

分 类 号: _____
学 号: _____

UDC: _____
密级: _____

温州大学

硕 士 学 位 论 文



模板模板模板模板模板模板模板模板模板

作 者 姓 名: _____ Woden _____

培 养 类 型: _____ 全日制统招硕士 _____

学 位 类 型: _____ 学术型 _____

专 业 名 称: _____ 计算机科学与技术 _____

研 究 方 向: _____ 计算机视觉 _____

指 导 教 师: _____

完 成 日 期: _____

温州大学学位委员会

温州大学学位论文独创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得温州大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

论文作者签名：

日期： 年 月 日

温州大学学位论文使用授权声明

本人完全了解温州大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，即：学校有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权温州大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。本人在导师指导下完成的论文成果，知识产权归属温州大学。

保密论文在解密后遵守此规定。

论文作者签名：

导师签名：

日期： 年 月 日

日期： 年 月 日

摘 要

在Tex/Frontmatter.tex中编辑摘要。

关键词： 关键词1， 关键词2， 关键词3， 关键词4

Abstract

Editing the abstract inTex/Frontmatter.tex.

Keywords: keyword1, keyword2, keyword3, keyword4

目 录

第1章 引言	1
1.1 研究背景	1
1.2 系统要求	1
1.3 问题反馈	2
1.4 模板下载	2
第2章 L ^A T _E X使用说明	3
2.1 先试试效果	3
2.2 文档目录简介	3
2.2.1 Thesis.tex	3
2.2.2 编译脚本	3
2.2.3 Tmp文件夹	4
2.2.4 Style文件夹	4
2.2.5 Tex文件夹	4
2.2.6 Img文件夹	4
2.2.7 Biblio文件夹	4
2.3 数学公式、图表、参考文献等功能	5
2.3.1 数学公式	5
2.3.2 数学环境	5
2.3.3 表格	5
2.3.4 图片插入	6
2.3.5 算法	6
2.3.6 参考文献引用	8
2.4 常见使用问题	8
第3章 公式部分参考	11
3.1 符号及定义	11
3.2 张量分解	13
3.2.1 CP分解	13
3.2.2 Tucker分解	14
3.2.3 张量奇异值分解	14
参考文献	19

致谢	21
攻读硕士期间的科研成果	23

第1章 引言

1.1 研究背景

WZUthesis在最新版ucasthesis的基础上根据《温州大学研究生学位论文格式规定》进行了重新排版，包括字体大小、页边距、页眉、图片表格和公式的caption等部分，做到了开包即用，同时提供了盲审版本和终稿版本。可自定义的部分我已经在tex文件中使用中文注释标出。以下是ucasthesis项目的原文：

对用 \LaTeX 撰写论文的一些主要难题，如制图、制表、文献索引等，进行了详细说明，并提供了相应的代码样本，理解了上述问题后，对于初学者而言，使用此模板撰写学位论文将不存在实质性的困难。所以，如果你是初学者，请不要直接放弃，因为同样为初学者的我，十分明白让 \LaTeX 简单易用的重要性，而这正是ucasthesis所追求和体现的。

此中国科学院大学学位论文模板ucasthesis基于中科院数学与系统科学研究院吴凌云研究员的CASthesis模板发展而来。当前ucasthesis模板满足最新的中国科学院大学学位论文撰写要求和封面设定。兼顾操作系统：Windows, Linux, MacOS 和 \LaTeX 编译引擎：pdf \LaTeX , xel \LaTeX , lua \LaTeX 。支持中文书签、中文渲染、中文粗体显示、拷贝PDF中的文本到其他文本编辑器等特性。此外，对模板的文档结构进行了精心设计，撰写了编译脚本提高模板的易用性和使用效率。

ucasthesis的目标在于简化学位论文的撰写，利用 \LaTeX 格式与内容分离的特征，模板将格式设计好后，作者可只需关注论文内容。同时，ucasthesis有着整洁一致的代码结构和扼要的注解，对文档的仔细阅读可为初学者提供一个学习 \LaTeX 的窗口。此外，模板的架构十分注重通用性，事实上，ucasthesis不仅是国科大学学位论文模板，同时，通过少量修改即可成为使用 \LaTeX 撰写中英文文章或书籍的通用模板，并为使用者的个性化设定提供了接口。

1.2 系统要求

ucasthesis 宏包可以在目前主流的 \LaTeX 编译系统中使用，如 \TeX Live和MiK \TeX 。因 \CTEX 套装已停止维护，不再建议使用（请勿混淆 \CTEX 套装与ctex宏包。 \CTEX 套装是集成了许多 \LaTeX 组件的 \LaTeX 编译系统。ctex 宏包如同ucasthesis，是 \LaTeX 命令集，其维护状态活跃，并被主流的 \LaTeX 编译系统默认集成，是几乎所有 \LaTeX 中文文档的核心架构）。推荐的 \LaTeX 编译系统 和 \LaTeX 文本编辑器 为

操作系统	\LaTeX 编译系统	\LaTeX 文本编辑器
Linux	\TeX Live Full	Texmaker 或 Vim
MacOS	Mac \TeX Full	Texmaker 或 Texshop
Windows	\TeX Live Full 或 MiK \TeX	Texmaker

\LaTeX 编译系统，如 \TeX Live（Mac \TeX 为针对MacOS的 \TeX Live），用于提供编译环境， \LaTeX 文本编辑器（如Texmaker）用于编辑 \TeX 源文件。请从各软件官网下载安装程

序，勿使用不明程序源。 \LaTeX 编译系统和 \LaTeX 编辑器分别安装成功后，即完成了 \LaTeX 的系统配置，无需其他手动干预和配置。若系统原带有旧版的 \LaTeX 编译系统并想安装新版，请先卸载干净旧版再安装新版。

1.3 问题反馈

请见 [问题反馈](#)

欢迎大家有效地反馈模板不足之处，一起不断改进模板。希望大家向同事积极推广 \LaTeX ，一起更高效地做科研。

1.4 模板下载

Github/ucasthesis: <https://github.com/mohuangrui/ucasthesis>

第2章 L^AT_EX使用说明

为方便使用及更好地展示L^AT_EX排版的优秀特性，ucasthesis的框架和文件体系进行了细致地处理，尽可能地对各个功能和板块进行了模块化和封装，对于初学者来说，众多的文件目录也许一开始让人觉得有些无所适从，但阅读完下面的使用说明后，会发现原来使用思路是简单而清晰的，而且，当对L^AT_EX有一定的认识和了解后，会发现其相对Word类排版系统极具吸引力的优秀特性。所以，如果是初学者，请不要退缩，请稍加尝试和坚持，以领略到L^AT_EX的非凡魅力，并可以通过阅读相关资料如L^AT_EX Wikibook [1] 来完善自己的使用知识。

