עצים אינסופיים

חפירות על מתמטיקה

רועי שלו
אונברסיטת בר-אילן

ינואר 2021

ריענון בקבוצות

קבוצה A היא **סודר** (Ordinal) אמ"מ התנאים הבאים מתקיימים:

1. A טרנזיטיבית (אם לכל $x \in A$ ולכל $y \in x$ מתקיים $y \in A$).
2. $(A, \in)$-סדורה היטב (לכל תת-קבוצה לא ריקה של A יש איבר ראשון).

נסמן סודרים באותיות יווניות קטנות: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$

נסמן $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$.

נכתוב $\alpha < \beta$ במקום $\alpha \in \beta$.

נכתוב $\alpha \leq \beta$ במקום $\alpha \subseteq \beta$.

מחלקת כל הסודרים - On, סדורה היטב על ידי יחס השייכות.

הגשמת המספרים הטבעיים:

$$0 := \emptyset$$

$$n+1 := n \cup \{n\}$$

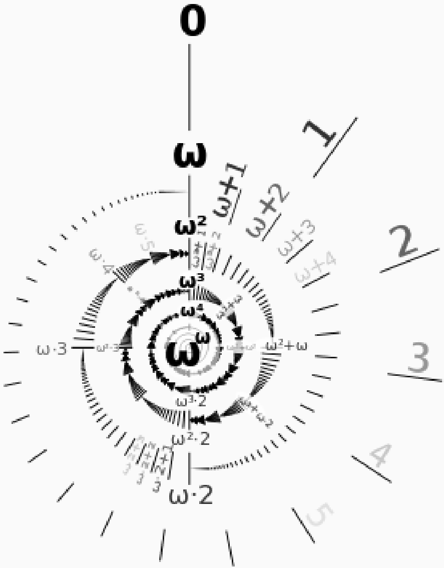
נסמן:

$$\omega := \{n \mid n \text{ סודר סופי}\}$$

ω הוא סודר.

סודר α נקרא **סודר עוקב** אמ"מ קיים סודר β כך ש- $\alpha = \beta + 1$.

אחרת α נקרא **סודר גבולי**.


0
ω
ω+1
ω+2
ω+3
ω+4
1
2
3
4
5
ω²
ω³
ω⁴
ω^ω
ω·2
ω·3
ω·4
ω·5
ω²+ω
ω²·2
ω³·2

ריענון בקבוצות

מונה הוא סודר α כך שלכל סודר $\beta < \alpha$, כל פונקציה $f : \beta \to \alpha$ איננה חח"ע ועל.

המונה האינסופי הראשון הוא הסודר ω.

המונה הלא בן מנייה הראשון הוא הסודר ω_1.

נאמר כי $(A, <)$ **קבוצה סדורה חלקית** (קס"ח) (Poset) אם:

- $<$ אנטי רפלקסיבי. כלומר $\neg(a < a)$ לכל $a \in A$.
- $<$ טרנזיטיבי. כלומר אם $(a < b)$ ו- $(b < c)$ אז $(a < c)$ לכל $a, b, c \in A$.

עצים

עצים

קס"ח $(T,<)$ יקרא **עץ** אמ"מ קיים איבר ראשון לקס"ח ולכל $t \in T$ הקבוצה, $t_\downarrow := \{s \in T \mid s < t\}$ סדורה היטב על ידי היחס $<$.

- כל איבר ב-T נקרא קודקוד, האיבר הראשון יקרא השורש.
- נגדיר פונקציית גובה, $\mathrm{ht} : T \to \mathrm{On}$, כאשר $\mathrm{ht}(t) := \mathrm{otp}(t_\downarrow, <)$.
- לכל סודר α הרמה ה-α-ית, T_α, היא קבוצת הקודקודים שהגובה שלהם הוא α.
- הגובה של עץ הוא הסודר α הקטן ביותר כך שהרמה ה-α-ית היא ריקה.
- ענף בעץ הוא תת קבוצה סדורה קווית מקסימלית בעץ.

