# Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

(национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»	
КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»	

# Отчёт по лабораторной работе № 6 по курсу «Анализ алгоритмов»

Тема	Методы решения задачи коммивояжёра
Студе	ент Гаврилюк В. А.
Групп	па_ИУ7-51Б
Оцен	ка (баллы)
	одаватель Волкова Л. Л.

# СОДЕРЖАНИЕ

$\mathbf{B}$	ВЕД	ЕНИЕ	3
1	Ана	алитический раздел	4
	1.1	Метод полного перебора	4
	1.2	Муравьиный алгоритм	4
	1.3	Карта местности	6
<b>2</b>	Koı	нструкторский раздел	7
	2.1	Требования к входным и выходным параметрам	7
	2.2	Метод полного перебора	7
	2.3	Муравьиный алгоритм	9
	2.4	Оценка трудоёмкости	13
		2.4.1 Модель вычислений	13
		2.4.2 Трудоёмкость метода полного перебора	13
		2.4.3 Трудоёмкость муравьиного алгоритма	14
3	Tex	нологический раздел	17
	3.1	Средства реализации	17
	3.2	Реализация метода полного перебора	17
	3.3	Реализация муравьиного алгоритма	19
4	Исо	следовательский раздел	22
	4.1	Технические характеристики	22
	4.2	Параметризация муравьиного алгоритма	22
	4.3	Проведение исследования	23
34	<b>АК</b> Л	ЮЧЕНИЕ	26
$\mathbf{C}$	ПИС	ОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	27

# ВВЕДЕНИЕ

**Цель лабораторной работы** — исследование методов решения задачи коммивояжёра: метода полного перебора и муравьиного алгоритма.

Для достижения поставленной цели необходимо выполнить следующие задачи:

- построить схемы для алгоритма на основе полного перебора и муравьиного алгоритма;
- выполнить оценку трудоёмкости данных алгоритмов;
- создать программное обеспечение (ПО), реализующее перечисленные выше алгоритмы;
- провести параметризацию для муравьиного алгоритма;
- провести сравнение затрат процессорного времени на работу алгоритмов.

#### 1 Аналитический раздел

В данном разделе будут рассмотрены метод полного перебора и муравьиный алгоритм для решения задачи коммивояжёра, а также описаны изменения стоимости перехода по метке дуги на различной местности.

#### 1.1 Метод полного перебора

Метод полного перебора для решения задачи коммивояжёра представляет собой алгоритм, который перебирает все возможные пути между вершинами графа и выбирает путь с минимальной стоимостью. Точный переборный алгоритм решения данной задачи имеет факториальную сложность [1], но при этом гарантирует нахождение оптимального решения.

#### 1.2 Муравьиный алгоритм

Идея муравьиного алгоритма заключается в моделировании поведения муравьев, связанного с их способностью находить кратчайший путь от муравейника к источнику пищи и адаптироваться к изменяющимся условиям, находя новый кратчайший путь [1].

В данном алгоритме вводятся следующие локальные правила поведения муравьев при выборе пути [1]:

- муравьи имеют собственную «память». Поскольку каждый город может быть посещён только один раз, у каждого муравья сеть список уже посещённых городов — список запретов.
- муравьи обладают «зрением» видимость есть эвристическое желание посетить город j, если муравей находится в городе i. Видимость вычисляется по следующей формуле:

$$\eta_{ij} = \frac{1}{D_{ij}},\tag{1.1}$$

где  $D_{ij}$  — расстояние между городами i и j;

— муравьи обладают «обонянием» — они могут улавливать след феромона, подтверждающий желание посетить город j из города i, на основании опыта других муравьев.

Вероятность перехода k-го муравья из города i в город j определяется формулой [1]:

$$\begin{cases}
P_{ij,k}(t) = \frac{[\tau_{ij}(t)]^{\alpha} \cdot [\eta_{ij}]^{\beta}}{\sum_{l \in J_{i,k}} [\tau_{il}(t)]^{\alpha} \cdot [\eta_{il}]^{\beta}}, & j \in J_{i,k} \\
P_{ij,k}(t) = 0, & j \notin J_{i,k},
\end{cases}$$
(1.2)

где  $\tau_{ij}(t)$  — количество феромона на ребре (i,j) в момент времени t,  $J_{i,k}$  — список городов, которые необходимо посетить муравью k, находящемуся в городе i,  $\alpha,$   $\beta$  — параметры, задающие веса следа феромона.

