范数的初步了解

1. 范数的性质(norm)

$||\cdot||:\mathbb{C}^n\rightarrow\mathbb{R}$，下述$x,y\in\mathbb{C}^n$

- (非负性)：$||x||\geq 0$，等号当且仅当$x=0$
- (齐次性)：$||\alpha x||=|\alpha|||x||,\forall\alpha\in\mathbb{C}$
- (三角不等式)：$||x+y||\leq||x||+||y||$

2. 范数名称的来源

用于刻画某种长度与模长相像

3. p-范数(p-norm)：$||x||_p$

$||x||_p=\sqrt[p]{|x_1|^p+\ldots+|x_n|^p},p\geq 1$：1-范数：Taxicab/Manhattan norm

$||x||_1=|x_1|+\ldots+|x_n|$：欧几里德范数

$||x||_2=\sqrt{|x_1|^2+\ldots+|x_n|^2}=\sqrt{x^Hx}$

> 上式中的x^H表示x向量的Hermitian转置，其定义如下：
>
> 其中 x_i（对于 i=1,2,...,n）是复数，那么 x^H（x的共轭转置）是一个 1× n的复数向量，其元素是 x 中元素的共轭复数并按行排列

$\lim_{p\rightarrow\infty}||x||_p=\max_{1\leq i\leq n}|x_i|$

> 可由夹逼定理进行证明：定义 $M=\max_{1\leq i\leq n}|x_i|$，易得 $||x||_p\overset{\text{由}M\text{的定义得}}{\leq}(\sum_{i=1}^n M^p)^{\frac{1}{p}}=(n)^{\frac{1}{p}}M$，对另一方向分析如下：$||x||_p\geq(M^p)^{\frac{1}{p}}$，即有不等式：$M\leq||x||_p\leq(n)^{\frac{1}{p}}M$，由两边求极限可得 $\lim_{p\rightarrow\infty}||x||_p=M=\max_{1\leq i\leq n}|x_i|$