2.1 先试试效果

1. 安装软件：根据所用操作系统和章节 1.2 中的信息安装L^AT_EX编译环境。
2. 获取模板：下载 [ucasthesis](#) 模板并解压。ucasthesis模板不仅提供了相应的类文件，同时也提供了包括参考文献等在内的完成学位论文的一切要素，所以，下载时，推荐下载整个ucasthesis文件夹，而不是单独的文档类。
3. 编译模板：
 - (a) Windows：双击运行artratex.bat脚本。
 - (b) Linux或MacOS：terminal -> chmod +x ./artratex.sh -> ./artratex.sh xa
 - (c) 任意系统：都可使用L^AT_EX编辑器打开Thesis.tex文件并选择xelatex编译引擎进行编译。
4. 错误处理：若编译中遇到了问题，请先查看“常见问题”（章节 2.4）。

编译完成即可获得本PDF说明文档。而这也完成了学习使用ucasthesis撰写论文的一半进程。什么？这就学成一半了，这么简单???，是的，就这么简单！

2.2 文档目录简介

2.2.1 Thesis.tex

Thesis.tex为主文档，其设计和规划了论文的整体框架，通过对其的阅读可以了解整个论文框架的搭建。

2.2.2 编译脚本

- Windows：双击Dos脚本artratex.bat可得全编译后的PDF文档，其存在是为了帮助不了解L^AT_EX编译过程的初学者跨过编译这第一道坎，请勿通过邮件传播和接收此脚本，以防范Dos脚本的潜在风险。
- Linux或MacOS：在terminal中运行
 - ./artratex.sh xa：获得全编译后的PDF文档
 - ./artratex.sh x：快速编译，不会生成文献引用

全编译指运行 `xelatex+bibtex+xelatex+xelatex` 以正确生成所有的引用链接，如目录，参考文献及引用等。在写作过程中若无添加新的引用，则可用快速编译，即只运行一遍 $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 编译引擎以减少编译时间。

2.2.3 Tmp文件夹

运行编译脚本后，编译所生成的文档皆存于Tmp文件夹内，包括编译得到的PDF文档，其存在是为了保持工作空间的整洁，因为好的心情是很重要的。

2.2.4 Style文件夹

包含ucasthesis文档类的定义文件和配置文件，通过对它们的修改可以实现特定的模版设定。

1. ucasthesis.cls: 文档类定义文件，论文的最核心的格式即通过它来定义的。
2. ucasthesis.cfg: 文档类配置文件，设定如目录显示为“目录”而非“目录”。
3. artratex.sty: 常用宏包及文档设定，如参考文献样式、文献引用样式、页眉页脚设定等。这些功能具有开关选项，常只需在Thesis.tex中进行启用即可，一般无需修改artratex.sty本身。
4. artracom.sty: 自定义命令以及添加宏包的推荐放置位置。

2.2.5 Tex文件夹

文件夹内为论文的所有实体内容，正常情况下，这也是使用ucasthesis撰写学位论文时，主要关注和修改的一个位置，注：所有文件都必须采用UTF-8编码，否则编译后将出现乱码文本，详细分类介绍如下：

- Frontinfo.tex: 为论文中英文封面信息。论文封面会根据英文学位名称如Bachelor, Master, Doctor, Postdoctor 自动切换为相应的格式。
- Frontmatter.tex: 为论文前言内容如中英文摘要等。
- Mainmatter.tex: 索引需要出现的Chapter。开始写论文时，可以只索引当前章节，以快速编译查看，当论文完成后，再对所有章节进行索引即可。
- Chap_xxx.tex: 为论文主体的各章，可根据需要添加和撰写。添加新章时，可拷贝一个已有的章文件再重命名，以继承文档的 UTF8 编码。
- Appendix.tex: 为附录内容。
- Backmatter.tex: 为发表文章信息和致谢部分等。

2.2.6 Img文件夹

用于放置论文中所需要的图类文件，支持格式有：.jpg, .png, .pdf。其中，ucas_logo.pdf为国科大校徽。不建议为各章节图片建子目录，即使图片众多，若命名规则合理，图片查询亦是十分方便。

2.2.7 Biblio文件夹

1. ref.bib: 参考文献信息库。

2.3 数学公式、图表、参考文献等功能

2.3.1 数学公式

这里我们可以使用花体如 \mathcal{X} 。数学公式部分可以查看第三章，给出了一些常用的公式和符号。

比如Navier-Stokes方程（方程 (2-1)）：

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 & \text{times math test : 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5} \\ \frac{\partial (\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} & \text{times text test: 1, 2, 3, 4, 5} \\ \frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{V}) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{V}) \end{cases} \quad \dots (2-1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} u \, d\Omega + \int_S \mathbf{n} \cdot (u \mathbf{V}) \, dS = \dot{\phi} \quad \dots (2-2)$$

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} \, dt, \quad \mathcal{L}\{f\}(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} \, dt$$

$$\mathcal{F}(f(x+x_0)) = \mathcal{F}(f(x)) e^{2\pi i \xi x_0}, \quad \mathcal{F}(f(x+x_0)) = \mathcal{F}(f(x)) e^{2\pi i \xi x_0}$$

数学公式常用命令请见 [WiKibook Mathematics](#)。artracom.sty中对一些常用数据类型如矢量矩阵等进行了封装，这样的好处是如有一天需要修改矢量的显示形式，只需单独修改artracom.sty中的矢量定义即可实现全文档的修改。

2.3.2 数学环境

公理 **2.1**. 这是一个公理。

定理 **2.2**. 这是一个定理。

引理 **2.3**. 这是一个引理。

推论 **2.4**. 这是一个推论。

断言 **2.5**. 这是一个断言。

命题 **2.6**. 这是一个命题。

证明. 这是一个证明。

□

定义 **2.1**. 这是一个定义。

例 **2.1**. 这是一个例子。

注. 这是一个注。

2.3.3 表格

请见表 2-1。

制图制表的更多范例，请见 [ucasthesis 知识小站](#) 和 [WiKibook Tables](#)。

表 2-1 这是一个样表。

Table 2-1 This is a sample table.