Откладываемое количество феромона муравьев после прохождения ребра (i,j) вычисляется по формуле 1.3, где  $T_k(t)$  — маршрут, пройденный муравьём k к моменту времени t, а  $L_k(t)$  — длина этого маршрута. В начале алгоритма количество феромона на рёбрах принимается равным небольшому положительному числу [1].

$$\Delta \tau_{ij,k}(t) = \begin{cases} \frac{Q}{L_k(t)}, & (i,j) \in T_k(t); \\ 0, & (i,j) \notin T_k(t). \end{cases}$$

$$(1.3)$$

Испарение феромона вычисляется по формуле:

$$\tau_{ij}(t+1) = (1-p) \cdot \tau_{ij}(t) + \Delta \tau_{ij}(t), \quad \Delta \tau_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{m} \tau_{ij,k}(t), \quad (1.4)$$

где m — количество муравьев в колонии, а  $p \in [0,1]$  — коэффициент испарения.

Если в колонии есть «элитные» муравьи, которые усиливают ребра наилучшего маршрута, найденного с начала работы алгоритма, ребра маршрута получат дополнительное количество феромона, вычисляемое по формуле

$$\Delta \tau_e = e \cdot Q/L^*, \tag{1.5}$$

где  $L^*$  — длина наилучшего текущего маршрута  $T^*$ .

# 1.3 Карта местности

Согласно варианту необходимо учесть изменение стоимости перемещения при различных условиях окружающей среды: по воде перемещение быстрее, а по пустыне медленнее (относительно некоторой стандартной, обыкновенной местности). Таким образом, были заданы следующие правила изменения стоимости перемещения:

- перемещение по воде (Water) стоимость перехода уменьшается на 50%;
- перемещение по земле (Land) стоимость перехода остаётся неизменной;
- перемещение по пустыне (Desert) стоимость перехода увеличивается на 30%.

# 2 Конструкторский раздел

В данном разделе будут приведены требования к входным, выходным параметрам и представлены схемы для алгоритма решения задачи коммивояжёра методом полного перебора и муравьиного алгоритма.

### 2.1 Требования к входным и выходным параметрам

Требования к входным и выходным параметрам:

- в качестве входных параметров алгоритм принимает матрицу смежности;
- матрица смежности должна соответствовать полносвязному графу;
- выходными параметрами являются массив вершин и число кратчайший из найденных маршрутов (маршрут незамкнутый) и его стоимость соответственно.

#### 2.2 Метод полного перебора

На рисунке 2.1 представлена схема алгоритма решения задачи коммиво-яжёра методом полного перебора.

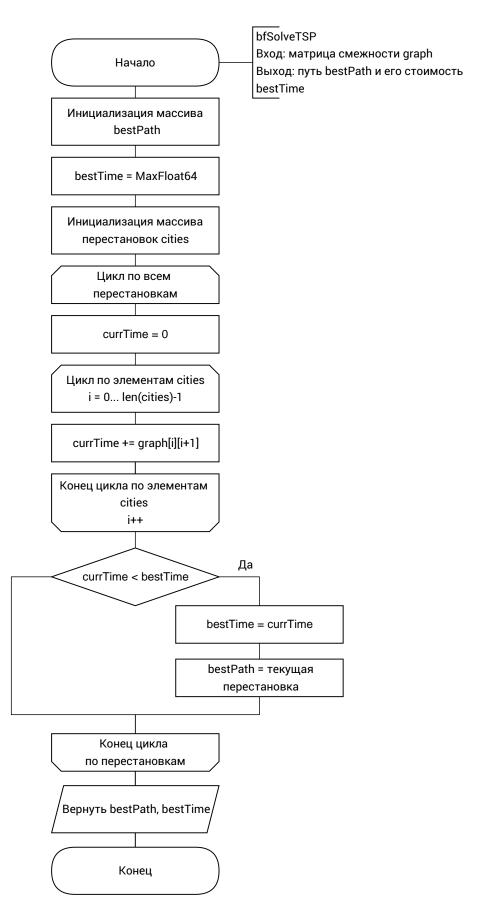


Рисунок 2.1 – Схема метода полного перебора

#### 2.3 Муравьиный алгоритм

На рисунке 2.2 представлена схема муравьиного алгоритма.

