Appréciation

Note

..... / 20

Prénom NOM : **Correction**.

Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Exercice 4	Exercice 5	Exercice 6
..... / 4	..... / 4	..... / 4	..... / 4	..... / 4	..... / 4

Modalités

- L'étudiant a 1 heure et 30 minutes pour composer sur ce sujet et rendre une copie papier individuelle de sa production (pas de documents ou de calculatrice autorisés).

- Il est conseillé de lire l'intégralité du sujet avant de composer : les 6 exercices peuvent être traités indépendamment les uns des autres. La note maximale peut être obtenue en réalisant 5 exercices : un exercice peut ne pas être traité.

- Chaque exercice doit répondre au problème mathématique posé avec rigueur et démonstration explicite de la compréhension de les notions mathématiques utilisées. Toute trace de recherche pourra être valorisée. Tout manque de rigueur pourra être pénalisé.

- La grille de notation est fournie et peut-être utilisée pour guider une démarche ou vérifier que les réponses apportées correspondent aux attendus de l'exercice.

- Des résultats sur les transformations géométriques, nombres complexes, géométrie vectorielle, trigonométrie et tables de multiplications sont donnés en annexes.

- Cette page et la **grille de notation** sont à **rendre avec la copie**.

Bon courage !

Grille de notation

Exercice 1 (..... / 4 points)

- (... / 1) Addition.
- (... / 1) Multiplication.
- (... / 1) Soustraction.
- (... / 1) Division.

Exercice 2 (..... / 4 points)

- (... / 2) Racines n-ièmes.
- (... / 2) Résultat géométrique.

Exercice 3 (..... / 4 points)

- (... / 1) Produit vectoriel.
- (... / 1) Démonstration norme et volume.
- (... / 1) Propriété produit vectoriel.
- (... / 1) Reformulation aire parallélogramme.

Exercice 4 (..... / 4 points)

- (... / 2) Matrice de transformation.
- (... / 2) Application point et vecteur.

Exercice 5 (..... / 4 points)

- (... / 2) Détection d'intersections.
- (... / 2) Résolution d'intersections.

Exercice 6 (..... / 4 points)

- (... / 2) Projection triangle.
- (... / 2) Transposition dans espace texturé.

Exercice 1 (..... / 4 points)

Objectif : Opérations sur nombres complexes.

Soient $a = 2\mathbf{i} + 1 \in \mathbb{C}$ et $b = 2\mathbf{i} + 3$. Calculer :

1. l'addition $a + b$.

$$\begin{aligned} a + b &= (2\mathbf{i} + 1) + (2\mathbf{i} + 3) \\ &= (1 + 3) + \mathbf{i}\,(2 + 2) \\ &= \boxed{4 + 4\mathbf{i}} \end{aligned}$$

2. la soustraction $a - b$.

$$\begin{aligned} a - b &= (2\mathbf{i} + 1) - (2\mathbf{i} + 3) \\ &= (1 - 3) + \mathbf{i}\,(2 - 2) \\ &= \boxed{\text{-2}} \end{aligned}$$

3. la multiplication $a \times b$.

$$\begin{aligned} a \times b &= (2\mathbf{i} + 1) \times (2\mathbf{i} + 3) \\ &= (1 \times 3 - 2 \times 2) + \mathbf{i}\,(2 \times 3 + 1 \times 2) \\ &= (3 - 4) + \mathbf{i}\,(6 + 2) \\ &= \boxed{8\ \mathbf{i}\ \text{-}\ 1} \end{aligned}$$

4. la division $\frac{a}{b}$.

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{2\mathbf{i}+1}{2\mathbf{i}+3} \\ &= \frac{\overline{2\mathbf{i}+3}}{\overline{2\mathbf{i}+3}} \frac{2\mathbf{i}+1}{2\mathbf{i}+3} \\ &= \frac{(3-2\mathbf{i})(2\mathbf{i}+1)}{(3-2\mathbf{i})(2\mathbf{i}+3)} \\ &= \frac{(3+4)+\mathbf{i}(6-2)}{3^2+2^2} \\ &= \frac{7+4\mathbf{i}}{13} \\ &= \boxed{\frac{7}{13} + \frac{4}{13}\mathbf{i}} \end{aligned}$$

Exercice 2 (..... / 4 points)

Objectif : Dodécagone.

