Homework:

For the optimization problem

$$min\frac{1}{2}\left||\beta|\right|^2+C\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

subject to $y_i(\beta_0+x^T\beta)+\xi_i\geq 1,\xi_i\geq 0,i=1,\dots,n$

derive the dual maximization problem:

$$F_D(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j y_i y_j x_i^T x_j$$

subject to: $0\leq\alpha_i\leq C,\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i=0$

证明:

我们考虑拉格朗日函数:

$$\mathrm{L}(\beta,\beta_0,\xi,\alpha,\mu)=\frac{1}{2}\|\beta\|^2+C\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(y_i(\beta x_i+\beta_0)-1+\xi_i)-\sum_{i=1}^{n}\mu_i\xi_i$$

其中，α,μ是拉格朗日乘子，$\alpha>0,\mu>0$.

我们即可得到拉格朗日对偶函数:

$$\mathrm{g}(\alpha,\mu)=\min_{\beta,\beta_0,\xi}\mathrm{L}(\beta,\beta_0,\xi,\alpha,\mu)$$

对偶问题:

$$\max_{\alpha,\mu}\mathrm{g}(\alpha,\mu)$$

我们求偏导:

$$\frac{\partial L}{\partial\beta}=\beta-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i x_i=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial\beta_0}=-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial\xi}=C-\alpha_i-\mu_i=0$$

我们可以得到:

$$\beta=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i=0$$

$$C-\alpha_i-\mu_i=0$$

我们将这三个式子带回 L 中，可以得到

$$\mathrm{g}(\alpha,\mu)=\min_{\beta,\beta_0,\xi}\mathrm{L}(\beta,\beta_0,\xi,\alpha,\mu)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j y_i y_j x_i^T x_j=F_D(\alpha)$$

对偶问题即为:

$$\max_{\alpha} F_D(\alpha) = \max_{\alpha,\mu}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j y_i y_j x_i^T x_j)$$

使得:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = 0$$

$$C - \alpha_i - \mu_i = 0$$

$$\alpha_i > 0, \mu_i > 0$$

即

$$0 \leq \alpha_i \leq C$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = 0$$

证毕。