Laporan Tugas Besar 1 IF 2123 Aljabar Linier dan Geometri

Sistem Persamaan Linier, Determinan, dan Aplikasinya

Kelompok 14 - !solo

Fikri Khoiron Fadhila - 13520056

Malik Akbar Hashemi Rafsanjani - 13502105

Hafidz Nur Rahman Ghozali - 13520117

Semester I Tahun 2021/2022

Bab 1

Deskripsi Masalah

Spesifikasi Tugas Besar 1

A. Buatlah pustaka dalam Bahasa Java untuk menemukan solusi SPL dengan metode eliminasi Gauss, metode Eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan, dan kaidah Cramer (kaidah Cramer khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan), menghitung determinan matriks dengan reduksi baris dan dengan ekspansi kofaktor, dan menghitung balikan matriks.

B. Gunakan pustaka di atas untuk membuat program penyelesaian berbagai persoalan dalam bentuk SPL, menyelesaikan persoalan interpolasi dan regresi linier, menghitung matriks balikan, menghitung determinan matriks dengan berbagai metode (reduksi baris dan ekspansi kofaktor).

Bab 2

Teori Singkat

A. Eliminasi Gauss

Eliminasi Gauss adalah sebuah metode untuk menyederhanakan nilai-nilai di dalam matriks dengan melakukan operasi baris, yang mana baris ini dapat digunakan sebagai salah satu metode penyelesaian sistem persamaan linear. Caranya dengan mengubah persamaan linear tersebut ke dalam matriks augmented dan melakukan operasi baris elementer sampai membentuk matriks eselon baris. Kemudian melakukan penyulihan balik untuk mendapatkan nilai dari variabelnya.

Misalkan persamaan linear:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Untuk mencari nilai X, maka digunakan persamaan AX = B. Maka, matriks augmentednya:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks tersebut diubah menjadi matriks eselon baris melalui serangkaian operasi baris elementer, sehingga didapatkan matriks akhir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Dari matriks tersebut, diperoleh persamaan

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3/2x_2 - 1/2x_3 &= 5/2 \qquad \text{(i)}\\
x_2 + 1/2x_3 &= 7/2 \qquad \text{(ii)}\\
x_3 &= 3 \qquad \text{(iii)}
\end{aligned}
$$

Dari persamaan diatas, dilakukan teknik penyulihan mundur sehingga didapatkan nilai X1 = 1, X2 = 2, X3 = 3.

B. Eliminasi Gauss Jordan

Eliminasi Gauss Jordan adalah pengembangan dari eliminasi Gauss yang hasilnya lebih sederhana. Tidak seperti eliminasi Gauss, metode Gauss Jordan menghasilkan matriks dengan bentuk matriks eselon baris tereduksi.

Misalkan diberikan matriks augmented dari suatu persamaan linear:

$$
\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}
$$

Kemudian, melakukan serangkaian operasi baris elementer pada matriks sehingga didapatkan matriks eselon baris tereduksi.

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}
$$

Berdasarkan matriks *augmented* eselon baris tereduksi, diperoleh nilai X1 = 1, X2 = 2, X3 = 3.

C. Determinan Matriks

Determinan matriks hanya dapat dicari untuk matriks persegi, yaitu jika banyak baris sama dengan banyak kolom. Untuk mencari determinan suatu matriks, ada 2 alternatif yang dibahas dalam tugas besar ini. Alternatif pertama yaitu dengan reduksi baris. Suatu matriks akan dikonversi menjadi matriks segitiga bawah dengan cara menukar dan atau mereduksi baris-barisnya. Kemudian determinannya diperoleh dengan mengalikan elemen-elemen pada diagonal utama dan mempertimbangkan berapa kali penukaran barisnya.

Alternatif kedua yaitu dengan metode ekspansi kofaktor. Determinan dihitung dengan cara menjumlahkan perkalian tiap elemen dengan kofaktornya dalam satu baris atau kolom.

Contohnya dalam matriks M = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Dengan memanfaatkan baris 1,

$$\det(M) = |M| = a_{11} * M_{11} - a_{12} * M_{12} + a_{13} * M_{13}$$

Determinan dapat digunakan untuk menentukan solusi dari suatu SPL dengan kaidah Cramer. Selain itu, determinan juga dimanfaatkan untuk menghitung matriks balikan.

D. Matriks Balikan

Matriks balikan dapat didefinisikan jika A adalah suatu matriks kuadrat, dan jika kita dapat mencari matriks B sehingga AB = BA = I, maka matriks A dapat dibalik, dan B merupakan invers dari A. Dalam mencari suatu balikan dari matriks, kita dapat memanfaatkan 2 metode, yaitu eliminasi Gauss Jordan dan menggunakan matriks adjoin.

