FUNDAMENTOS TEÓRICOS DA COMPUTAÇÃO

--- EXPRESSÕES REGULARES ---

Definição

Linguagens Regulares

Há três formalismos para representar Linguagens Regulares

1) **Autômato Finito**, que é um formalismo operacional ou reconhecedor baseado em sistema de estados finitos básico

2) **Expressão Regular**, que é um formalismo denotacional, ou gerador, que é definida a partir de três mecanismos básicos: conjuntos básicos, união e concatenação

3) **Gramática regular**, que é um formalismo axiomático, ou gerador, cujas restrições estão na forma das regras de produção

Linguagens Regulares

Uma Linguagem Regular é **reconhecida** por uma **Autômato Finito**, ou seja, o AF reconhece se uma palavra pertence ou não a uma linguagem

A Linguagem Regular pode ser **expressa** (ou descrita) através de outro mecanismo, que é a **Expressão Regular**

Mas o que é uma expressão regular?

Expressão Regular

Podemos usar **operações aritméticas** para construir expressões tais como $(5+3)\times 4$, cujo resultado é 32

Da mesma forma, podemos usar **operações regulares** para construir expressões que descrevem linguagens, que são chamadas de **expressões regulares**, por exemplo: $(0 \cup 1)0^*$

A linguagem acima consiste de todas as cadeias que iniciam com um 0 ou 1 seguido por qualquer número de 0

O símbolo $\circ$ da concatenação é implícito nas expressões regulares, que seria o mesmo que $(0 \cup 1) \circ 0^*$

Expressão Regular

Toda **linguagem regular** pode ser descrita por uma **expressão regular**

Exemplo: construa uma expressão regular que aceite/gere qualquer palavra do alfabeto {a,b} que comece com a ou b e termine com a subpalavra aa

Resposta: **`(a + b)aa`**

Palavras aceitas: {aaa, baa}

Expressão Regular

As ERs são representações de linguagens por meio de operações sobre conjuntos, porém permitem apenas uma pequena gama de operações. As ERs permitem apenas as seguintes operações:

- Agrupamento
- Fechode Kleene
- Concatenação
- União

Nas ERs, os conjuntos não são denotados por meio de $\{a, b, c\}$
Exemplo: $r = a^*ba^*ba^*$

Palavras aceitas: {bb, abba, aababaa, . . .}

Operadores

A representação do símbolo é feita simplesmente pelo próprio símbolo. Exemplo: $L = \{0\}$, temos $r = 0$

A representação de $\{\varepsilon\}$ é feita simplesmente por ε. Exemplo: $\mathrm{L} = \{\varepsilon\}$, temos $\mathrm{r} = \varepsilon$

A **concatenação**, assim como na representação por conjuntos, é feita pela sequência daquilo que se quer concatenar
Exemplo: $L = \{0\}\{1\}\{0\}\{1\}$, temos $r = 0101$

A **união** é representada pelo símbolo de **adição** ("+")
Exemplo 1: $L\ =\ \{a, b\}$, temos $r = a + b$
Exemplo 2: $L\ =\ \{1, 01, 23\}$, temos $r = 1 + 01 + 23$
Exemplo 3: $L\ =\ \{12\} \cup \{21\}$, temos $r = 12 + 21$

Operadores

- O **agrupamento** é representado por um **par de parênteses**

Exemplo1: $L = \{aa\}(\{bb\} \cup \{cc\})$, temos $r = aa(bb + cc)$

Exemplo2: $L = \{1\}\{2,3\}$, temos $r = 1(2 + 3)$

Exemplo3: $L = \{0,1\}\{111\}\{0,00,1,11\}$,

temos $r = (0 + 1)111(0 + 00 + 1 + 11)$

- O **fecho de Kleene** é representado por um asterisco ("*")

Exemplo 1: $L = \{x\}^*$, temos $r = x^*$

Exemplo 2: $L = \{0\}^*\{1\}^*$, temos $\mathrm{r} = 0^*1^*$

Exemplo 3: $L = \{00\}^*$, temos $r = (00)^*$

Expressão Regular - base da indução

Diz-se que R é uma expressão regular se R for:

