期待値と分散の計算：資料

芳賀昭弘 *

1　期待値と分散について

期待値とは、重み付け平均（加重平均）

$$\bar{x}_w = \sum_i^n w_i x_i \tag{1}$$

そのものです。x_i の重み w_i は、x_i のでる確率と同じ意味なので、確率分布 $P(x_i)$ と書くことにしましょう。また、$\bar{x}_w$ を期待値の記号 $E[x]$ に書き換えます。すると上式は、

$$E[x] = \sum_i^n P(x_i) x_i \tag{2}$$

となります。x_i が区間 $[a, b]$ の連続変数の場合は、

$$E[x] = \int_a^b x P(x) dx \tag{3}$$

となります。x の期待値は、このように式（2）と（3）で計算することができます。

一方、分散は、

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_i^n (x_i - \bar{x})^2 \tag{4}$$

でしたね。$\bar{x}$ は x の平均ですが（この場合 x のとるのは $1/n$ の値をもつ一定の確率）、これを上記の期待値に変えてさらに分散の計算も確率 $P(x)$ で重み付けすることにします。

$$s^2 = \sum_i^n (x_i - E[x])^2 P(x_i) \tag{5}$$

これを展開していくと、

$$\begin{aligned} s^2 &= \sum_i^n (x_i - E[x])^2 P(x_i) \\ &= \sum_i^n (x_i^2 P(x_i) - 2x_i P(x_i) E[x] + E[x]^2 P(x_i)) \\ &= \sum_i^n x_i^2 P(x_i) - 2E[x] \sum_i^n x_i P(x_i) + E[x]^2 \end{aligned} \tag{6}$$

* Electronic address: haga@tokushima-u.ac.jp

となります。最後の第二項において、$\sum_i^n x_i P(x_i) = E[x]$ であることを使うと、分散は次のようにかけることがわかります。

$$V[x] = E[x^2] - E[x]^2 \tag{7}$$

（ここで分散の記号 $V[x]$ を使った）。つまり、x^2 の期待値と x の期待値の二乗の差が分散になります。x の期待値は式（2）もしくは（3）で計算できます。x^2 の期待値は、

$$E[x^2] = \sum_i^n P(x_i) x_i^2 \tag{8}$$

もしくは

$$E[x^2] = \int_a^b x^2 P(x) dx \tag{9}$$

で計算できます。

2　二項分布の期待値と分散

取り得る値が 2 つ（表裏など）であり、表の出る確率を p とすると、n 回試行したときに x 回表が出る確率分布（二項分布）は、

$$P(x) = \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} \tag{10}$$

となる。このとき、x の期待値 $E[x]$ は、

$$E[x] = \sum_{x=0}^n x P(x) = \sum_{x=0}^n x \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} \tag{11}$$

とかける。一方、$P(x)$ は確率分布なので、

$$\sum_{x=0}^n \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} = 1 \tag{12}$$

を満たす。これを p で微分した後に、p をかけると、

$$\sum_{x=0}^n x \frac{n!}{(n-x)!x!} x p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^n x \frac{n!}{(n-x)!x!} (n-x) p^x (1-p)^{n-x} \frac{p}{1-p} \tag{13}$$

となる。左辺は期待値そのものであり、右辺は、

$$\sum_{x=0}^n x \frac{n!}{(n-x)!x!} (n-x) p^x (1-p)^{n-x} \frac{p}{1-p} = n \frac{p}{1-p} - E[x] \frac{p}{1-p} \tag{14}$$

となっている。よって、$E[x]$ について解くと、

$$E[x] = np \tag{15}$$

となる。

次に分散を求めてみよう。$V[x]=E[x^2]-E[x]^2$ なので、必要な計算は $E[x^2]$ である。

$$
\begin{aligned}
E[x^2]=\sum_{x=0}^{n}x^2P(x)=&\sum_{x=0}^{n}x^2\frac{n!}{(n-x)!x!}p^x(1-p)^{n-x}\\
=&\sum_{x=0}^{n}npx\frac{(n-1)!}{(n-x)!(x-1)!}p^{x-1}(1-p)^{n-x}\\
=&np\sum_{x=0}^{n-1}(x+1)\frac{(n-1)!}{(n-x-1)!x!}p^x(1-p)^{n-x-1}\\
=&np((n-1)p+1)
\end{aligned}
\tag{16}
$$

よって、

$$
V[x]=np(1-p) \tag{17}
$$

となる。

3　ポアソン分布の期待値と分散

二項分布においてn が非常に大きくかつ p が非常に小さい（ただし、期待値 $E[x]=np=\lambda=$ 一定）場合、x のとる確率分布は次のようになることが証明できる（各自で証明してみてください）;

$$
P(x)=\frac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda} \tag{18}
$$

これをポアソン分布と呼んでいる。ポアソン分布の期待値 $E[x]$ は、

$$
\begin{aligned}
E[x]=\sum_{x=0}^{\infty}xP(x)=&\sum_{x=1}^{\infty}\lambda\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda}\\
=&\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

和の部分 $\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$ は e^{λ} のテイラー展開された式と同じである。よって、

$$
E[x]=\lambda \tag{20}
$$

次に分散を求める。必要な計算は $E[x^2]$ でしたね。

$$
\begin{aligned}
E[x^2]=\sum_{x=0}^{\infty}x^2P(x)=&\sum_{x=2}^{\infty}\lambda^2\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!}\mathrm{e}^{-\lambda}+\sum_{x=1}^{\infty}\lambda\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda}\\
=&\lambda^2+\lambda
\end{aligned}
\tag{21}
$$

よって、

$$
V[x]=\lambda \tag{22}
$$

となる。

4　ガウス分布の期待値と分散

1 次元のガウス分布（正規分布）は次のように書ける；

$$P(x) = \mathcal{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{23}$$

二項分布の n が大きいとき、ポアソン分布で λ が大きいとき、ガウス分布になることが証明できる（各自で証明してみてください)。上式の x の期待値は μ で分散は σ^2 となります。これを導いてみましょう。

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x\mathcal{N}(x)dx \tag{24}$$

$x - \mu = y$ とおき、$dx = dy$, $x = y + \mu$ を使って式変形すると、

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \tag{25}$$

右辺の第一項は奇関数であるので、区間 $[-\infty, \infty]$ の積分は 0 となる。第二項は、μ を積分の外に出すと、その積分は単にガウス分布の区間 $[-\infty, \infty]$ の積分であり、これは 1 である。よって、

$$E[x] = \mu \tag{26}$$

であることがわかる。

$E[x^2]$ についても同様な変換を行うと、

$$\begin{aligned} E[x^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(y+\mu)^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy + \mu^2 \end{aligned} \tag{27}$$

となる。右辺第一項の積分結果は σ^2 となる。これは部分積分を使って、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = -\left[\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} y\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \tag{28}$$

となることからわかる。よって、

$$V[x] = \sigma^2 \tag{29}$$

となる。