'angle  $\nu_{max}$  pour quelques satellites.

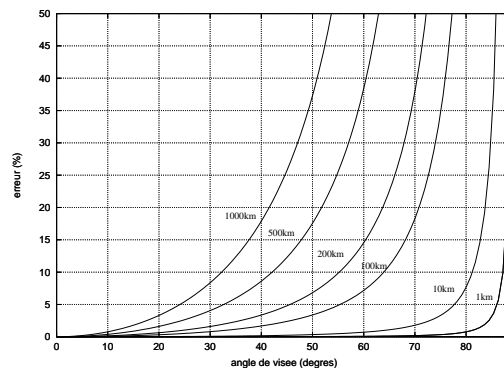


FIG. 2.15 – Pourcentage d'erreur entre  $d_{sol}^h$  et  $d_{plan}^h$  en fonction de l'angle de visée et de l'altitude  $h$ .

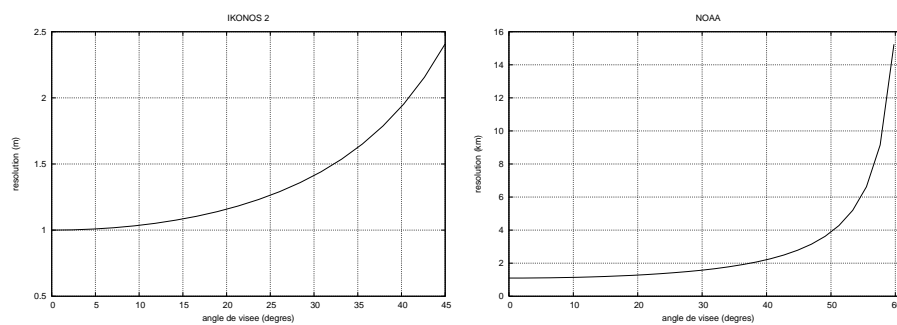


FIG. 2.16 – Résolution  $d_{sol}^h$  en fonction de l'angle de visée pour IKONOS 2 (à gauche) et NOAA (à droite).

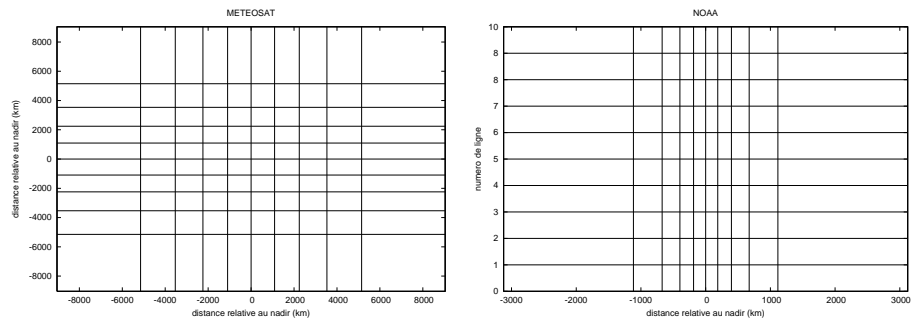


FIG. 2.17 – Surface équivalente au sol de chaque pixel d’une image pour le satellite METEOSAT (à gauche) assimilable à un capteur matriciel et pour NOAA (à droite) de type pushbroom.

et METEOSAT qui peuvent être assimilés à un capteur pushbroom et matriciel respectivement. La figure 2.17 illustre les surfaces équivalentes au sol correspondant à quelques pixels de l’image. On remarque immédiatement que les déformations spatiales sont beaucoup plus complexes dans le cas d’une matrice que dans le cas d’une ligne de capteurs. Ainsi, dans la pratique, les capteurs de télédétection spatiaux sont généralement des pushbrooms sauf dans le cas particulier des satellites géostationnaires d’observation spatiale.





# Chapitre 3

## Modification d'histogrammes

### 3.1 Généralités

#### Notations :

$\Omega$  est l'image numérique,

$I^p$  désigne la valeur radiométrique d'un pixel de  $\Omega$ ,

$I_{min}$  et  $I_{max}$  sont respectivement la valeur radiométrique minimale et maximale de  $\Omega$ ,

$N$  est le nombre de pixels de  $\Omega$ ,

$p(I)$  est la probabilité d'obtenir la valeur radiométrique  $I$ .

#### 3.1.1 Définitions :

Dans ce chapitre, on s'intéresse à une des techniques les plus simples en traitement d'images et qui est la modification d'histogrammes. Il s'agit de transformer le compte numérique de chaque pixel  $p^{orig}$  de l'image d'entrée  $\Omega^{orig}$  selon une même loi mathématique  $f$ . En appelant  $\Omega^{hm}$  l'image résultat,  $l$  le numéro de ligne et  $c$  le numéro de la colonne d'un pixel de  $\Omega^{orig}$ , on a :

$$\Omega^{hm}(l, c) = f(\Omega^{orig}(l, c)) \quad (3.1)$$

On insiste : il s'agit bien d'une transformation globale et identique sur toute l'image. Dit autrement, pour chaque niveau  $I^{orig}$ , on est capable de calculer  $I^{hm}$  :

$$I_{hm} = f(I_{orig}) \quad (3.2)$$

ou encore

$$dI_{hm} = f'(I_{orig}) \cdot dI_{orig} \quad (3.3)$$

Soit  $h$  l'histogramme de l'image  $\Omega$  :

$$\forall I \in [I_{min}, I_{max}], h(I) = \{p \in \Omega | I_p = I\} \quad (3.4)$$

On remarque que si on divise  $h$  par  $N$ , c'est-à-dire si on normalise  $h$ , alors chaque valeur de l'histogramme normalisé donne la probabilité  $p(I)$  :

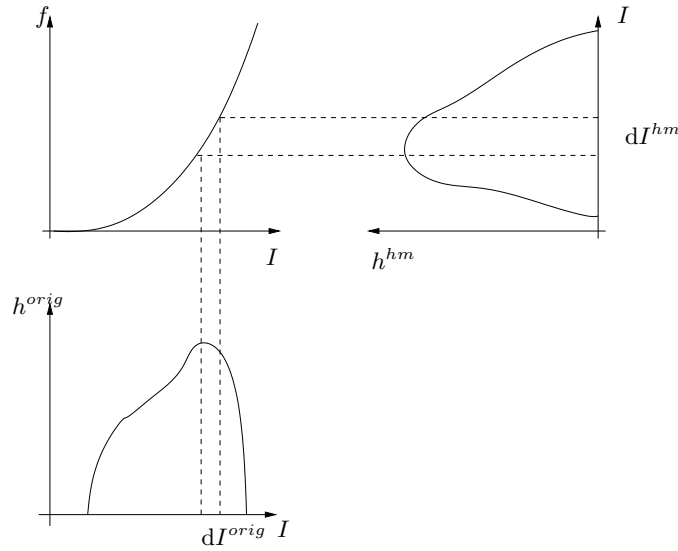
$$p(I) = \frac{h(I)}{N} \quad (3.5)$$

Soit  $h_c$  l'histogramme cumulé de l'image  $\Omega$  :

$$\forall I \in [I_{min}, I_{max}], h_c(I) = \sum_{j=I_{min}}^I h(j) \quad (3.6)$$

Chaque valeur de la normalisation de  $h_c$ , représente la probabilité d'obtenir un compte numérique inférieur ou égal à  $I_p$ . C'est la fonction de répartition  $F$  des statistiques.

$$F(I) = \frac{h_c(I)}{N} = \frac{\sum_{j=I_{min}}^I h(j)}{N} \quad (3.7)$$

FIG. 3.1 – Relations entre  $h^{orig}$ ,  $h^{hm}$  et  $f$ .

### 3.1.2 Transformation d'histogrammes

Dans ce qui suit, on supposera que la loi de transformation  $f$  permettant de passer de l'image  $\Omega^{orig}$  à l'image  $\Omega^{hm}$  est strictement monotone. En pratique, on est très souvent dans ce cas (si  $f$  est strictement décroissante par exemple, il y a alors inversion de contraste). La figure 3.1 illustre les relations entre  $h^{orig}$ ,  $h^{hm}$  et  $f$ . Puisque tous les points de  $h^{orig}$  compris entre  $I^{orig}$  et  $I^{orig} + dI^{orig}$  donnent les points de  $h^{hm}$  compris entre  $I^{hm}$  et  $I^{hm} + dI^{hm}$ , il y a égalité des surfaces élémentaires des histogrammes. On a donc :

$$h^{hm}(I^{hm}).dI^{hm} = h^{orig}(I^{orig}).dI^{orig} \quad (3.8)$$

$$\frac{dI^{hm}}{dI^{orig}} = \frac{h^{orig}(I^{orig})}{h^{hm}(I^{hm})} \quad (3.9)$$

$$(3.10)$$

d'où

$$\boxed{f'(I^{orig}) = \frac{h^{orig}(I^{orig})}{h^{hm}(I^{hm})}} \quad (3.11)$$

## 3.2 Quelques exemples d'utilisation des histogrammes

### 3.2.1 Estimation de la qualité de la numérisation

L'histogramme d'une image permet de se faire une idée à peu de frais de la qualité de la numérisation en terme d'adéquation entre la dynamique de l'image, c'est-à-dire la plage des valeurs  $[I_{min}, I_{max}]$ , et le nombre de comptes numériques disponibles. Prenons l'exemple de la figure 3.2. L'histogramme montre que peu de comptes numériques (90 dans cet exemple) sont utilisés efficacement sur les 256 disponibles. En conséquence, on n'utilise pas complètement toute la capacité de discrimination du système imageur. En pratique, un tel comportement peut être souhaitable lorsque l'on observe des scènes très variées en intensité. En effet, une scène très lumineuse peut perturber l'électronique du capteur. La prudence impose alors de limiter la sensibilité pour limiter les risques de "saturation". Une solution [MDHP96] peut alors être de constituer un historique des observations sur un intervalle temporel suffisamment long, puis d'ajuster les gains électroniques des capteurs "statistiquement" pour obtenir a priori une dynamique optimale sur l'image à réaliser.

A titre d'exemple, la figure 3.3 montre d'autres exemples où la numérisation n'est pas optimale. A gauche, on reconnaît l'histogramme de l'image de l'île de la cité décalé vers les hautes valeurs numériques, ce qui correspond au cas d'un capteur trop sensible pour la scène à imager. De même, si l'histogramme était écrasé pour les valeurs faibles, le capteur ne serait pas assez sensible. Enfin, à droite, on illustre le cas où il n'y a pas assez de dynamique pour l'ensemble des valeurs (hautes ou basses).

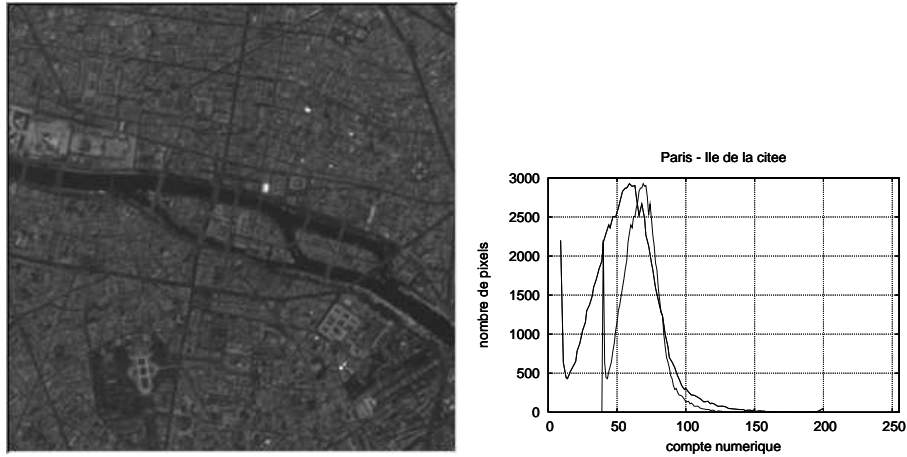


FIG. 3.2 – Extrait d’une image panchromatique SPOT de l’île de la citée à Paris (à gauche) et histogramme associé (à droite).

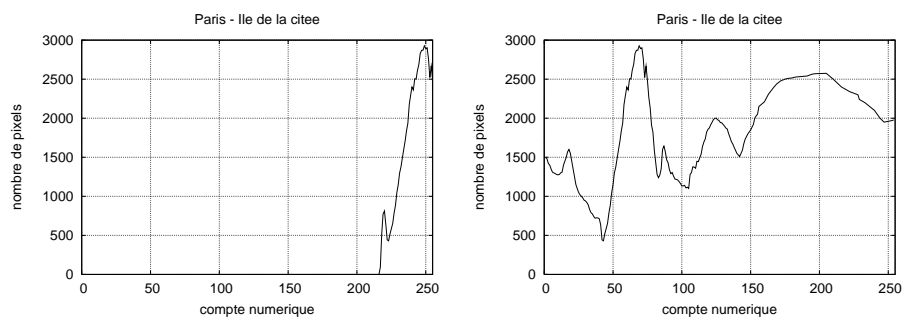


FIG. 3.3 – Cas d’un capteur trop sensible (à gauche) ou à la dynamique mal étalonnée (à droite).

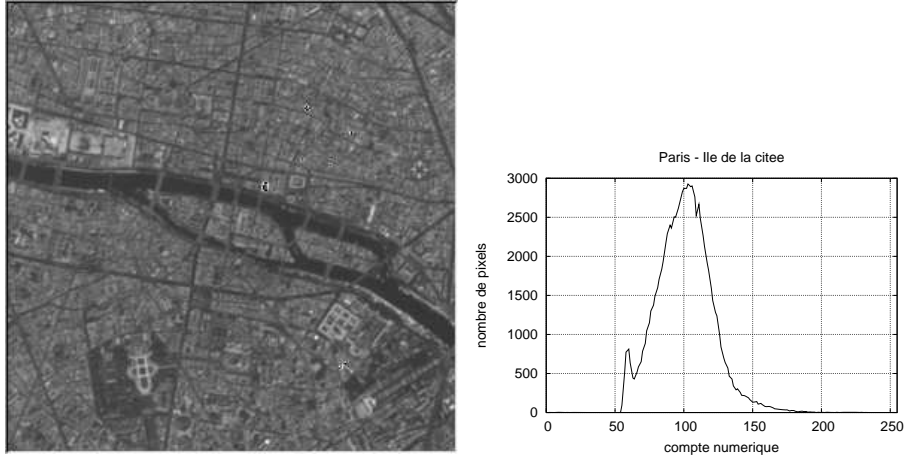


FIG. 3.4 – Effets d’une modification du facteur de gain sur l’image à gauche et sur l’histogramme à droite avec  $G = 1.5$ .

### 3.2.2 Expansion de dynamique

La transformation globale  $f$  de l’équation (3.1) la plus élémentaire que l’on puisse faire sur une image est bien entendue la transformation linéaire. Ainsi, cette équation (3.1) devient dans ce cas :

$$\Omega^{hm}(l, c) = G * (\Omega^{orig}(l, c)) + O_7 \quad (3.12)$$

où  $G$  et  $O_7$  sont des constantes respectivement appelées gain et offset. Sur les histogrammes, cette transformation se traduit par :

- un étalement de la dynamique si  $G > 1$  et une compression de dynamique si  $G < 1$  (figure 3.4 à gauche et conséquence sur l’image à droite),
- un décalage vers les hautes valeurs radiométriques si  $O_7 > 0$  et vers les basses valeurs si  $O_7 < 0$ .