Résoudre, pour $z \in \mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^{12} = 1.$$

Nous pouvons poser $1 = \rho e^{\mathbf{i}\theta}$ où $\rho = 1$ et $\theta = 0$. Nous avons alors $\mathcal{R}_{12}$ l'ensemble des racines 12-ièmes de l'équation $z^{12} = 1$:

$$\mathcal{R}_{12} = \left\{\rho^{\frac{1}{12}} e^{\mathbf{i}\frac{\theta + 2k\pi}{12}} \mid k \in [12]\right\} = \left\{e^{\mathbf{i}k\frac{\pi}{6}} \mid k \in [12]\right\}$$

Soit les solutions suivantes :

$$\begin{array}{rcccl}
\{e^{\mathbf{i}0\frac{\pi}{6}} & = & \cos(0) + \mathbf{i}\sin(0) & = & 1, \\
e^{\mathbf{i}1\frac{\pi}{6}} & = & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & = & \frac{\sqrt{3}}{2} + \mathbf{i}\frac{1}{2}, \\
e^{\mathbf{i}2\frac{\pi}{6}} & = & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & = & \frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \\
e^{\mathbf{i}3\frac{\pi}{6}} & = & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & = & \mathbf{i}, \\
e^{\mathbf{i}4\frac{\pi}{6}} & = & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathbf{i}\sin\left(2\frac{\pi}{3}\right) & = & -\frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \\
e^{\mathbf{i}5\frac{\pi}{6}} & = & \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) & = & -\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathbf{i}\frac{1}{2}, \\
e^{\mathbf{i}6\frac{\pi}{6}} & = & \cos(\pi) + \mathbf{i}\sin(\pi) & = & -1, \\
e^{\mathbf{i}7\frac{\pi}{6}} & = & \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) & = & -\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathbf{i}\frac{1}{2}, \\
e^{\mathbf{i}8\frac{\pi}{6}} & = & \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \mathbf{i}\sin\left(4\frac{\pi}{3}\right) & = & -\frac{1}{2} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \\
e^{\mathbf{i}9\frac{\pi}{6}} & = & \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) & = & -\mathbf{i}, \\
e^{\mathbf{i}10\frac{\pi}{6}} & = & \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + \mathbf{i}\sin\left(5\frac{\pi}{3}\right) & = & \frac{1}{2} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \\
e^{\mathbf{i}11\frac{\pi}{6}} & = & \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) & = & \frac{\sqrt{3}}{2} - \mathbf{i}\frac{1}{2}\}
\end{array}$$

Puis en déduire les sommets du dodécagone régulier associé. Le dodécagone régulier est donc formé par les sommets suivants :

$$\mathcal{S}_{12} = \left\{(1;0), \left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right), (0;1), \left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right), (-1;0),\right.$$
$$\left.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), (0;-1), \left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

Exercice 3 (..... / 4 points)

Objectif : Caractéristiques du produit vectoriel.

Soient $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

1. Exprimer le produit vectoriel $\vec{a} \times \vec{b}$ entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y \times b_z - a_z \times b_y \\ a_z \times b_x - a_x \times b_z \\ a_x \times b_y - a_y \times b_x \end{pmatrix}$$

2. Montrer que $\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\|^2 = \text{Det}\left(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a}, \vec{b}\right)$.

$$\begin{aligned}
\text{Det}\left(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a}, \vec{b}\right) &= \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} & a_x & b_x \\ -\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_z & b_z \end{vmatrix} & a_y & b_y \\ \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} & a_z & b_z \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} - \left(-\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_z & b_z \end{vmatrix}\right) \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix}^2 + \left(-\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_z & b_z \end{vmatrix}\right)^2 + \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix}^2 \\
&= \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \\
&= \left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\|
\end{aligned}$$