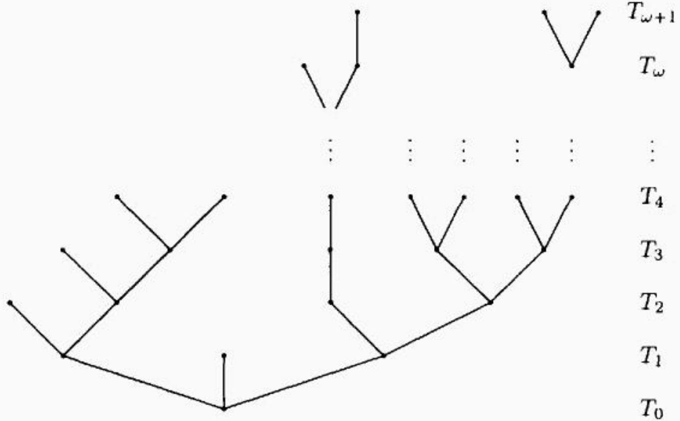


Figure 1

עצים

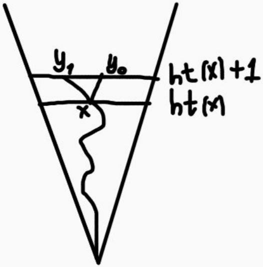
יהי מונה κ, עץ $(T, <)$ יקרא **κ-עץ** אם הגובה שלו הוא κ ובנוסף לכל $\alpha < \kappa$, מתקיים כי $|T_\alpha| < \kappa$.

<u>למה:</u> (הלמה של קניג, König 1927) יהי ω-עץ T, אז העץ T מכיל ענף אינסופי.

ω_1-עץ יקרא **עץ ארונשיין** אם כל שרשרת בו היא בת מנייה.

זאת אומרת, לא קיים בו ענף לא בן מנייה.

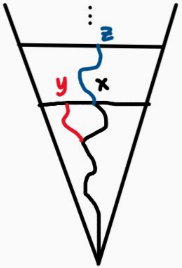
נאמר כי עץ $(T,<)$ הוא **מתפצל** אם לכל קודקוד $x \in T$ קיימים שני קודקודים שונים בעץ $y_0, y_1 \in T$ כך ש- $x < y_0, x < y_1$ וגם $\mathrm{ht}(y_0) = \mathrm{ht}(y_1) = \mathrm{ht}(x) + 1$.



עצים

נאמר כי עץ $(T,<)$ הוא **נורמלי** אם:

- לכל קודקוד $x \in T$, ניתן למצוא קודקוד מעליו בכל רמה מתחת לגובה של העץ.
- לכל סודר גבולי $\alpha < \mathrm{ht}(T)$ ולכל שני קודקודים שונים $x,y \in T_\alpha$ מתקיים כי $x_\downarrow \neq y_\downarrow$.



עץ ארונשיין

עץ ארונשיין

<u>משפט:</u> קיים עץ ארונשיין.

<u>הוכחה:</u> נבנה ברקורסיה טרנספיניטית עץ ארונשיין.

כל קודקוד בעץ T יהיה פונקציה עולה $f : \alpha \to \mathbb{Q}$ עבור ($\alpha < \omega_1$).

עבור $f, g \in T$, נגדיר את יחס הסדר על העץ T באופן הבא:

$$f < g \iff g \restriction \mathrm{dom}(f) = f$$

זאת אומרת, g מרחיב את f, $f \subseteq g$.

נשים לב כי כל קודקוד בעץ הוא פונקציה עולה ולכן בהכרח חח"ע.

נניח בשלילה כי קיימת שרשרת מגודל לא בן מנייה בעץ,

איחוד של השרשרת היא פונקציה $f : \omega_1 \to \mathbb{Q}$ חח"ע, אך $\mathbb{Q}$ היא בת-מנייה.

קיבלנו סתירה, ולכן כל שרשרת בעץ היא בת מנייה.

עץ ארונשיין

נדרוש במהלך הבנייה שלנו את התנאים הבאים:

(1) לכל $\alpha < \omega_1$, הרמה T_α היא בת מנייה.

(2) אם f קודקוד ב-T, אז f עולה ו- $\sup(\mathrm{Im}(f)) \in \mathbb{Q}$.

(3) אם $f : \alpha \to \mathbb{Q}$ קודקוד ב-T, אז לכל $q > \sup(\mathrm{Im}(f))$ ו- $\beta > \alpha$ קיים קודקוד $g : \beta + 1 \to \mathbb{Q}$ כך ש- $g \restriction \alpha = f$ ו- $g(\beta) = q$.

