厄米特矩阵和矩阵范数[24-9-15]

1. 矩阵的共轭矩阵

即矩阵的所有元素取其共轭复数构成的方阵，以下矩阵A 的共轭矩阵$\overline{A}$如下：

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1+2i & 3-4i \\ 5i & 2-3i \end{pmatrix} \\ \overline{A} &= \begin{pmatrix} 1-2i & 3+4i \\ -5i & 2+3i \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1}$$

2. 埃尔米特矩阵

$A^H = (\overline{A})^T$：即矩阵先取共轭再转置

$$A^H = \begin{pmatrix} 1-2i & -5i \\ 3+4i & 2+3i \end{pmatrix} \tag{2}$$

若$A^H = A$，则称A为埃尔米特矩阵。

2.1 埃尔米特矩阵的性质

- 主对角上的元素都是实数
- 特征值都是实数，并且不同的特征值对应的特征向量是正交的
- 可以被酉矩阵对角化，即存在一个酉矩阵U使得U^HAU是一个对角阵，对角线上的元素是A的特征值。

2.2 厄米特矩阵运算

- $(Ax)^H = x^HA^H$
- $||Ax||_2 = \sqrt{x^HA^HAx}$
- 在复数域上的讨论将A^T换作A^H

3. 酉矩阵

3.1 定义

当矩阵U满足$U^HU = UU^H = I$时，矩阵U称为酉矩阵。

3.2 性质

- 逆矩阵：$U^{-1} = U^H$

3.3 向量的2范数在酉变换下不变

即矩阵U为酉矩阵，$y = Ux$，则$||y||_2 = ||x||_2$：

【证明】

$||y||_2 = \sqrt{y^Hy} = \sqrt{x^HU^HUx} = \sqrt{x^Hx} = ||x||_2$

矩阵范数

1. $||A||_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^HA)}$

$$||A||_2=\max_{x\neq 0}\frac{||Ax||_2}{||x||_2}=\max_{x\neq 0}\frac{\sqrt{x^HA^HAx}}{||x||_2}\overset{A^HA\text{为埃尔米特矩阵},U\text{为酉矩阵}}{=}\max_{x\neq 0}\frac{\sqrt{x^HU^H\Lambda Ux}}{||x||_2}$$

$$\overset{\text{由于向量2范数在酉变换下不变}}{=}\max_{x\neq 0}\frac{\sqrt{(Ux)^H\Lambda(Ux)}}{||Ux||_2}\overset{y=Ux}{=}\max_{y\neq 0}\frac{\sqrt{y^H\Lambda y}}{||y||_2}=\max_{y\neq 0}\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2\lambda_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}}\overset{\lambda_i\geq 0,A^HA\text{半正定},\lambda_k=\max_{1\leq i\leq n}\lambda_i}{\leq}\sqrt{\lambda_k}$$

不妨令$y_k=1,y_i=0$，即上界可取。

2. $||A||_1=\max_j||a_{.j}||_1$——列和范数

$||A||_1\overset{A=(a_1,...,a_n)}{=}\max_{x\neq 0}\frac{||\sum_{i=1}^n a_jx_j||_1}{||x||_1}\overset{\text{三角不等式、齐次性}}{\leq}\max_{x\neq 0}\frac{\sum_{j=1}^n ||a_j||_1|x_j|}{||x||_1}\overset{||a_k||_1=\max_j||a_j||_1}{\leq}||a_k||_1$

不妨令$x_k=1,x_i=0$，即上界可取。

3. $||A||_\infty=\max_i||a_{i.}||_1$——行和范数

> 分块矩阵的转置：整体转置后分块还需转置

$||Ax||_\infty\overset{A=(a_1,...,a_n)^T,x\neq 0}{=}\max_{1\leq i\leq n}(a_i^Tx)=\max_{1\leq i\leq n}(|\sum_{1\leq j\leq n}a_{ij}x_j|)\leq\max_{1\leq i\leq n}(\sum_{j=1}^n|a_{ij}||x_j|)\leq(\max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^n|a_{ij}|)||x||$

即有$\frac{||Ax||_\infty}{||x||_\infty}\leq\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^n|a_{ij}|$

假设$\sum_{j=1}^n|a_{kj}|=\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^n|a_{ij}|$，令$x_j=\text{sign}(a_{kj})$，则上界可取。

4. Frobenius 范数

4.1 定义

$$||A||_F=\sqrt{\sum_{i,j}|a_{ij}|^2}=\sqrt{\text{tr}\,(A^HA)} \tag{3}$$

4.2 性质

- $||PAQ||_F=||A||_F,P,Q$均为酉矩阵
- $||PAQ||_2=||A||_2$

5. $||A^{-1}||=\frac{1}{\min_{y\neq 0}\frac{||Ay||}{||y||}}$

【证明】

不妨令$x=A^{-1}y$，则$||A||=\max_{x\neq 0}\frac{||Ax||}{||x||}=\max_{y\neq 0}\frac{||AA^{-1}y||}{||A^{-1}y||}=\max_{y\neq 0}\frac{||y||}{||A^{-1}y||}=\frac{1}{\min_{y\neq 0}\frac{||A^{-1}y||}{||y||}}$，即证。