行号	跨多列的标题							
Row 1	1	2	3	4	5	6	7	8
Row 2	1	2	3	4	5	6	7	8
Row 3	1	2	3	4	5	6	7	8
Row 4	1	2	3	4	5	6	7	8

2.3.4 图片插入

论文中图片的插入通常分为单图和多图，下面分别加以介绍：

单图插入：假设插入名为c06h06（后缀可以为.jpg、.png、.pdf，下同）的图片，其效果如图 2-1。



图 2-1 Q判据等值面图，同时测试一下一个很长的标题，比如这真的是一个很长很长很长很长很长很长很长很长的标题。

Figure 2-1 Isocontour of Q criteria, at the same time, this is to test a long title, for instance, this is a really very long very long very long very long very long title.

如果插图的空白区域过大，以图片c06h06为例，自动裁剪如图 2-2。

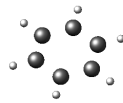


图 2-2 激波圆柱作用。

Figure 2-2 Shock-cylinder interaction.

多图的插入如图 2-3，多图不应在子图中给文本子标题，只要给序号，并在主标题中进行引用说明。

2.3.5 算法

如见算法 1，详细使用方法请参见文档 [algorithmicx](#)。

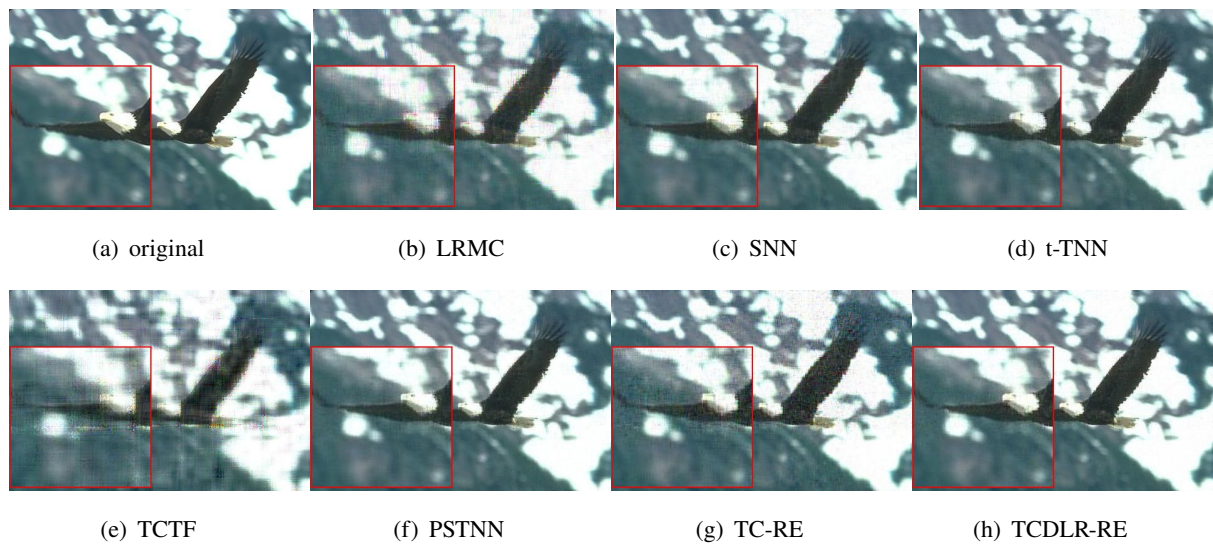


图 2-3 这里用了本人论文里的一组对照图，供各位参考

Figure 2-3 Here is a set of comparative figures from my thesis for your reference.

算法 1 Euclid's algorithm

1: procedure EUCLID(a, b)	▷ The g.c.d. of a and b
2: $r \leftarrow a \bmod b$	
3: while $r \neq 0$ do	▷ We have the answer if r is 0
4: $a \leftarrow b$	
5: $b \leftarrow r$	
6: $r \leftarrow a \bmod b$	
7: end while	
8: return b	▷ The gcd is b
9: end procedure	

2.3.6 参考文献引用

参考文献引用过程以实例进行介绍, 假设需要引用名为"Document Preparation System"的文献, 步骤如下:

1) 使用Google Scholar搜索Document Preparation System, 在目标条目下点击Cite, 展开后选择Import into BibTeX打开此文章的BibTeX索引信息, 将它们copy添加到ref.bib文件中(此文件位于Biblio文件夹下)。

2) 索引第一行 @article{lampport1986document, 中 lampport1986document 即为此文献的label (中文文献也必须使用英文label, 一般遵照: 姓氏拼音+年份+标题第一字拼音的格式), 想要在论文中索引此文献, 有两种索引类型:

文本类型: \citet{lampport1986document}。正如此处所示 Lampport [2];

括号类型: \citep{lampport1986document}。正如此处所示 [2]。

多文献索引用英文逗号隔开:

\citep{lampport1986document, chu2004tushu, chen2005zhulu}。正如此处所示 [2-4]

更多例子如:

Walls 等 [5] 根据 Betts 等 [6] 的研究, 首次提出...。其中关于... [5, 6], 是当前中国...得到迅速发展的研究领域 [7, 8]。引用同一著者在同一年份出版的多篇文献时, 在出版年份之后用英文小写字母区别, 如: [9-11] 和 袁训来 等 [9, 10, 11]。同一处引用多篇文献时, 按出版年份由近及远依次标注。例如 [7, 12-14]。

使用著者-出版年制 (authoryear) 式参考文献样式时, 中文文献必须在BibTeX索引信息的 **key** 域 (请参考ref.bib文件) 填写作者姓名的拼音, 才能使得文献列表按照拼音排序。参考文献表中的条目 (不排序号), 先按语种分类排列, 语种顺序是: 中文、日文、英文、俄文、其他文种。然后, 中文按汉语拼音字母顺序排列, 日文按第一著者的姓氏笔画排序, 西文和俄文按第一著者姓氏首字母顺序排列。如中 [14]、日 [15]、英 [12]、俄 [16]。

如此, 即完成了文献的索引, 请查看下本文档的参考文献一章, 看看是不是就是这么简单呢? 是的, 就是这么简单!

不同文献样式和引用样式, 如著者-出版年制 (authoryear)、顺序编码制 (numbers)、上标顺序编码制 (super) 可在Thesis.tex中对artratex.sty调用实现, 详见 [ucasthesis 知识小站之文献样式](#)

参考文献索引的更多知识, 请见 [WiKibook Bibliography](#)。

2.4 常见使用问题

1. 模板每次发布前, 都已在Windows, Linux, MacOS系统上测试通过。下载模板后, 若编译出现错误, 则请见 [ucasthesis知识小站](#) 的 [编译指南](#)。

2. 模板文档的编码为UTF-8编码。所有文件都必须采用UTF-8编码, 否则编译后生成的文档将出现乱码文本。若出现文本编辑器无法打开文档或打开文档乱码的问题,

请检查编辑器对UTF-8编码的支持。如果使用WinEdt作为文本编辑器（不推荐使用），应在其Options -> Preferences -> wrapping选项卡下将两种Wrapping Modes中的内容：

TeX;HTML;ANSI;ASCII|DTX...