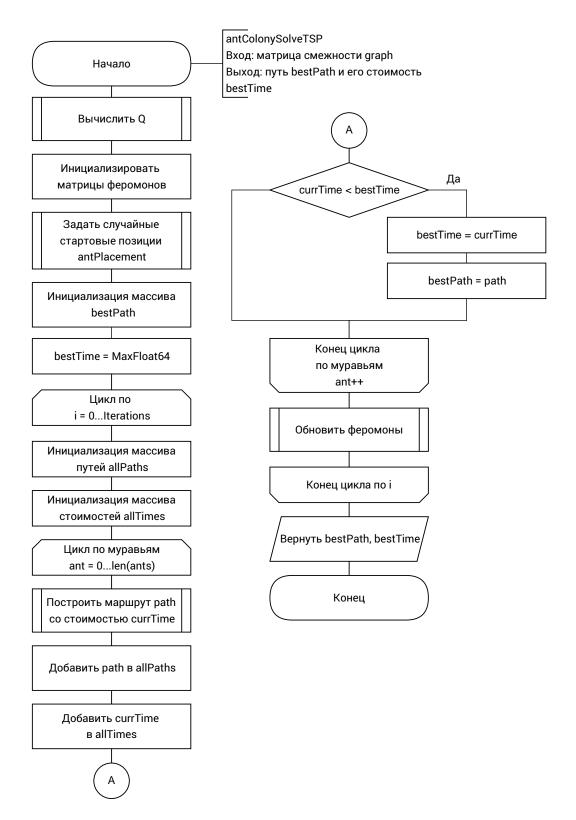


Рисунок 2.2 – Схема муравьиного алгоритма

На рисунках 2.3—2.5 представлены схемы вспомогательных алгоритмов,

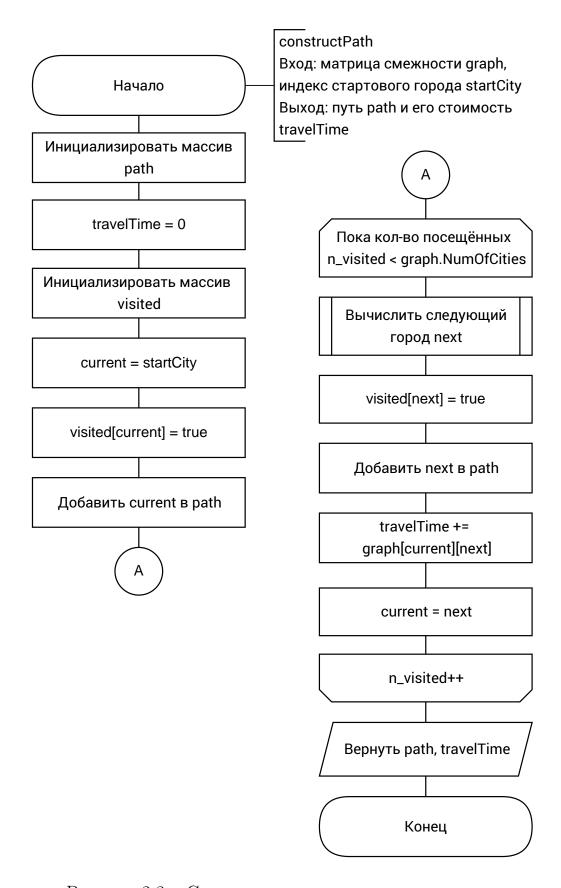


Рисунок 2.3 – Схема алгоритма создания маршрута

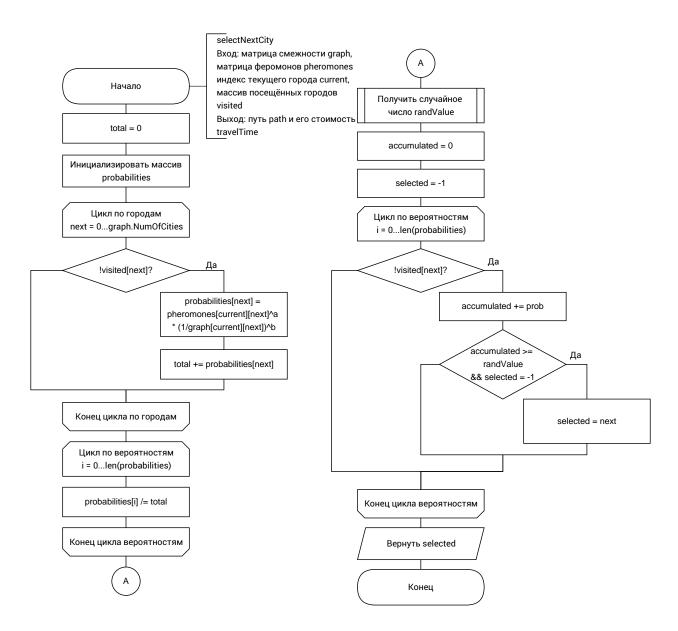


Рисунок 2.4 – Схема алгоритма выбора следующего города

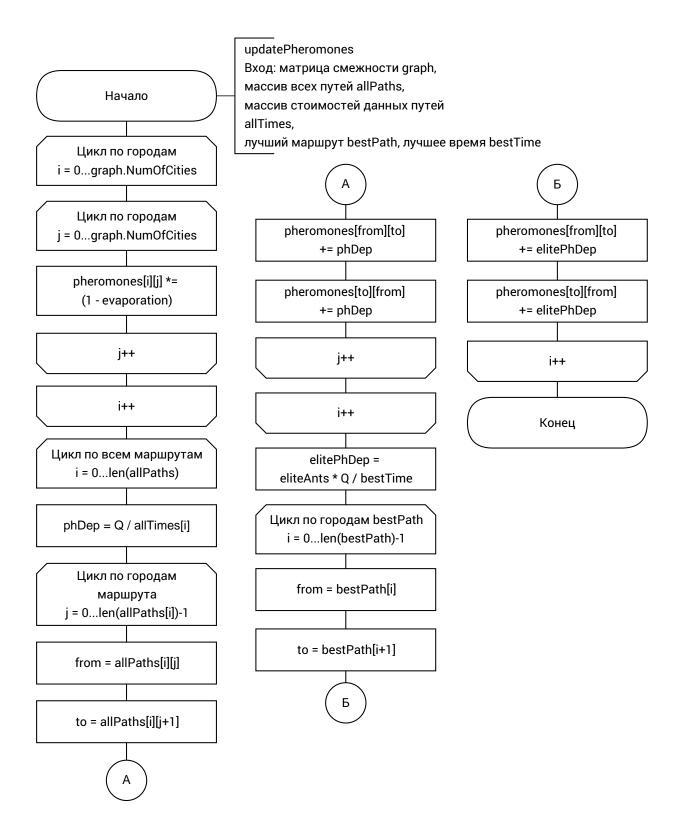


Рисунок 2.5 – Схема алгоритма обновления феромонов

#### 2.4 Оценка трудоёмкости

#### 2.4.1 Модель вычислений

Операции, имеющие единичную стоимость:

$$+, -, =, + =, - =, ==, ! =, <, >, <=, >=, [idx], ++, --,$$
  
&&, >>, <<, ||, &, |

Операции, имеющие двойную стоимость:

$$*,/,\%, *=,/=,\%=,len()$$
 (2.2)

Стоимость операции возведения в степень будет оцениваться в 3 единицы.

Трудоёмкость условного оператора:

$$f_{if} = f_{\text{условия}} + \begin{cases} \min(f_1, f_2), & \text{лучший случай} \\ \max(f_1, f_2), & \text{худший случай} \end{cases}$$
 (2.3)

Трудоёмкость цикла:

$$f_{loop} = f_{\text{инициализация}} + f_{\text{сравнения}} + N \times (f_{\text{тело}} + f_{\text{инкремент}} + f_{\text{сравнения}})$$

$$(2.4)$$

Трудоёмкость вызова функции равна нулю.