Pour obtenir une utilisation optimale des  $N^{rad}$  niveaux radiométriques, il faut donc étaler au maximum la dynamique de l’image entre 0 et  $N^{rad}$  :

$$\begin{cases} N^{rad} = G \cdot I_{max} + O_7 \\ 0 = G \cdot I_{min} + O_7 \end{cases} \quad (3.13)$$

d’où

$$\begin{cases} N^{rad} = G \cdot (I_{max} - I_{min}) \\ O_7 = -G \cdot I_{min} \end{cases} \quad (3.14)$$

donc

$$\begin{cases} G = \frac{N^{rad}}{I_{max} - I_{min}} \\ O_7 = -\frac{N^{rad} \cdot I_{min}}{I_{max} - I_{min}} \end{cases} \quad (3.15)$$

Des raisons opérationnelles peuvent conduire à choisir un intervalle plus petit que  $[0, N^{rad}]$ . La généralisation des équations précédentes ne pose alors aucune difficulté.

### 3.2.3 Égalisation d’histogrammes

Cette technique d’égalisation de l’histogramme donne à la fois la meilleure dynamique possible et un fort contraste, ce qui améliore en général la visibilité des détails mais augmente le bruit. Elle est souvent utilisée pour comparer des images ou effectuer des opérations entre elles. Obtenir un histogramme plat revient à dire que l’on veut que la densité de probabilité  $\frac{h^{hm}(I^{hm})}{N}$  soit constante et donc vérifie :

$$p(I^{hm}) = \frac{h^{hm}(I^{hm})}{N} = \frac{1}{I_{max}^{hm} - I_{min}^{hm}} \quad (3.16)$$

L’équation (3.11) devient :

$$f'(I^{orig}) = (I_{max}^{hm} - I_{min}^{hm}) \cdot \frac{h^{orig}(I^{orig})}{N} \quad (3.17)$$

$$f(I^{orig}) - f(I_{min}^{orig}) = (I_{max}^{hm} - I_{min}^{hm}) \cdot \frac{\sum_{j=I_{min}^{orig}}^I h^{orig}(j)}{N} \quad (3.18)$$

d'où

$$\boxed{f(I^{orig}) = (I_{max}^{hm} - I_{min}^{hm}).F(I^{orig}) + f(I_{min}^{orig})} \quad (3.19)$$

En pratique, l'égalisation d'histogrammes fait :

- ressortir les détails des zones contrastées,
- atténuer les détails des zones contrastées dans l'image originale.

Dit autrement, si l'image originale est de bonne qualité sur le signal recherché, l'égalisation d'histogramme ne présente pas d'avantage.



## Chapitre 4

# La transformée de Fourier

Prenons le cas de la mire sinusoïdale illustrée par la figure 4.1 à gauche. Avant de raisonner en 2 dimensions, abordons le problème à une dimension. Pour cela, on ne va travailler que sur une ligne de notre mire (figure 4.1 à droite). Soit  $T_m$  la période de notre mire, c'est à dire la distance séparant 2 extréma consécutifs.

Notre mire est un signal  $I$  continu. Lorsque l'on crée une image de cette mire, on représente ce signal continu par le signal  $I_e$  composé d'un nombre fini de valeurs. Dans l'idéal, on souhaite pouvoir reconstruire exactement  $I$  à partir de  $I_e$ . Pour obtenir  $I_e$ , supposons que l'on soit capable de déterminer instantanément les valeurs de  $I$  séparées par un intervalle  $T_e$  qu'on appellera période d'échantillonnage. Sur la figure 4.2 se trouvent les signaux  $I$  et  $I_e$  pour différentes valeurs de  $T_e$ . On remarque que pour  $T_e = T_m/10$ ,  $I_e$  ressemble intuitivement à  $I$ . Par contre, quand  $T_e$  vaut  $3T_m/4$  par exemple,  $I_e$  et  $I$  ne se ressemblent plus du tout. Cet exemple peut facilement se généraliser au cas 2 dimensions.

Le rééchantillonnage obéit à des règles qui découlent de l'analyse de Fourier. Le non respect de ces règles ou des hypothèses sous entendues sur la nature des images entraîne des perturbations du signal 2 dimensions qu'est l'image et tous les traitements bas ou haut niveau s'appuyant sur ces données seront affectés.

Dans cette section, on va faire quelques rappels d'analyse du signal, ce qui nous amènera à nous intéresser particulièrement à la transformée de Fourier. Nous nous inspirerons largement dans ce qui suit des références [Bea01, Kun81, Mar87, Ref93, Rod91]. Après avoir introduit la transformée de Fourier continue d'un signal apériodique, nous verrons quelques propriétés utiles. Cela nous amènera à introduire le produit de convolution et la notion de filtrage linéaire. Puis nous nous intéresserons à la transformée de Fourier discrète d'un signal apériodique, de durée et d'énergie finie ce qui est le cas le plus courant en pratique.

### 4.1 Définitions et propriétés générales

On appelle signal une fonction d'une ou plusieurs variables qui représente un phénomène physique particulier. Les variations d'altitude d'un satellite au cours du temps, la quantité de photons par unité d'angle solide ou la population annuelle mondiale sont des exemples de signaux. Si la variable est continue, le signal est analogique. Si elle est discrète, le signal est échantillonné. Un signal échantillonné dont l'amplitude est discrète est un signal numérique. Par exemple, la variation de pression en fonction du temps de la membrane d'un microphone est un signal analogique tout comme sa conversion en tension électrique. Si on mesure cette variation chaque intervalle de temps  $\Delta t$ , on obtient alors un signal échantillonné. Pour pouvoir stocker ce signal sur un support de type

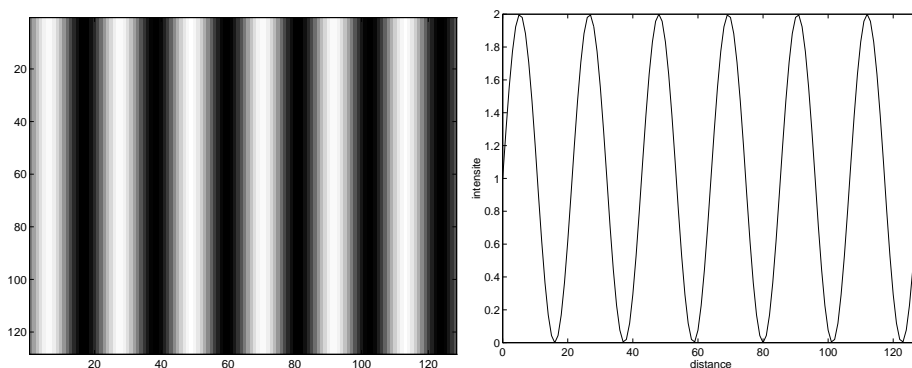


FIG. 4.1 – Mire de type tôle ondulée. À gauche, la représentation image, à droite une ligne radiométrique

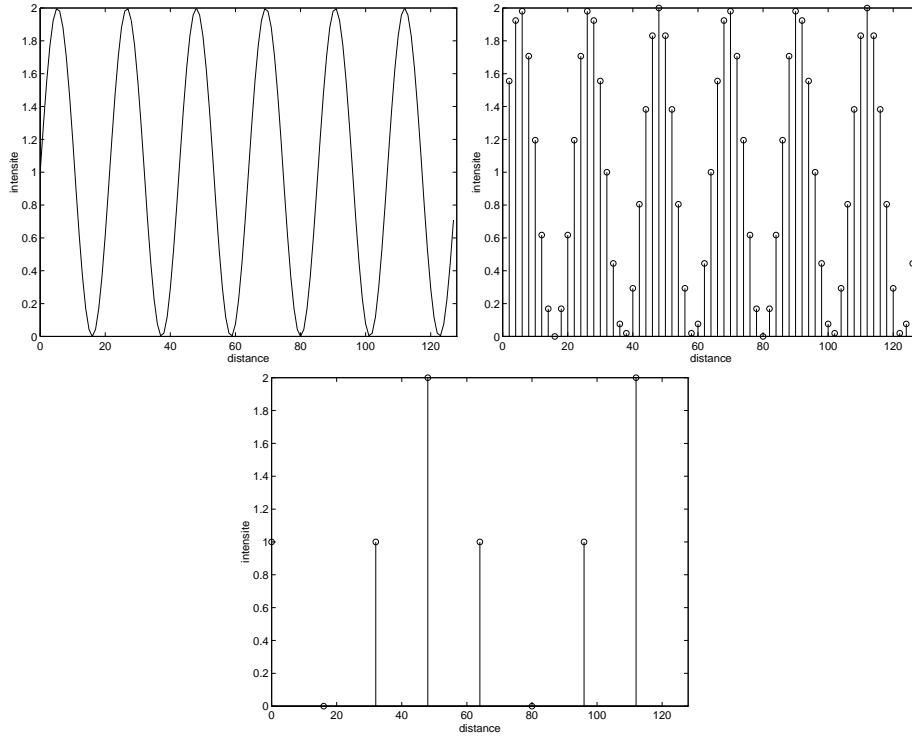


FIG. 4.2 –  $I_e$  pour différentes valeurs de  $T_e$ . De haut en bas et de droite à gauche :  $I$ ,  $T_e = T_m/10$  et  $T_e = 3T_m/4$

compact disc, il faut coder ce signal sur un nombre limité de bits, donc le discrétiser en amplitude. Le signal est alors numérique. On se restreindra dans ce qui suit aux signaux d'énergie finie, donc de carré sommables. Dans un premier temps, on s'intéressera aux signaux à une dimension.

#### 4.1.1 Définitions

L'idée fondamentale de la transformée de Fourier est de développer un signal  $S(x)$  sur une base de fonctions élémentaires simples  $\psi_i$ .

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \psi_n \quad (4.1)$$

Supposons dans un premier temps que le signal soit réel, d'énergie finie et périodique de période  $T_o$ . Soit  $f_o$  la fréquence fondamentale de ce signal définie par  $f_o = 1/T_o$ . Dans le cas de la série de Fourier, les fonctions élémentaires sont composées d'une infinité de sinusoides de fréquences  $n \cdot f_o$  multiples de  $f_o$  et appelées harmoniques.  $\phi_n$  représente le déphasage entre ces harmoniques.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_o x - \phi_n) \quad (4.2)$$

L'expression précédente en notation complexe devient :

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{S}_n \cdot \exp^{2 \cdot \pi \cdot j \cdot n \cdot f_o \cdot x} \quad (4.3)$$

où les coefficients  $\widehat{S}_n$  sont appelés coefficients de Fourier et sont donnés par la relation :

$$\widehat{S}_n = f_o \cdot \int_{-T_o/2}^{+T_o/2} S(x) \cdot \exp^{-2 \cdot \pi \cdot j \cdot n \cdot f_o \cdot x} dx \quad (4.4)$$

Si  $T_o$  augmente, les motifs du signal s'éloignent les uns des autres. Dans le domaine fréquentiel, la fréquence du fondamental devient de plus en plus petite. Si  $T_o$  tend vers l'infini, le signal est ramené à un seul motif. Dans le plan fréquentiel, la somme discrète tend vers une somme continue. Ainsi, un signal quelconque, généralement



propriété	signal $S(x)$	transformée de Fourier $\hat{S}(\nu_x)$
linéarité	$\sum_{i=1}^n a_i \cdot S_i(x)$	$\sum_{i=1}^n a_i \cdot \hat{S}_i(x)$
similitude	$S(ax)$	$\frac{1}{a} \cdot \hat{S}\left(\frac{\nu_x}{a}\right)$
décalage (espace direct)	$S(x - \xi)$	$\hat{S}(\nu_x) \cdot \exp^{-2 \cdot \pi \cdot j \cdot \nu_x \cdot \xi}$
décalage (espace Fourier)	$S(x) \cdot \exp^{2 \cdot \pi \cdot j \cdot \nu_x \cdot \zeta}$	$\hat{S}(\nu_x - \zeta)$

TAB. 4.1 – Quelques propriétés arithmétiques de la transformée de Fourier 1D.

signal		transformée de Fourier	
pair		paire	
impair		impaire	
réel	imaginaire	réelle	imaginaire
quelconque	0	paire	impaire
0	quelconque	impaire	paire
paire	impaire	quelconque	0
impaire	paire	0	quelconque

TAB. 4.2 – Propriétés de symétrie de la transformation de Fourier 1D.

non périodique, et d'énergie finie peut être considéré comme la limite d'un signal périodique dont la période devient infiniment longue. En posant

$$\nu_x = \lim_{T_o \rightarrow \infty} n/T_o$$

la relation (4.3) devient alors :

$$S(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{S}(\nu_x) \cdot \exp^{2 \cdot \pi \cdot j \cdot \nu_x \cdot x} d\nu_x \quad (4.5)$$

$\hat{S}(\nu_x)$  est appelée transformée de Fourier de  $S(x)$  et l'équation (4.4) devient :

$$\hat{S}(\nu_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x) \cdot \exp^{-2 \cdot \pi \cdot j \cdot \nu_x \cdot x} dx \quad (4.6)$$

$\hat{S}(\nu_x)$  est généralement une fonction complexe que l'on peut aussi exprimer par :

$$\hat{S}(\nu_x) = |\hat{S}(\nu_x)| \cdot \exp[\arg[\hat{S}(\nu_x)]] \quad (4.7)$$

$|\hat{S}(\nu_x)|$  est appelé spectre d'amplitude, et  $\arg[\hat{S}(\nu_x)]$  est appelé spectre de phase. Dans ce qui suit, on adoptera les notations suivantes :

$$\hat{S}(\nu_x) = \mathcal{F}[S(x)] \quad (4.8)$$

$$S(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{S}(\nu_x)] \quad (4.9)$$

## 4.1.2 Quelques propriétés

### Propriétés arithmétiques

Le tableau 4.1 présente quelques propriétés de la transformée de Fourier. Le tableau 4.2 présente en particulier les propriétés de symétrie de la transformée de Fourier.

### Propriétés énergétiques

Intéressons-nous maintenant aux propriétés énergétiques de la transformée de Fourier. Pour cela, rappelons la formule de Parseval-Plancherel, où  $\overline{g(x)}$  est le complexe conjugué de  $g(x)$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \overline{g(x)} \cdot dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu_x) \cdot \overline{\hat{g}(\nu_x)} \cdot d\nu_x \quad (4.10)$$

Dans le cas particulier où  $f(x) = g(x)$ , on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \cdot dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\nu_x)|^2 \cdot d\nu_x \quad (4.11)$$

La quantité  $|f(x)|^2$  représente la puissance du signal, c'est à dire l'énergie par unité de l'espace direct. Dans le cas où cette unité  $x$  est le temps, on parle alors de puissance instantanée. L'intégrale de moins à plus l'infini représente l'énergie totale dissipée par le signal. La quantité  $|\hat{f}(\nu_x)|^2$  représente l'énergie par intervalle  $d\nu_x$ , soit encore la densité spectrale d'énergie du signal. On notera que la connaissance de la densité spectrale ne permet pas de reconstituer le signal, car on ne dispose plus de l'information sur la phase.

### La distribution de Dirac

Il est utile de présenter la distribution de Dirac. La notion de pic de Dirac (noté  $\delta$ ) sert à représenter aux yeux du physicien une quantité finie occupant un espace quasiment nul comme peuvent l'être une particule élémentaire, une impulsion... Parmi les propriétés remarquables de cette distribution, notons que :

$$\delta(\alpha.x) = \frac{1}{|\alpha|}.\delta(x) \quad (4.12)$$

$$\forall \epsilon > 0, \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \delta(\alpha)d\alpha = 1 \quad (4.13)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(\alpha).\delta(\alpha)d\alpha = S(0) \quad (4.14)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(\alpha).\delta(\alpha - x_o)d\alpha = S(x_o) \quad (4.15)$$

Le calcul de la transformée de Fourier de  $\delta(x)$  ne pose pas de difficulté.

$$\mathcal{F}[\delta(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x). \exp^{-2.\pi.j.\nu_x.x} dx = 1 \quad (4.16)$$

Remarquons que la transformée de Fourier respecte le principe d'incertitude d'Heisemberg. En effet, plus un signal varie rapidement, plus il est nécessaire de monter dans les hautes fréquences pour le décrire dans l'espace de Fourier. Le cas limite est représenté par un signal en forme de Dirac : il est très bien localisé dans l'espace direct mais sa transformée de Fourier est à support infini dans l'espace des fréquences.