修改为：TeX;UTF-8|ACP;HTML;ANSI;ASCII|DTX...

同时，取消Options -> Preferences -> Unicode中的Enable ANSI Format。

3. 推荐选择xelatex或lualatex编译引擎编译中文文档。编译脚本的默认设定为xelatex编译引擎。你也可以选择不使用脚本编译，如直接使用L^AT_EX文本编辑器编译。注：L^AT_EX文本编辑器编译的默认设定为pdflatex编译引擎，若选择xelatex或lualatex编译引擎，请进入下拉菜单选择。为正确生成引用链接和参考文献，需要进行全编译。

4. Texmaker使用简介

- (a) 使用 Texmaker “打开 (Open)” Thesis.tex。
- (b) 菜单“选项 (Options)” -> “设置当前文档为主文档 (Define as Master Document)”
- (c) 菜单“自定义 (User)” -> “自定义命令 (User Commands)” -> “编辑自定义命令 (Edit User Commands)” -> 左侧选择“command 1”，右侧“菜单项 (Menu Item)” 填入 Auto Build -> 点击下方“向导 (Wizard)” -> “添加 (Add)”：xelatex + bibtex + xelatex + xelatex + pdf viewer -> 点击“完成 (OK)”
- (d) 使用 Auto Build 编译带有未生成引用链接的源文件，可以仅使用 xelatex 编译带有已经正确生成引用链接的源文件。
- (e) 编译完成，“查看 (View)” PDF，在PDF中“ctrl+click”可链接到相对应的源文件。

5. 模版的设计可能地考虑了适应性。致谢等所有条目都是通过最为通用的

`\chapter{item name}` and `\section*{item name}`

来显式实现的 (请观察Backmatter.tex)，从而可以随意添加，放置，和修改，如同一般章节。对于图表目录名称则可在ucasthesis.cfg中进行修改。

6. 设置文档样式：在artratex.sty中搜索关键字定位相应命令，然后修改

- (a) 正文行距：启用和设置 `\linespread{1.5}`，默认1.5倍行距。
- (b) 参考文献行距：修改 `\setlength{\bibsep}{0.0ex}`
- (c) 目录显示级数：修改 `\setcounter{tocdepth}{2}`
- (d) 文档超链接的颜色及其显示：修改 `\hypersetup`

7. 文档内字体切换方法：

- 宋体：国科大论文模板ucasthesis 或 国科大论文模板ucasthesis
- 粗宋体：国科大论文模板ucasthesis 或 国科大论文模板ucasthesis
- 黑体：国科大论文模板ucasthesis 或 国科大论文模板ucasthesis
- 粗黑体：国科大论文模板ucasthesis 或 国科大论文模板ucasthesis
- 仿宋：国科大论文模板ucasthesis 或 国科大论文模板ucasthesis
- 粗仿宋：国科大论文模板ucasthesis 或 国科大论文模板ucasthesis
- 楷体：国科大论文模板ucasthesis 或 国科大论文模板ucasthesis
- 粗楷体：国科大论文模板ucasthesis 或 国科大论文模板ucasthesis

第3章 公式部分参考

本章第一小节介绍本文使用的一些符号和公式定理；第二小节介绍目前常见的三种张量分解方式，为后文内容准备理论铺垫；第三小节介绍与本文相关的模型，并列举这些模型的优缺点。

3.1 符号及定义

在本文中，实数域和复数域分别表示为 \mathbb{R} 和 \mathbb{C} 。张量是一种表示多维数据的数学概念，张量阶数为零的数据称作标量，用小写字母表示，如标量 a ；张量阶数为一的数据称作向量，用加粗的小写字母表示，如向量 \mathbf{a} ；张量阶数为二的数据称作矩阵，用大写字母表示，如矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ ，用 I_n 表示 $n \times n$ 的单位矩阵；对于张量阶数大于等于3的数据使用Euler手写字体表示，例如三阶张量 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ ，用 \mathcal{I}_n 表示 $n \times n \times n$ 的单位张量。图3-1表示不同阶数张量的示意图，一个立方体表示一个元素。本文主要对三阶张量进行研究。

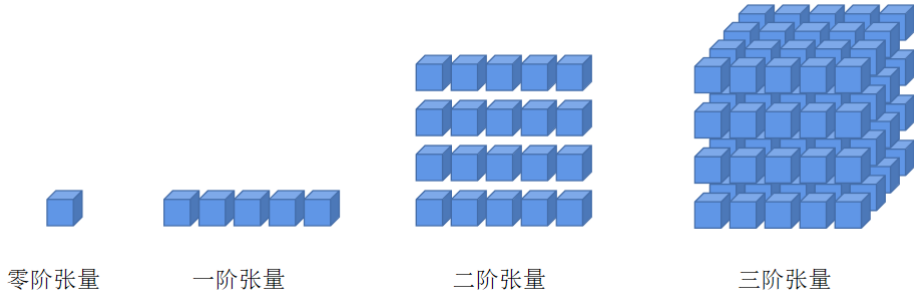


图 3-1 张量示意图

Figure 3-1 Tensor diagram.

向量 \mathbf{a} 中的第 i 个元素记作 a_i ；矩阵 A 中的第 (i, j) 个元素记作 $A_{i,j}$ ；三阶张量 \mathcal{A} 中的第 (i, j, k) 个元素记作 $\mathcal{A}_{i,j,k}$ 。在矩阵中使用行和列表示其子序列，分别表示矩阵在某一行或某一列中的所有元素，本文中使用冒号表示某行（列）的所有元素，如矩阵 A 的第 j 列元素表示为 $A_{:,j}$ ， A 的第 i 行表示为 $A_{i,:}$ 。

在三阶张量中，一共有三个维度，通常使用张量纤维（fiber）表示不同维度下的元素向量。除了行 $\mathcal{A}_{:,j,k}$ 和列 $\mathcal{A}_{i,:,k}$ 外，三阶张量中引入了管道（tube）表示第三维度中的子元素向量 $\mathcal{A}_{i,j,:}$ 。图3-2表示三种不同的张量纤维。从张量中提取出来的纤维一般是以列向量的方式表示。