(4) אם $f : \alpha \to \mathbb{Q}$ קודקוד בעץ T, ו- $\beta < \alpha$, אז גם $f \restriction \beta \in T$.

נובע מ-(4) שאם הפונקציה $f : \alpha \to \mathbb{Q}$ היא קודקוד בעץ, אז $\mathrm{ht}(f) = \alpha$.

עץ ארונשיין

נבנה ברקורסיה על $\alpha < \omega_1$ את העץ T:

- $\underline{\alpha = 0}$: נגדיר $f = \emptyset$ להיות השורש של העץ T.
- $\underline{\alpha = \beta + 1 \text{ צעד עוקב,}}$: תהי $f \in T_\beta$ פונקציה,
  על פי הנחות הרקורסיה, ידוע כי f פונקצייה עולה וכי $\sup(\mathrm{Im}(f)) \in \mathbb{Q}$.
  לכל $\sup(\mathrm{Im}(f)) < q \in \mathbb{Q}$, נגדיר פונקציה $f < g$ כך ש- $g(\beta) = q$.
  נשים לב כי $\aleph_0 = |T_\beta| = |\mathbb{Q}|$ ולכן גם $|T_\alpha| = \aleph_0$.

- צעד גבולי, α: לכל $\beta < \alpha$, פונקציה $f \in T_\beta$ ו- $q < p = \sup(\mathrm{Im}(f))$, נבחר סדרה עולה של סודרים $\langle \alpha_n \mid n < \omega \rangle$ המתכנסת ל-α כך ש-$\alpha_0 = \beta$.

$$\beta = \alpha_0 < \alpha_1 \cdots < \alpha_n \ldots$$

$$\sup\{\alpha_n \mid n < \omega\} = \alpha$$

בנוסף נבחר סדרה עולה $\langle p_n \mid n < \omega \rangle$, ב-$\mathbb{Q}$ המתכנסת ל-q, כך ש-$p = p_0$.

$$p = p_0 < p_1 \cdots < p_n \ldots$$

$$\sup\{p_n \mid n < \omega\} = q$$

כעת נבחר סדרה עולה של קודקודים בעץ, $\langle f_n \mid n < \omega \rangle$ כך ש-:

(a) לכל $n < \omega$, מתקיים כי $f_n \in T_{\alpha_n}$ ו- $\sup(\operatorname{Im}(f_n)) = p_n$.

(b) $f = f_0 < f_1 < f_2 < \ldots$.

נגדיר לבסוף את הפונקציה, $g := \bigcup_{n<\omega} f_n$, נשים לב כי זוהי פונקציה מוגדרת היטב,

$g : \alpha \to \mathbb{Q}$ כך ש- $\sup(\operatorname{Im}(g)) = q$ ו- $f < g$ כפי שרצינו.

נשים לב כי α בן מנייה, ולכל $\beta < \alpha$ מתקיים $|T_\beta| = \aleph_0$ על פי הנחת הרקורסיה.

בנוסף $\mathbb{Q}$ בן מנייה, ולכן $|T_\alpha| = \aleph_0$ כנדרש.

לסיום נגדיר את העץ, $T := \bigcup_{\alpha<\omega_1} T_\alpha$.

נשים לב כי כל רמה בעץ היא בת מנייה וכי לא קיימת שרשרת לא בת מנייה, ולכן העץ T הוא עץ ארונשיין. ■

<u>הערה:</u> אם $f : \alpha \to \mathbb{Q}$ פונקציה ב-T, אז לכל $\gamma < \alpha$ מתקיים:

$$f(\gamma) > \sup(\mathrm{Im}(f \restriction \gamma)).$$

עץ מיוחד

עץ מיוחד

יהי עץ $(T,<)$, נאמר כי תת קבוצה $A \subseteq T$ היא **אנטי-שרשרת** אם כל זוג איברים בקבוצה לא מקיימים את היחס $<$.

לדוגמה: כל רמה של העץ היא אנטי-שרשרת מקסימלית.

ω_1-עץ יקרא **מיוחד** אם הוא איחוד בן מנייה של אנטי-שרשראות.