La distribution peigne de Dirac, notée  $\text{III}(x)$ , est définie par :

$$\text{III}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n) \quad (4.17)$$

Cette fonction est périodique et de période  $T_o = 1$ . L'équation (4.4) devient :

$$\widehat{S}_n = \int_{-1/2}^{+1/2} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n) \right]. \exp^{-2.\pi.j.\nu_x.x} dx = 1 \quad (4.18)$$

d'où, en utilisant (4.4)

$$\text{III}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp^{-2.\pi.j.n.x} \quad (4.19)$$

Dans notre problématique, cette notion nous servira à représenter un signal échantillonné. On notera que :

$$\frac{1}{T_e}.\text{III}\left(\frac{x}{T_e}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n.T_e) \quad (4.20)$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{T_e}.\text{III}\left(\frac{x}{T_e}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu_x - \frac{n}{T_e}) \quad (4.21)$$

ce qui s'écrit encore :

$$\boxed{\mathcal{F}\left[\frac{1}{T_e}.\text{III}\left(\frac{x}{T_e}\right)\right] = \text{III}(T_e.\nu_x)} \quad (4.22)$$

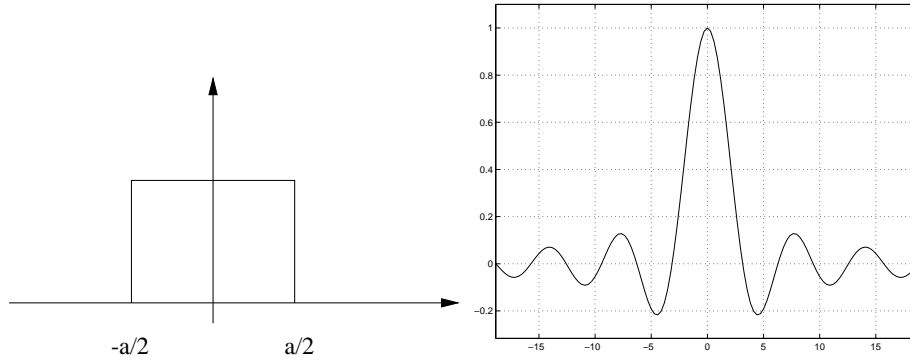


FIG. 4.3 – Fonction porte et sa transformée de Fourier

signal $S(x)$	transformée de Fourier $\widehat{S}(\nu_x)$
$c. \cos(2.\pi.f_o.x)$	$\frac{c}{2} . [\delta(\nu_x - f_o) + \delta(\nu_x + f_o)]$
$\exp^{-\frac{x^2}{2.\sigma^2}}$	$\sigma.\sqrt{2.\pi}.exp^{-2.\pi^2.\sigma^2.\nu_x^2}$

TAB. 4.3 – Quelques exemples de transformées de Fourier

### Transformée de Fourier de quelques fonctions utiles

Le tableau 4.3 illustre quelques autres exemples de transformées de Fourier classiques. En particulier, on appelle la fonction porte la fonction définie par :

$$\Pi\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.23)$$

Sa transformée de Fourier est donnée par (figure 4.3) :

$$\mathcal{F}\left[\Pi\left(\frac{x}{a}\right)\right] = a. \frac{\sin(\pi.a.\nu_x)}{\pi.a.\nu_x} \quad (4.24)$$

## 4.2 La transformée de Fourier discrète 1 dimension

Intéressons-nous maintenant à la transformée de Fourier d'un signal échantillonné. Soit un signal analogique  $S(x)$  et soit  $S_e(x)$  le signal échantillonné.  $S_e(x)$  est modélisé par :

$$S_e(x) = S(x) . \frac{1}{T_e} \text{III}\left(\frac{x}{T_e}\right) \quad (4.25)$$

La relation (5.13) s'écrit ici :

$$\widehat{S_e}(\nu_x) = \widehat{S}(\nu_x) \star \text{III}(\nu_x.T_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(n.T_e). \exp^{-2.\pi.j.\nu_x.n.T_e} \quad (4.26)$$

Ce produit de convolution est périodique et de période  $\frac{1}{T_e}$ . En effet :

$$\widehat{S_e}\left(\nu_x + \frac{1}{T_e}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_e.S(n.T_e). \exp^{-2.\pi.j.\nu_x.n.T_e} = \widehat{S_e}(\nu_x) \quad (4.27)$$

**Propriété 1.** *Echantillonner un signal dans l'espace direct revient à périodiser le spectre dans l'espace de Fourier. De même, échantillonner le spectre revient à périodiser le signal*

La connaissance de  $\widehat{S_e}(\nu_x)$  sur un intervalle de longueur  $\frac{1}{T_e}$  est donc suffisante pour décrire complètement la fonction  $\widehat{S_e}$ . On appelle intervalle principal l'intervalle  $\left[-\frac{1}{2.T_e}, \frac{1}{2.T_e}\right]$ .

Ainsi, un échantillonnage du signal  $S(x)$  avec une période  $T_e$  dans le plan direct correspond à une périodisation de la transformée de Fourier  $\widehat{S}(\nu_x)$  avec une période de  $\frac{1}{T_e}$ . Si on fait tendre  $T_e$  vers zéro,  $S_e(x)$  tend vers  $S(x)$ .

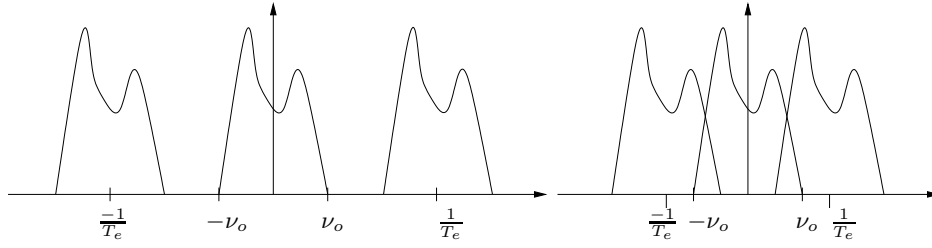


FIG. 4.4 – Le théorème d'échantillonnage. En haut, le théorème est respecté, en bas non

Dans l'espace de Fourier, cela revient à éloigner les motifs les uns des autres. Il est alors évident que le motif principal (i.e. compris dans l'intervalle principal) de  $\widehat{S}_e(\nu_x)$  est égal à  $\widehat{S}(\nu)$ . Par conséquent, pour pouvoir reconstruire complètement  $S_x$  à partir de  $S_e(x)$ , il suffit d'isoler le motif principal et pour qu'il soit égal à  $\widehat{S}(\nu_x)$ , il faut que la plus haute fréquence de  $\widehat{S}(\nu_x)$  soit inférieure à  $\frac{1}{2T_e}$  (théorème d'échantillonnage ou de Shannon). Dans le cas contraire, il est impossible d'isoler un motif principal pur. Il y a alors repliement de spectre.

### 4.2.1 La condition de Shannon

**Théorème 1.** *Un signal  $S(x)$  d'énergie finie ayant une transformée de Fourier dont le support est contenu dans l'intervalle  $[-\nu_o, \nu_o]$  est entièrement déterminé par ses valeurs aux points  $x = n.T_e$  où  $n$  est entier et  $T_e < \frac{1}{2\nu_o}$ .*

Ce théorème fondamental montre une limite fréquentielle au rééchantillonnage (voir figure 4.4).

Supposons que  $S(x)$  satisfasse le théorème d'échantillonnage. Puisque  $\widehat{S}_e(\nu_x)$  est périodique, on peut utiliser la relation (4.4).

$$S(nT_e) = T_e \cdot \int_{-\frac{1}{2T_e}}^{\frac{1}{2T_e}} \widehat{S}(\nu_x) \cdot \exp^{2\pi \cdot j \cdot nT_e \cdot \nu_x} d\nu_x \quad (4.28)$$

En posant  $T_e = 1$ , les relations (4.26) et (4.28) donnent la transformée de Fourier à valeurs discrètes et son inverse :

$$\widehat{S}_e(\nu_x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(n) \exp^{-2\pi \cdot j \cdot n \cdot \nu_x} \quad (4.29)$$

$$S(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \widehat{S}_e(\nu_x) \cdot \exp^{2\pi \cdot j \cdot n \cdot \nu_x} d\nu_x \quad (4.30)$$

D'un point de vue pratique, les relations (4.29) et (4.30) posent deux difficultés. La première est due au fait que la variable  $\nu_x$  est une variable continue. Les systèmes imageurs ou les systèmes de traitement des images travaillent sur des signaux numériques. Ces systèmes vont donc échantillonner la transformée de Fourier continue. La seconde difficulté est liée au fait que le nombre d'échantillons  $S(n.T_e)$  est infini. Nous supposons dans ce qui suit que nous disposons de  $N$  échantillons du signal. La relation (4.29) devient :

$$\widehat{S}_e(\nu_x) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} S(n) \cdot \exp^{-2\pi \cdot j \cdot n \cdot \nu_x} \quad (4.31)$$

La discrétisation de l'espace de Fourier consiste à remplacer la variable continue  $\nu_x$  par une variable discrète  $n$ . Supposons que nous voulions représenter l'intervalle principal par  $N'$  échantillons. Soit  $S(n)$  un signal échantillonné sur un intervalle fini composé de  $N$  points. Comme on l'a vu à la propriété 1, échantillonner dans l'espace de Fourier revient à périodiser  $S(n)$  avec une période  $N'$ . Pour éviter les repliements, on prendra  $N = N'$ . La relation (4.31) devient alors :

$$\widehat{S}_e\left(\frac{n}{N}\right) = \sum_{l=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} S(l) \cdot \exp^{-2\pi \cdot j \cdot l \cdot \frac{n}{N}} \quad (4.32)$$

Calculons

$$y_k = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \widehat{S}_e\left(\frac{n}{N}\right) \cdot \exp^{2\pi \cdot j \cdot k \cdot \frac{n}{N}} \quad (4.33)$$

$$y_k = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{l=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} S(l) \cdot \exp^{2\pi \cdot j \cdot k \cdot \frac{n}{N}} \cdot \exp^{-2\pi \cdot j \cdot l \cdot \frac{n}{N}} \quad (4.34)$$

$$y_k = \sum_{l=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} S(l) \cdot \exp^{2\pi \cdot j \cdot \frac{n}{N} \cdot (k-l)} \quad (4.35)$$

On rappelle l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \exp^{2\pi \cdot j \cdot i \cdot \frac{n}{N}} = \begin{cases} N & \text{si } \exists p \in N \text{ telque } i = p \cdot N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.36)$$

Comme  $l \in [-\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1]$  et  $k \in [-\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1]$ , l'équation (4.35) devient :

$$y_k = N \cdot S(k) \quad (4.37)$$

Soit encore :

$$S(k) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \widehat{S}_e\left(\frac{n}{N}\right) \cdot \exp^{2\pi \cdot j \cdot k \cdot \frac{n}{N}} \quad (4.38)$$

On remarque que contrairement au cas continu, il n'y a pas symétrie exacte entre les transformations directes et inverses.

Les relations suivantes caractérisent les transformées de Fourier discrètes et directes des signaux aperiodiques à durée limitée  $N$ .

$$\boxed{\widehat{S}_e\left(\frac{n}{N}\right) = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} S(k) \cdot \exp^{-2\pi \cdot j \cdot \frac{n}{N} \cdot k}} \quad (4.39)$$

$$\boxed{S(k) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \widehat{S}_e\left(\frac{n}{N}\right) \cdot \exp^{2\pi \cdot j \cdot \frac{n}{N} \cdot k}} \quad (4.40)$$

## 4.2.2 Le phénomène de Gibbs

Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de bien comprendre ce qui est implicite dans ces formules. En pratique, on est toujours dans le cas d'un signal à énergie et durée finies. Donc on peut directement utiliser les relations précédentes. Cependant, comme on l'a vu, la discrétisation de la transformée de Fourier a pour conséquence la périodisation du signal  $S$  avec la période  $N$ . Il n'y a alors aucune raison particulière pour que  $S(-\frac{N}{2})$  soit égal à  $S(\frac{N}{2})$ . Il apparaît alors des discontinuités qui se traduisent par l'apparition de hautes fréquences interdisant alors le respect du théorème de Shannon. Une autre façon de voir le problème consiste à imaginer le signal de durée finie comme le produit du signal  $S$  avec une fonction porte. Dans l'espace de Fourier, ce produit devient alors un produit de convolution entre  $\widehat{S}$  et le sinus cardinal ( $\mathcal{F}[\Pi(\frac{x}{N})]$ ), dont le support est infini. On a donc nécessairement du repliement de spectre. C'est le phénomène de Gibbs. Il se traduit par l'apparition d'oscillations autour des discontinuités de la transformée de Fourier. La figure 4.5 illustre cela.

Calculons :

$$E = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} |\widehat{S}_e\left(\frac{n}{N}\right)|^2 \quad (4.41)$$

$$E = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{l=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} S(k) \overline{S(l)} \cdot \exp^{-2\pi \cdot j \cdot \frac{n}{N} \cdot k} \cdot \exp^{2\pi \cdot j \cdot \frac{n}{N} \cdot l} \quad (4.42)$$

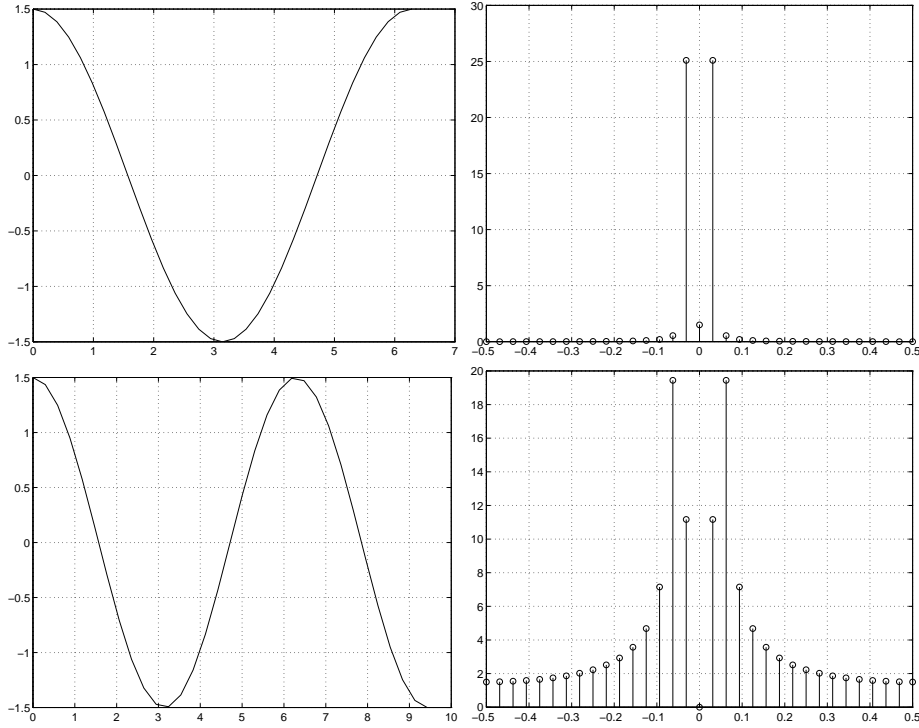


FIG. 4.5 – Illustration du phénomène de Gibbs. De droite à gauche : le signal et sa transformée de Fourier.  $S(-\frac{N}{2})$  et  $S(\frac{N}{2})$  sont égaux (haut) ou non (bas)

D'après la relation (4.36) :

$$\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} |\widehat{S}_e(\frac{n}{N})|^2 = N \cdot \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} |S(k)|^2 \quad (4.43)$$

La relation (4.43) est la relation de Parseval-Plancherel dans le cas discret.