Berikut merupakan tahapan pencarian matriks balikan menggunakan metode eliminasi Gauss Jordan.

Misalnya diberikan matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Susun matriks menjadi seperti di bawah

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Bagian kiri adalah matriks A dan bagian kanan adalah matriks identitas. Kemudian dilakukan operasi baris elementer sehingga matriks sebelah kiri menjadi matriks identitas dan matriks sebelah kanan adalah inversnya.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Sehingga didapat balikan matriksnya

$$\begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, selain metode eliminasi Gauss Jordan, terdapat pula metode lain yaitu menggunakan matriks Adjoin.

Misalnya diberikan matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Pertama kita perlu menentukan determinan dari matriks tersebut. Kita dapat menentukan determinannya menggunakan cara yang telah disebutkan sebelumnya. Didapatkan determinannya yaitu 28.

Selanjutnya, kita perlu mencari matriks adjoin dari matriks tersebut. Matriks adjoin merupakan transpos dari matriks kofaktor yang akan dijelaskan selanjutnya. Didapatkan matriks kofaktornya ialah

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -2 & -71 & 32 \\ 4 & 16 & -8 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, kita perlu mentranspos matriks tersebut untuk mendapatkan matriks adjoin, sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ -1 & -71 & 16 \\ 4 & 32 & -8 \end{bmatrix}$$

Kita dapat memperoleh matriks balikan dengan formula sebagai berikut.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A).$$

$$A^{-1} = \frac{1}{28} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ -1 & -71 & 16 \\ 4 & 32 & -8 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh matriks balikannya, yaitu.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{14} & -\frac{1}{14} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{28} & -\frac{71}{28} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{8}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}.$$

E. Matriks Kofaktor

Matriks kofaktor adalah suatu matriks yang berisi kofaktor dari setiap elemen di dalam matriks tersebut. Kofaktor setiap elemen dinyatakan sebagai

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\, M_{ij}$$

dengan

C_{ij} : kofaktor elemen matriks baris ke-i dan kolom ke-j

M_{ij} : minor dari matriks M pada baris ke-i dan kolom ke-j

Minor dari suatu matriks M_{ij} dapat dicari dengan mencari determinan dari matriks baru yang menghilangkan elemen di M pada baris ke-i dan kolom ke-j.

Misalkan untuk matriks M = $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 4 & 10 & 9 \end{bmatrix}$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 9 \end{vmatrix} = 25 \qquad C_{11} = (-1)^{1+1}.25 = 25$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = -17 \qquad C_{11} = (-1)^{1+2}.(-17) = 17$$

dst.

Sehinga diperoleh matriks kofaktor dari M adalah

$$\begin{bmatrix} 30 & 17 & -30 \\ -14 & 11 & -6 \\ -8 & -10 & 21 \end{bmatrix}$$

F. Kaidah Cramer

Kaidah Cramer merupakan formula yang dipakai untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan menggunakan determinan dari matriks augmented.

Misalkan kita diberikan suatu sistem persamaan linear

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= c_3 \end{aligned}$$

Determinan matriks koefisien dari matriks *augmented* di atas adalah

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Kemudian, mengganti setiap entri setiap kolom menjadi konstanta sistem persamaan linear tersebut secara bertahap dan mencari nilai determinannya.

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}. D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}.$$

Solusi dari sistem persamaan linear di atas, adalah

$$\boxed{x = \frac{D_x}{D} \quad y = \frac{D_y}{D} \quad z = \frac{D_z}{D}}$$

G. Interpolasi Polinom

Interpolasi polinom merupakan suatu teknik interpolasi dengan mengasumsikan pola data yang kita miliki mengikuti pola polinomial baik berderajat satu, maupun berderajat tinggi. Interpolasi polinom digunakan untuk mencari titik-titik antara dari n buah titik, dengan menggunakan pendekatan fungsi polinomial pangkat n-1.

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$$

DIiperoleh persamaan simultan dengan n persamaan dan n variabel bebas dari memasukkan nilai setiap titik ke persamaan diatas.

$$\begin{aligned}
y_1 &= a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 + \ldots + a_{n-1}x_1^{n-1} \\
y_2 &= a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 + \ldots + a_{n-1}x_2^{n-1} \\
y_3 &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 + \ldots + a_{n-1}x_3^{n-1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_n &= a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + a_3x_n^3 + \ldots + a_{n-1}x_n^{n-1}
\end{aligned}$$

Untuk menyelesaikan persamaan bisa digunakan metode gauss yang sudah dipelajari, ataupun metode lain. Kemudian didapatkan nilai-nilai yang merupakan nilai koefisien pendekatan polinomial yang akan digunakan, lalu dengan memasukkan nilai x dari titik yang dicari ke fungsi polinomial, akan didapat nilai y dari titik tersebut.