#### 2.4.2 Трудоёмкость метода полного перебора

Стоимость инициализации переменных:

$$f_{init} = n + 1 + 1 + 1 + n(1 + 1 + 2) = 3 + n + 4n = 3 + 5n$$
 (2.5)

Стоимость основного цикла по всем перестановкам рассчитывается по формуле (2.6).

$$f_{loop} = 2 + n!(2 + f_{bodu}) (2.6)$$

Трудоёмкость  $f_{body}$  можно рассчитать по формуле 2.7.

$$f_{body} = 1 + 1 + 1 + (n-1)(1+1+4) + f_{check}$$
(2.7)

Трудоёмкость  $f_{check}$  рассчитывается по формуле 2.8

$$1 + \begin{cases} 0, & \text{лучший случай (bestTime} <= \text{currTime}), \\ 2 & \text{худший случай (bestTime} > \text{currTime}). \end{cases}$$
 (2.8)

Итоговая трудоёмкость в лучшем случае рассчитывается по формуле (2.9).

$$f = f_{init} + f_{loop} = 3 + 5n + 2 + n!(2 + f_{body}) =$$

$$5 + 5n + n!(5 + (n - 1) \cdot 6) + 1) =$$

$$6 + 5n + n!(6n - 1) \approx O(n! \cdot n)$$
(2.9)

Итоговая трудоёмкость в худшем случае рассчитывается по формуле (2.10).

$$f = f_{init} + f_{loop} = 3 + 5n + 2 + n!(2 + f_{body}) =$$

$$5 + 5n + n!(5 + (n - 1) \cdot 6) + 3) =$$

$$6 + 5n + n!(6n + 2) \approx O(n! \cdot n)$$
(2.10)

# 2.4.3 Трудоёмкость муравьиного алгоритма

Стоимость инициализации переменных:

$$f_{init} = 3 + n(4+3n) + 2 + 3n = 5 + 7n + 3n^{2}$$
(2.11)

Пусть k — количество итераций алгоритма. Тогда стоимость основного цикла в муравьином алгоритме вычисляется по формуле (2.12).

$$f_{loop} = 1 + 1 + k(6 + n(1 + 1 + f_{path} + 1 + 1 + f_{check}) + f_{upd\_pheromones})$$
(2.12)

В формуле (2.12)  $f_{path}$  — стоимость построения маршрута муравья,  $f_{check}$  — стоимость проверки и обновления лучшего найденного пути и  $f_{upd\_pheromones}$  — стоимость обновления феромонов с учётом испарения и добавления феро-

монов обычными и элитными муравьями. Данные стоимости вычисляются с помощью формул 2.14—2.16. Стоимость выбора следующего города при построении маршрута вычисляется по формуле 2.13:

$$f_{select\_next} = 4 + n(20 + 2) + 2 + 4n + 5 + n(1 + 1 + 5) =$$

$$11 + 22n + 4n + 7n = 11 + 33n$$
(2.13)

$$f_{path} = 7 + 1 + 1 + n(1 + 1 + f_{select\_next} + 2 + 1 + 3 + 1 + 1) = 9 + n(10 + f_{select\_next}) = 9 + n(10 + 11 + 33n) = 9 + 21n + 33n^{2}$$
(2.14)

Формула для обновления лучшего результата  $ant\_check$  совпадает с формулой 2.8 в алгоритме полного перебора:

$$f_{ant\_check} = 1 + \begin{cases} 0, & \text{лучший случай (bestTime} <= \text{currTime}), \\ 2 & \text{худший случай (bestTime} > \text{currTime}). \end{cases}$$
 (2.15)

$$f_{upd\_pheromones} = 11 + 4n + 7n^2 + n(7 + 13n - 13) + 7 + 14(n - 1) = 11 + 4n + 7n^2 - 6 + 13n + 14n - 11 = -2 + 31n + 7n^2$$
(2.16)

Итоговая трудоёмкость муравьиного алгоритма в худшем случае вычисляется по формуле (2.17).

$$f = f_{init} + f_{loop} = 7 + 6k + 7n + 3n^{2}$$

$$+16nk + 21n^{2}k + 33n^{3}k \approx 33n^{3}k = O(n^{3}k)$$
(2.17)

В лучшем случае трудоёмкость алгоритма составляет:

$$f = f_{init} + f_{loop} = 7 + 6k + 7n + 3n^{2}$$

$$+13nk + 21n^{2}k + 33n^{3}k \approx 33n^{3}k = O(n^{3}k)$$
(2.18)

#### Вывод

В данном разделе были приведены схемы алгоритмов решения задачи коммивояжёра: на основе полного перебора и муравьиного алгоритма. В рамках модели вычислений, определённой в подразделе 2.4.1, алгоритм на

основе полного перебора обладает факториальной сложностью, а муравьиный алгоритм —  $O(n^3k)$ .