### 4.2.3 Reconstruction

Nous avons vu que pour reconstruire complètement  $S(x)$ , il suffisait d'isoler le motif principal de  $\widehat{S}_e(\nu_x)$  sous la condition que  $\widehat{S}_e(\nu_x) = 0$  pour  $|\nu_x| > \frac{1}{2\nu_o}$ . Mathématiquement, cela revient à :

$$\widehat{S}(\nu_x) = \widehat{S}_e(\nu_x) \cdot \Pi(\frac{\nu_x}{2\nu_o}) \quad (4.44)$$

d'où par transformée de Fourier inverse :

$$S(x) = \mathcal{F} \left[ \widehat{S}_e(\nu_x) \right] \star \frac{\sin(2\pi\nu_o x)}{\pi x} \quad (4.45)$$

$$S(x) = \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(n.T_e) \cdot \delta(x - n.T_e) \right] \star \frac{\sin(2\pi\nu_o x)}{\pi x} \quad (4.46)$$

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(n.T_e) \cdot \frac{\sin[2\pi\nu_o(x - n.T_e)]}{\pi(x - n.T_e)} \quad (4.47)$$

Cette relation est une autre expression du théorème de Shannon et donne directement  $S(x)$  en fonction des valeurs  $S(n.T_e)$ . Il est important de remarquer que pour reconstruire une valeur  $S(x_o)$  pour un  $x_o$  quelconque, il est nécessaire de connaître toutes les valeurs  $S(n.T_e)$ .

## 4.3 La transformée de Fourier 2 dimensions

Nous avons vu jusqu'à présent quelques définitions et propriétés de la transformée de Fourier dans le cas à 1 dimension. L'image est évidemment un signal à 2 dimensions. Il est donc nécessaire de voir comment se

propriété	signal $S(x)$	transformée de Fourier $\widehat{S}(\nu_x)$
linéarité	$\sum_{i=1}^n a_i \cdot S_i(x, y)$	$\sum_{i=1}^n a_i \cdot \widehat{S}_i(\nu_x, \nu_y)$
similitude	$S(ax, by)$	$\frac{1}{a \cdot b} \cdot \widehat{S}\left(\frac{\nu_x}{a}, \frac{\nu_y}{b}\right)$
décalage (espace direct)	$S(x - \zeta, y - \xi)$	$\widehat{S}(\nu_x, \nu_y) \cdot \exp^{-2 \cdot \pi \cdot j \cdot (\nu_x \cdot \zeta + \nu_y \cdot \xi)}$
décalage (espace Fourier)	$S(x) \cdot \exp^{2 \cdot \pi \cdot j \cdot (\nu_x \cdot \zeta + \nu_y \cdot \xi)}$	$\widehat{S}(\nu_x - \zeta, \nu_y - \xi)$

TAB. 4.4 – Quelques propriétés de la transformée de Fourier 2D

transposent les résultats précédents lorsqu'on ajoute une dimension supplémentaire. Nous allons considérer qu'une image est obtenue par un échantillonnage isotrope dans chaque directions. En d'autres termes, on dote l'espace 2 dimensions d'un maillage régulier défini par un couple de vecteurs  $(\vec{a}, \vec{b})$  tels que tout vecteur  $\vec{P}$  du plan s'écrive comme un combinaison linéaire de ces vecteurs :

$$\vec{P} = m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b} \text{ avec } m, n \text{ réels}$$

Il n'y a que cinq maillages réguliers possibles du plan : carré, rectangulaire, hexagonal, oblique et rectangulaire centré (quinconce). Dans ce qui suit, on ne s'intéressera qu'au maillage carré, ce qui est le plus souvent le cas pour les images ( $|\vec{a}| = |\vec{b}|, \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ).

Lorsque l'on est en 2 dimensions, si on réalise une projection sur un sous-espace de dimension 1, il est naturel de souhaiter que soient conservées les propriétés vues précédemment. C'est donc tout naturellement que l'on va généraliser les équations (4.5) et (4.6) à :

$$S(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \widehat{S}(\nu_x, \nu_y) \exp^{2 \cdot \pi \cdot j \cdot (\nu_x \cdot x + \nu_y \cdot y)} d\nu_x d\nu_y \quad (4.48)$$

$$\widehat{S}(\nu_x, \nu_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} S(x, y) \cdot \exp^{-2 \cdot \pi \cdot j \cdot (\nu_x \cdot x + \nu_y \cdot y)} dx dy \quad (4.49)$$

Le tableau 4.4 est la généralisation à 2 dimensions du tableau 4.1

La propriété énergétique de la transformée de Fourier 2 dimensions devient :

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} |S(x, y)|^2 dx dy = \iint_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{S}(\nu_x, \nu_y)|^2 d\nu_x d\nu_y \quad (4.50)$$

Le produit de convolution devient :

$$[f \star g](x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x', y') \cdot g(x - x', y - y') dx' dy' \quad (4.51)$$

et on a donc :

$$\mathcal{F}[f(x, y) \cdot g(x, y)] = \mathcal{F}[f(x, y)] \star \mathcal{F}[g(x, y)](\nu_x, \nu_y) \quad (4.52)$$

Le théorème de Shannon se généralise sans effort à la deuxième dimension. D'un point de vue géométrique, et quelque soit le maillage régulier utilisé, cela revient à définir une zone comprise entre l'origine de l'espace de Fourier et les points de coordonnées (1,1), (1,0), (1,-1), (0,1), (0,-1), (-1,1), (-1,0) et (-1,-1). Cette construction géométrique définit la maille de Wigner Seitz bien connue des physiciens du solide. Dans l'espace de Fourier, la zone définie est à rapprocher de la première zone de Brillouin (maille de Wigner Seitz centrée du réseau réciproque). Comme dans le cas 1 dimension, l'échantillonnage du signal a pour conséquence la périodisation 2D de la transformée de Fourier. En d'autres termes, la connaissance de la "première zone de Brillouin" permet de reconstruire le signal échantillonné. Les relations (4.29) et (4.30) deviennent alors :

$$\widehat{S}_e(\nu_x, \nu_y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(m, n) \cdot \exp^{-2 \cdot \pi \cdot j \cdot (m \cdot \nu_x + n \cdot \nu_y)} \quad (4.53)$$

$$S(m, n) = \iint_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \widehat{S}_e(\nu_x, \nu_y) \cdot \exp^{2 \cdot \pi \cdot j \cdot (m \cdot \nu_x + n \cdot \nu_y)} d\nu_x d\nu_y \quad (4.54)$$

De même, on peut généraliser à 2 dimensions sans efforts les relations (4.39) et (4.40) qui deviennent alors,

si on suppose avoir  $M$  et  $N$  échantillons suivant  $\nu x$  et  $\nu y$  de  $\widehat{S}_e$  :

$$\widehat{S}_e\left(\frac{m}{M}, \frac{n}{N}\right) = \sum_{k=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \sum_{l=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} S(k, l) \cdot \exp^{-2 \cdot \pi \cdot j \cdot \left(\frac{m \cdot k}{M} + \frac{n \cdot l}{N}\right)} \quad (4.55)$$

$$S(k, l) = \frac{1}{M \cdot N} \cdot \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \widehat{S}_e(m, n) \cdot \exp^{2 \cdot \pi \cdot j \cdot \left(\frac{m \cdot k}{M} + \frac{n \cdot l}{N}\right)} \quad (4.56)$$



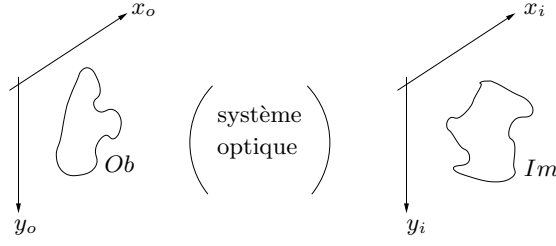


FIG. 4.6 – Relation objet-image.

\*

## 4.4 Quelques problèmes posés de rééchantillonnage lors d'un changement d'orientation de l'image

Nous allons nous intéresser à quelques problèmes posés par le changement d'orientation d'une image. Nous ne visons pas ici à présenter et discuter de manière exhaustive toutes les techniques existantes : cette démarche sortirait du cadre dans lequel ce travail a été posé.

Dans un premier temps, nous allons présenter comment le mode d'acquisition influe sur la qualité intrinsèque de l'image, ce qui sera à prendre en compte dès que l'on réalise le changement d'orientation qui sera présenté dans un second temps.

### 4.4.1 Mode d'acquisition et qualité intrinsèque de l'image

#### Effet de filtrage par l'optique

Les capteurs qui nous intéressent dans le cadre de ce rapport possèdent un système optique permettant d'obtenir une image, notée  $Im$ , de l'objet observé, noté  $Ob$  (figure 4.6). Soit  $P_{sf}(x_i, y_i)$  l'image d'un pic de Dirac (une étoile), qui représente donc la réponse impulsionnelle du capteur (PSF : Point Spread Function). Sans démonstration, le fait que  $P_{sf}$  ne soit pas elle aussi un pic de Dirac s'explique par le fait que l'ouverture instrumentale est toujours limitée par une pupille (diamètre du télescope, diaphragme particulier ...). En éclairage incohérent (cas des systèmes passifs), la relation objet-image s'écrit [Bij84] :

$$Im(x_i, y_i) = \int \int P_{sf}(x_i - X_i, y_i - Y_i) \cdot Ob(X_i, Y_i) dX_i dY_i \quad (4.57)$$

Manipuler des produits de convolution dans l'espace direct est très coûteux en ressources et en temps de calcul, aussi est-il très souvent préférable de passer dans l'espace de Fourier. En rappelant que la transformation de Fourier d'un signal bidimensionnel  $S(x_i, y_i)$  s'écrit :

$$\widehat{S}(\nu_x, \nu_y) = \int \int S(x_i, y_i) \cdot e^{-2\pi \cdot j \cdot (\nu_x \cdot x_i + \nu_y \cdot y_i)} dx_i dy_i \quad (4.58)$$

la relation (4.57) devient [Kun81] :

$$\widehat{Im}(\nu_x, \nu_y) = \widehat{P_{sf}}(\nu_x, \nu_y) \cdot \widehat{Ob}(\nu_x, \nu_y) \quad (4.59)$$

Cette relation montre que le système imageur se comporte comme un filtre. Ceci explique que  $\widehat{P_{sf}}$  porte le nom de fonction de transfert optique ou de modulation dans la littérature. Plus précisément, on peut montrer [BFR86], en supposant pour simplifier une pupille circulaire de diamètre  $D_p$ , que tout système imageur admet une fréquence maximale  $\nu_{opt}^c$ , appelée aussi fréquence de coupure, telle que :

$$\forall(\nu_x, \nu_y), \text{ si } \sqrt{\nu_x^2 + \nu_y^2} > \nu_{opt}^c \text{ alors } \widehat{P_{sf}}(\nu_x, \nu_y) \simeq 0 \quad (4.60)$$

Cette fréquence de coupure est due aux propriétés de la diffraction à l'infini (diffraction de Fraunhofer) et est liée à la tache d'Airy dont on rappelle la dimension angulaire :

$$\sin(\delta\nu_{opt}) = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D_p} \simeq \delta\nu_{opt} \quad (4.61)$$

nom	$D$	$d_{opt}^h$	$\nu_{opt}^c$	$d_{nadir}^h$	$\nu_{ech}^c$
IKONOS	70 cm	0,58m	1,7m <sup>-1</sup>	1m	1m <sup>-1</sup>
SPOT	20 cm	1,53m	0,65m <sup>-1</sup>	10m	0,1m <sup>-1</sup>

 TAB. 4.5 – Valeur de  $d_{opt}^h$ ,  $\nu_{opt}^c$ ,  $d_{nadir}^h$  et  $\nu_{ech}^c$  pour les satellites SPOT et IKONOS.

Cela correspond à une résolution au sol :

$$d_{opt}^h = h \cdot \delta \nu_{opt} = 1,22 \cdot \frac{\lambda \cdot h}{D_p} \quad (4.62)$$

et la fréquence de coupure  $\nu_{opt}^h$  du système optique vaut alors :

$$\nu_{opt}^h = \frac{1}{d_{opt}^h} = \frac{D_p}{1,22 \cdot \lambda \cdot h} \quad (4.63)$$

La tableau 4.5 donne les ordres de grandeurs pour les satellites SPOT et IKONOS. On a ajouté sur ce tableau les valeurs de l'échantillonnage réalisé par la matrice CCD et le balayage, point que nous allons maintenant analyser.

### Effet de la discrétisation par le capteur

Les techniques employées pour l'acquisition d'une image conduisent celle-ci à être à support fini, c'est-à-dire limitée dans l'espace, et spatialement échantillonnée. Pour simplifier les notations, supposons que l'échantillonnage soit le même en lignes et en colonnes et de pas  $d_{ech}^h$ . Pour qu'il n'y ait pas de perte d'information lors de l'échantillonnage de  $Im(x_i, y_i)$ , il faut que (théorème de Nyquist) :

- $Im(x_i, y_i)$  soit à bande limitée, c'est-à-dire que  $\widehat{Im}(\nu_x, \nu_y)$  soit nulle au delà d'une fréquence maximale  $\nu_{ech}^c$ ,
- $\frac{\nu_{ech}^c}{d_{nadir}^h}$  soit strictement supérieure à  $2 \cdot \nu_{ech}^c$ .

Le tableau 4.5 donne là encore les ordres de grandeur pour les satellites SPOT et IKONOS. Pour ces deux capteurs, il apparaît que  $\nu_{ech}^c < \nu_{opt}^c$ , ce qui veut dire que l'optique ne joue pas le rôle du filtre pré-requis théoriquement avant toute phase d'échantillonnage : on s'attend donc à observer sur les images certains artefacts liés au repliement de spectre causé par l'étape d'échantillonnage. C'est ce qu'illustre la figure 4.7 qui permet d'observer, pour SPOT et IKONOS, une image et son spectre. En particulier, on note pour l'image IKONOS un repliement observable dans le plan de Fourier. En vue d'analyser le plus objectivement possible les problèmes liés à la rotation des images, nous avons préféré, pour une image donnée (par exemple une image carrée  $256 \times 256$ ), appliquer une apodisation, c'est à dire adoucir la fonction pupille en la multipliant par une fonction continue à symétrie circulaire et de valeur nulle sur les bords de l'image. Il ne sera alors pas nécessaire de redimensionner les images en cas de rotation puisque l'information utile demeure au centre de l'image et on limite de manière isotrope le phénomène de Gibbs.