1. $\emptyset$ é uma expressão regular que denota a linguagem vazia

2. ε é uma expressão regular que denota a linguagem com a cadeia vazia

3. x é uma expressão regular (para qualquer $x \in \Sigma$) que denota a linguagem $\{x\}$

4. $(R_1 \cup R_2)$, onde R_1 e R_2 são expressões regulares,

5. $(R_1 \circ R_2)$, onde R_1 e R_2 são expressões regulares, ou

6. (R_1^*), onde R_1 é uma expressão regular

Expressão Regular - passo da indução

Não confunda as expressões regulares $\emptyset$ e ε

A expressão ε representa a linguagem que contém uma única string, isto é, a cadeia vazia

Por outro lado, $\emptyset$ representa a linguagem que não contém nenhuma string

Expressão Regular - Precedência

Na ausência de parêntesis adota-se a seguinte precedência:

O fecho de Kleene tem precedência sobre a concatenação

A concatenação tem precedência sobre a união

Portanto, a ER 01^* é o mesmo que $0(1^*)$ e não $(01)^*$

ER nula

A ER que não aceita nenhuma palavra é denotada por $\emptyset$. Observe que $(r = \emptyset) \neq (r = \varepsilon)$

A **concatenação** de qualquer ER com a ER nula equivale à ER nula

$$r = r_1 \emptyset r_2 \Rightarrow r = \emptyset$$

A união da ER nula com qualquer outra ER não altera o resultado

$$r = r_1 + \emptyset + r_2 \Rightarrow r = r_1 + r_2$$

O fecho de Kleene sobre a ER nula gera a ER ε

$$\emptyset^* = \varepsilon$$

Exemplos

Conjuntos	Expressões Regulares
$L = \{0,1\}^*\{\varepsilon, 0,1\}$	$r = (0+1)^*\{\varepsilon + 0 + 1\}$
$L = \{01\}^{+}$	$r = 01(01)^{*}$
$L = (\{ab\}\{c\}^*)^+$	$r = abc^*(abc^*)^*$

* A forma básica das ERs não permite repetições do tipo "uma ou mais vezes"

Operadores de quantidade

Asterisco (*****): significa **zero** ou **muitas** ocorrências do que vem antes

Exemplo 1: **ab***

Significa que esta linguagem aceita palavras que iniciam com **a** concatenado com zero ou muitos **b**

Palavras aceitas: a, a**bbbbbb**, a**b**, a**bbbbbbbbbbb**, a**bb**

Exemplo 2: **ab*a**

Significa que esta linguagem aceita palavras que iniciam com **a** concatenado com zero ou muitos **b** concatenado com **a** no final

Palavras aceitas: **aa**, **a**bbbbbb**a**, **a**b**a**, **a**bbbbbbbbbbb**a**, **a**bb**a**

Exemplo 3: **(a+b)*aa**

Significa que esta linguagem só aceita palavras que têm o sufixo **aa**

Palavras aceitas: **aa**, aaa**aa**, ab**aa**, bbaaab**aa**, bb**aa**

Exemplos de linguagens geradas

ER	Linguagem
aa	somente a palavra aa
ba*	todas as palavras que iniciam por b seguido por zero ou vários a
(a+b)*	todas as palavras sobre o alfabeto {a, b}
(a+b)*aa(a+b)*	todas as palavras contento aa como subpalavra
a*ba*ba*	todas as palavras contento zero ou vários a, seguido por um b, seguido por zero ou vários a, seguido por um b, seguido por zero ou vários a
(a+ε)(b+ba)*	todas as palavras contento zero ou um a, seguido por b ou ba zero ou várias vezes

Exemplo – quais as ERs

Seja o alfabeto {a,b}, escreva ERs das seguintes linguagens

Linguagem	ER
Palavras de tamanho igual a 2	`(a+b)(a+b)`
Possuem comprimento maior ou igual a 2	`(a+b)(a+b)(a+b)*`
Possuem comprimento par	`((a+b)(a+b))*`
Possuem comprimento ímpar	`(a+b)((a+b)(a+b))*`
Possuem comprimento múltiplo de 4	`((a+b)(a+b)(a+b)(a+b))*`
Possuem comprimento divisível por 3	`(a+b)((a+b)(a+b))*`