משפט: קיים עץ ארונשיין מיוחד.

הוכחה: נראה כי עץ הארונשיין שבנינו במשפט הקודם הוא מיוחד.

לכל $q \in \mathbb{Q}$, נגדיר הקבוצה הבאה:

$$A_q := \{f \in T \mid \sup(\mathrm{Im}(f)) = q\}.$$

נראה כי A_q היא אנטי-שרשרת ולכן כיוון ש-$\mathbb{Q}$ בן מנייה העץ T מיוחד.

יהיו $f, g \in A_q$, נניח בשלילה כי $f < g$.

יהיו סודרים α ו- β כך ש-$\alpha = \mathrm{dom}(f)$ ו- $\beta = \mathrm{dom}(g)$.

כיוון ש- $f < g$ בהכרח $\alpha = h(f) < \mathrm{ht}(g) = \beta$.

על פי הגדרת יחס הסדר של T, מתקיים כי

$$g \restriction \mathrm{dom}(f) = f$$

עץ מיוחד

נחלק לשני מקרים:

- β סודר עוקב, $\beta = \gamma + 1$.
  מתקיים $\alpha \geq \gamma$, מהבנייה ידוע לנו כי:

$$\mathsf{sup}(\mathsf{Im}(g)) = g(\gamma) > \mathsf{sup}(\mathsf{Im}(g \restriction \gamma)) \geq \mathsf{sup}(\mathsf{Im}(f))$$

בסתירה לכך ש- $\mathsf{sup}(\mathsf{Im}(f)) = \mathsf{sup}(\mathsf{Im}(g))$.

(תזכורת: g פונקציה עולה, $\mathsf{dom}(f) = \alpha$ ו- $\mathsf{dom}(g) = \beta$.)

עץ מיוחד

- β גבולי.

  נשים לב כי $\alpha < \alpha + 1 < \beta$.

  כיוון ש-g פונקציה עולה, מתקיים כי

$$\sup(\mathrm{Im}(g)) > g(\alpha+1) > g(\alpha) \geq \sup(\mathrm{Im}(f))$$

בסתירה לכך ש- $\sup(\mathrm{Im}(f)) = \sup(\mathrm{Im}(g))$.

■

לכל עץ יש שם

עצים שאינם תלויים ב-ZFC

ω_1-עץ יקרא **עץ סוסלין** אם כל שרשרת וכל אנטי שרשרת הן בנות מנייה.

עץ מיוחד אינו עץ סוסלין.

נשים לב כי בעץ מיוחד בהכרח קיימת אנטי-שרשרת לא בת מנייה.

קיומו של עץ סוסלין בלתי תלוי באקסיומות של ZFC:

- תחת האקסיומה $V = L$ קיים עץ סוסלין.
- מאקסיומת מרטין נובע כי כל עץ ארונשיין הוא מיוחד, ולכן אין עצי סוסלין.

משחק

משחק

שני שחקנים, א׳ ו-ב׳ בוחרים בזה אחר זה סדרת מספרים ממשיים עולה, כאשר שחקן א׳ בוחר מספר ראשון.

שחקן א׳ מנצח אם ורק אם הסדרה המתקבלת חסומה.

אסטרטגייה עבור שחקן היא פונקציה המחליטה מהו הצעד שהשחקן יבצע בהינתן ההיסטוריה המלאה של המשחק עד כה.

נאמר כי לשחקן יש אסטרטגיית ניצחון, אם ורק אם קיימת פונקציה כנ״ל כך שבכל משחק בו השחקן יפעל על פי האסטרטגיה הוא ינצח.

במשחק שהגדרנו, לשחקן ב׳ יש אסטרטגיית ניצחון, לדוגמה: לבחור בכל צעד את המספר $x + 1$ כאשר x הוא המספר האחרון שבחר היריב.

משחק על עצים

יהי ω_1-עץ נורמלי ומתפצל $(T, <)$.

שני שחקנים, א׳ ו-ב׳ בוחרים בזה אחר זה סדרה עולה $\langle t_n \mid n < \omega \rangle$ של קודקודים בעץ T.

כאשר שחקן א׳ בוחר ראשון את האיבר t_0.

