PROGRAMACIÓN DINÁMICA DUAL DETERMINÍSTICA

Objetivo— El estudiante, al finalizar el caso de estudio, debe ser explicar detalladamente los principios básicos de la metodología y su aplicación para la optimización de sistemas simples.

Tipo de actividad— Grupo de estudio.

Formato— Grupos de tres (3) personas.

Duración— 90 min.

Descripción— A continuación se resumen los elementos teóricos de la programación dinámica dual determinística y se ejemplifica con un sistema de generación conformado por un embalse y una planta térmica. La información detallada del sistema es la siguiente:

Planificación:	4 etapas.
Planta hidráulica:	Vol. máximo (V*) = 100, Caudal máx. turbinado (Q*) = 50, Factor conversión (ρ) = 1
	Aporte por etapa (A_i) = {21, 15, 12, 18} , Volumen inicial (Vo) = 75.
Planta térmica:	Generación máxima (G*) = 45, Costo combustible (CC) = 15.
Racionamiento:	Costo racionamiento (CR) = 1000 para todas las etapas.
Demanda:	50 para todas las etapas

Definición de variables:

V_p	Volumen al final de la etapa p.
Q_p	Caudal turbinado en la etapa p.
S_p	Volumen vertido en la etapa p.
GH_p	Generación hidráulica en la etapa p.
A_p	Aporte en la etapa p.
G_p	Generación térmica en la etapa p.
R_p	Energía racionada en la etapa p.
w_p	Función de costo inmediato para la etapa p.
α_p	Función de Costo Futuro para la etapa p.

A continuación se describe el algoritmo de programación dinámica dual desarrollado por Pereira y Pinto (1985) a partir de un ejemplo. Por claridad se considerará únicamente la versión determinística.

Paso 1. El algoritmo se basa en realizar aproximaciones sucesivas del valor óptimo de las variables del problema de optimización. Para ello, se establecen los límites inferior y superior para el valor óptimo z^* de la función objetivo del problema original:

$$\underline{z} = 0 \leq z^* <= \overline{z} = +\infty$$

Paso 2. Fase forward. Se soluciona el modelo para cada etapa desde la primera hacia la última. En la formulación original del algoritmo, se considera que un problema de dos etapas puede ser representado como:

$$\min cx + dy \quad s/a:\ Ax \geq b \quad \wedge \quad Ex + Fy \geq g$$

el cual puede ser resuelto mediante un proceso iterativo. Para ello, se obtiene la solución óptima x^* para el modelo de la primera etapa:

$$\min cx \quad s/a:\ Ax \geq b$$

la cual es utilizada para obtener la solución óptima y^* de la segunda etapa al solucionar el siguiente problema:

$$\min dy \quad s/a: \quad Fy \geq g - Ex^*$$

el cual está únicamente en términos de y.

Para el ejemplo considerado, esto equivale a solucionar el siguiente modelo para cada etapa con $p = 1, \dots, 4$:

$$\min +1000\, R_p \quad +15\, G_p$$

S/a:

$$\begin{array}{lllllll} +R_p & +G_p & & +Q_p & & = 50 \\ & & +V_p & +Q_p & +S_p & = A_p + V_{p-1} \\ & & & +Q_p & & \leq 50 \\ & +G_p & & & & \leq 45 \end{array}$$

Para la primera etapa ($p = 1$) se usa $V_0 = 75$ y se calcula V_1; luego, el V_1 calculado es usado como dato de entrada para la segunda etapa; de la solución de la segunda etapa se obtiene V_2, el cual es usado en la siguiente etapa y así sucesivamente hasta recorrer todas las etapas.

JUAN DAVID VELÁSQUEZ HENAO, MSc, PhD
Profesor Titular
Departamento de Ciencias de la Computación y la Decisión
Facultad de Minas
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín
jdvelasq@unal.edu.co
@jdvelasquezh
https://github.com/jdvelasq
https://goo.gl/prkjAq
https://goo.gl/vXH8jy

Noté que el modelo:

$$\min cx \quad s/a\text{: } Ax \geq b$$

es el modelo de la etapa p con:

$$cx = \begin{bmatrix} 1000 & 15 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_p \\ G_p \\ V_p \\ Q_p \\ S_p \end{bmatrix},$$

