Алгоритмы и структуры данных

Задание к лабораторной работе №1. Сортировка вставками, выбором, пузырьковая.

Лабораторная работа посвящена сортировках за n^2. Существует два способа ее выполнения и защиты:

1 **Базовый уровень.** Решается 3 задачи по вариантам. Варианты в табличке внизу, номер вашего варианта соответствует вашему номеру в списке группы. Посмотреть свой номер можно, например, в журнале успеваемости по дисциплине. В этом случае максимум за защиту можно получить 4 балла. В сумме с самой работой (0,5 балла) и отчетом (1 балл) получается 5,5 балла, что достаточно для зачета.

2 **Продвинутый уровень.** Решаются все задачи или минимум 5 задач по выбору, ~~причем задача №10 - обязательная~~. В этом случае вы сможете получить максимальные 7,5 баллов.

Вариант	Номера задач	Вариант	Номера задач
1	1,2,4	16	1,4,8
2	1,2,5	17	1,4,9
3	1,2,6	18	1,5,6
4	1,2,7	19	1,5,7
5	1,2,8	20	1,5,8
6	1,2,9	21	1,5,9
7	1,3,4	22	1,6,7
8	1,3,5	23	1,6,8
9	1,3,6	24	1,6,9
10	1,3,7	25	1,7,8
11	1,3,8	26	1,7,9
12	1,3,9	27	1,8,9
13	1,4,5		
14	1,4,6		
15	1,4,7		

1 задача. Сортировка вставкой

Используя код процедуры Insertion-sort, напишите программу и проверьте сортировку массива $A = \{31, 41, 59, 26, 41, 58\}$.

- **Формат входного файла (input.txt).** В первой строке входного файла содержится число n ($1 \leq n \leq 10^3$) — число элементов в массиве. Во второй строке находятся n различных целых чисел, по модулю не превосходящих 10^9.
- **Формат выходного файла (output.txt).** Одна строка выходного файла с отсортированным массивом. Между любыми двумя числами должен стоять ровно один пробел.
- Ограничение по времени. 2сек.
- Ограничение по памяти. 256 мб.

Выберите любой набор данных, подходящих по формату, и протестируйте алгоритм.

2 задача. Сортировка вставкой +

Измените процедуру Insertion-sort для сортировки таким образом, чтобы в выходном файле отображалось в первой строке n чисел, которые обозначают новый индекс элемента массива после обработки.

- **Формат выходного файла (input.txt).**В первой строке выходного файла выведите n чисел. При этом i-ое число равно индексу, на который, в момент обработки его сортировкой вставками, был перемещен i-ый элемент исходного массива. Индексы нумеруются, начиная с единицы. Между любыми двумя числами должен стоять ровно один пробел.

Пример.

input.txt	output.txt
10 1 8 4 2 3 7 5 6 9 0	1 2 2 2 3 5 5 6 9 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

В примере сортировка вставками работает следующим образом:

- Первый элемент остается на своем месте, поэтому первое число в ответе — единица. Отсортированная часть массива: [1]
- Второй элемент больше первого, поэтому он тоже остается на своем месте, и второе число в ответе — двойка. [1 8]
- Четверка меньше восьмерки, поэтому занимает второе место. [1 4 8]
- Двойка занимает второе место. [1 2 4 8]
- Тройка занимает третье место. [1 2 3 4 8]

- Семерка занимает пятое место. [1 2 3 4 7 8]
- Пятерка занимает пятое место. [1 2 3 4 5 7 8]
- Шестерка занимает шестое место. [1 2 3 4 5 6 7 8]
- Девятка занимает девятое место. [1 2 3 4 5 6 7 8 9]
- Ноль занимает первое место. [0 1 2 3 4 5 6 7 8 9]

3 задача. Сортировка вставкой по убыванию

Перепишите процедуру Insertion-sort для сортировки в невозрастающем порядке вместо неубывающего с использованием процедуры `Swap`.

Формат входного и выходного файла и ограничения - как в задаче 1.