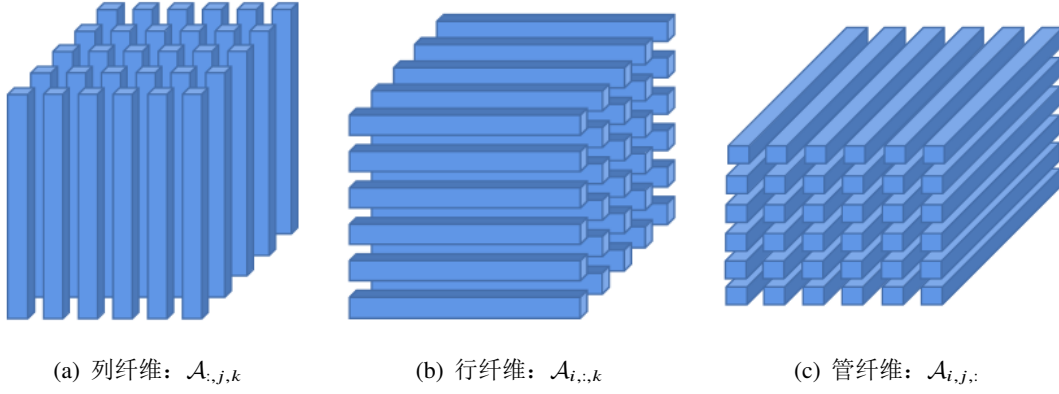


图 3-2 三种张量纤维

Figure 3-2 Three kind of tensor fibers.

张量切片 (slice) 表示张量的二维截面 (矩阵形式), 是由一个固定维度中的索引构成的。以三阶张量为例, 根据固定维度的不同, 可以得到张量的水平切片 $\mathcal{A}_{i,:,:}$, 侧面切片 $\mathcal{A}_{:,j,:}$ 和前置切片 $\mathcal{A}_{::,k}$, 图3-3表示三种模态的张量切片的视觉效果图, 从张量中提取出来的切片是矩阵的形式。

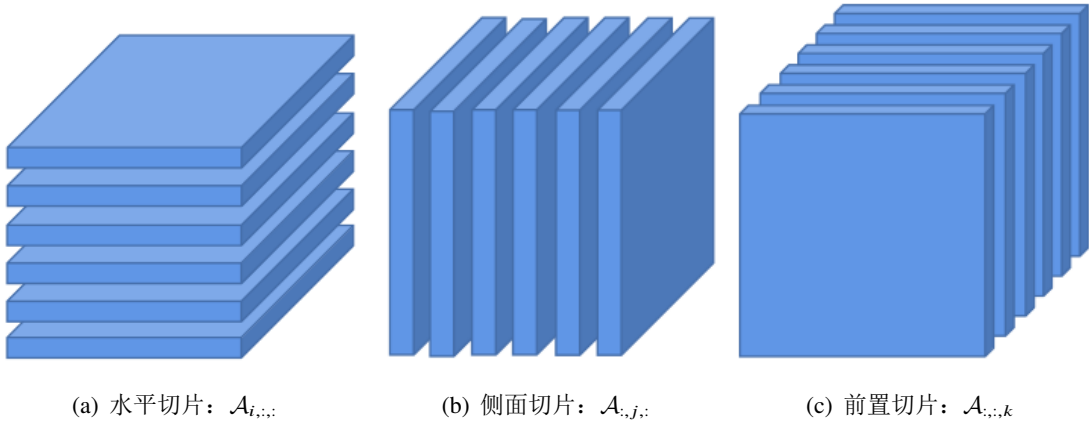


图 3-3 三种张量切片

Figure 3-3 Three kind of tensor slices.

矩阵 A 和 B 之间的内积定义为 $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^* B)$, 其中 A^* 表示矩阵 A 的共轭转置, $\text{Tr}()$ 表示矩阵的迹函数。张量 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 在 $\mathbb{C}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ 的内积定义为 $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle = \sum_{i=1}^{n_3} \langle \mathcal{A}_{::,i}, \mathcal{B}_{::,i} \rangle$ 。

向量和矩阵分别有三种范数, 对于向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, 其三种范数分别为: (1) L_0 范数 $\|\mathbf{v}\|_0 = \#\{i, \mathbf{v}_i \neq 0\}$; (2) L_1 范数 $\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_i |\mathbf{v}_i|$; (3) L_2 范数 $\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\sum_i |\mathbf{v}_i|^2}$ 。对于矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, 其三种范数分别为: (1) 谱范数 $\|A\| = \max_i \sigma_i(M)$, 其中 $\sigma(A)$ 为奇异值向量; (2) 核范数 $\|A\|_* = \sum_i \sigma_i(M)$; (3) Frobenius 范数 $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{ij} |M_{i,j}|^2}$ 。对于张量 $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$, 其范数分别定义为: (1) L_1 范数 $\|\mathcal{T}\|_1 = \sum_{ijk} |\mathcal{T}_{i,j,k}|$; (2) Frobenius 范数 $\|\mathcal{T}\|_F = \sqrt{\sum_{ijk} |\mathcal{T}_{i,j,k}|^2}$; (3) 无穷范数 $\|\mathcal{T}\|_\infty = \max_{i,j,k} |\mathcal{T}_{i,j,k}|$ 。

以上是本文主要使用的符号意义。为了易读性, 本文将常用符号用表格整理, 详

表 3-1 公式

Table 3-1 notation.

公式	解释	公式	解释
\mathbb{R}	实数域	\mathbb{C}	复数域
a	标量	\mathbf{a}	向量
A	矩阵	\mathcal{A}	张量
\mathbf{A}	集合	\mathbf{a}_i	\mathbf{a} 中的第 i 个元素
$\mathbf{0}_{m \times n}$	$m \times n$ 空矩阵	$A_{i,j}$	A 中的第 (i, j) 个元素
$\sigma_i(A)$	矩阵 A 中的第 i 个奇异值	$\sigma(A)$	$(\sigma_1(A), \sigma_2(A), \dots, \sigma_r(A))^T$
A^*	A 的共轭转置	$\text{Conj}(A)$	A 的共轭
$\mathcal{A}_{i,j,k}$	\mathcal{A} 的第 (i, j, k) 个元素	$\mathcal{A}_{i,j,:}$	\mathcal{A} 的第 (i, j) 个管道
$\mathcal{A}_{:, :, i}$	\mathcal{A} 的第 i 个前置切片	\mathcal{A}^\dagger	\mathcal{A} 的伪逆
$\bar{\mathcal{A}}$	$\text{fft}(\mathcal{A}, [], 3)$	\bar{A}	$\text{bdiag}(\bar{\mathcal{A}})$
\bar{A}_i	$\bar{\mathcal{A}}$ 的第 i 个前置切片	$\#\mathbf{A}$	\mathbf{A} 中的元素个数