שחקן א׳ מנצח אם ורק אם קיים קודקוד בעץ מעל לכל הסדרה.

הוכח את הדברים הבאים:

(a) לשחקן א׳ אין אסטרטגיית ניצחון.

(b) אם העץ $(T, <)$ הוא מיוחד, אז לשחקן ב׳ יש אסטרטגיית ניצחון.

$*$(c) אם העץ $(T, <)$ סוסלין, אז לשחקן ב׳ אין אסטרטגיית ניצחון.

(b) נניח כי העץ T מיוחד, זאת אומרת קיימת סדרה של אנטי-שרשראות $\langle A_n \mid n < \omega \rangle$ כך ש- $T = \bigcup_{n<\omega} A_n$.
נגדיר עבור שחקן ב׳ את האסטרטגיה הבאה:
בהינתן $n < \omega$ ובחירה של שחקן א׳ בקודקוד t_{2n},
נשאל האם קיים איבר

$$t_{2n} < s \in A_n$$

- אם כן, נגדיר $t_{2n+1} := s$.
- אם לא, מכך שהעץ נורמלי, ניתן לבחור את t_{2n+1} להיות קודקוד כלשהו ברמה העוקבת שגדול מ-t_{2n}.

משחק על עצים

נרצה להראות כי שחקן ב׳ ניצח.

נניח בשלילה כי קיים קודקוד t מעל כל הסדרה העולה $\langle t_n \mid n < \omega \rangle$,

כיוון ש- A_n $T = \bigcup_{n<\omega} A_n$, קיים $n < \omega$ כך ש- $t \in A_n$.

נסתכל על הבחירה של השחקן ב׳ בשלב $2n$ ונחלק למקרים:

- אם $t_{2n+1} \in A_n$ אז כיוון ש-A_n אנטי-שרשרת לא ייתכן שמתקיים $t_{2n+1} < t$, וזוהי סתירה.
- אם $t_{2n+1} \notin A_n$, אז לא קיים איבר ב-A_n מעל ל- t_{2n}, בסתירה לכך ש- $t_{2n} < t \in A_n$.

לכן בהכרח שחקן א׳ הפסיד, ולכן שחקן ב׳ ינצח על ידי שימוש באסטרטגיה זאת!

תורת מבנה של עצי ארונשיין

נסתכל על מחלקת כל ω_1-עצי ארונשיין, $\mathcal{A}$.

נגדיר יחס סדר $\leq$ בין שני עצים $T, S \in \mathcal{A}$, נסמן $T \leq S$ אם קיימת פונקציה משמרת סדר מ-T ל-S.

<u>משפט:</u> קיימת משפחה מעוצמה $2^{\aleph_1}$ של עצי ארונשיין אשר אינם ניתנים להשוואה בזוגות ביחס הסדר $\leq$.

<u>משפט:</u> ישנה סדרה של עצי ארונשיין קוהרנטים, $\langle S_m \mid m \in \mathbb{Z} \rangle$ כך שלכל $m < n$ שלמים מתקיים $S_m < S_n$.

משפט: תחת אקסיומת מרטין כל שני עצי ארונשיין סל״ח-איזומורפיים.

משפט: תחת PFA קיימת תת מחלקה $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ של עצים הנקראיים עצי ליפשיץ.

כל שני עצים ב-$\mathcal{C}$ ניתנים להשוואה, בנוסף בשרשרת $\mathcal{C}$ לא קיים מקסימום ולא מינימום.

תורת מבנה של סדרים לינאריים לא בני מנייה

תורת מבנה של סדרים ליניאריים לא בני מנייה

משפט: תחת PFA כל שתי קבוצות של ממשיים $\aleph_1$-צפופים איזומורפיים סדר.

משפט: תחת PFA למחלקת הסדרים הליניאריים הלא בני מנייה קיים בסיס מגודל 5:

$$\{X, \omega_1, \omega_1^*, C, C^*\}$$

C הוא ישר קאנטרימן - ישר ליניארי כך ש-C^2 הוא איחוד בן מנייה של שרשראות.

X הוא קבוצה מגודל $\aleph_1$ של ממשיים.

B^* הוא הסדר הליניארי של הקבוצה B עם הסדר ההפוך מ-B.

תודה על ההקשבה!