3. Exprimer l'aire du parallélogramme induit par $\vec{a}$ et $\vec{b}$ en fonction de leur produit vectoriel. À noter que $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{a} = 0$ et $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{b} = 0$. $\vec{a} \times \vec{b}$ est orthogonal au parallélogramme induit par $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Nous pouvons donc déduire l'aire du parallélogramme induit par $\vec{a}$ et $\vec{b}$ depuis le volume du parallélépipède formé par $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{a} \times \vec{b}$:

$$\text{Aire}\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\text{Det}\left(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a}, \vec{b}\right)}{\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\|} = \frac{\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\|^2}{\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\|} = \left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\|$$

4. Exprimer l'aire du parallélogramme induit par $\vec{a}$ et $\vec{b}$ en fonction de leur produit scalaire, $\|\vec{a}\|$ et $\left\|\vec{b}\right\|$. À noter que :
   - L'aire du parallélogramme peut s'exprimer comme :

   $$\|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \left|\sin\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)\right|$$

   - D'après la loi des cosinus :

   $$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$$

   - Par propriété du sinus et cosinus :

   $$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$$

   D'où

   $$\forall \theta \in \mathbb{R}, \sin(\theta)^2 = 1 - \cos(\theta)^2 \Leftrightarrow \sin(\theta) = \sqrt{1 - \cos(\theta)^2}$$

   et

   $$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\|}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\text{Aire}\left(\vec{a},\vec{b}\right) &= \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \left|\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)\right| \\
&= \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \sqrt{1-\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)^2} \\
&= \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \sqrt{1-\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\left\|\vec{b}\right\|}\right)^2} \\
&= \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \sqrt{\left(\frac{\|\vec{a}\|\left\|\vec{b}\right\|}{\|\vec{a}\|\left\|\vec{b}\right\|}\right)^2-\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\left\|\vec{b}\right\|}\right)^2} \\
&= \frac{\|\vec{a}\|\left\|\vec{b}\right\|}{\|\vec{a}\|\left\|\vec{b}\right\|}\sqrt{\left(\|\vec{a}\|\left\|\vec{b}\right\|\right)^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2} \\
&= \sqrt{\|\vec{a}\|^2\left\|\vec{b}\right\|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}
\end{aligned}$$

Exercice 4 (..... / 4 points)

Objectif : Matrice de transformation.

Calculer la matrice de transformation T dans le plan $\mathbb{R}^2$ qui calcule une réflexion d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ centrée en un point $C \in \mathbb{R}^2$. Puis l'appliquer pour transformer un point $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et un vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$.

Soit $R(\theta)$ la matrice de réflexion d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. Posons la réflexion complexe pour en déduire la matrice de réflexion associée :

$$\begin{aligned} e^{2\mathbf{i}\theta}\overline{z - c} + c &= (\cos(2\theta) + \mathbf{i}\sin(2\theta))((x - c_x) - \mathbf{i}(y - c_y)) + c \\ &= (\cos(2\theta)(x - c_x) + \sin(2\theta)(y - c_y) + c_x) \\ &\quad + \mathbf{i}(\sin(2\theta)(x - c_x) - \cos(2\theta)(y - c_y) + c_y) \end{aligned}$$

Nous pouvons donc en déduire la transformation suivante :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos(2\theta)(x - c_x) + \sin(2\theta)(y - c_y) + c_x \\ \sin(2\theta)(x - c_x) - \cos(2\theta)(y - c_y) + c_y \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - c_x \\ y - c_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_x - \cos(2\theta)c_x - \sin(2\theta)c_y \\ c_y - \sin(2\theta)c_x + \cos(2\theta)c_y \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) & 0 \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_x - \cos(2\theta)c_x - \sin(2\theta)c_y \\ 0 & 0 & c_y - \sin(2\theta)c_x + \cos(2\theta)c_y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) & c_x - \cos(2\theta)c_x - \sin(2\theta)c_y \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) & c_y - \sin(2\theta)c_x + \cos(2\theta)c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Un point peut être modélisé par une coordonnée homogène à 1, d'où :