#### 3 Технологический раздел

В данном разделе будет представлена реализация муравьиного алгоритма и метода полного перебора для решения задачи коммивояжёра.

#### 3.1 Средства реализации

Для реализации был выбран язык программирования Golang [2]. Выбор обусловлен наличием функций для измерения времени работы time.Now и time.Since в библиотеке time.

#### 3.2 Реализация метода полного перебора

В листинге 3.1 представлена реализация алгоритма решения задачи коммивояжёра методом полного перебора.

Листинг 3.1 – Реализация метода полного перебора

```
func (b *BruteForceSolver) SolveTSP(graph *graphmap.Graph)
   ([]int, float64) {
    if graph.NumOfCities < 1 {
        return []int{}, 0
    if graph.NumOfCities == 1 {
        return []int{0}, 0
    }
    b.graph = graph
    cities := make([]int, graph.NumOfCities)
    for i := range cities {
        cities[i] = i
    bestPath := []int{}
    bestTime := math.MaxFloat64
    permute(cities, func(path []int) {
        travelTime := b.calculateTravelTime(path)
        if travelTime < bestTime {</pre>
            bestTime = travelTime
            bestPath = make([]int, len(path))
            copy(bestPath, path)
        }
    })
    return bestPath, bestTime
}
```

```
func (b *BruteForceSolver) calculateTravelTime(route []int)
  float64 {
    var distance float64
    for i := 0; i < len(route)-1; i++ {
        distance += b.graph.GetTimeOnTerrain(route[i],
           route[i+1])
    }
    return distance
}
func permute(arr []int, callback func([]int)) {
    var generate func([]int, int)
    generate = func(a []int, n int) {
        if n == 1 {
            callback(a)
            return
        }
        for i := 0; i < n; i++ {
            generate(a, n-1)
            if n%2 == 1 {
                a[0], a[n-1] = a[n-1], a[0]
            } else {
                a[i], a[n-1] = a[n-1], a[i]
            }
        }
    }
    generate(arr, len(arr))
}
```

# 3.3 Реализация муравьиного алгоритма

В листингах 3.2-3.5 продемонстрирована реализация муравьиного алгоритма.

Листинг 3.2 – Основная функция муравьиного алгоритма

```
func (c *Colony) SolveTSP(graph *graphmap.Graph) ([]int,
  float64) {
    if graph.NumOfCities < 1 {
        return []int{}, 0
    }
    if graph.NumOfCities == 1 {
        return []int{0}, 0
    c.graph = graph
    c.setQ()
    c.initPheromones()
    antPlacement := c.randomAntPlacement()
    bestPath := []int{}
    bestTime := math.MaxFloat64
    for range c.params. Iterations {
        allPaths := make([][]int, 0, c.graph.NumOfCities)
        allTimes := make([]float64, 0, c.graph.NumOfCities)
        for antStartCity := range antPlacement {
            path, travelTime := c.constructPath(antStartCity)
            allPaths = append(allPaths, path)
            allTimes = append(allTimes, travelTime)
            if travelTime < bestTime {</pre>
                bestPath = path
                bestTime = travelTime
            }
        }
        c.updatePheromones(allPaths, allTimes, bestPath,
           bestTime)
    }
    return bestPath, bestTime
}
```

#### Листинг 3.3 – Функция построения пути

```
func (c *Colony) constructPath(startCity int) ([]int, float64) {
   path := []int{}
    var travelTime float64
    visited := make(map[int]struct{}, c.graph.NumOfCities)
    current := startCity
    visited[current] = struct{}{}
    path = append(path, current)
    for len(visited) < c.graph.NumOfCities {</pre>
        next := c.selectNextCity(current, visited)
        if next == -1 {
            break
        visited[next] = struct{}{}
        path = append(path, next)
        travelTime += c.graph.GetTimeOnTerrain(current, next)
        current = next
    }
    return path, travelTime
}
```