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_p \\ G_p \\ V_p \\ Q_p \\ S_p \end{bmatrix} \quad y \quad b = \begin{bmatrix} 50 \\ V_{p-1} + A_p \\ 50 \\ 45 \end{bmatrix}$$

y el modelo:

$$\min dy \quad s/a\text{: } \quad Fy \geq g - Ex^*$$

es el modelo de la etapa $p+1$ con:

$$Fy = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{p+1} \\ G_{p+1} \\ V_{p+1} \\ Q_{p+1} \\ S_{p+1} \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 50 \\ A_{p+1} \\ 50 \\ 45 \end{bmatrix}$$

$$Ex = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_p \\ G_p \\ V_p \\ Q_p \\ S_p \end{bmatrix}$$

Note, también, que $A = F$ y $c = d$, y que se pueden realizar los siguientes cambios de variables $x_p = x$, $x_{p+1} = y$, $b_p = b$, y $b_{p+1} = g$, de tal forma que el modelo original puede reescribirse para las 4 etapas del problema considerado como:

$$\begin{aligned} \min w_1 &= cx_1 \quad s/a\text{: } Ax_1 \geq b_1 \\ \min w_2 &= cx_2 \quad s/a\text{: } Ax_2 \geq b_2 - Ex_1^* \\ \min w_3 &= cx_3 \quad s/a\text{: } Ax_3 \geq b_3 - Ex_2^* \\ \min w_4 &= cx_4 \quad s/a\text{: } Ax_4 \geq b_4 - Ex_4^* \end{aligned}$$

Al optimizar cada una de las etapas se obtiene:

p	R_p	G_p	V_p	Q_p	S_p	w_p
0			75,0			
1	0,0	0,0	20,5	50,0	25,5	0,0
2	0,0	14,5	0,0	35,5	0,0	217,8
3	0,0	38,0	0,0	12,0	0,0	570,0
4	0,0	14,5	0,0	35,5	0,0	480,0

Paso 3. Se actualiza el límite superior como el mínimo entre el límite superior actual y la suma del costo inmediato de cada etapa:

$$\overline{z} = \min(+\infty; w_1 + w_2 + w_3 + w_4) = 1267{,}8$$

A partir de este resultado se obtiene que:

$$\underline{z} = 0 \leq z^* <= \overline{z} = 1267{,}8$$

Paso 4. Fase backward. Se soluciona secuencialmente el modelo de cada etapa para $p = 3, 2, 1$.

Para cada etapa, se suma la variable α_p a la función objetivo. Dicha variable representa el costo futuro de operación del sistema. Adicionalmente, se agregan restricciones que permiten aproximar el valor de α_p. Estas restricciones son estimadas a partir de la solución (ya obtenida) de la etapa $p+1$.

Este proceso es ejemplificado a continuación. Para la etapa 3, la nueva restricción que permite aproximar el valor de α_3 es:

$$\pi_4(b_4 - Ex_3^*) - \alpha_3 \leq 0$$

donde $\pi_4$es un vector fila que representa los multiplicadores simplex de las restricciones de la Etapa 4, que fue solucionada al final de la fase forward anterior. Así, $\pi_4 = \begin{bmatrix} 15 & -15 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. De esta forma:

$$(b_4 - Ex_3^*) = \begin{bmatrix} 50 \\ 18 \\ 50 \\ 45 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_3 \\ G_3 \\ V_3 \\ Q_3 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 18 - V_3 \\ 50 \\ 45 \end{bmatrix}$$

Continuando con el cálculo se tiene que:

$$\begin{bmatrix} 15 & -15 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 18 - V_3 \\ 50 \\ 45 \end{bmatrix} - \alpha_3 \leq 0$$

donde las variables V_3 y α_3 tienen valores desconocidos. Al simplificar la ecuación anterior se obtiene la restricción:

$$\alpha_3 + 15V_3 \geq 480$$

la cual es adicionada al conjunto de restricciones actuales de la Etapa 3, quedando el modelo especificado de la siguiente forma:

$$\min w_3 + \alpha_3 = +1000\, R_3 \quad +15\, G_3 \quad +\alpha_3$$

S/a:

$$
\begin{array}{llllll}
+R_3 & +G_3 & & +Q_3 & & = 50 \\
& & +V_3 & +Q_3 & +S_3 & = 12 \\
& & & +Q_3 & & \leq 50 \\
& +G_3 & & & & \leq 45 \\
& & +15V_3 & & +\alpha_3 & \geq 480
\end{array}
$$

y cuya solución es:

$R_3 = 0$; $G_3 = 38$; $V_3 = 0$; $Q_3 = 12$; $S_3 = 0$; $\alpha_3 = 480$; $w_3 = 570$; y $\pi_3 = [15 \quad -15 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$

Note que el lado derecho de la segunda restricción fue calculado como el aporte en la Etapa 3 más el volumen final estimado para la Etapa 2; este último fue obtenido en el ciclo forward previo.

Para la Etapa 2, la nueva restricción se calcula como:

$$
\begin{bmatrix} 50 \\ 12 \\ 50 \\ 45 \\ 480 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_3 \\ G_3 \\ V_3 \\ Q_3 \\ S_3 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 12 - V_2 \\ 50 \\ 45 \\ 480 \end{bmatrix}
$$

y

$$
[15 \quad -15 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 50 \\ 12 - V_2 \\ 50 \\ 45 \\ 480 \end{bmatrix} - \alpha_2 \leq 0
$$

De esta forma, el modelo para la Etapa 2 queda como:

$$\min w_2 + \alpha_2 = +1000\, R_2 \quad +15\, G_2 \quad +\alpha_2$$

S/a:

$$
\begin{array}{llllll}
+R_2 & +G_2 & & +Q_2 & & = 50 \\
& & +V_2 & +Q_2 & +S_2 & = 35{,}5 \\
& & & +Q_2 & & \leq 50 \\
& +G_2 & & & & \leq 45 \\
& & +15V_2 & & +\alpha_2 & \geq 1050
\end{array}
$$

con:

$R_2 = 0$; $G_2 = 14{,}5$; $V_2 = 0$; $Q_2 = 35{,}5$; $S_2 = 0$; $\alpha_2 = 1050$; $w_2 = 217{,}8$; y $\pi_2 = [15 \quad -15 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$

Para la Etapa 1 se procede de igual forma, obteniéndose el siguiente modelo:

$$\min w_1 + \alpha_1 = +1000\, R_1 \quad +15\, G_1 \quad +\alpha_1$$

S/a:

$$
\begin{array}{llllll}
+R_1 & +G_1 & & +Q_1 & & = 50 \\
& & +V_1 & +Q_1 & +S_1 & = 96 \\
& & & +Q_1 & & \leq 50 \\
& +G_1 & & & & \leq 45 \\
& & +15V_1 & & +\alpha_1 & \geq 1575
\end{array}
$$

con:

$R_1 = 0$; $G_1 = 45$; $V_1 = 91$; $Q_1 = 5$; $S_1 = 0$; $\alpha_1 = 210$; $w_1 = 675$;

Paso 5. Se actualiza el valor del límite inferior de la función objetivo.

$$\underline{z} = \max(\underline{z};\ w_1 + \alpha_1) = \max(0; 885) = 885$$

$$\underline{z} = 885 \leq z^* \leq \overline{z} = 1267{,}8$$

Paso 6. Ciclo forward. Se realiza un nuevo ciclo hacia delante con $p = 2, 3, 4$ tal como en el Paso 2, pero en el modelo de cada etapa se conservan las restricciones adicionadas en los ciclos backward anteriores. Al igual que en el ciclo forward anterior, la solución de la etapa p es usada para la estimación de la etapa $p + 1$.

p	R_p	G_p	V_p	Q_p	S_p	α_p	w_p
0			75,0				
1	0,0	45,0	91,0	5,0	0,0	210,0	675,0
2	0,0	11,5	67,5	38,5	0,0	37,9	172,1
3	0,0	2,0	31,5	48,0	0,0	7,8	30,0
4	0,0	0,5	0,0	49,5	0,0	–	7,8

Paso 7. Se actualiza el límite superior como el mínimo entre su valor actual y la suma de los costos inmediatos.

$$\underline{z} = 885 \leq z^* \leq \overline{z} = 675{,}0 + 172{,}1 + 30{,}0 + 7{,}8 = 885$$

Ya que los límites inferior y superior son iguales, el algoritmo ha convergido y no se requieren más iteraciones.