情见表3-1。对于上文和表格中未给出的符号，本文会在该符号第一次出现的位置给予说明。

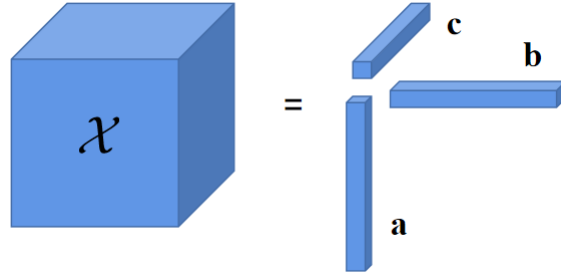


图 3-4 三阶秩一张量

Figure 3-4 Rank-one thrid-order tensor.

3.2 张量分解

1927年，Hitchcock[17]提出了张量分解的概念，通过有限个秩一张量的多线性乘积表示完整的张量，可以大大降低高阶张量的数据量，提高了计算效率。由于张量分解可以将高阶张量中的有效信息提取出来，因此张量分解被广泛的应用于大数据分析[18, 19]，图象处理[20, 21]等各个领域，下面介绍一些常见的张量分解模型。

3.2.1 CP分解

定义 3.1. (秩一张量) 如果一个 N 阶张量 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times \dots \times n_N}$ 可以写做由 N 个向量的外积的构成，如 $\mathcal{A} = \mathbf{a}^{(1)} \circ \mathbf{a}^{(2)} \circ \dots \circ \mathbf{a}^{(N)}$ ，其中符号 \circ 表示向量外积， $\mathbf{a}^{(i)}$ 表示张量中第 i 个模

态的向量。也就意味着张量中的每个元素都可以表示为不同模式的向量元素的乘积，如 $\mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_N} = a_{i_1}^{(1)} a_{i_2}^{(2)} \dots a_{i_N}^{(N)}$ 。图3-4展示了一种三阶的秩一张量。

张量CP分解是CANDECOMP/PARAFAC分解[22]的简称。CP分解于上个世纪70年代被提出[23, 24]，一直受到广大学者的青睐与研究，以此为基础的张量恢复方法层出不穷。张量CP分解是将一个张量分解为一组秩一张量相加的形式。比如说，给定一个三阶张量 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ ，本文将写为 $\mathcal{A} \approx \sum_{r=1}^R \mathbf{a}_r \circ \mathbf{b}_r \circ \mathbf{c}_r$ 的形式，其中 R 是一个正整数， $\mathbf{a}_r, \mathbf{b}_r, \mathbf{c}_r$ 分别为三阶张量不同模态下的向量， $r = 1, \dots, R$ 。为了更加生动形象的表示出CP分解模型，图3-5中展示了三阶张量的CP分解模型。

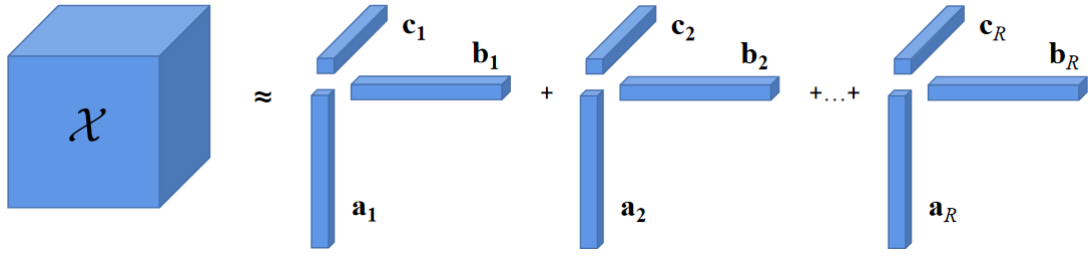


图 3-5 三阶张量的CP分解

Figure 3-5 CP decomposition of a three-way array.

张量CP分解的效果取决于 R 的大小，一个合适的 R 可以更加准确的表示一个张量。目前，没有一个准确的算法可以确定 R 的大小，故计算张量的CP分解中的 R 值还是一个NP难问题。在实践中，一般需要通过多次实验比较找出一个最优的 R 值，这样会耗费大量的计算资源。

3.2.2 Tucker分解

Tucker分解是由Tucker[25]在1963年提出的，并得到了学术界的广泛使用。Tucker分解是一种高阶的主成分分析，它将张量分解成了由一个核心张量和张量在不同模式展开的矩阵相乘的形式。对于一个三阶张量 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ ，它的Tucker分解的形式可以写作： $\mathcal{A} \approx \mathcal{G} \times_1 \mathbf{A}^{(1)} \times_2 \mathbf{A}^{(2)} \times_3 \mathbf{A}^{(3)}$ ，其中 $\mathbf{A}^{(1)} \mathbf{A}^{(2)} \mathbf{A}^{(3)}$ 分别表示张量 \mathcal{A} 在不同模态下展开的矩阵。为方便理解Tucker分解，请看图3-6。Tucker分解的秩可以用一下数学公式表示：

$$\text{rank}_{\text{Tucker}}(\mathcal{A}) = [R_1, R_2, \dots, R_K]^T \quad (3-1)$$

其中 R_K 表示张量 \mathcal{A} 在第 K 模态下展开的矩阵的秩的大小，将张量每个模态矩阵的秩结合起来就是Tucker分解的秩。

尽管Tucker分解有着较好的表征能力，但是分解得到的核心张量 \mathcal{G} 会随着张量阶数的增长成指数型增长，容易产生数据维度灾难的问题，限制了其在高阶数据中的应用。

3.2.3 张量奇异值分解

张量奇异值分解模型是由Kilmer等人[26]于2011年提出，Kilmer等人首先提出了一些新的张量的运算方式（如张量乘积），基于这些张量运算，提出了张量奇异值分解，

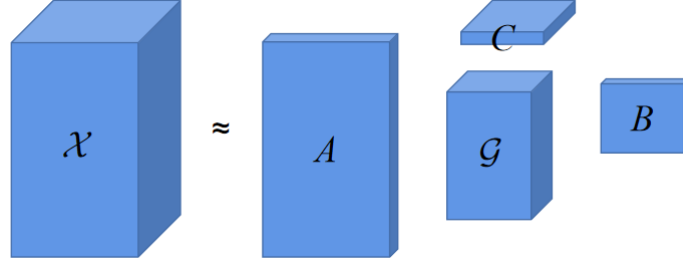


图 3-6 三阶张量的Tucker分解

Figure 3-6 Tucker decomposition of a three-way array.