#### Листинг 3.4 – Функция выбора следующего города

```
func (c *Colony) selectNextCity(current int, visited
  map[int]struct{}) int {
    var total float64
    probabilities := make([]float64, c.graph.NumOfCities)
    for next := range c.graph.NumOfCities {
        if _, ok := visited[next]; ok {
            continue
        }
    probabilities[next] = math.Pow(c.pheromones[current][next],
      c.params.Alpha)
    * math.Pow(1.0/float64(c.graph.TravelTime[current][next]),
      c.params.Beta)
        total += probabilities[next]
    for i := range probabilities {
        probabilities[i] /= total
    randValue := random.Float64()
```

```
accumulated := 0.0
for next, prob := range probabilities {
    if _, ok := visited[next]; ok {
        continue
    }
    accumulated += prob
    if accumulated >= randValue {
        return next
    }
}
return -1
}
```

Листинг 3.5 – Функция обновления феромонов с учётом испарения и элитных муравьев

```
func (c *Colony) updatePheromones(allPaths [][]int, allTimes
   []float64, bestPath []int, bestTime float64) {
    for i := range c.pheromones {
        for j := range c.pheromones[i] {
            c.pheromones[i][j] *= (1 - c.params.Evaporation)
        }
    for i := range allPaths {
        pheromoneDeposit := c.params.q / float64(allTimes[i])
        for j := 0; j < len(allPaths[i])-1; j++ {
            from, to := allPaths[i][j], allPaths[i][j+1]
            c.pheromones[from][to] += pheromoneDeposit
            c.pheromones[to][from] += pheromoneDeposit
        }
    elitePheromoneDeposit := float64(c.params.EliteAnts) *
      c.params.q / float64(bestTime)
    for i := 0; i < len(bestPath)-1; i++ {
        from, to := bestPath[i], bestPath[i+1]
        c.pheromones[from][to] += elitePheromoneDeposit
        c.pheromones[to][from] += elitePheromoneDeposit
    }
}
```

# 4 Исследовательский раздел

#### 4.1 Технические характеристики

Исследование проводилось на ЭВМ со следующими характеристиками:

- операционная система Ubuntu 22.04.5 LTS;
- объем оперативной памяти 16 ГБ;
- процессор Intel Core i7-8700K CPU  $3.70\Gamma\Gamma\mu \times 12$  [3].

#### 4.2 Параметризация муравьиного алгоритма

Выполнена параметризация муравьиного алгоритма по трём параметрам:  $\alpha$ ,  $\beta$  и коэффициенту испарения феромонов p. В качестве критерия качества получаемого решения были использованы максимальное, медианное и среднее арифметическое значения отклонения затрат полученного маршрута от эталонного значения. Эталонные значения были получены в результате применения алгоритма на основе полного перебора.

Параметризация проводилась на трёх полносвязных графах с 11 вершинами с одинаковыми значениями математического ожидания и разбросом значений меток дуг графа. Для каждого графа для каждого варианта сочетания параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\rho$  было выполнено 10 запусков. Значения параметров выбирались из списка значений:

$$0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9.$$
 (4.1)

На основе результатов параметризации можно выделить следующие комбинации параметров, при которых один из критериев качества является минимальным:

- по максимальному отклонению:  $\alpha = 0.9, \beta = 0.9, \rho = 0.1$
- по медианному отклонению:  $\alpha = 0.5, \beta = 0.9, \rho = 0.7$
- по среднему арифметическому отклонению:  $\alpha = 0.9, \beta = 0.9, \rho = 0.1$

Полная таблица, полученная в результате параметризации, находится в приложении А.

# 4.3 Проведение исследования

Было проведено исследование зависимости времени работы алгоритмов решения задачи коммивояжёра от количества городов (вершин во входном графе). Для каждого размера были сгенерировано 10 случайных матриц смежности и было проведено 10 замеров времени. Измерение времени проводилось с помощью функций *time.Now* и *time.Since* из библиотеки *time*. В таблице 4.1 приведены результаты замера процессорного времени работы алгоритмов.

Таблица 4.1 – Зависимость времени работы алгоритмов от количества вершин в графе

Кол-во вершин	Полный перебор,	Муравьиный алго-
	мкс	ритм, мкс
3	7.097	1,890.857
4	5.921	1,950.345
5	23.305	2,940.739
6	185.098	4,507.259
7	1,361.954	7,030.611
8	12,881.386	10,118.585
9	126,270.046	15,486.321
10	1,407,765.411	20,927.566
11	17,253,809.982	27,470.175
12	225,634,368,708.000	36,125.691

На рисунках 4.1 и 4.2 продемонстрированы графики, построенные на основе табличных данных.

