

מס' שאלון - 485

21

ביוני 2020

מס' מועד 67

סמסטר 2020א

20476 / 4

שאלון בחינת גמר

20476 - מתמטיקה בדידה

משך בחינה: 4 שעות

בשאלון זה 3 עמודים

מבנה הבחינה:

בבחינה שני חלקים:

חלק א: שאלת חובה. את התשובה לכל סעיף כתבו במחברת בלבד.

חלק ב: עליכם לענות על שלוש מתוך ארבע השאלות.
אם תענו על יותר מ-3 שאלות, יחושב הציון לפי 3 התשובות הראשונות.
שימו לב:

- * בחלק ב יש לנמק כל תשובה, גם אם זה לא נדרש בפירוש בגוף השאלה.
- * מותר להסתמך על כל טענה המופיעה בספרי הלימוד של הקורס, כולל התשובות לשאלות שבספרי הלימוד, וכולל החוברת "אוסף תרגילים פתורים". אפשר להסתמך גם על הפתרונות שפורסמו למטלות של הסמסטר הנוכחי.
- * אם ברצונכם להסתמך על טענות ממפגשי הנחיה, כולל מפגשי אופק, עליכם לחזור ולהוכיחן.
- * בפתרון סעיף של שאלה מותר להסתמך על סעיפים קודמים של אותה שאלה, גם אם לא פתרתם אותם.

בהצלחה !!!

חלק א': שאלת חובה (19 נקודות)

שאלה 1

בכל אחד מהסעיפים הבאים בחרו את הטענה הנכונה והסבירו את התשובה. לא חייבים להסביר מדוע טענות אחרות הן שגויות. רשמו את התשובות בתוך מחברת הבחינה.

א. לכל שלושה פסוקים α, β, γ מתקיים: (6 נק')

$$[1] \quad (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \equiv (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$$

$$[2] \quad (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \text{ גורר טאוטולוגית את } (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$$

$$[3] \quad (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \text{ גורר טאוטולוגית את } (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$$

$$[4] \quad \text{כל הטענות הקודמות שגויות.}$$

ב. \mathbf{R} היא קבוצת המספרים הממשיים, \mathbf{Q} קבוצת הרציונליים, \mathbf{Z} קבוצת השלמים. (7 נק')

נתונה קבוצה $A \subseteq \mathbf{R}$ כך שלכל $n \in \mathbf{Z}$ מתקיים $|A \cap [n, n+1]| = \aleph_0$

$$[1] \quad |A| = \aleph$$

$$[2] \quad |A \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})| < \aleph_0$$

$$[3] \quad |\mathcal{P}(A)| = \aleph$$

$$[4] \quad |A \cap \mathbf{Q}| = \aleph_0$$

ג. מספר העצים על 6 צמתים המתויגים ב- 1,2,3,4,5,6 עם שני צמתים בעלי דרגה 3 הוא: (6 נק')

$$[1] \quad 120$$

$$[2] \quad 90$$

$$[3] \quad 60$$

$$[4] \quad \text{כל התשובות הקודמות שגויות}$$

חלק ב': ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות
משקל כל שאלה 27 נקודות. משקל חלק ב' כולו: 81 נקודות

שאלה 2

על הקבוצה $[0,10] = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x \leq 10\}$ נתונים שני יחסים R, S המוגדרים כך:
לכל $x, y \in [0,10]$, xRy אם ורק אם קיים $k \in \mathbf{Z}$ (כלומר k מספר שלם) כך ש- $x - y = k$.
לכל $x, y \in [0,10]$, xSy אם ורק אם קיים $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ (כלומר $n \geq 1$ וטבעי) כך ש- $x - y = n$.
(13 נק') א. הוכיחו ש- R הוא יחס שקילות. מיצאו את מחלקות השקילות שלו.
(14 נק') ב. הוכיחו ש- S הוא יחס סדר. קבעו אם הוא סדר חלקי או מלא ומיצאו את האיברים המינימליים והמקסימליים שלו.

שאלה 3

(13 נק') א. מיצאו את מספר הדרכים לפזר 10 כדורים זהים ב-4 תאים שונים כך שבאף תא לא יימצאו בדיוק שלושה כדורים.
(14 נק') ב. מיצאו את מספר הדרכים לפזר 10 כדורים שונים ב-4 תאים שונים כך שבאף תא לא יימצאו בדיוק שלושה כדורים.

שאלה 4

בשאלה זו S_n היא קבוצת המילים באורך n הכתובות באותיות A, B, C . נסמן:
 a_n - מספר המילים מ- S_n שבהן האות A מופיעה מספר זוגי של פעמים.
 b_n - מספר המילים מ- S_n שבהן האות A מופיעה מספר אי-זוגי של פעמים.
(9 נק') א. עבור כל $n \geq 2$ הביעו את a_n בעזרת a_{n-1} ו- b_{n-1} ואת b_n בעזרת a_{n-1} ו- b_{n-1} .
(9 נק') ב. מיצאו נוסחת נסיגה עבור a_n .
הדרכה: השוויון הראשון מסעיף א' מאפשר להביע את b_{n-1} בעזרת a_n ו- a_{n-1} ולכן גם את b_n בעזרת a_{n+1} ו- a_n . הציבו אותם במקום b_{n-1} ו- b_n בשוויון השני מסעיף א').
(9 נק') ג. חשבו את a_1 ואת a_2 ומיצאו נוסחה כללית ל- a_n .

שאלה 5

נתון גרף מישורי פשוט G בעל 7 צמתים שבו שני צמתים סמוכים בעלי דרגה 3 ועוד חמישה צמתים בעלי דרגה 4.

(9 נק') א. מיצאו את מספר הפאות של G .
(9 נק') ב. הוכיחו ש- G המילטוני.
(9 נק') ג. יהי G_1 הגרף המתקבל מ- G לאחר מחיקת צומת אחד בעל דרגה 3 יחד עם כל הקשתות הסמוכות לו. הוכיחו או הפריכו:
1. G_1 גרף אוילרי.
2. קיים ב- G_1 מסלול אוילר שאינו מעגל.

בהצלחה