#### 4.4.2 Le changement d'orientation

Faire tourner une image ne semble pas poser de grands problèmes : tous les logiciels du commerce disposent de cette fonctionnalité, sans pour autant que l'on sache exactement quel est l'algorithme utilisé. Par souci de simplification (et parce qu'une analyse approfondie sortirait du cadre de ce travail), nous considérons donc uniquement deux méthodes parmi les plus usitées :

- l'interpolation par plus proche voisin, méthode dans laquelle on affecte comme valeur à un pixel de la nouvelle image celle correspondant au pixel le plus proche de l'image initiale. Cette méthode a pour avantage d'attribuer des valeurs réalistes (ce qui est important par exemple pour les images en couleur), mais la localisation peut souffrir d'une certaine imprécision (un demi pixel au maximum),
- l'interpolation bilinéaire, qui, en comparaison avec des méthodes plus exactes, a le mérite de ne nécessiter qu'un nombre limité d'opérations. Cependant, cette méthode n'est pas parfaite en terme de traitement de signal : en effet, elle souffre d'une réponse spectrale qui d'une part filtre légèrement les données et qui d'autre part replie le spectre (puisque son support est borné).

Puisque, en terme de traitement du signal, ces transformations ne sont pas "parfaites", des artefacts peuvent donc apparaître sur les images recalées. Ce problème a par exemple été analysé de manière tout à fait exhaustive et convaincante dans un tout autre contexte, celui du *morphing*, par Gueydan. Dans son travail de thèse [Gue97], celui-ci montre les effets causés par des applications successives d'algorithmes de recalage (sur-échantillonnage et rotation), en utilisant divers noyaux d'interpolation. Il en tire les conclusions suivantes :

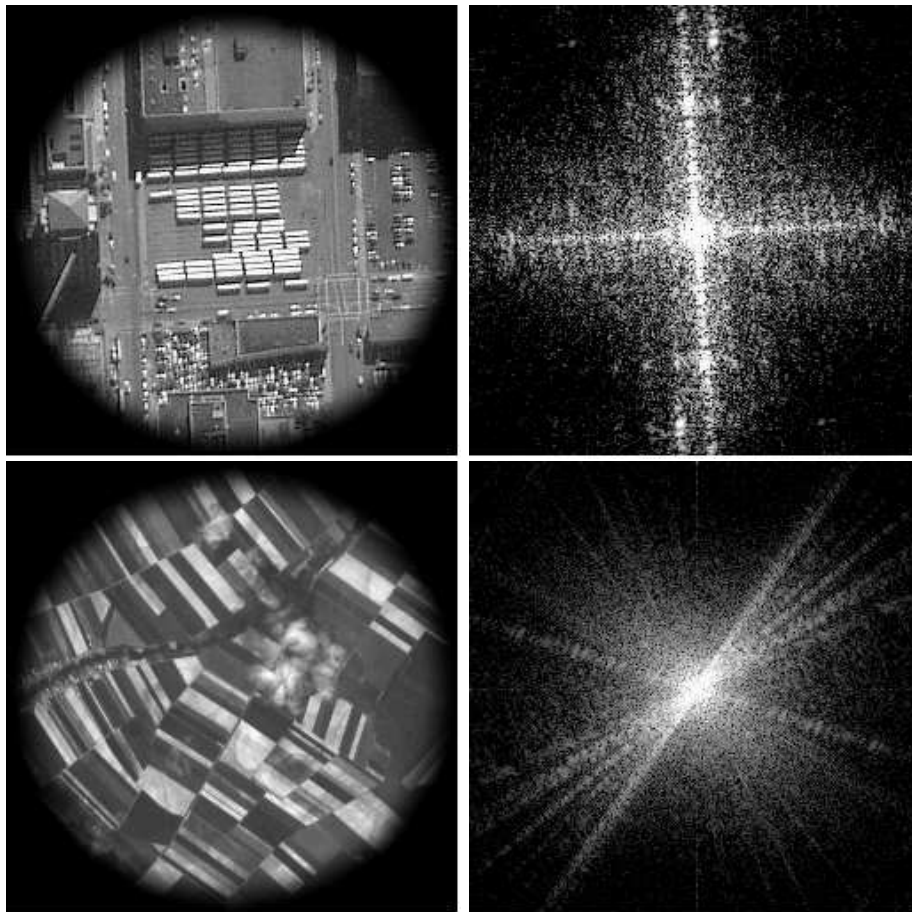


FIG. 4.7 – Images satellitaires apodisées (à gauche) et spectre correspondant (à droite) présentant du repliement. En haut, une scène IKONOS, en bas une scène SPOT.

- la qualité intrinsèque de l'image initiale est primordiale : par exemple, les défauts observés sur des résultats de sur-échantillonnage sont en quelque sorte des amplifications d'erreurs de quantification et d'échantillonnage existant sur l'image de départ,
- les noyaux de convolution ont une réponse spectrale légèrement inférieure au filtre passe bas idéal autour de la fréquence nulle. L'utilisation successive de filtres de convolution va amplifier cette propriété et conduit à des images fortement floues,
- dans le cadre de rotations successives, un grand nombre de noyaux d'interpolation présentent un effet d'assombrissement (ou de saturation) lié à des problèmes d'arrondis. Cette observation visuelle est confortée par des mesures quantitatives qui ne retiennent finalement que deux filtres : celui de convolution cubique et le sinus cardinal Hamming.

Notons qu'un travail complémentaire mené par Calle aborde un problème similaire avec pour objectif d'améliorer la lisibilité d'images agrandies en préservant les structures [Cal99].

Notre objectif n'est donc pas d'effectuer cette même étude exhaustive dans le cadre d'images satellitaires, ce qui n'aurait guère d'intérêt puisque les résultats obtenus par Gueydan sont applicables bien entendu à ce type d'images. Simplement, à partir des deux méthodes proposées (interpolation bilinéaire et méthode du plus proche voisin) et sur des images reflétant certains problèmes d'imagerie de télédétection, nous allons mettre en évidence les deux pièges liés à l'application successive de tels algorithmes :

- la dégradation de la résolution de l'image par effet de filtrage passe bas,
- la déformation intrinsèque liée à l'algorithme du plus proche voisin qui conduit à une dégradation totale de l'image.

Pour illustrer ces divers problèmes, nous allons appliquer le même protocole qu'au paragraphe 4.4.1 : les images sont multipliées par une fonction d'apodisation afin d'éviter les problèmes liés à la rotation d'une image carrée qui nécessitent alors de modifier la taille de l'image finale pour prendre en compte la rotation des coins.

**Rotations successives d'images** Nous allons appliquer une succession de rotations par pas de  $5^\circ$  sur un extrait de l'image IKONOS de San Francisco illustré à la figure 4.7. La figure 4.8 montre les résultats de la méthode au plus proche voisin (notée ppv) et la figure 4.9 ceux de la méthode bilinéaire. On peut observer les curieuses déformations géométriques pour la méthode ppv et un fort effet de lissage pour la méthode bilinéaire.

Pour la méthode ppv, les effets sont encore plus accusés si l'on prend un pas plus petit : c'est l'objet de la figure 4.10 sur laquelle on applique 18 rotations successives de pas  $2,5^\circ$  entre  $5^\circ$  et  $45^\circ$ .

**Intégrité de l'image** Une expérience intéressante consiste à effectuer une rotation d'un angle  $\alpha$  suivie par une autre rotation d'angle  $-\alpha$ . L'image ainsi obtenue a la même orientation que l'image initiale, mais son contenu est dégradé par rapport à l'image d'origine.

La figure 4.11 illustre ce problème pour des angles de  $1^\circ$ ,  $5^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$  et  $40^\circ$  pour les deux méthodes analysées.

Une analyse plus fine montrerait qu'environ 2% des pixels pour la méthode ppv et 13% pour la méthode bilinéaire sont irrémédiablement modifiés.

Comme on vient de le voir, dès que l'on effectue une rotation, on modifie l'intégrité de l'image et dans une proportion qui dépend du modèle d'interpolation retenu. Cela peut avoir des conséquences dramatiques dans un processus de décision car cette modification du contenu informatif de l'image tant en quantité d'information qu'en localisation de l'information peut entraîner une erreur d'analyse et donc de diagnostic.

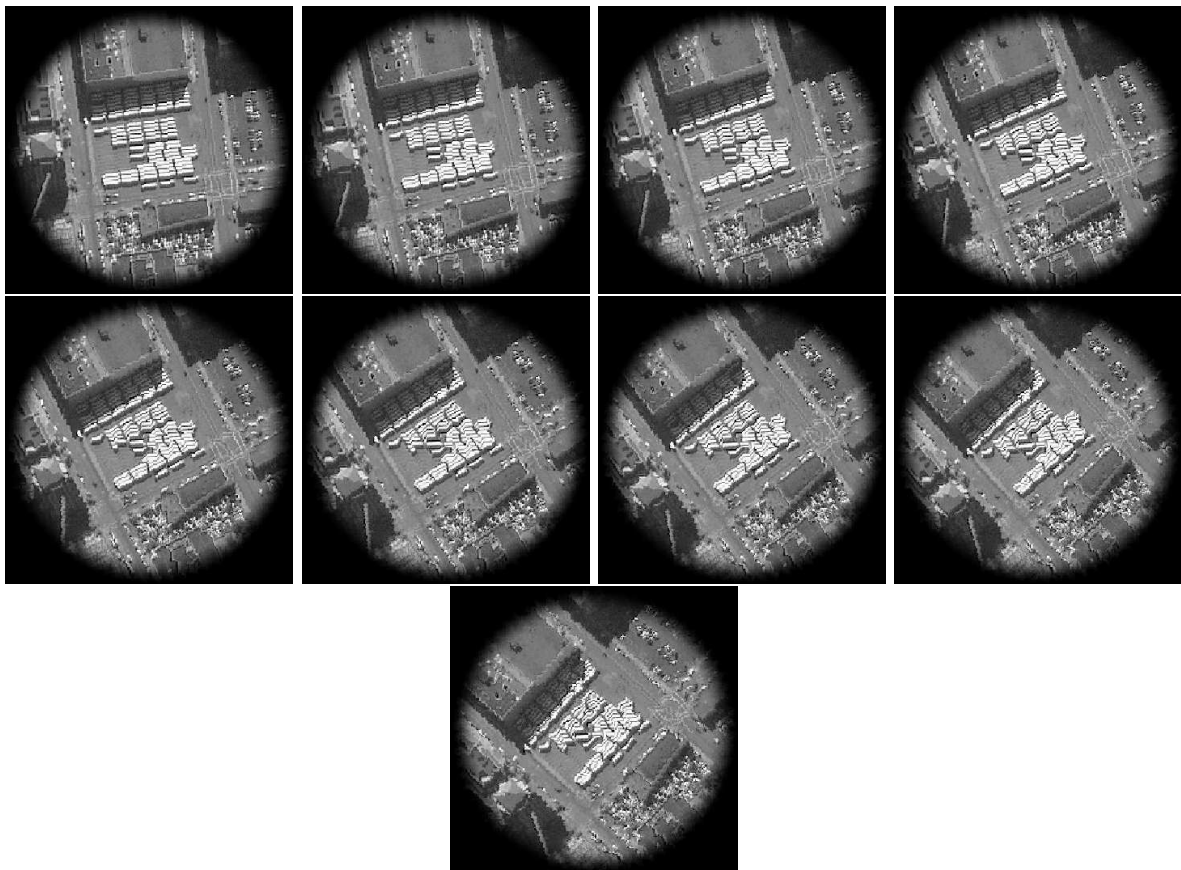


FIG. 4.8 – Image IKONOS de San Francisco. Rotations successives entre  $5^\circ$  et  $45^\circ$  par pas de  $5^\circ$ . Méthode des plus proches voisins.

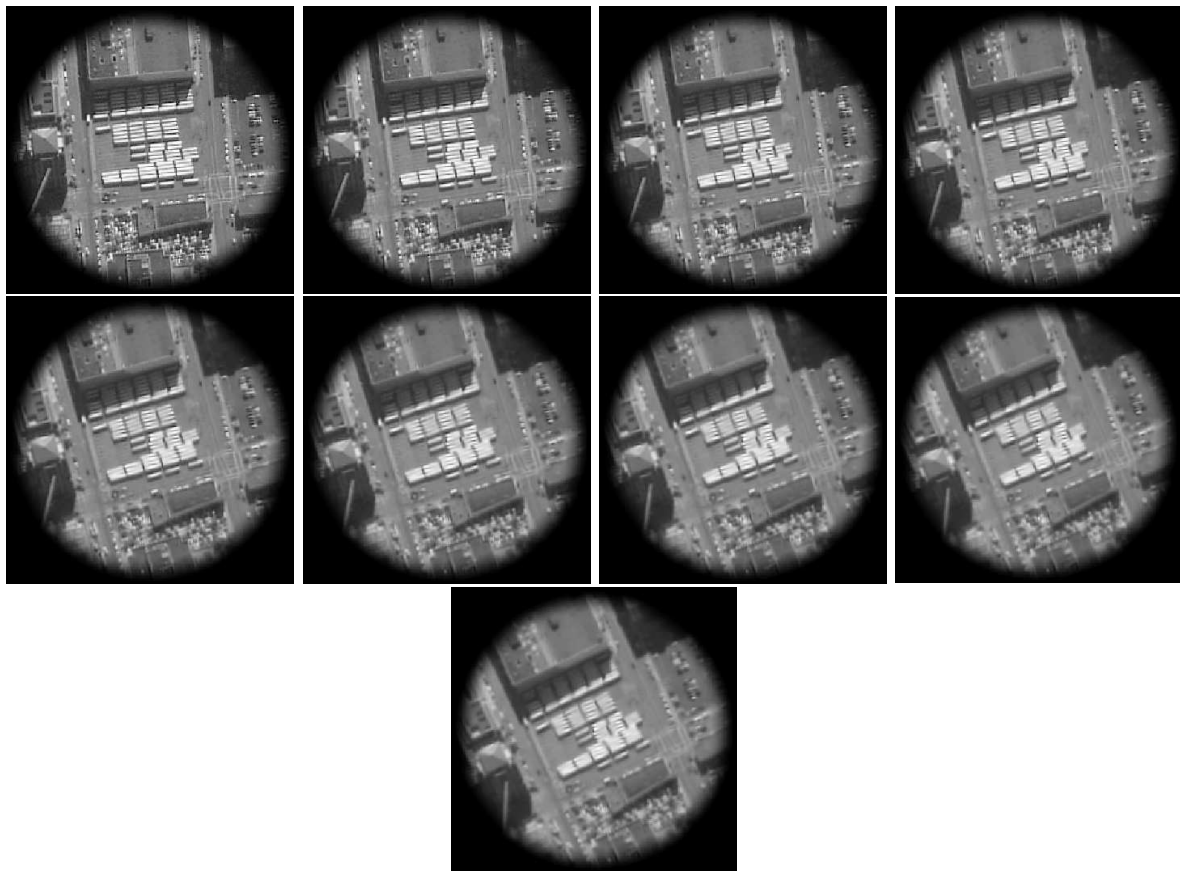


FIG. 4.9 – Image IKONOS de San Francisco. Rotations successives entre  $5^\circ$  et  $45^\circ$  par pas de  $5^\circ$ . Méthode bilinéaire.