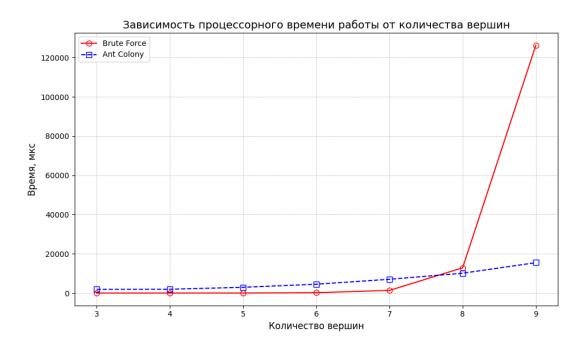


Рисунок 4.1 – Зависимость процессорного времени работы алгоритмов от количества вершин (линейная шкала)

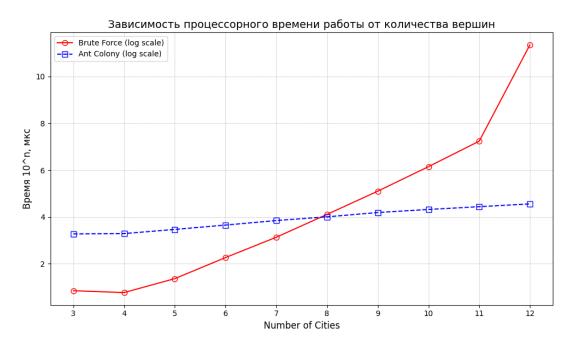


Рисунок 4.2 – Зависимость процессорного времени работы алгоритмов от количества вершин (логарифмическая шкала)

# Вывод

По результатам, полученным при параметризации муравьиного алгоритма, было установлено, что точность алгоритма зависит от выбранных параметров и класса данных, на котором выполняется параметризация. Т.е.

для каждой конкретной задачи и типа данных необходимо подбирать и вычислять индивидуальные параметры для муравьиного алгоритма.

Наименьшие значения отклонения для выбранного класса данных достигаются при следующих параметрах:

$$\alpha = 0.9, \beta = 0.9, \rho = 0.1;$$
  
 $\alpha = 0.5, \beta = 0.9, \rho = 0.7.$  (4.2)

В рамках исследования процессорного времени работы алгоритмов было выявлено, что при количестве вершин, меньшем 8, алгоритм на основе полного перебора обладает меньшими временными затратами.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе результатов параметризации было установлено, что для каждой конкретной задачи и типа данных необходимо подбирать и вычислять индивидуальные параметры для муравьиного алгоритма.

Наименьшие значения отклонения от эталонного значения для выбранного класса данных достигаются при следующих параметрах:  $\alpha=0.9, \beta=0.9, \rho=0.1$  и  $\alpha=0.5, \beta=0.9, \rho=0.7$ .

Исследование процессорного времени работы подтвердило теоретические расчёты трудоёмкости алгоритмов решения задачи коммивояжёра. Также в рамках исследования было выявлено, что при количестве вершин, меньшем 8, алгоритм на основе полного перебора обладает меньшими временными затратами.

В рамках лабораторной работы:

- были построены схемы для алгоритма на основе полного перебора и муравьиного алгоритма;
- была выполнена оценка трудоёмкости данных алгоритмов;
- создано программное обеспечение (ПО), реализующее перечисленные выше алгоритмы;
- произведена параметризацию для муравьиного алгоритма;
- произведено сравнение затрат процессорного времени на работу алгоритмов.

Все задачи выполнены. Цель лабораторной работы достигнута.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1. Ульянов A. Ресурсно-эффективные компьютерные алгоритмы. Разработка и анализ. Москва : Наука, 2010.
- 2. The Go Programming Language [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://go.dev/ (дата обращения: 5.12.2024).
- 3. Intel Core i7-8700K Processor [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://ark.intel.com/content/www/us/en/ark/products/126775/intel-core-i78700k-processor-12m-cache-up-to-4-70-ghz.html (дата обращения: 5.12.2024).