$$\begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) & c_x - \cos(2\theta)c_x - \sin(2\theta)c_y \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) & c_y - \sin(2\theta)c_x + \cos(2\theta)c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2\theta)\,x + \sin(2\theta)\,y + c_x - \cos(2\theta)\,c_x - \sin(2\theta)\,c_y \\ \sin(2\theta)\,x - \cos(2\theta)\,y + c_y - \sin(2\theta)\,c_x + \cos(2\theta)\,c_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Un point peut être modélisé par une coordonnée homogène à 0, d'où :

$$\begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) & c_x - \cos(2\theta)\,c_x - \sin(2\theta)\,c_y \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) & c_y - \sin(2\theta)\,c_x + \cos(2\theta)\,c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2\theta)\,x + \sin(2\theta)\,y \\ \sin(2\theta)\,x - \cos(2\theta)\,y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 (..... / 4 points)

Objectif : Intersection d'un rayon et d'une sphère.

Proposer une méthode qui, pour un rayon lancé depuis $S \in \mathbb{R}^3$ dirigé par le vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, détermine, si elles existent, les positions où ce rayon intersecte la sphère de centre $C \in \mathbb{R}^3$ et de rayon $r \in \mathbb{R}$.
Déterminer l'intersection entre un rayon $\mathcal{R}(S, \vec{v})$ et une sphère $\mathcal{S}(C, r)$ revient à déterminer t tel que :

$$\|S + t\vec{v} - C\| = r$$

Cette expression mise au carré, permet l'apparition du produit scalaire dans l'équation :

$$\|S + t\vec{v} - C\|^2 = (S + t\vec{v} - C) \cdot (S + t\vec{v} - C) = r^2$$

Par bilinéarité et symétrie du produit scalaire, nous avons :

$$t^2\vec{v} \cdot \vec{v} + 2t(S - C) \cdot \vec{v}(S - C) \cdot (S - C) - r^2 = 0$$

Ceci est donc un polynôme du second degré de monôme t de la forme $at^2 + bt + c = 0$ avec les coefficients suivants :

$$a = \|v\|^2$$

$$b = 2(S - C) \cdot \vec{v}$$

$$c = \|S - C\|^2 - r^2$$

Nous pouvons donc poser le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. L'intersection entre un rayon $\mathcal{R}(S, \vec{v})$ et une sphère $\mathcal{S}(C, r)$ existe lorsque :

$$\Delta = ((S - C) \cdot \vec{v})^2 - \|v\|^2 \left(\|S - C\|^2 - r^2\right) \geq 0$$

et est donnée depuis $t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ par :

$$S + \frac{(C - S) \cdot \vec{v} \pm \sqrt{((S - C) \cdot \vec{v})^2 - \|v\|^2 \left(\|S - C\|^2 - r^2\right)}}{\|v\|^2}\vec{v}$$

Exercice 6 (..... / 4 points)

Objectif : Couleur par projection sur un triangle ?

Proposer une méthode qui, si le projeté orthogonal $H \in \mathbb{R}^3$ d'un point $P \in \mathbb{R}^3$ s'envoie sur un triangle $(ABC) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^3$, détermine les coordonnées de la couleur à afficher en H depuis la texture pour laquelle (ABC) est associé aux coordonnées de texture $(T_A, T_B, T_C) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^3$.
Nous pouvons définir le triangle (ABC) comme un plan induit par les vecteurs $(B - A, C - A)$. Notons que nous pouvons construire une normale au triangle (ABC) depuis le produit vectoriel des vecteurs qui induisent son plan. Soit $\vec{\eta} = (B - A) \times (C - A)$. Nous pouvons maintenant définir un repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \vec{\eta}\right)$. Cherchons $(s, t, u) \in \mathbb{R}^3$ tels qu'ils soient les coordonnées de P dans $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \vec{\eta}\right)$:

$$\begin{aligned}
P &= A + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} + u\vec{\eta} \\
P - A &= s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} + u\vec{\eta} \\
P - A &= (B - A, C - A, \vec{\eta}) \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} &= (B - A, C - A, \vec{\eta})^{-1} (P - A)
\end{aligned}$$