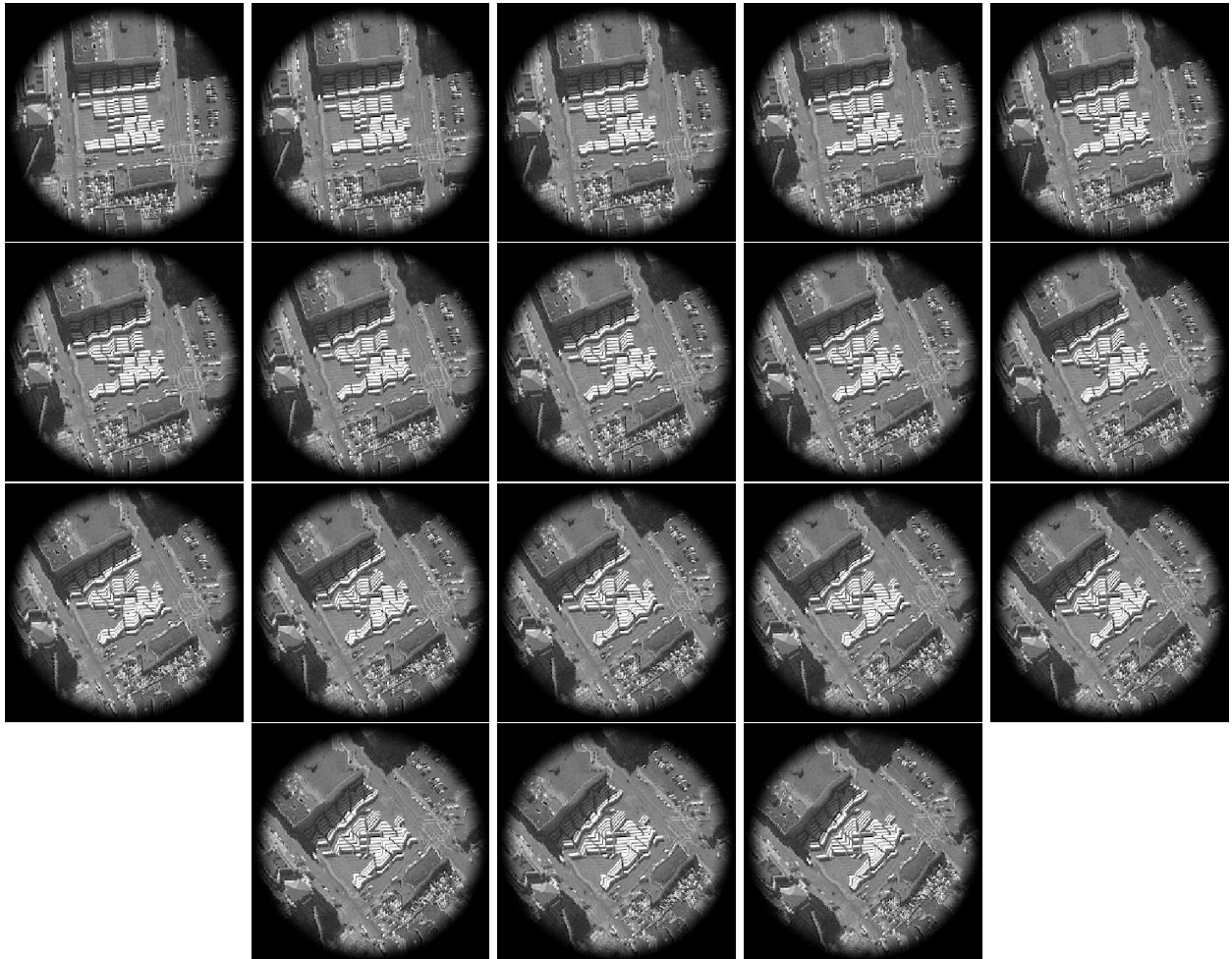


FIG. 4.10 – Image IKONOS de San Francisco. Rotations successives entre  $5^\circ$  et  $45^\circ$  par pas de  $2,5^\circ$ . Méthode des plus proches voisins.



FIG. 4.11 – Image IKONOS de San Francisco. Analyse de l'intégrité de l'image pour une image obtenue par une rotation d'un angle  $\alpha$  suivie par une autre rotation d'angle  $-\alpha$ . Les angles ont les valeurs  $1^\circ$ ,  $5^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$  et  $40^\circ$ . Les deux premières lignes correspondent à la méthode ppv, les deux dernières à la méthode bilinéaire.



# Chapitre 5

## Filtrage d'images

### 5.1 Généralités

#### 5.1.1 Le produit de convolution

Soit un signal  $S(x)$  défini par :

$$S(x) = g(x).f(x) \quad (5.1)$$

D'après l'équation (4.6), la transformée de Fourier d'un tel signal est :

$$\widehat{S}(\nu_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x).f(x). \exp^{-2.\pi.j.\nu_x.x} dx \quad (5.2)$$

En remarquant que, d'après la relation (4.5) :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(\nu'_x). \exp^{2.\pi.j.\nu'_x.x} d\nu'_x \quad (5.3)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\nu''_x). \exp^{2.\pi.j.\nu''_x.x} d\nu''_x \quad (5.4)$$

l'équation (5.2) devient :

$$\widehat{S}(\nu_x) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(\nu'_x).\widehat{f}(\nu''_x). \exp^{-2.\pi.j.(\nu'_x+\nu''_x-\nu_x).x} dx d\nu'_x d\nu''_x \quad (5.5)$$

$$\widehat{S}(\nu_x) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(\nu'_x).\widehat{f}(\nu''_x). \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \exp^{-2.\pi.j.(\nu'_x+\nu''_x-\nu_x).x} dx \right) d\nu'_x d\nu''_x \quad (5.6)$$

$$\widehat{S}(\nu_x) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(\nu'_x).\widehat{f}(\nu''_x).\delta(\nu'_x + \nu''_x - \nu_x) d\nu'_x d\nu''_x \quad (5.7)$$

$$\widehat{S}(\nu_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(\nu'_x).\widehat{f}(\nu_x - \nu'_x) d\nu'_x \quad (5.8)$$

On définit la convolution des fonctions  $f(x)$  et  $g(x)$  par :

$$\boxed{[f \star g](x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x').g(x - x') dx'} \quad (5.9)$$

La convolution est associative, commutative et admet comme élément neutre le pic de Dirac.

$$[f_1 \star [f_2 \star f_3]](x) = [[f_1 \star f_2] \star f_3](x) \quad (5.10)$$

$$[f_1 \star f_2](x) = [f_2 \star f_1](x) \quad (5.11)$$

$$[f \star \delta](x) = f(x) \quad (5.12)$$

L'équation (5.8) illustre un théorème qui nous sera très utile : la transformée de Fourier d'un produit de convolution est le produit de convolution des transformées de Fourier des fonctions.

$$\boxed{\mathcal{F}[f(x).g(x)] = [\mathcal{F}[f(x)] \star \mathcal{F}[g(x)]](\nu_x)} \quad (5.13)$$

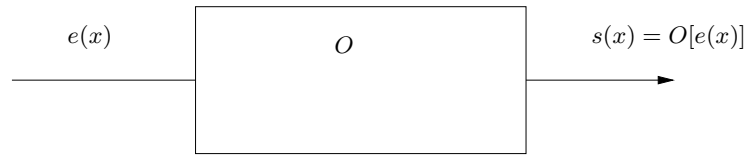


FIG. 5.1 – Transformation d'un signal

### 5.1.2 Le filtrage linéaire

La multiplication dans l'espace des fréquences peut être interprétée comme un filtrage des fréquences du signal, ce qui revient à réaliser dans l'espace direct un produit de convolution. Ce type de filtrage s'appelle filtrage linéaire. On définit un filtre linéaire comme un système linéaire, continu et stationnaire. La notion de système sert à caractériser la réponse à une action extérieure. Soit un signal d'entrée  $e(x)$ .  $e(x)$  sera modifié par le système  $O$  et appelons  $s(x)$  le signal de sortie. La figure 5.1 illustre cette transformation du signal.

Un système est :

- linéaire s'il vérifie  $\forall e_1(x), e_2(x)$  et  $\forall a_1, a_2$  complexes,

$$O[a_1.e_1(x) + a_2.e_2(x)] = a_1.O[e_1(x)] + a_2.O[e_2(x)] \quad (5.14)$$

- continu s'il vérifie quelle que soit la suite  $a_n(x)$

$$O \left[ \lim_{x \rightarrow \infty} (O[e_n(x)]) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} O[e_n(x)] \quad (5.15)$$

- stationnaire si  $\forall e(x), \tau$  et si  $s(x) = O[e(x)]$ ,

$$s(x - \tau) = O[e(x - \tau)] \quad (5.16)$$

Les filtres linéaires ont une réponse de convolution entre l'entrée et la sortie.

$$s(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_i(x - x').e(x')dx' \quad (5.17)$$

Si on prend comme signal d'entrée une impulsion  $\delta(x)$ , la relation précédente devient :

$$s(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_i(x - x').\delta(x')dx = R_i(x) \quad (5.18)$$

$R_i$  représente donc la réponse du système à une impulsion.  $R_i$  est appelée réponse impulsionnelle. La transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle s'appelle la fonction de transfert. On rappelle que le signal numérique qu'est l'image est non seulement limité dans sa qualité de description puisque l'on a une grille finie d'échantillonnage mais subit aussi le filtrage dû au système optique. La déconvolution du système optique sur l'image peut se faire facilement une fois modélisées les déformations spatiales liées à la qualité de l'optique et au fait que vous avez une pupille en entrée (le diamètre de l'objectif, du diaphragme...).

## 5.2 La détection de contours

Parmi les applications les plus spectaculaires et les plus utiles des filtres linéaires, il y a la détection des contours entre un objet et le fond de l'image par exemple. Ces méthodes supposent qu'il y ait une variation de contraste entre l'objet et son environnement. On va donc chercher à détecter les zones où l'intensité varie rapidement. Dans la littérature, ce type de méthodes portent le nom de méthodes dérivatives. Bien que l'image soit un signal à 2 dimensions, prenons le cas d'un signal à 1 dimension (la généralisation à 2 voire 3D ne pose aucun problème). Supposons que l'objet soit clair sur un fond foncé. Un extrait de la coupe radiométrique de l'image est donné par la figure 5.2. La zone de transition se traduit :

- soit par un module de la dérivée première extremum,
- soit par un passage à zéro de la dérivée seconde (i.e. détecter le point d'inflexion de la dérivée première).

Ainsi, pour détecter un contour, on peut :

- soit chercher les extrema locaux de la norme de la dérivée première et seuiller les résultats pour ne garder que les détections significatives,
- soit chercher les points de passage à zéro de la dérivée seconde.

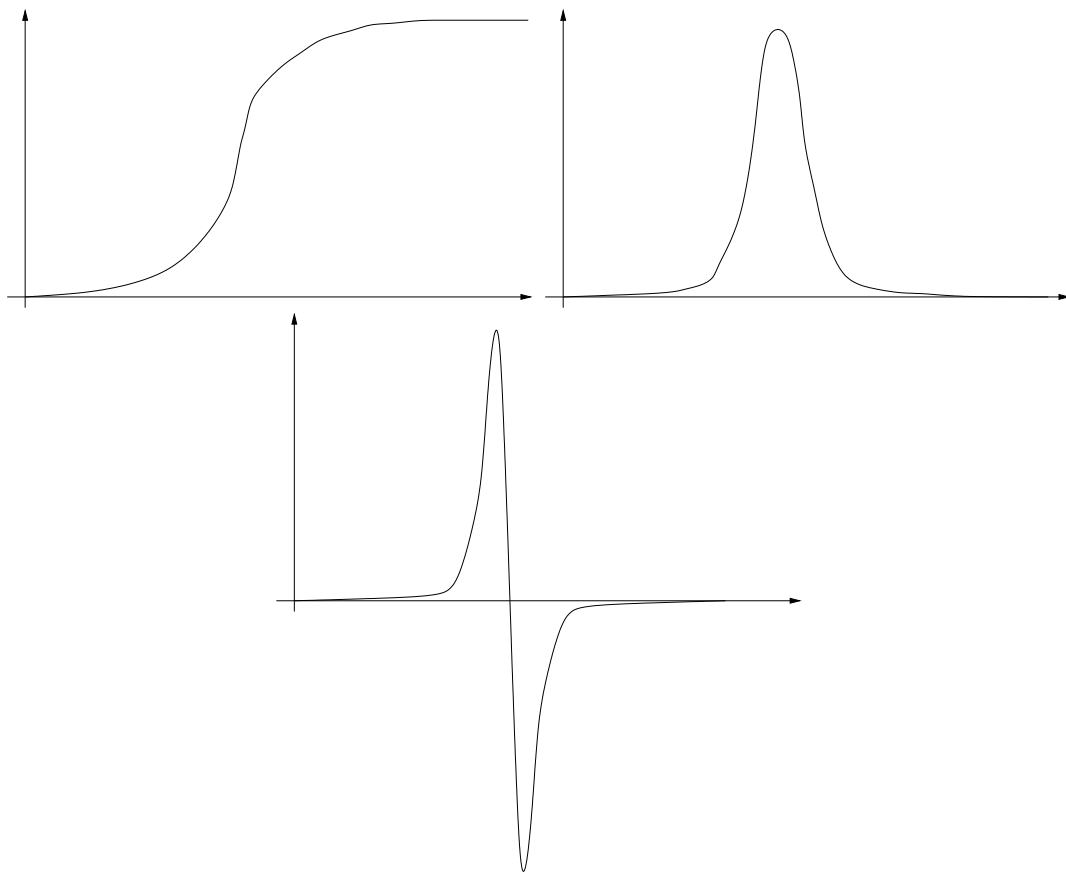


FIG. 5.2 – Détection d'un objet clair sur un fond sombre. En haut, la coupe radiométrique de l'image, au centre le module de la dérivé première et en bas la dérivée seconde.

### 5.2.1 Opérateurs dérivatifs du premier ordre

Prenons le cas d'un signal  $f(x)$  à une dimension. En rappelant le développement de Taylor de  $f$  au voisinage du pixel  $x_p$  appliquée au cas de la grille d'échantillonnage et limité au premier ordre, on a :

$$f(x_p + 1) \simeq f(x_p) + (x_p + 1 - x_p) \cdot f'(x_p) \quad (5.19)$$

et

$$f(x_p - 1) \simeq f(x_p) + (x_p - 1 - x_p) \cdot f'(x_p) \quad (5.20)$$

d'où on obtient la différence finie :

$$f(x_p + 1) - f(x_p - 1) \simeq 2 \cdot f'(x_p) \quad (5.21)$$

ou encore :

$$f'(x_p) \simeq \frac{1}{2} \cdot (f(x_p + 1) - f(x_p - 1)) \quad (5.22)$$

ce qui revient à calculer le produit de convolution de  $f(x_p)$  avec la matrice  $[-1, 0, 1]$  au facteur  $\frac{1}{2}$  près. Dans le cas d'un signal à 2 dimensions, la matrice précédente devient évidemment, si on privilégie la détection selon les colonnes, ce qui est proche de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De même, si on privilégie la détection selon les lignes,

$\frac{\partial f}{\partial y}$  :

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On peut alors définir un bon détecteur de contours non directionnel comme la longueur  $l_g$  du vecteur gradient :

$$l_g = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \quad (5.23)$$

et qui est en pratique approximé par le calcul de  $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ .

### 5.2.2 Opérateurs dérivatifs du second ordre

Si maintenant on développe la formule de Taylor jusqu'au deuxième ordre, on a :

$$f(x_p + 1) \simeq f(x_p) + (x_p + 1 - x_p) \cdot f'(x_p) + \frac{(x_p + 1 - x_p)^2}{2} \cdot f''(x_p) \quad (5.24)$$

et

$$f(x_p - 1) \simeq f(x_p) + (x_p - 1 - x_p) \cdot f'(x_p) + \frac{(x_p - 1 - x_p)^2}{2} \cdot f''(x_p) \quad (5.25)$$

ce qui donne en faisant la somme des deux équations précédentes :

$$f(x_p + 1) + f(x_p - 1) \simeq 2 \cdot f(x_p) + f''(x_p) \quad (5.26)$$

soit encore :

$$f''(x_p) \simeq f(x_p + 1) - 2 \cdot f(x_p) + f(x_p - 1) \quad (5.27)$$

Cela revient à calculer le produit de convolution de  $f(x_p)$  avec la matrice  $[1, 2, 1]$ . Dans le cas d'un signal à 2 dimensions, la matrice précédente devient, si on privilégie la détection selon les colonnes, ce qui est proche de  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De même, si on privilégie la détection selon les lignes,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

### 5.2.3 Autres opérateurs de dérivation directionnelle

Comme on vient de le voir, il n'existe pas, et loin s'en faut, une seule façon de détecter des contours par un filtrage linéaire. En fait, il est important de remarquer que :

- soit la somme des coefficients de la matrice est égale à zéro. On isole alors uniquement les contours sur l'image,
- soit la somme des coefficients est égale à 1. Il y a alors conservation de l'énergie par rapport à l'image d'origine, c'est à dire que le fond de l'image sera présent en plus des contours. C'est une manière commode de réhausser les contours dans une image histoire de lui donner une impression de relief un peu plus marqué.

Dans ce qui suit, on se place dans le cas où la somme des coefficients est égale à zéro. La généralisation des opérateurs de détection de contours pour des directions privilégiées ne pose aucune difficulté et est illustré par le tableau de matrices ci-après.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{bmatrix} -c & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & -c & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & c & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 & -c \\ 1 & 0 & -1 \\ c & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -c & 0 & c \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{ccc} \swarrow & \uparrow & \searrow \\ \leftarrow & & \rightarrow \\ \swarrow & \downarrow & \searrow \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ c & 0 & -c \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} 0 & 1 & c \\ -1 & 0 & 1 \\ -c & -1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & c & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -c & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & c \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Dans la littérature, on parlera d'opérateurs directionnels de Prewitt [Pre70] si  $c=1$  et de Sobel si  $c=2$ .



## Chapitre 6

# Morphologie mathématique

Les opérateurs morphologiques sont ensemblistes (inclusion, union, intersection...) et non plus linéaires comme au chapitre précédent. Le lecteur souhaitant approfondir le sujet pourra se reporter à [Ser82, Ser88, Dou92, SM94].

D'une manière intuitive [Sch89, Ser89], la morphologie mathématique s'intéresse à la forme d'ensembles de pixels. Elle manipule deux objets :

- l'ensemble à analyser, l'image, imposée et notée dans ce paragraphe  $X$ ,
- l'ensemble analysant, appelé élément structurant, que nous pouvons choisir à notre guise suivant les besoins de l'analyse, et qui sera noté dans ce qui suit  $B$ .

Considérons dans un premier temps le cas d'une image binaire et prenons l'exemple du plan d'un restaurant où les tables sont représentées en blanc (figure 6.1, à gauche). La place occupée par un convive, déterminée par exemple par la longueur de ses bras, est schématisée sur la figure 6.1, à droite. Le restaurant est l'ensemble à analyser et le convive l'ensemble analysant, toute considération purement gastronomique étant totalement exclue.

Les définitions qui suivent s'appuient sur l'addition de Minkowski, notée  $\oplus$ , de deux ensembles  $X$  et  $Y$  :

$$X \oplus Y = \{x + y | x \in X, y \in Y\} \quad (6.1)$$

### 6.1 La dilatation

La dilatation est l'opérateur primitif, c'est-à-dire l'opérateur permettant de construire tous les autres opérateurs. La dilatation de l'image  $X$  par l'élément structurant  $B$ , notée  $X \oplus \check{B}$ , est l'addition de Minkowski de  $X$  et de  $\check{B}$ , avec  $\check{B}$  le symétrique de  $B$  par rapport à l'origine. La dilatation est donc l'ensemble des positions  $x$  pour lesquelles  $B_x$ , translaté de  $B$  en  $x$ , intersecte  $X$  :

$$D(X, B) = X \oplus \check{B} = \{x | B_x \cap X \neq \emptyset\} \quad (6.2)$$

Intuitivement, cela équivaut à promener l'élément structurant sur toute l'image en faisant un "et" logique entre l'élément structurant  $B$  et l'image  $X$  et en ne gardant que le centre de  $B$  pour chaque position pour laquelle le test d'intersection est satisfait. Avec notre exemple, la partie rajoutée par la dilatation correspond à toutes les positions (zones en hachurés) que peut occuper un convive pour pouvoir poser un verre sur la table (figure 6.2

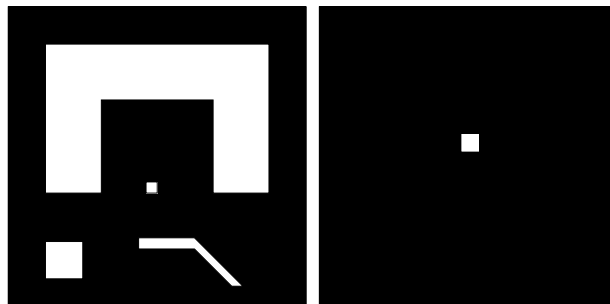


FIG. 6.1 – L'exemple du restaurant. A gauche, le plan de la salle avec les tables en blanc, à droite la place occupée par un convive (un carré) et qui sera notre élément structurant.

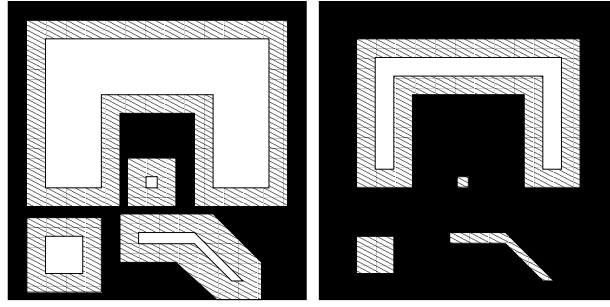


FIG. 6.2 – L'exemple du restaurant. À gauche, le résultat de la dilatation, à droite celui de l'érosion.

à gauche). La surface résultante (en blanc et hachurés) est supérieure à celle d'origine.

La généralisation à une image en niveaux de gris se fait aisément si on la considère comme une superposition d'images binaires. Ainsi, une image codée en 8 bits (256 niveaux de gris différents) peut être vue comme un empilement de 256 images binaires. En appelant  $f$  la fonction radiométrique de l'image, la dilatation s'écrit alors :

$$D(f, B)(x) = (f \oplus \check{B})(x) = \sup\{f(y) | y \in B_x\} \quad (6.3)$$

## 6.2 L'érosion

L'érosion de l'image  $X$  par l'élément structurant  $B$ , notée  $X \ominus \check{B}$ , peut être définie par rapport à la complémentation de l'équation précédente, exprimant ainsi la dualité entre l'érosion et la dilatation :

$$X \ominus \check{B} = (X^C \oplus \check{B})^C \quad (6.4)$$

ce qui s'écrit encore :

$$E(X, B) = X \ominus \check{B} = \{x | B_x \subset X\} \quad (6.5)$$

Ici, on remplace le “et” logique par une inclusion. Avec notre exemple, les parties supprimées par l'érosion correspondent à toutes les positions sur les tables à la portée des convives pour prendre un verre (l'abus d'alcool...) (figure 6.2 à droite). Cette fois, la surface résultante (en blanc) est inférieure à celle de l'image d'origine. Dans le cas d'une image en niveaux de gris, l'érosion s'écrit :

$$E(f, B)(x) = (f \ominus \check{B})(x) = \inf\{f(y) | y \in B_x\} \quad (6.6)$$

## 6.3 L'ouverture $X_B$

Elle est définie comme une érosion suivie d'une dilatation :

$$X_B = (X \ominus \check{B}) \oplus B \quad (6.7)$$

L'ouverture est utilisée pour éliminer certains objets clairs de taille inférieure à celle de l'élément structurant sans toucher au reste de l'image (figure 6.3).

La généralisation à une image en niveaux de gris est simplement, avec nos notations :

$$((f \ominus \check{B}) \oplus B)(x) = \sup\{\inf\{f(z) | z \in B_y\} | y \in B_x\} \quad (6.8)$$

## 6.4 La fermeture $X^B$

Elle est définie comme une dilatation suivie d'une érosion :

$$X^B = (X \oplus \check{B}) \ominus B \quad (6.9)$$

elle permet d'éliminer les objets sombres de taille inférieure à celle de l'élément structurant. Pour une image en niveaux de gris, il suffit de permuter  $\ominus$  avec  $\oplus$  et  $\sup$  avec  $\inf$  dans l'équation (6.8).



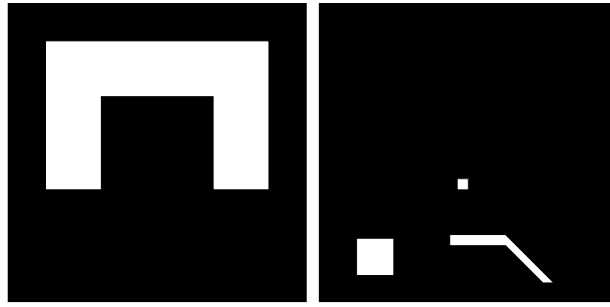


FIG. 6.3 – L'exemple du restaurant. A gauche, le résultat de l'ouverture par un carré, à droite celui du résidu par ouverture par un carré (tophat).

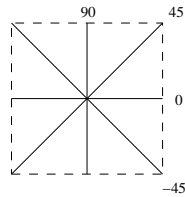


FIG. 6.4 – Les différentes orientations de l'élément structurant de type segment.

## 6.5 Le résidu par ouverture

Noté  $T^{ouv}$  et aussi appelé transformation du chapeau haut de forme ou tophat [Mey79], est une soustraction à l'image de l'ouverture.

$$T^{ouv} = X - X_B \quad (6.10)$$

L'ouverture supprime les pics ou lignes de crêtes radiométriques à un niveau où leur largeur est inférieure à la taille de l'élément structurant. Avec notre exemple, la soustraction à l'image d'origine permet la mise en évidence de ces pics ou crêtes (figure 6.3).

## 6.6 Le résidu par fermeture

Il est l'opération duale. Elle est composée d'une fermeture suivie d'une soustraction de l'image originale.

$$T^{ferm} = X^B - X \quad (6.11)$$

Elle permet de mettre en évidence les “puits” ou “failles” radiométriques. On remarquera que sur les images, ces puits ou failles apparaîtront en blanc et non en noir comme dans l'image d'origine.

## 6.7 La forme de l'élément structurant

Le résultat de tout opérateur morphologique est fortement dépendant de l'élément structurant choisi. Ainsi, avec notre exemple, nous avons vu les résultats de la dilatation et de l'érosion (figure 6.2), de l'ouverture et du résidu par ouverture par un carré (figure 6.3). Prenons maintenant comme élément structurant un segment centré (i.e. un rectangle de largeur 1). Comme orientations, nous ne retiendrons que quatre directions indexées par 90, 45, 0 et -45 comme illustré à la figure 6.4 où le carré en pointillés représente l'élément structurant utilisé précédemment. Dans ce qui suit, nous appellerons  $S_{90}^n$ ,  $S_{45}^n$ ,  $S_0^n$  et  $S_{-45}^n$  un segment de longueur  $n$  et d'orientation 90, 45, 0 et -45 respectivement. Nous ne démontrerons pas qu'effectuer une dilatation (une érosion) par un segment  $S^n$  de taille  $n$  revient à itérer  $n$  fois une dilatation (une érosion) par un segment de taille 1, appelé élément structurant élémentaire. Ainsi, avec nos notations, on a pour la dilatation dans le cas binaire :

$$D(X, S^n) = X \oplus \tilde{S}^n = [X \oplus \tilde{S}^1]^n \quad (6.12)$$

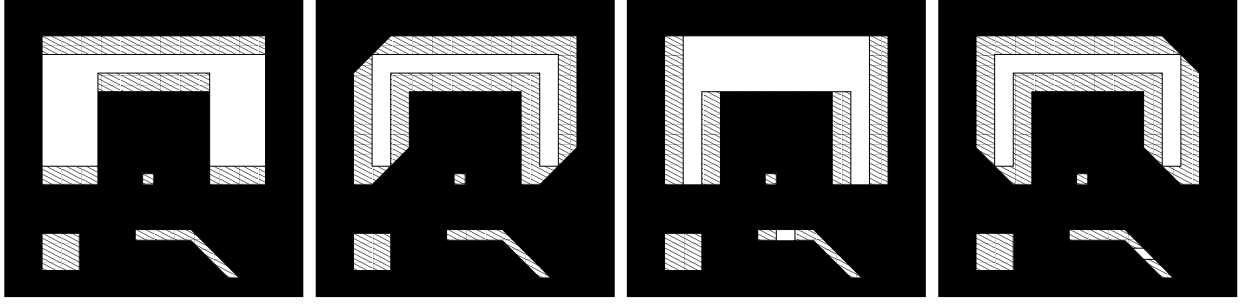


FIG. 6.5 – L'exemple du restaurant. De haut en bas et de gauche à droite : le résultat de l'érosion pour une orientation de l'élément structurant de type segment au 90, 45, 0 et -45.

La généralisation à l'érosion et au cas d'une fonction en niveaux de gris ne pose aucune difficulté. Pour l'érosion par exemple, on a :

$$E(X, S^n) = X \ominus \check{S}^n = [X \ominus \check{S}^1]^n \quad (6.13)$$

La figure 6.5, à comparer avec la figure 6.2 à droite, montre les résultats de l'érosion en blanc par un segment pour chaque orientation. On remarquera en particulier que la structure linéaire en bas à droite n'a pas complètement disparu pour les orientations 0 et -45, contrairement au cas du carré.

## 6.8 La reconstruction géodésique

Avant de définir la reconstruction géodésique, nous allons enrichir notre vocabulaire morphologique par les notions de marqueurs, de boule géodésique, de dilatation et érosion conditionnelles.

- un marqueur est tout simplement un ensemble de pixels marquant de façon sûre une zone d'intérêt. Il s'obtient soit par l'interprétation humaine, soit comme résultat d'un algorithme de détection (seuillage, érodé ultime...). Comme il est rare d'obtenir une détection optimale sur un objet en entier, le marqueur ne représente la plupart du temps qu'une fraction de l'objet, d'où l'intérêt de la reconstruction géodésique,
- une boule géodésique  $B_r(x)$  est la boule de centre  $x$  et de rayon  $r$  de la distance géodésique dans  $X$  :

$$B_r(x) = \{y \in X | d_X(x, y) \leq r\} \quad (6.14)$$

où  $d_X$  est la distance géodésique conditionnellement à  $X$  et est égale à la longueur du plus court chemin entre deux points de  $X$  en restant dans  $X$ ,

- la dilatation conditionnelle  $D_X$  de taille  $r$ , aussi appelée dilatation géodésique, consiste à effectuer la dilatation de  $Y$  dans  $X$  par la boule géodésique de rayon  $r$  [SM94]. En topologie discrète, cela revient à :

$$D_X(Y, B_r) = [D(Y, B_1) \cap X]^r \quad (6.15)$$

- l'érosion conditionnelle ou géodésique  $E_X$  est la complémentation de l'expression précédente et fait intervenir le complémentaire  $X - Y$  de  $Y$  dans  $X$  :

$$E_X(Y, B_r) = X - D_X(X - Y, B_r) = X - [D(X - Y, B_1) \cap X]^r \quad (6.16)$$

La reconstruction géodésique par dilatation du marqueur  $Y$  dans l'image  $X$  se définit alors simplement comme étant la dilatation géodésique de  $Y$  dans  $X$  par une boule de rayon infini (en pratique, on itère la formule de l'équation (6.15) jusqu'à la convergence).