Подумайте, можно ли переписать алгоритм сортировки вставкой с использованием рекурсии?

4 задача. Линейный поиск

Рассмотрим задачу поиска.

- **Формат входного файла**. Последовательность из n чисел $A = a_1, a_2, \ldots, a_n$ в первой строке, числа разделены пробелом, и значение V во второй строке. Ограничения: $0 \leq n \leq 10^3$, $-10^3 \leq a_i, V \leq 10^3$
- **Формат выходного файла**. Одно число - индекс i, такой, что $V = A[i]$, или значение -1, если V в отсутствует.
- Напишите код линейного поиска, при работе которого выполняется сканирование последовательности в поисках значения V.
- Если число встречается несколько раз, то выведите, сколько раз встречается число и все индексы i через запятую.
- Дополнительно: попробуйте найти свинью, как в лекции. Используйте во входном файле последовательность слов из лекции, и найдите соответствующий индекс.

5 задача. Сортировка выбором.

Рассмотрим сортировку элементов массива , которая выполняется следующим образом. Сначала определяется наименьший элемент массива , который ставится на место элемента $A[1]$. Затем производится поиск второго наименьшего элемента массива A, который ставится на место элемента $A[2]$. Этот процесс продолжается для первых $n - 1$ элементов массива A.

Напишите код этого алгоритма, также известного как сортировка выбором (selection sort). Определите время сортировки выбором в наихудшем случае и в среднем случае и сравните его со временем сортировки вставкой.

Формат входного и выходного файла и ограничения - как в задаче 1.

6 задача. Пузырьковая сортировка

Пузырьковая сортировка представляет собой популярный, но не очень эффективный алгоритм сортировки. В его основе лежит многократная перестановка соседних элементов, нарушающих порядок сортировки. Вот псевдокод этой сортировки:

```
Bubble_Sort(A):
  for i = 1 to A.length - 1
    for j = A.length downto i+1
      if A[j] < A[j-1]
        поменять A[j] и A[j-1] местами
```

Напишите код на Python и докажите корректность пузырьковой сортировки. Для доказательства корректоности процедуры вам необходимо доказать, что она завершается и что $A'[1] \leq A'[2] \leq ... \leq A'[n]$, где A' - выход процедуры Bubble_Sort, а n - длина массива A.

Определите время пузырьковой сортировки в наихудшем случае и в среднем случае и сравните его со временем сортировки вставкой.

Формат входного и выходного файла и ограничения - как в задаче 1.

7 задача. Знакомство с жителями Сортлэнда

Владелец графства Сортлэнд, граф Бабблсортер, решил познакомиться со своими подданными. Число жителей в графстве нечетно и составляет n, где n может быть достаточно велико, поэтому граф решил ограничиться знакомством с тремя представителями народонаселения: с самым бедным жителем, с жителем, обладающим средним достатком, и с самым богатым жителем.

Согласно традициям Сортлэнда, считается, что житель обладает средним достатком, если при сортировке жителей по сумме денежных сбережений он оказывается ровно посередине. Известно, что каждый житель графства имеет уникальный идентификационный номер, значение которого расположено в границах от единицы до n. Информация о размере денежных накоплений жителей хранится в массиве M таким образом, что сумма денежных накоплений жителя, обладающего идентификационным номером i, содержится в ячейке $M[i]$. Помогите секретарю графа мистеру Свопу вычислить идентификационные номера жителей, которые будут приглашены на встречу с графом.

- **Формат входного файла (input.txt).** Первая строка входного файла содержит число жителей n ($3 \leq n \leq 9999$, n нечетно). Вторая строка содержит описание массива M, состоящее из положительных вещественных чисел, разделенных пробелами. Гарантируется, что все элементы массива M различны, а их значения имеют точность не более двух знаков после запятой и не превышают 10^6.

- **Формат выходного файла (output.txt).** В выходной файл выведите три целых положительных числа, разделенных пробелами — идентификационные номера беднейшего, среднего и самого богатого жителей Сортлэнда.