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x_2 + \ldots + a_nx^n$$

H. Regresi Linier Berganda

Regresi Linear merupakan salah satu metode untuk memprediksi nilai fungsi dengan banyak peubah. Untuk menggunakan metode ini, setidaknya diperlukan sebuah persamaan yang memuat $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, y)$. Metode ini menggunakan *Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression* pada sistem persamaan linier di bawah ini.

$$\begin{array}{ccccccccc}
nb_0 & + b_1\sum_{i=1}^{n} x_{1i} & + b_2\sum_{i=1}^{n} x_{2i} & + & \cdots & + b_k\sum_{i=1}^{n} x_{ki} & = & \sum_{i=1}^{n} y_i \\
b_0\sum_{i=1}^{n} x_{1i} & + b_1\sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 & + b_2\sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} & + & \cdots & + b_k\sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{ki} & = & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_i \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\
b_0\sum_{i=1}^{n} x_{ki} & + b_1\sum_{i=1}^{n} x_{ki}x_{1i} & + b_2\sum_{i=1}^{n} x_{ki}x_{2i} & + & \cdots & + b_k\sum_{i=1}^{n} x_{ki}^2 & = & \sum_{i=1}^{n} x_{ki}y_i
\end{array}$$

Setelah menyelesaikan sistem persamaan linier di atas, diperoleh nilai-nilai $b_0, b_1, \dots, b_k$. Untuk memprediksi nilai suatu fungsi atau y_i, kita bisa menyulihkan $(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki})$ pada persamaan di bawah ini.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \epsilon_i$$

Bab 3

Implementasi Program

1. Class Utils

   Methods

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
displayMat	Protected void	Double[][] mat	Menampilkan matriks
choose	Protected int	Int min Int max	Meminta suatu angka pilihan pengguna antara (min..max) inklusif
isSquare	Protected boolean	Double[][] mat	Mengeluarkan true jika banyak baris sama dengan banyak kolom, begitupun sebaliknya
transpose	Protected double[][]	Double[][] mat	Mengembalikan transpose dari suatu matriks
multiplyconst	Protected double[][]	Double[][] mat Double k	Mengembalikan matriks yang setiap elemennya dikali dengan suatu konstanta
multiplyMatrix	Protected double[][]	Double[][] mat1 Double[][] mat2	Mengembalikan matriks baru hasil perkalian dari 2 matriks

isZero	Protected boolean	Double x	Mengembalikan true jika x sama dengan 0 dengan ketelitian 8 angka di belakang koma, false jika sebaliknya
squareMatFromAugmented	Protected double[][]	Double[][] mat	Mengembalikan matriks persegi dari suatu matriks augmented yang banyak barisnya dama dengan banyak kolom dikurangi 1
isRowAllZero	Protected boolean	Double[] matRow	Mengembalikan true jika dalam array baris tersebut berisi 0 semua.
createMatEff	Protected double[][]	Double[][] oriMat	Mengembalikan matriks baru dengan kondisi semua baris dengan elemen 0 dihapus
isRowAllZeroExceptLastElmt	Protected boolean	Doublep[] matRow	Mengembalikan true jika dalam array baris tersebut berisi 0 semua kecuali elemen

			terakhir. Mengembalikan false jika tidak
isNoSolution	Protected boolean	Double[][] mat	Mengembalikan true jika terdapat suatu baris yang elemennya 0 dan hasilnya bukan 0. Mengembalikan false jika tidak ada

2. Class Menu

Methods

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
displayMainMenu	Protected void		Mengeluarkan main menu
displayMenuSPL	Protected void		Mengeluarkan menu sistem persamaan linier
displayMenuDet	Protected void		Mengeluarkan menu determinan
displayMenuInverse	Protected void		Mengeluarkan menu inverse
displayMenuData	Protected void		Mengeluarkan menu input data matriks
displayMenuOutput	Protected void		Mengeluarkan menu pilihan menyimpan file
createMatrix	Protected double[][]	Boolean mustSquare	Mengembalikan matrix sesuai masukan dari

			keyboard pengguna atau file
inputMatrixKeyboard	Privete double[][]	Boolean mustSquare	Menerima masukan pengguna dari keyboard dan mengembalikan matriks tersebut
inputMatrixFile	Protected double[][]	Boolean mustSquare	Membaca dokumen berisi matrix dan mengembalikannya
inputFileName	Protected String		Menerima masukan dari pengguna berupa nama file dan mengembalikan nama file