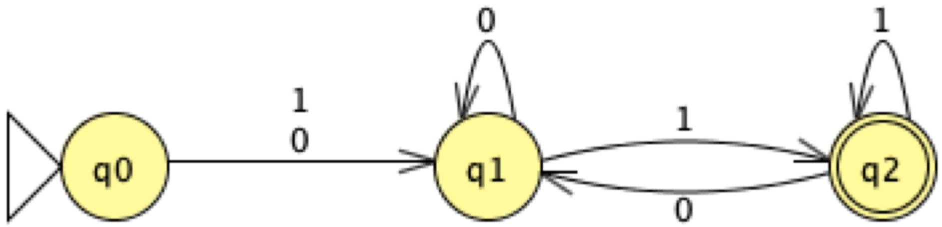
Exemplo – quais as ERs

Seja o alfabeto {a,b}, escreva ERs das seguintes linguagens

Linguagem	ER
Número de a é exatamente igual a 2	`b*`**`a`**`b*`**`a`**`b*`
Número de a é pelo menos igual a 2	`b*`**`a`**`b*`**`a`**`(a+b)*`
Palavras que iniciam com a	**`a`**`(a+b)*`
Palavras que terminam com a	`(a+b)*`**`a`**
Palavras contendo pelo menos um a	`(a+b)*`**`a`**`(a+b)*`
Palavras que iniciam e terminam por símbolos diferentes	`(`**`a`**`(a+b)*`**`b`**`)+(`**`b`**`(a+b)*`**`a`**`)`
Palavras que iniciam e terminam pelo mesmo símbolos	`(`**`a`**`(a+b)*`**`a`**`)+(`**`b`**`(a+b)*`**`b`**`)`

ER para autômato

Escreva a expressão regular do seguinte autômato



(0+1)(0*11*)(0*11*)*

$$\omega = 10001$$

$$1 \rightarrow (0 + 1)(0^*11^*)(0^*11^*)^*$$

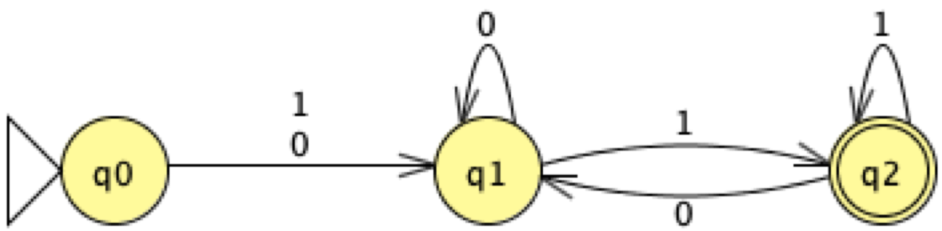
$$000 \rightarrow (0 + 1)(0^*11^*)(0^*11^*)^*$$

$$1 \rightarrow (0 + 1)(0^*11^*)(0^*11^*)^*$$

$$\varepsilon \rightarrow (0 + 1)(0^*11^*)(0^*11^*)^*$$

ER para autômato

Escreva a expressão regular do seguinte autômato



(0+1)(0*11*)(0*11*)*

$$\omega = 10001011$$

$$1 \rightarrow (0+1)(0^*11^*)(0^*11^*)^*$$

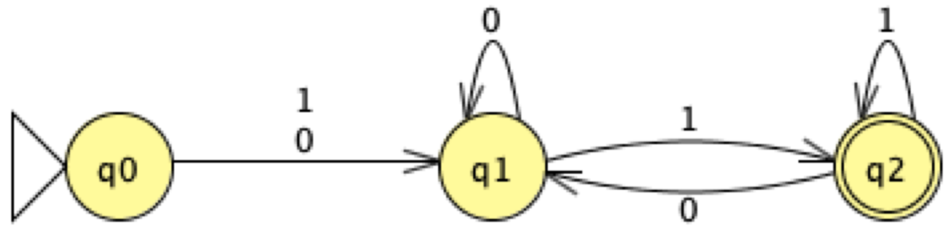
$$000 \rightarrow (0+1)(0^*11^*)(0^*11^*)^*$$