该分解方法是将张量转化到傅里叶变换域，再对张量中的每一个前置切片进行矩阵奇异值分解操作，在变换域中得到最优的低秩近似结构。图3-7展示了三阶张量t-SVD的示意图。下面介绍t-SVD的基础概念。

对张量进行张量奇异值分解需要先将张量做离散傅里叶变换（DFT），将张量中的数据从实数域变换到傅里叶域，具体操作见文献[26]。本文将DFT后的张量 \mathcal{A} 用 $\bar{\mathcal{A}}$ 表示。在MATLAB中，通常使用fft命令对数据做DFT处理，比如对于三阶张量 \mathcal{A} ： $\bar{\mathcal{A}} = \text{fft}(\mathcal{A}, [], 3)$ 。使用ifft命令将 $\bar{\mathcal{A}}$ 逆变换回 \mathcal{A} ，如： $\mathcal{A} = \text{ifft}(\bar{\mathcal{A}}, [], 3)$ 。

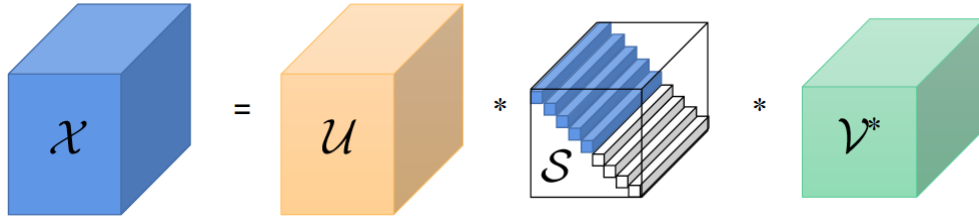


图 3-7 张量奇异值分解

Figure 3-7 Tensor SVD decomposition.

定义 3.2.（张量乘积[26]）设 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ 和 $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{n_2 \times l \times n_3}$ ， \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 经过张量乘积后的结果是一个尺寸为 $n_1 \times l \times n_3$ 的张量，公式为：

$$\mathcal{A} * \mathcal{B} = \text{fold}(\text{bcirc}(\mathcal{A}) \cdot \text{unfold}(\mathcal{B})) \quad (3-2)$$

其中 \cdot 表示矩阵乘法， $\text{unfold}(\cdot)$ 表示将张量展开为矩阵，例如 $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ ：

$$\text{unfold}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{:, :, 1} \\ \mathcal{B}_{:, :, 2} \\ \vdots \\ \mathcal{B}_{:, :, n_3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_1 n_3 \times n_2}, \quad (3-3)$$

$\text{fold}(\cdot)$ 是 $\text{unfold}(\cdot)$ 的逆运算，表示将矩阵折叠为张量： $\text{fold}(\text{unfold}(\mathcal{B})) = \mathcal{B}$ 。

定义 3.3.（块循环矩阵[26]）张量 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ 的块循环矩阵表示为 $\text{bcirc}(\mathcal{A}) \in \mathbb{R}^{n_1 n_3 \times n_2 n_3}$ ，

具体表示为:

$$\text{bcirc}(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{:, :, 1} & \mathcal{A}_{:, :, n_3} & \cdots & \mathcal{A}_{:, :, 2} \\ \mathcal{A}_{:, :, 2} & \mathcal{A}_{:, :, 1} & \cdots & \mathcal{A}_{:, :, 3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{A}_{:, :, n_3} & \mathcal{A}_{:, :, n_3-1} & \cdots & \mathcal{A}_{:, :, 1} \end{pmatrix}. \quad (3-4)$$

算法 2 张量奇异值分解[27]

- 1: 输入: $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$, $\lambda > 0$
 - 2: 输出: \mathcal{U} , \mathcal{S} and \mathcal{V}
 - 3: 计算 $\bar{\mathcal{Y}} = \text{fft}(\mathcal{Y}, [], 3)$;
 - 4: 通过下式计算从 $\bar{\mathcal{Y}}$ 分解得到的 $\bar{\mathcal{U}}$, $\bar{\mathcal{S}}$ 和 $\bar{\mathcal{V}}$ 的每个前置切片;
 - 5: **for** $i = 1, \dots, \lfloor \frac{n_3+1}{2} \rfloor$ **do**
 - 6: $[\bar{U}^{(i)}, \bar{S}^{(i)}, \bar{V}^{(i)}] = \text{SVD}(\bar{Y}^{(i)})$;
 - 7: **end for**
 - 8: **for** $i = \lfloor \frac{n_3+1}{2} \rfloor + 1, \dots, n_3$ **do**
 - 9: $\bar{U}^{(i)} = \text{Conj}(\bar{U}^{(n_3-i+2)})$;
 - 10: $\bar{S}^{(i)} = \bar{S}^{(n_3-i+2)}$;
 - 11: $\bar{V}^{(i)} = \text{Conj}(\bar{V}^{(n_3-i+2)})$;
 - 12: **end for**
 - 13: $\mathcal{U} = \text{ifft}(\bar{\mathcal{U}}, [], 3)$, $\mathcal{S} = \text{ifft}(\bar{\mathcal{S}}, [], 3)$ and $\mathcal{V} = \text{ifft}(\bar{\mathcal{V}}, [], 3)$ 。
-

定义 3.4. (全对角张量[26]) 如果张量 \mathcal{A} 的每个前置切片都为对角矩阵, 就称该张量为全对角张量。

定义 3.5. (单位张量[26]) 如果张量 $\mathcal{I}_{n \times n \times n_3} \in \mathbb{R}^{n \times n \times n_3}$ 的第一层前置切片为单位矩阵, 其余前置切片全为0矩阵, 就称该张量为单位张量。

定义 3.6. (共轭转置[26]) 张量 $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ 的共轭转置表示为 $\mathcal{A}^* \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_1 \times n_3}$ 。是将张量的每个前置切片做共轭转置, 然后将转置后的前置切片的顺序从位置2反转到位置3。

定义 3.7. (正交张量[26]) 如果张量 $\mathcal{Q} \in \mathbb{C}^{n \times n \times n_3}$ 满足 $\mathcal{Q}^* * \mathcal{Q} = \mathcal{Q} * \mathcal{Q}^* = \mathcal{I}_{n \times n \times n_3}$, 则该张量为正交张量。