Notons que $\vec{\eta}$, étant le produit vectoriel de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, il leur est orthogonal. Il suffit donc d'annuler sa quantité pour calculer H :

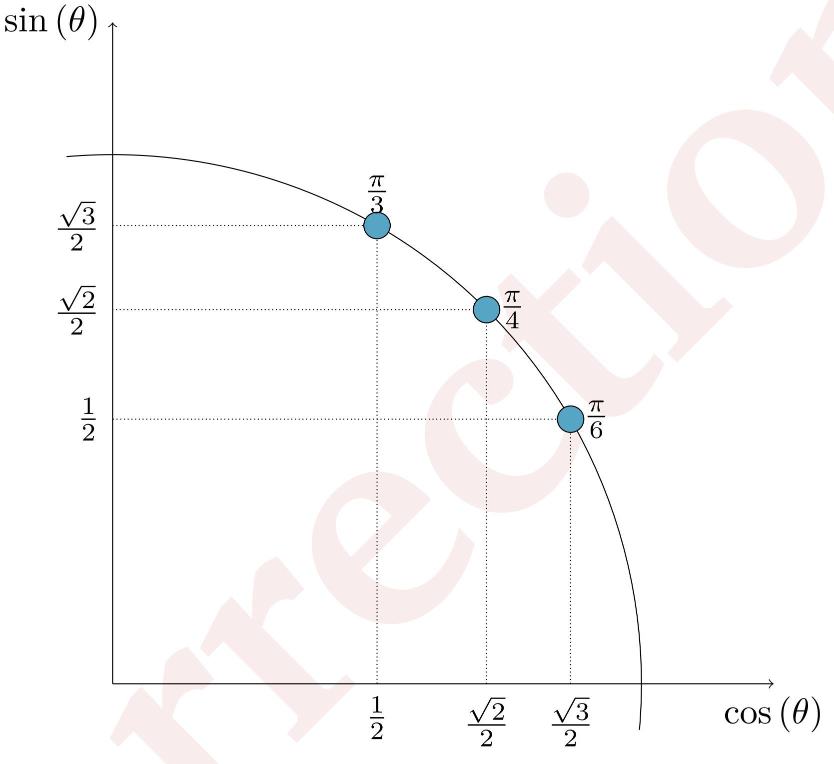
$$H = A + s(B - A) + t(C - A) = (1 - s - t)A + sB + tC$$

Nous pouvons donc calculer $(\alpha, \beta, \gamma) = (1 - s - t, s, t)$ les coordonnées barycentriques de H dans (ABC). Par transformation affine de (ABC) vers $(T_A T_B T_C)$, nous pouvons en déduire T les coordonnées de texture de H :

$$T = \alpha T_A + \beta T_B + \gamma T_C$$

Annexes

Arc du cercle trigonométrique



Quelques propriétés : transformations géométriques

Définition 1 (Coordonnées barycentriques) :

Pour une position donnée $P \in \mathbb{R}^3$:

- Si P existe sur une droite (AB), alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha+\beta = 1$ tel que :
$$P = \alpha A + \beta B$$
P appartient au segment $[AB]$ si et seulement si $\min(\alpha, \beta) \geq 0$ et $\max(\alpha, \beta) \leq 1$.

- Si P existe sur le plan donné par un triangle non plat (ABC), alors il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \alpha + \beta + \gamma = 1$ tel que :
$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C$$
P appartient au triangle (ABC) si et seulement si $\min(\alpha, \beta, \gamma) \geq 0$ et $\max(\alpha, \beta, \gamma) \leq 1$.

- P peut être défini par des coordonnées barycentrique relativement à un tétraèdre non plat $(ABCD)$, il existe alors $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4, \alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$ tel que :
$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D$$
P appartient au tétraèdre $(ABCD)$ si et seulement si $\min(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \geq 0$ et $\max(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \leq 1$.