$$1 \rightarrow (0+1)(0^*11^*)(0^*11^*)^*$$

$$\underbrace{011}_{} \rightarrow (0+1)(0^*11^*)(0^*11^*)^*$$

ER para autômato

Escreva a expressão regular do seguinte autômato



(0+1)(0*11*)(0*11*)*

$$\omega = 1000101101$$

$$1 \rightarrow (0+1)(0^*11^*)(0^*11^*)^*$$

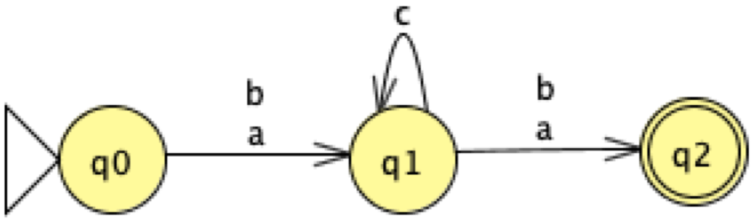
$$000 \rightarrow (0+1)(0^*11^*)(0^*11^*)^*$$

$$1 \rightarrow (0+1)(0^*11^*)(0^*11^*)^*$$

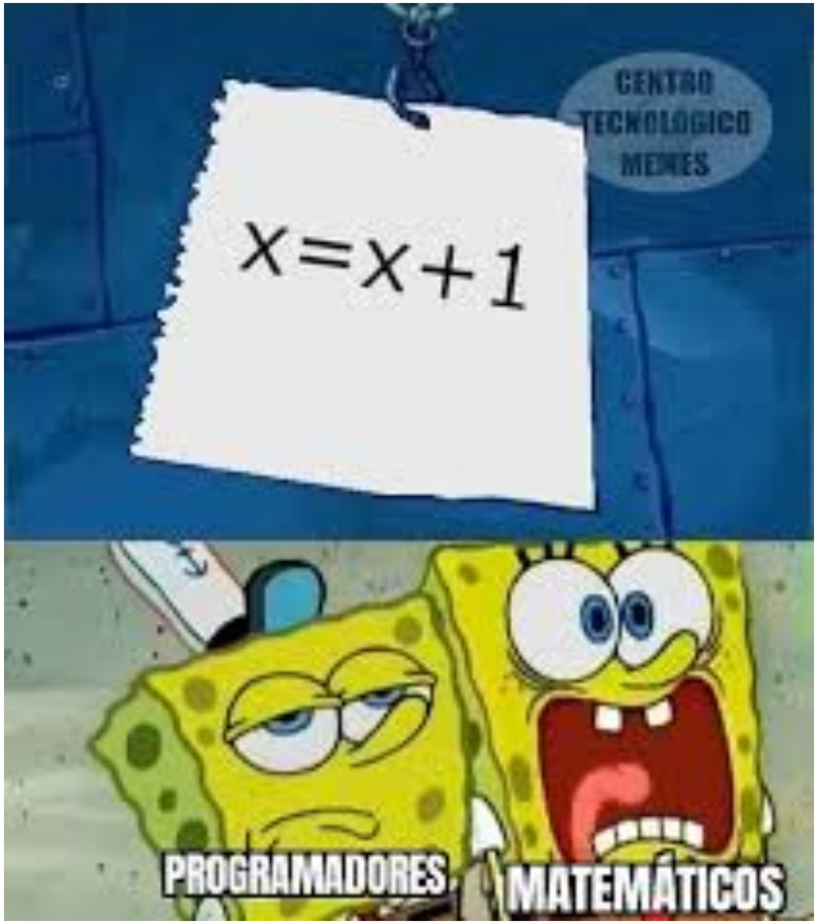
$$\underbrace{011}\underbrace{01} \rightarrow (0+1)(0^*11^*)(0^*11^*)^*$$

ER para autômato

Escreva a expressão regular do seguinte autômato



(a+b) c* (a+b)


CENTRO
TECNOLOGICO
MEMES
x=x+1
PROGRAMADORES
MATEMÁTICOS