3. Class FileReadWrite

Methods

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
calcRowsCols	Public int[]	String fileName	Mengembalikan array berisi banyak baris dan kolom dari suatu matriks di dalam file
readFile	Public double[][]	String fileName Int rows Int cols	Membaca matriks di dalam suatu file dan mengembaliakn matriks tersebut
writeFile	Public boolean	String path Double[][] mat	Mengembalikan true jika berhasil menuliskan

			matriks ke dalam suatu file, false jika gagal
writeFileSPL	Public boolean	String path String[] res	Mengembalikan true jika berhasil menuliskan array res ke dalam file, false jika gagal
writeFileDeterminan	Public boolean	String path Double[][] mat Double det	Mengembalikan true jika berhasil menuliskan matriks dan determinnya ke dalam suatu file, false jika gagal
writeFileInverse	Public boolean	String path Double[][] mat Double[][] inv	Mengembalikan true jika berhasil menuliskan matriks dan balikan matriksnya ke dalam suatu file, false jika gagal
writeFileNoInverse	Public boolean	String path Double[][] mat	Mengembalikan true jika berhasil menuliskan matriks dan pesan error tidak

			memiliki inverse, false jika gagal
writeFileInterpolasi	Public boolean	String path Double[] koef Double nilai Double taksiran	Mengembalikan true jika berhasil menuliskan persamaan polinomial dan taksiran dari suatu nilai, false jika gagal

4. Class Gauss

   Methods

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
gauss	Public void	Double[][] matrix	Mengembalikan matriks hasil OBE dengan metode eliminasi Gauss
solve	Public void	Double[][] mat	Menyelesaikan sistem persamaan linier dalam matriks augmented dengan metode eliminasi Gauss
solveSPL	Public String[]	Double[][] matrix	Mengembalikan solusi SPL dengan menggunakan metode eliminasi Gauss

solveSPLCase1	Public String[]	Double[][] matrix	Mengembalikan solusi SPL khusus untuk matriks berukuran n x (n+1)

5. Class GaussTriangle

Methods

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
gausstriangle	Public double[][]	Double[][] matrix Int row Int col	Mengembalikan matriks segitiga bawah dengan metode reduksi baris
determinan	Public double	Double[][] mat Int row Int col	Mengembalikan nilai determinan suatu matriks dengan cara reduksi baris

6. Class GaussJordan

Methods

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
gaussJordan	Public double[][]	Double[][] matrix Int row Int col	Mengembalikan matriks hasil OBE dengan metode eliminasi Gauss Jordan
solveSPL	Public String[]	Double[][] matrix	Mengembalikan solusi SPL dengan menggunakan

			metode eliminasi Gauss Jordan
solveSPLCase1	Public String[]	Double[][] matrix	Mengembalikan solusi SPL khusus untuk matriks berukuran n x (n+1)

7. Class Inverse

Methods

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
cofactorMethods	Public double[][]	Double[][] mat	Mengembalikan balikan suatu matriks dengan metode kofaktor
gaussJordanMethods	Public double[][]	Double[][] mat	Mengembalikan balikan suatu matriks dengan metode eliminasi Gauss-Jordan
solveSPL	Public String[]	Double[] mat	Mengembalikan solusi sistem persamaan linier dari suatu matriks dengan metode matriks balikan

8. Class Cramer

Methods

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
cramerRule	Public String[]	Double[][] matrix	Mengembalikan solusi sistem

			persamaan linier dari suatu matriks dengan kaidah Cramer

9. Class Cofactor

Methods

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
calculateOne	Public double[][]	Double[][] matrix Int row Int col	Mengembalikan kofaktor dari elemen matriks pada baris dan kolom tertentu
cofactorMat	Public double[][]	Double[][] matrix	Mengembalikan matriks kofaktor dari suatu matriks
determinan	Public double	Double[][] matrix	Menghitung dan mengembalikan nilai determinan dari suatu matriks persegi

10. Class ParametricSolver

Methods

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
idxEselon1	Public int	Double[][] matrix Int row Int col	Mengembalikan nomor kolom ditemukannya 1 utama dalam suatu baris tertentu. Mengembalikan -1 jika tidak ada 1 utama dalam baris tersebut

makeVar	Public char	Int idx Int[] arrIdx Int count	Mengembalikan nama variabel jika berupa variabel bebas
solve	Public String	Double[][] mat Boolean fromGauss	Mengembalikan solusi sistem persamaan linier yang memiliki solusi unik atau banyak

11. Class Regresi

    Methods

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
solveRegresi	Public double[]	Double[][] matrix Double[] y	Mengembalikan array berisi solusi koefisien dalam persamaan regresi
driverRegresi	Public void	-	Mengarahkan user dalam tahapan regresi linear berganda