- Пример:

input.txt	output.txt
5 10.00 8.70 0.01 5.00 3.00	3 4 1

Если отсортировать жителей по их достатку, получится следующий массив:

$$[0.01, 3][3.00, 5][5.00, 4][8.70, 2][10.00, 1]$$

Здесь каждый житель указан в квадратных скобках, первое число — его достаток, второе число — его идентификационный номер. Таким образом, самый бедный житель имеет номер 3, самый богатый — номер 1, а средний — номер 4.

- Ограничение по времени. 2 сек.
- Ограничение по памяти. 256 мб.

8 задача. Секретарь Своп

Дан массив, состоящий из n целых чисел. Вам необходимо его отсортировать по неубыванию. Но делать это нужно так же, как это делает мистер Своп — то есть, каждое действие должно быть взаимной перестановкой пары элементов. Вам также придется записать все, что Вы делали, в файл, чтобы мистер Своп смог проверить Вашу работу.

- **Формат входного файла (input.txt).** В первой строке входного файла содержится число n ($3 \leq n \leq 5000$) — число элементов в массиве. Во второй строке находятся n целых чисел, по модулю не превосходящих 10^9. Числа могут совпадать друг с другом.
- **Формат выходного файла (output.txt).** В первых нескольких строках выведите осуществленные Вами операции перестановки элементов. Каждая строка должна иметь следующий формат:

  `Swap elements at indices X and Y.`

  Здесь X и Y — различные индексы массива, элементы на которых нужно переставить ($1 \leq X, Y \leq n$). Мистер Своп любит порядок, поэтому сделайте так, чтобы $X < Y$.

  После того, как все нужные перестановки выведены, выведите следующую фразу:

  `No more swaps needed.`

- Пример:

input.txt	output.txt
5 3 1 4 2 2	Swap elements at indices 1 and 2. Swap elements at indices 2 and 4. Swap elements at indices 3 and 5. No more swaps needed.

- Ограничение по времени. 1 сек.
- Ограничение по памяти. 256 мб.

Семья секретаря Свопа занималась сортировками массивов, и именно с помощью перестановок пар элементов, как минимум с XII века, поэтому все Свопы владеют этим искусством в совершенстве. Мы не просим Вас произвести минимальную последовательность перестановок, приводящую к правильному ответу. Однако учтите, что для вывода слишком длинной последовательности у Вашего алгоритма может не хватить времени (или памяти — если выводимые строки хранятся в памяти перед выводом). Подумайте, что с этим можно сделать. Решение существует!

9 задача. Сложение двоичных чисел

Расмотрим задачу сложения двух n-битовых двоичных целых чисел, хранящихся в n-элементных массивах A и B. Сумму этих двух чисел необходимо занести в двоичной форме в $(n+1)$-элементный массив C. Напишите скрипт для сложения этих двух чисел.

- **Формат входного файла (input.txt).** В одной строке содержится два n-битовых двоичных числа, записанные через пробел ($1 \leq n \leq 10^3$)
- **Формат выходного файла (output.txt).** Одна строка - двоичное число, которое является суммой двух чисел из входного файла.
- Оцените асимптотическое время выполнение вашего алгоритма.

10 задача★. Палиндром

Палиндром - это строка, которая читается одинаково как справа налево, так и слева направо.

На вход программы поступает набор больших латинских букв (не обязательно различных). Разрешается переставлять буквы, а также удалять некоторые буквы. Требуется из данных букв по указанным правилам составить палиндром наибольшей длины, а если таких палиндромов несколько, то выбрать первый из них в алфавитном порядке.

- **Формат входного файла (input.txt).** В первой строке входных данных содержится число n ($1 \leq n \leq 100000$). Во второй строке задается последовательность из n больших латинских букв (буквы записаны без пробелов).
- **Формат выходного файла (output.txt).** В единственной строке выходных данных выдайте искомый палиндром.
- Пример:

input.txt	output.txt
5 AAB	ABA
6 QAZQAZ	AQZZQA
6 ABCDEF	A

- Ограничение по времени. 1сек.
- Ограничение по памяти. 64 мб.