Définition 2 (Réflexion complexe) :

Nous pouvons aussi modéliser une réflexion relativement à un axe via les nombres complexes. Soit un axe $a = a_x + \mathbf{i}a_y \in \mathbb{C}$ et une position donnée par $z = x + \mathbf{i}y$. Nous pouvons appliquer une réflexion d'axe a par :
$$\frac{a^2}{|a|^2}\overline{z}$$

Propriété 1 (Addition d'angles et trigonométrie) :

Soit $(\theta, \delta) \in \mathbb{R}^2$, nous avons

$$\cos(\theta + \delta) + \mathbf{i} \sin(\theta + \delta) = (\cos(\theta) + \mathbf{i} \sin(\theta))(\cos(\delta) + \mathbf{i} \sin(\delta))$$

$$= (\cos(\theta)\cos(\delta) - \sin(\theta)\sin(\delta)) + \mathbf{i}(\cos(\theta)\sin(\delta) + \sin(\theta)\cos(\delta))$$

D'où :

$$\cos(\theta + \delta) = \cos(\theta)\cos(\delta) - \sin(\theta)\sin(\delta)$$
$$\sin(\theta + \delta) = \cos(\theta)\sin(\delta) + \sin(\theta)\cos(\delta)$$

Propriété 2 (Formule de Moivre) :

Soient $z = e^{\mathbf{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathbf{i}\sin(\theta) \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Nous avons

$$z^n = \left(e^{\mathbf{i}\theta}\right)^n = e^{\mathbf{i}n\theta}$$

et

$$z^n = (\cos(\theta) + \mathbf{i}\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + \mathbf{i}\sin(n\theta)$$

Définition 3 (Racines n-ièmes) :

Soient $(z, w, n) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{N}$ et $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$ avec $z = \rho e^{\mathbf{i}\theta}$ tels que

$$w^n = z$$

Nous avons l'ensemble des solutions de cette équation qui peut être donné par

$$\left\{\rho^{\frac{1}{n}} e^{\mathbf{i}\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \mid k \in [n]\right\}$$

Quelques propriétés : géométrie vectorielle

Propriété 3 (Forme bilinéaire symétrique) :

Le produit scalaire se définit comme une forme bilinéaire symétrique définie positive. C'est-à-dire que pour tous vecteurs A, B, C et scalaire α :

- nous avons une linéarité par opérande :

$$(A + \alpha B) \cdot C = A \cdot C + \alpha B \cdot C$$

- nous avons symétrie (commutativité des opérandes) :

$$A \cdot B = B \cdot A$$

- en appliquant l'opération d'un vecteur avec lui-même, le résultat est positif :

$$A \cdot A \geq 0$$

Propriété 4 (Loi des cosinus) :

Le produit scalaire de deux vecteurs a et b peut aussi s'écrire en fonction des normes de chaque vecteur et de la mesure d'angle entre ces deux vecteurs :

$$a \cdot b = \|a\| \times \|b\| \times \cos\left(\widehat{(a, b)}\right)$$

Propriété 5 (Norme produit vectoriel et volume parallélépipède) :

Le vecteur résultant du produit vectoriel de deux vecteurs a et b a la propriété que sa norme au carré est égale au volume du parallélépipède basé sur les vecteurs a, b et $a \times b$:

$$\|A \times B\|^2 = \mathrm{Det}\left(A \times B, A, B\right)$$

Multiplications

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176
12	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192
13	13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208
14	14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224
15	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	240
16	16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	256
17	17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	221	238	255	272
18	18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	288
19	19	38	57	76	95	114	133	152	171	190	209	228	247	266	285	304
20	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320
21	21	42	63	84	105	126	147	168	189	210	231	252	273	294	315	336
22	22	44	66	88	110	132	154	176	198	220	242	264	286	308	330	352
23	23	46	69	92	115	138	161	184	207	230	253	276	299	322	345	368
24	24	48	72	96	120	144	168	192	216	240	264	288	312	336	360	384
25	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300	325	350	375	400
26	26	52	78	104	130	156	182	208	234	260	286	312	338	364	390	416
27	27	54	81	108	135	162	189	216	243	270	297	324	351	378	405	432
28	28	56	84	112	140	168	196	224	252	280	308	336	364	392	420	448