12. Class Interpolation

    Methods

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
estimate	Public double[]	Double[] koef Double x	Mengembalikan estimasi dari masukan x dengan array polynomial yang sudah diperoleh

polynomial	Public double[]	Double[][] matrix	Menyelesaikan permasalahan polinomial interpolasi dan mengembalikan solusi yang diperoleh

Bab 4

Eksperimen

1. Solusi Sistem Persamaan Linier Ax=B

   a. Menggunakan metode Gauss

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

```
1.0 1.0 -1.0 -1.0 1.0
0.0 1.0 -1.6666666666666667 -1.0 -1.3333333333333333
0.0 0.0 1.0 -1.0 1.0
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0
Tidak ada solusi
```

   b. Menggunakan metode Gauss

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

```
1.0 -1.0 0.0 0.0 1.0 3.0
0.0 1.0 0.0 -1.5 -0.5 1.5
0.0 0.0 0.0 2.5 -2.5 -2.5
0.0 0.0 0.0 1.0 -1.0 -1.0
x1 = 3.0 + (1.0)b
x2 = 0.0 + (2.0)b
x3 = a
x4 = -1.0 + (1.0)b
x5 = b
```

   c. Menggunakan metode Gauss

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 1.0 1.0
0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 1.0 -2.0
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 -1.0 1.0
x1 = a
x2 = 1.0 + (-1.0)c
x3 = b
x4 = -2.0 + (-1.0)c
x5 = 1.0 + (1.0)c
x6 = c
```

d. Menggunakan metode Gauss Jordan

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriks Hilbert dengan n = 6

```
1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 35.99999999847885
0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -629.9999999566953
0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 3359.9999997089526
0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 -7559.9999992480525
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 7559.99999917505
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 -2771.9999996766783
x1 = 35.99999999847885
x2 = -629.9999999566953
x3 = 3359.9999997089526
x4 = -7559.9999992480525
x5 = 7559.99999917505
x6 = -2771.9999996766783
```

Matriks Hilbert dengan n = 10

```
1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 99.9903543704187
0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -4949.159598718342
0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 79181.98528596686
0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -600435.4050103569
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 2521731.7415962256
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -6304125.909429148
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 9606023.15116161
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 -8748135.347572235
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 4373977.470228069
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 -923378.5098546298
x1 = 99.9903543704187
x2 = -4949.159598718342
x3 = 79181.98528596686
x4 = -600435.4050103569
x5 = 2521731.7415962256
x6 = -6304125.909429148
x7 = 9606023.15116161
x8 = -8748135.347572235
x9 = 4373977.470228069
x10 = -923378.5098546298
```

2. Sistem Persamaan Linier berbentuk matriks Augmented

   a. Menggunakan metode Gauss Jordan

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

```
1.0 0.0 0.0 -1.0 -1.0
0.0 1.0 -2.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
x1 = -1.0 + (1.0)b
x2 = 0.0 + (2.0)a
x3 = a
x4 = b
```

b. Menggunakan metode Gauss Jordan

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 6 \\ -4 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

```
1.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 1.0 0.0 0.0 2.0
0.0 0.0 1.0 0.0 1.0
0.0 0.0 0.0 1.0 1.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
x1 = 0.0
x2 = 2.0
x3 = 1.0
x4 = 1.0
```

3. Sistem Persamaan Linier berbentuk persamaan

a. Menggunakan metode matriks balikan

$$\begin{aligned} 8x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 + 6x_3 + 4x_4 &= 3 \end{aligned}$$

```
Solusi dari SPL tersebut menggunakan metode matriks balikan ialah:
x1 = -0.22432432432432434
x2 = 0.18243243243243243
x3 = 0.7094594594594594
x4 = -0.258108108108108
```

b. Menggunakan metode Gauss Jordan

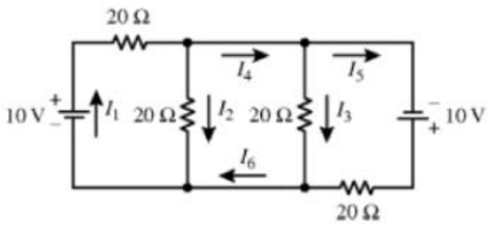
$$
\begin{aligned}
x_7 + x_8 + x_9 &= 13.00 \\
x_4 + x_5 + x_6 &= 15.00 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 8.00 \\
0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_6 + x_8) + 0.61396x_9 &= 14.79 \\
0.91421(x_3 + x_5 + x_7) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 14.31 \\
0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_2 + x_4) + 0.61396x_1 &= 3.81 \\
x_3 + x_6 + x_9 &= 18.00 \\
x_2 + x_5 + x_8 &= 12.00 \\
x_1 + x_4 + x_7 &= 6.00 \\
0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_2 + x_6) + 0.61396x_3 &= 10.51 \\
0.91421(x_1 + x_5 + x_9) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 16.13 \\
0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_4 + x_8) + 0.61396x_7 &= 7.04
\end{aligned}
$$