## 6.9 L'érosion composée

Notée  $E^c$ , elle est égale au maximum sur l'ensemble des érosions pour chaque orientation du segment  $S^n$  :

$$E^c(X, S^n) = \max(E(X, S_{90}^n), E(X, S_{45}^n), E(X, S_0^n), E(X, S_{-45}^n)) \quad (6.17)$$

Avec notre exemple, l'érosion composée est illustrée à la figure 6.6 à gauche. On notera que pour isoler uni-

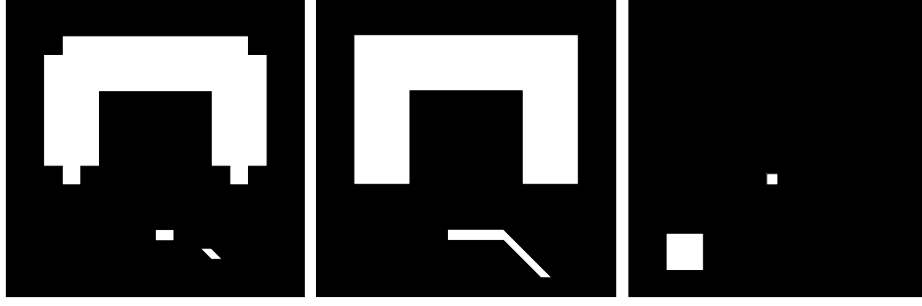


FIG. 6.6 – L'exemple du restaurant. De gauche à droite : l'érosion composée, la reconstruction géodésique par dilatation et le résidu composé par un segment.

quement le linéaire blanc, il aurait suffi de réaliser l'érosion composée sur le résidu par ouverture par un carré (figure 6.3).

## 6.10 La reconstruction géodésique composée par un segment

Notée  $R_{seg}^{ouv}$ , elle est composée des étapes :

- calcul de l'érosion composée,

$$X_1 = E^c(X, S^n) \quad (6.18)$$

- reconstruction géodésique par dilatation dans l'image  $X$  en prenant comme marqueur le résultat de l'érosion composée. Avec notre exemple (figure 6.6 au centre), on retrouve alors complètement la grande table en U inversé et la structure linéaire en bas à droite,

$$R_{seg}^{ouv} = D_X(X_1, B_\infty) \quad (6.19)$$

On peut alors définir l'équivalent du résidu par ouverture par un carré, que nous appellerons résidu composé par un segment et noterons  $T_{seg}^{ouv}$ .  $T_{seg}^{ouv}$  est le résultat de la soustraction de la reconstruction géodésique composée par un segment à l'image d'origine  $X$ . Ce résultat (figure 6.6 à droite) est à comparer avec celui de la figure 6.3 à droite : dans un cas, nous avons extrait toutes les structures de taille inférieure à celle de l'élément structurant, dans l'autre, seules les structures ponctuelles non linéaires sont visibles.

$$T_{seg}^{ouv} = X - R_{seg}^{ouv} \quad (6.20)$$

## 6.11 Quelques résultats en images

Dans cette section se propose d'illustrer les résultats théoriques sur des images réelles. La figure 6.7 montre les résultats en pleine résolution de la détection du linéaire clair (en haut à droite) et sombre (en bas) sur un extrait d'une scène panchromatique SPOT (en haut à gauche) à proximité de l'aéroport d'Istres (Bouches du Rhône) dont on voit une extrémité des pistes en haut à droite.

La figure 6.8 montre les résultats en pleine résolution de la détection du linéaire clair (en haut à droite) et des structures ponctuelles claires (en bas à gauche) et sombres (en bas à droite) sur un extrait de scène situé en zone urbaine, à proximité de l'aéroport d'Orly (en haut à gauche). La détection du linéaire sombre n'est pas illustrée car elle ne présente que peu d'intérêt, la scène ne contenant quasiment aucune structure de ce type.

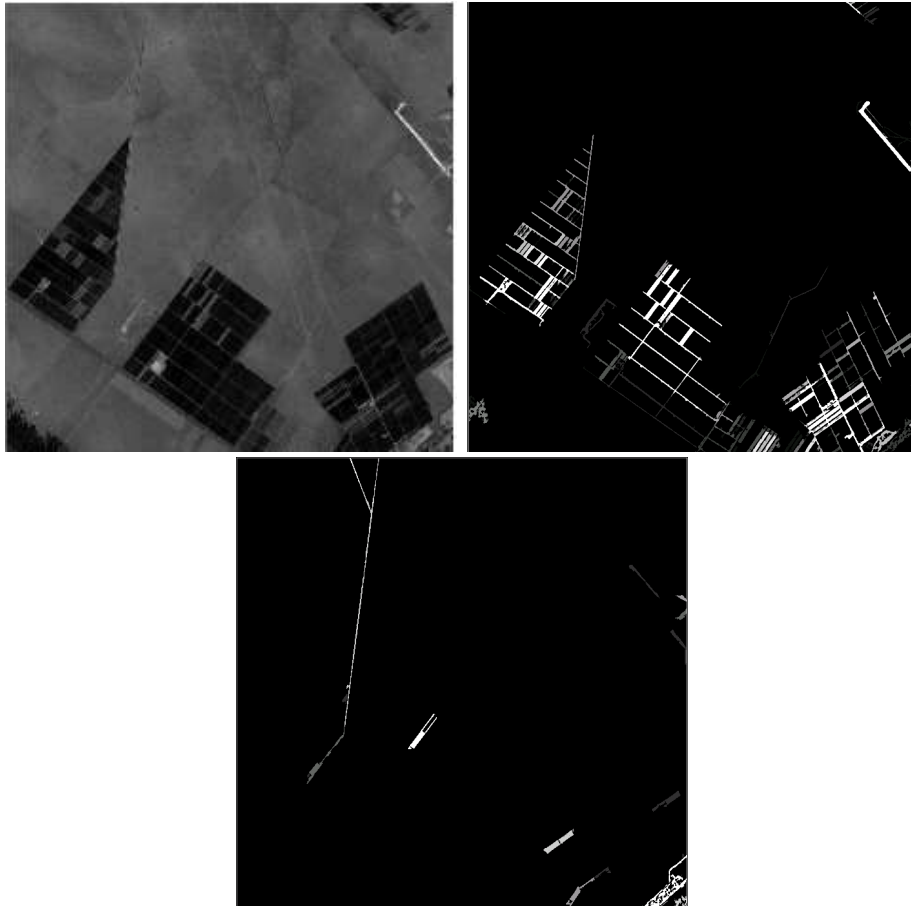


FIG. 6.7 – Exemple de détection du linéaire. En haut, à gauche, un extrait pleine résolution d’une image panchromatique SPOT de la région d’Istres où apparaissent quelques chemins clairs au milieu de plantations d’arbres fruitiers qui apparaissent en sombre. A droite, le résultat de la détection du linéaire clair et en bas le linéaire sombre. Ces résultats sont eux aussi en pleine résolution.

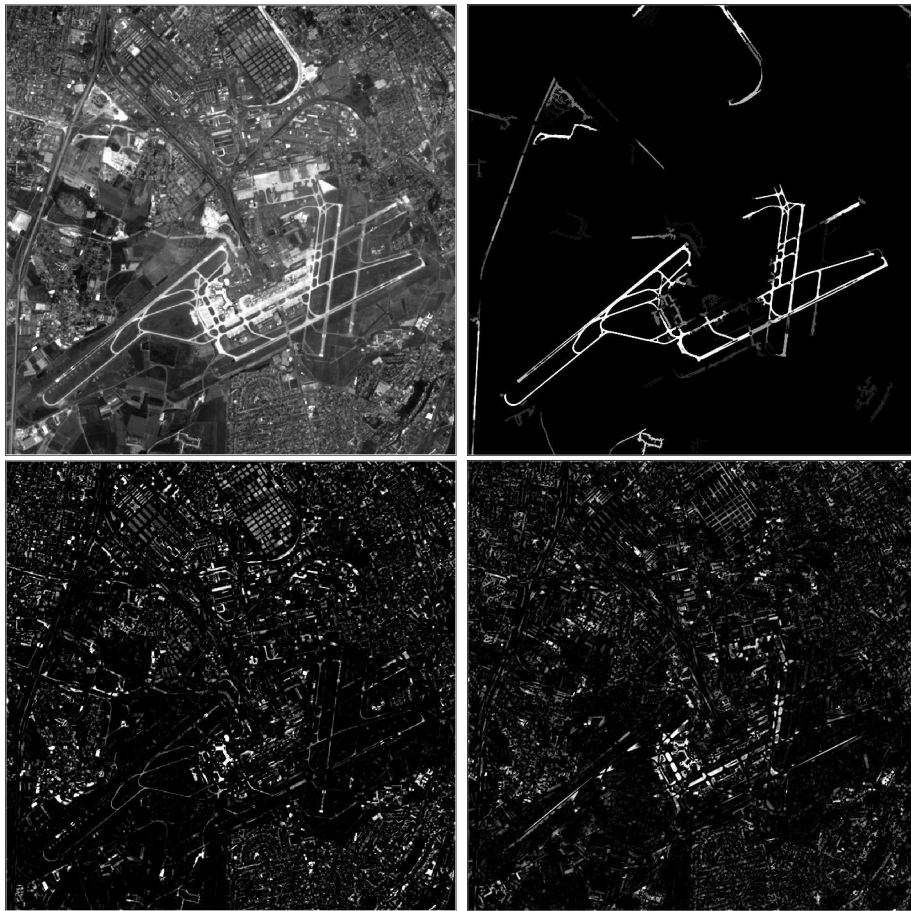


FIG. 6.8 – De gauche à droite et de haut en bas : image SPOT panchromatique origine d’Orly, linéaire clair, ponctuel clair et sombre en pleine résolution.



# Bibliographie

- [Ba99] I. Bloch and all. Base de la reconnaissance des formes. Cours ENST, 1999.
- [Bea01] L. Beaudoin. *Sélection de données satellitales optiques pour la photo-interprétation*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications de Paris, 2001.
- [BFR86] M. Bertin, J.P. Faroux, and J. Renault. *Optique et physique ondulatoire*. Dunod, 1986.
- [Bij84] A. Bijaoui. *Image et information*. Masson, 1984.
- [Bon92] F. Bonn. *Précis de télédétection*, volume 1. AUPELF-UREF, 1992.
- [Bro79] I.N. Bronstein. *Aide mémoire de mathématiques*. Eyrolles, 1979.
- [Cal99] D. Calle. *Agrandissement d'images par synthèse de similarités et par induction sur un ensemble*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble 1, 1999.
- [CNE91] CNES. *Guide des utilisateurs de données SPOT*. Spotimage, 1991.
- [Dou92] E. Dougherty. *Image processing and mathematical morphology*. Marcel Dekker, 1992.
- [Dub90] B. Dubuisson. *Diagnostic et reconnaissance des formes*. Hermès, 1990.
- [EEB89] M. Ehlers, G. Edwards, and Y. Bedard. Integration of remote sensing with geographic information system : a necessary evolution. *Photogrammetric Engineering Remote Sensing*, 55 :1619–1625, 1989.
- [FBF75] J.H. Friedman, J.L. Bentley, and R.A. Finkel. An algorithm for finding nearest neighbors. *IEEE Transactions on Computers*, 24, 1975.
- [FHM<sup>+</sup>83] M.R.B. Forshaw, A. Haskell, P.F. Miller, D.J. Stanley, and J.R.G. Townshend. Spatial resolution of remotely sensed imagery : a review paper. *International journal of remote sensing*, 4(3) :497–520, 1983.
- [Fri96] L.W. Fritz. Commercial earth observation satellites. In *ISPRS*, volume XXXI, pages 273–282, 1996.
- [Fri99] L.W. Fritz. High resolution commercial remote sensing satellites and spatial information systems. In *ISPRS highlights*, volume 4, [http ://www.isprs.org/publications/highlights/highlights0402/fritz.html](http://www.isprs.org/publications/highlights/highlights0402/fritz.html), 1999.
- [GG99] M.C. Girard and C. Girard. *Traitement des données de télédétection*. Dunod, 1999.
- [Gra02] Pierre Grangeat. *La tomographie médicale*. Lavoisier, 2002.
- [Gue97] J. Gueydan. *Interpolation réaliste de séquences d'images réelles*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 1997.
- [Hij85] J.H. Hijazi. *Production de modèles numériques de terrain par corrélation automatiques d'images numériques par approximations successives. Application aux vues stéréoscopiques SPOT*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure de Géographie, 1985.
- [HM95] R. Horaud and O. Monga. *Vision par ordinateur*. Hermes, 1995.
- [Kun81] M. Kunt. *Traitement numérique des signaux*. Dunod, 1981.
- [Lar97] C. Lardier. Multiplication des satellites de télédétection. *Air et Cosmos*, 1607 :34–35, 1997.
- [Mar87] A. Marion. *Introduction aux techniques de traitement d'images*. Eyrolles, 1987.
- [Mar97] A. Marion. *Acquisition et visualisation des images*. Eyrolles, 1997.
- [MDHP96] A. Meyret, M. Dinguirard, P. Henry, and L. Poutier. The SPOT histogram data base. In *SPIE*, volume 2957, pages 322–331, 1996.
- [Mey79] F. Meyer. *Cytologie quantitative et morphologie mathématique*. PhD thesis, Ecole des Mines de Paris, 1979.
- [Mil93] M. Milgram. *Reconnaissance des formes, méthodes numériques et connexionnistes*. Armand Colin, 1993.
- [Pau97] S. Paul. *Terminologie de télédétection et photogrammétrie*. Presses Universitaires de France, 1997.

- [PM96] H. Plaziat and B. Matron. *Le maxidico*. Edition de la connaissance, 1996.
- [Pre70] J.M.S. Prewitt. *Picture processing and psychopictorics*, chapter Object enhancement and extraction, pages 75–149. Academic press, 1970.
- [Rad91] J.C. Radix. *Répertoire géodésique en vue de la navigation*. Cépaduès, 1991.
- [Ref93] P. Refrigier. *Théorie du signal*. Masson, 1993.
- [Rob95] M. Robin. *La télédétection*. Nathan université, 1995.
- [Rod91] F. Roddier. *Distribution et transformation de Fourier*. McGraw-Hill, 1991.
- [Rui86] E. Vidal Ruiz. An algorithm for finding nearest neighbors in (approximately) constant average time. *Pattern Recognition Letter*, 1986.
- [Sch89] M. Schmitt. *Des algorithmes morphologiques à l'intelligence artificielle*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1989.
- [Sch97] R.A. Schowengerdt. *Remote sensing : models and methods for image processing*. Academic press, 1997.
- [Ser82] J. Serra. *Image analysis and mathematical morphology*. Academic Press, New York, 1982.
- [Ser88] J. Serra. *Image analysis and mathematical morphology, part II : theoretical advances*. Academic Press, New York, 1988.
- [Ser89] M.A. Serendo. *Extraction d'informations symboliques en imagerie SPOT : réseau de communication et agglomérations*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1989.
- [SM94] M. Schmitt and J. Mattioli. *Morphologie mathématique*. Masson, 1994.
- [Sto97] W.E. Stoney. Land satellites in the year 2000. In *IGARSS*, 1997.
- [Tou01] T. Toutin. IKONOS démystifié. *La télédétection au Canada*, 28(2) :2, 2001.
- [Ver82] F. Verger. *L'observation de la Terre par les satellites*. Que sais-je, 1982.
- [Ver97] F. Verger. *Atlas de géographie de l'espace*. Belin, 1997.
- [Wil88] A.K. Wilson. The effective resolution element of LANDSAT thematic mapper. *International journal of remote sensing*, 9 :311–332, 1988.