定理 3.1. (张量奇异值分解[26]) 设张量 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$, 它可以被因式分解为

$$\mathcal{A} = \mathcal{U} * \mathcal{S} * \mathcal{V}^*, \quad (3-5)$$

其中 $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1 \times n_3}$ 和 $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2 \times n_3}$ 为正交张量, $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ 为全对角张量。分解3-5就叫做张量奇异值分解, 更多细节见算法2

定义 3.8. (张量管秩[26]) 对于张量 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$, 他的张量管秩表示为 $\text{rank}_l(\mathcal{A})$, 其定义为 \mathcal{S} 非零奇异管的的个数, 这里的 \mathcal{S} 为经过张量奇异值分解得到的 $\mathcal{A} = \mathcal{U} * \mathcal{S} * \mathcal{V}^*$ 。张量管秩可以用数学公式表达: $\text{rank}(\mathcal{A}) = \#\{i | \mathcal{S}(i, i, :) \neq \mathbf{0}\} = \#\{i | \mathcal{S}(i, i, 1) \neq 0\}$ 。

定义 3.9. (张量核范数 [27]) 对于张量 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$, 他的张量奇异值分解表示为 $\mathcal{A} = \mathcal{U} * \mathcal{S} * \mathcal{V}^*$, 其张量核范数记作 $\|\mathcal{X}\|_*$, 定义为 $\|\mathcal{X}\|_* = \sum_{i=1}^{\text{rank}_t(\mathcal{X})} \mathcal{S}_{i,i,1}$ 。

参考文献

- [1] Wikibook. <http://en.wikibooks.org/wiki/latex> [M]. On-line Resources, 2014.
- [2] Lamport L. Document preparation system [M]. Addison-Wesley Reading, MA, 1986.
- [3] 初景利. 图书馆数字参考咨询服务研究 [M]. 北京: 北京图书馆出版社, 2004.
- [4] 陈浩元. 著录文后参考文献的规则及注意事项 [J]. 编辑学报, 2005, 17(6): 413-415.
- [5] Walls S C, Barichivich W J, Brown M E. Drought, deluge and declines: the impact of precipitation extremes on amphibians in a changing climate [J/OL]. Biology, 2013, 2(1): 399-418[2013-11-04]. <http://www.mdpi.com/2079-7737/2/1/399>. DOI: 10.3390/biology2010399.
- [6] Betts L R, Taylor C P. Aging reduces center-surround antagonism in visual motion processing [J]. Neuron, 2005, 45(3): 361-366.
- [7] 陈晋镛, 张惠民, 朱士兴, 等. 蓟县震旦亚界研究 [M]//中国地质科学院天津地质矿产研究所. 中国震旦亚界. 天津: 天津科学技术出版社, 1980: 56-114.
- [8] Bravo H, Olavarria J. Comparative study of visual inter and intrahemispheric cortico-cortical connections in five native chilean rodents [J]. Anatomy and embryology, 1990, 181(1): 67-73.
- [9] 袁训来, 陈哲, 肖书海. 蓝田生物群: 一个认识多细胞生物起源和早期演化的新窗口 – 篇一 [J]. 科学通报, 2012, 57(34): 3219.
- [10] 袁训来, 陈哲, 肖书海. 蓝田生物群: 一个认识多细胞生物起源和早期演化的新窗口 – 篇二 [J]. 科学通报, 2012, 57(34): 3219.
- [11] 袁训来, 陈哲, 肖书海. 蓝田生物群: 一个认识多细胞生物起源和早期演化的新窗口 – 篇三 [J]. 科学通报, 2012, 57(34): 3219.
- [12] Stamerjohanns H, Ginev D, David C, et al. MathML-aware article conversion from LaTeX [J]. Towards a Digital Mathematics Library, 2009, 16(2): 109-120.
- [13] 哈里森·沃尔德伦. 经济数学与金融数学 [M]. 谢远涛, 译. 北京: 中国人民大学出版社, 2012: 235-236.
- [14] 牛志明, 斯温兰德, 雷光春. 综合湿地管理国际研讨会论文集 [C]. 北京: 海洋出版社, 2013.
- [15] ボハнде. 過去及び現在に於ける英国と会 [J]. 日本時報, 1928, 17: 5-9.
- [16] Д у б р о в и н А . И . О т к р ы т о е п и с ь м о П р е д с е д а т е л я Г л а в н о г о С о в е т а С о ю з а Р у с с к о г о Н а р о д а С а н к т - П е т е р б у р г с к о м у А н т о н и ю , П е р в е н с т в у ю щ е м у ч л е н у С в я щ е н н о г о С и н о д а [J]. В е ч е , 1906: 1-3.
- [17] Hitchcock F L. The expression of a tensor or a polyadic as a sum of products [J]. Journal of Mathematics and Physics, 1927, 6(1-4): 164-189.
- [18] Song Q, Ge H, Caverlee J, et al. Tensor completion algorithms in big data analytics [J]. ACM Transactions on Knowledge Discovery from Data (TKDD), 13(1): 1-48.
- [19] Sael L, Jeon I, Kang U. Scalable tensor mining [J]. Big Data Research, 2015, 2(2): 82-86.
- [20] Zhou P, Lu C, Lin Z, et al. Tensor factorization for low-rank tensor completion [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2017, 27(3): 1152-1163.
- [21] Song L, Du B, Zhang L, et al. Nonlocal patch based t-svd for image inpainting: Algorithm and error analysis [C]//Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence: volume 32. 2018.
- [22] Kolda T G, Bader B W. Tensor decompositions and applications [J]. SIAM review, 2009, 51(3): 455-500.
- [23] Carroll J D, Chang J J. Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an n-way generalization of “eckart-young” decomposition [J]. Psychometrika, 1970, 35(3): 283-319.

- [24] Harshman R A, et al. Foundations of the parafac procedure: Models and conditions for an "explanatory" multimodal factor analysis [J]. 1970.
- [25] Tucker L R. Some mathematical notes on three-mode factor analysis [J]. Psychometrika, 1966, 31(3): 279-311.
- [26] Kilmer M E, Martin C D. Factorization strategies for third-order tensors [J]. Linear Algebra and its Applications, 2011, 435(3): 641-658.
- [27] Lu C, Feng J, Chen Y, et al. Tensor robust principal component analysis with a new tensor nuclear norm [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2019, 42(4): 925-938.

致 谢

攻读硕士期间的科研成果

1. 我的文章1 2023
2. 我的文章2 2022