```
1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 3.003207138161314
0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.9959198397257305
0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 4.000873022112735
0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.9961561878889438
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 5.0055764485712775
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 8.99826736353976
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 2.0006366739497716
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 5.998503711702721
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 5.000859614347507
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.1901590823981678E-13
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -0.010757686573614755
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.007710586073722325
Tidak ada solusi
```

4. Sistem Persamaan Linier dalam rangkaian listrik

   Menggunakan metode kaidah crammer

   Tentukan arus yang mengalir pada rangkaian listrik di bawah ini:




```
Nilai X1: 0.5
Nilai X2: 0.0
Nilai X3: 0.0
Nilai X4: 0.5
Nilai X5: 0.5
Nilai X6: 0.5
```

5. Sistem Persamaan Linier dalam inti reactor

$$
\begin{aligned}
\text{A:}\quad & m_{A_{in}} + Q_{BA}x_B - Q_{AB}x_A - Q_{AC}x_A = 0 \\
\text{B:}\quad & Q_{AB}x_A - Q_{BA}x_B - Q_{BC}x_B = 0 \\
\text{C:}\quad & m_{C_{in}} + Q_{AC}x_A + Q_{BC}x_B - Q_{C_{out}}x_C = 0
\end{aligned}
$$

Tentukan solusi x_A, x_B, x_C dengan menggunakan parameter berikut : $Q_{AB} = 40$, $Q_{AC} = 80$, $Q_{BA} = 60$, $Q_{BC} = 20$ dan $Q_{Cout} = 150$ m^3/s dan $m_{Ain} = 1300$ dan $m_{Cin} = 200$ mg/s.

```
Solusi dari SPL tersebut menggunakan metode matriks balikan ialah:
x1 = 14.444444444444445
x2 = 7.222222222222222
x3 = 10.000000000000002
```

6. Studi Kasus Interpolasi

a. Studi kasus pertama

Gunakan tabel di bawah ini untuk mencari polinom interpolasi dari pasangan titik-titik yang terdapat dalam tabel. Program menerima masukan nilai x yang akan dicari nilai fungsi $f(x)$.

x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
$f(x)$	0.003	0.067	0. 148	0.248	0.370	0.518	0.697

```
testcasePolinom.txt
0.1 0.003
0.3 0.067
0.5 0.148
0.7 0.248
0.9 0.370
1.1 0.518
1.3 0.697
```

```
Masukkan nama file
> testcasePolinom.txt
Mencoba membaca file: ../test/testcasePolinom.txt
Persamaan polinomial yang diperoleh
y = 0.026042 x^4 + 0.197396 x^2 + 0.240000 x^1 -0.022977
```

Persamaan polinomial yang diperoleh

$$y = 0.026042\,x^4 + 0.197396\,x^2 + 0.240000\,x - 0.022977$$

Lakukan pengujian pada nilai-nilai default berikut:

$x = 0.2$	f(x) = ?
$x = 0.55$	f(x) = ?
$x = 0.85$	f(x) = ?
$x = 1.28$	f(x) = ?

$$f(0.2) = 0.03296093750000002$$

```
Masukkan nilai yang akan ditaksir : 0.2
Nilai taksiran fungsi pada saat x = 0.200000 adalah 0.03296093750000002
```

$$f(0.55) = 0.17111865234374998$$

```
Masukkan nilai yang akan ditaksir : 0.55
Nilai taksiran fungsi pada saat x = 0.550000 adalah 0.17111865234374998
```

$$f(0.85) = 0.33723583984375005$$

```
Masukkan nilai yang akan ditaksir : 0.85
Nilai taksiran fungsi pada saat x = 0.850000 adalah 0.33723583984375005
```

$$f(1.28) = 0.6775418375000001$$

```
Masukkan nilai yang akan ditaksir : 1.28
Nilai taksiran fungsi pada saat x = 1.280000 adalah 0.6775418375000001
```

b. Studi kasus kedua

Jumlah kasus positif baru Covid-19 di Indonesia semakin fluktuatif dari hari ke hari. Di bawah ini diperlihatkan jumlah kasus baru Covid-19 di Indonesia mulai dari tanggal 17 Juni 2021 hingga 31 Agustus 2021:

Tanggal	Tanggal (desimal)	Jumlah Kasus Baru
17/06/2021	6,567	12.624
30/06/2021	7	21.807
08/07/2021	7,258	38.391
14/07/2021	7,451	54.517
17/07/2021	7,548	51.952
26/07/2021	7,839	28.228
05/08/2021	8,161	35.764
15/08/2021	8,484	20.813
22/08/2021	8,709	12.408
31/08/2021	9	10.534

Tanggal (desimal) adalah tanggal yang sudah diolah ke dalam bentuk desimal 3 angka di belakang koma dengan memanfaatkan perhitungan sebagai berikut:

tanggal(desimal) = bulan + (tanggal / jumlah hari pada bulan tersebut)

Sebagai **contoh**, untuk tanggal 17/06/2021 (dibaca: 17 Juni 2021) diperoleh tanggal(desimal) sebagai berikut:

Tanggal(desimal) = 6 + (17/30) = 6,567

Gunakanlah data di atas dengan memanfaatkan **polinom interpolasi** untuk melakukan prediksi jumlah kasus baru Covid-19 pada tanggal-tanggal berikut:

a. 16/07/2021
b. 10/08/2021
c. 05/09/2021
d. beserta masukan user lainnya berupa **tanggal (desimal) yang sudah diolah** dengan asumsi prediksi selalu dilakukan untuk tahun 2021.

```
Masukkan nama file
> polinom2.txt
Mencoba membaca file: ../test/polinom2.txt
Persamaan polinomial yang diperoleh
y = -140993.712249 x^9 + 9372849.239101 x^8 -275474539.420669 x^7 + 4695806315.428793 x^6 -51131876760.132810 x^5 + 368550807175.535000 x^4
-1756810186361.356400 x^3 + 5334203055240.578000 x^2 -9346993079173.438000 x^1 + 7187066071661.201000
```

Persamaan polinomial yang diperoleh

$$
\begin{aligned}
y = -140993.712249\,x^9 &+ 9372849.239101\,x^8 - 275474539.420669\,x^7 \\
&+ 4695806315.428793\,x^6 - 51131876760.132810\,x^5 \\
&+ 368550807175.535000\,x^4 - 1756810186361.356400\,x^3 \\
&+ 5334203055240.578000\,x^2 - 9346993079173.438000\,x^1 \\
&+ 7187066071661.201000
\end{aligned}
$$

Prediksi jumlah kasus baru Covid-19 pada tanggal :

1) 16/07/2021

$$x = 7 + \frac{16}{31} = 7.516$$

```
Masukkan nilai yang akan ditaksir : 7.516
Nilai taksiran fungsi pada saat x = 7.516000 adalah 53566.80859375
```

2) 10/08/2021

$$x = 8 + \frac{10}{31} = 8.323$$

```
Masukkan nilai yang akan ditaksir : 8.323
Nilai taksiran fungsi pada saat x = 8.323000 adalah 36331.72265625
```

3) 05/09/2021

$$x = 9 + \frac{5}{30} = 9.167$$

```
Masukkan nilai yang akan ditaksir : 9.167
Nilai taksiran fungsi pada saat x = 9.167000 adalah -667646.21875
```

4) 20/08/2021

$$x = 8 + \frac{20}{31} = 8.645$$

```
Masukkan nilai yang akan ditaksir : 8.645
Nilai taksiran fungsi pada saat x = 8.645000 adalah 8285.84375
```

5) 29/06/2021

$$x = 6 + \frac{29}{30} = 6.967$$

```
Masukkan nilai yang akan ditaksir : 6.967
Nilai taksiran fungsi pada saat x = 6.967000 adalah 26661.3916015625
```

c. Studi kasus ketiga

c. Sederhanakan fungsi

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{e^x + x}$$

dengan polinom interpolasi derajat n di dalam selang [0, 2]. Sebagai contoh, jika n = 5, maka titik-titik x yang diambil di dalam selang [0, 2] berjarak $h = (2 - 0)/5 = 0.4$.

Untuk n=5, titik sampel yang diambil adalah

```
polinom3.txt
0.0 0.0
0.4 0.418884
0.8 0.507158
1.2 0.560925
1.6 0.583686
2.0 0.576651
```

Catatan : perhitungan dilakukan dengan kalkulator Wolframalpha

```
Masukkan nama file
> polinom3.txt
Mencoba membaca file: ../test/polinom3.txt
Persamaan polinomial yang diperoleh
y = 0.236256 x^5 -1.421263 x^4 + 3.237110 x^3 -3.552679 x^2 + 2.035257 x^1
```

Persamaan polinomial yang diperoleh adalah

$$y = 0.236256\,x^5 - 1.421263\,x^4 + 3.237110\,x^3 - 3.552679\,x^2 + 2.035257\,x$$

7. Studi Kasus Regresi Linier Berganda

Diberikan sekumpulan data sesuai pada tabel berikut ini.

Table 12.1: Data for Example 12.1

Nitrous Oxide, y	Humidity, x_1	Temp., x_2	Pressure, x_3	Nitrous Oxide, y	Humidity, x_1	Temp., x_2	Pressure, x_3
0.90	72.4	76.3	29.18	1.07	23.2	76.8	29.38
0.91	41.6	70.3	29.35	0.94	47.4	86.6	29.35
0.96	34.3	77.1	29.24	1.10	31.5	76.9	29.63
0.89	35.1	68.0	29.27	1.10	10.6	86.3	29.56
1.00	10.7	79.0	29.78	1.10	11.2	86.0	29.48
1.10	12.9	67.4	29.39	0.91	73.3	76.3	29.40
1.15	8.3	66.8	29.69	0.87	75.4	77.9	29.28
1.03	20.1	76.9	29.48	0.78	96.6	78.7	29.29
0.77	72.2	77.7	29.09	0.82	107.4	86.8	29.03
1.07	24.0	67.7	29.60	0.95	54.9	70.9	29.37

Source: Charles T. Hare, "Light-Duty Diesel Emission Correction Factors for Ambient Conditions," EPA-600/2-77-116. U.S. Environmental Protection Agency.

Gunakan *Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression* untuk mendapatkan regresi linear berganda dari data pada tabel di atas, kemudian estimasi nilai Nitrous Oxide apabila Humidity bernilai 50%, temperatur 76°F, dan tekanan udara sebesar 29.30.

```
Masukkan nama file
> regresi.txt
Mencoba membaca file: ../test/regresi.txt

Dengan Normal Estimation Equation, diperoleh matrix SPL sebagai berikut
20.0 863.0999999999999 1530.4000000000003 587.8399999999999 19.42
863.0999999999999 54876.89 67000.09 25283.395 779.4769999999999
1530.4000000000003 67000.09 117912.32000000002 44976.866999999984 1483.4369999999997
587.8399999999999 25283.395 44976.866999999984 17278.508600000005 571.1219000000001

Persamaan regresi linear berganda yang diperoleh
y = -3.507778 -0.002625 x1 + 0.000799 x2 + 0.154155 x3

Menaksir nilai fungsi
Masukkan 3 peubah yang akan ditaksir nilai fungsinya
50 76. 29.30
Nilai taksirannya adalah 0.938434
```

Persamaan regresi linier berganda dari data di atas adalah

$$y = -3.507778 - 0.002625\, x_1 + 0.000799\, x_2 + 0.154155\, x_3$$

Estimasi nilai Nitrous Oxide apabila Humidity (x_1) = 50%, Temperatur (x_2) = $76°F$, dan tekanan udara (x_3) sebesar 29.30 adalah 0.938434.

Bab 5

Kesimpulan, Saran, dan Refleksi

A. Kesimpulan

Hasil program kelompok kami dapat digunakan untuk :

1. Menghitung solusi SPL dengan menggunakan metode eliminasi Gauss, eliminasi Gauss-Jordan, matriks balikan, dan kaidah cramer.
2. Menghitung determinan matriks dengan metode eliminasi gauss dan ekspansi kofaktor.
3. Menghitung matriks balikan.
4. Menyelesaikan persoalan interpolasi polinom dan regresi linier berganda.

B. Saran

Dalam pengerjaan tugas besar ini, kami mengalami kesulitan dalam melakukan percobaan dengan matriks yang berukuran besar atau matriks yang memiliki nilai elemen yang sangat kecil. Oleh karena itu, kami menyarankan agar diberikan contoh percobaan beserta hasilnya ketika kasusnya seperti yang kami sampaikan di atas.

C. Refleksi

Kami menemukan beberapa pelajaran berharga selama pengerjaan tugas besar ini. Pembagian tugas sedari awal sangat menghemat waktu pengerjaan kami dan memudahkan kami dalam melakukan evaluasi setiap bagian. Selain itu, kami juga belajar dalam mengelola alur kerja dengan github.com. Kami juga belajar untuk menulis kode dengan efisien dan mudah dibaca. Hal itu sangat memudahkan kami dalam melakukan pengecekan apabila terjadi kesalahan algoritma.

Referensi

https://www.mademátika.net/2017/08/pengertian-minor-kofaktor-matriks.html

http://file.upi.edu/Direktori/FPMIPA/JUR._PEND._MATEMATIKA/KHUSNUL_NOVIANIGSIH/MINOR_DAN_KOFAKTOR.pdf

https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-03-Sistem-Persamaan-Linier.pdf

https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-04-Tiga-Kemungkinan-Solusi-SPL.pdf

https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-05-Sistem-Persamaan-Linier-2.pdf

https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-08-Determinan-bagian1.pdf

https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/MetNum/2010-2011/Interpolasi%20Polinom.pdf