FUNDAMENTOS TEÓRICOS DA COMPUTAÇÃO
-- SISTEMAS FORMAIS --

Exemplos de Sistemas Formais

Sistema MIU

Um sistema formal básico

*Um sistema formal é uma linguagem sobre algum **alfabeto** de símbolos junto com **axiomas** e **regras de inferência** que separam/geram algumas das strings na linguagem como teoremas*

*O **alfabeto** de símbolos são "**básicos**" porque não necessariamente têm significado inerente (sintaxe). Estes são considerados "**bem formados**" se sua estrutura seguir as **regras** estabelecidas por esses sistemas*

*Será definido um sistema formal básico, conhecido como "**sistema MIU**"*

*A estrutura lógica do sistema **"MIU"** foi criada por **Emil Post**, considerado um dos fundadores da teoria da computabilidade*

*Post trabalhou no início de 1900 e, como muitos matemáticos da época, estava preocupado com os **fundamentos** da matemática e o que seria possível **provar***

Sistema MIU

Axioma

Em qualquer sistema formal, primeiro devemos saber ***quais os objetos*** *que possuímos*

Os objetos são a base e podem ser pensados como ***axiomas*** *do nosso sistema*

No sistema MIU, o único objeto (axioma) com o qual começamos é ***MI***

Em seguida, podemos usar ***regras*** *para expandir os objetos que temos*

Sistema MIU

Regras

Regra 1: *Se você tem um objeto* ***x*** *que termina em* ***I****, então você pode gerar um objeto que é* ***xU*** *(note que o $I \in x$)*

Então, o que podemos fazer com essa regra? Podemos usá-lo para ***adicionar outro objeto*** *à nossa coleção*

Atualmente possuímos apenas o objeto ***MI****, mas podemos usar a Regra 1 para gerar um outro objeto* ***MIU***

Observe que não podemos aplicar a Regra 1 a ***MIU****, pois ela termina em* ***U***

É importante esclarecer que ***x*** *pode representar* ***qualquer*** *objeto genérico*

Agora temos ***dois*** *objetos*

Sistema MIU

Regras

Vamos definir as outras três regras do sistema MIU

Regra 2*: Se você tem um objeto da forma* ***Mx****, então você pode gerar um outro objeto da forma* ***Mxx***

Regra 3*: Se você tiver um objeto com a estrutura* ***III*** *em qualquer lugar, então você pode gerar um objeto que substitua* ***III*** *por* ***U***

Regra 4*: Se a estrutura* ***UU*** *ocorrer em qualquer lugar do seu objeto, você poderá gerar um novo objeto sem ela*

Sistema MIU

Usando as regras para gerar novos objetos

*A regra **2** nos permite **expandir** o tamanho de um objeto muito rapidamente*

*Podemos obter MII, MIIII, MIIIIIIII e assim por diante **apenas** aplicando a Regra **2** a MI repetidamente*

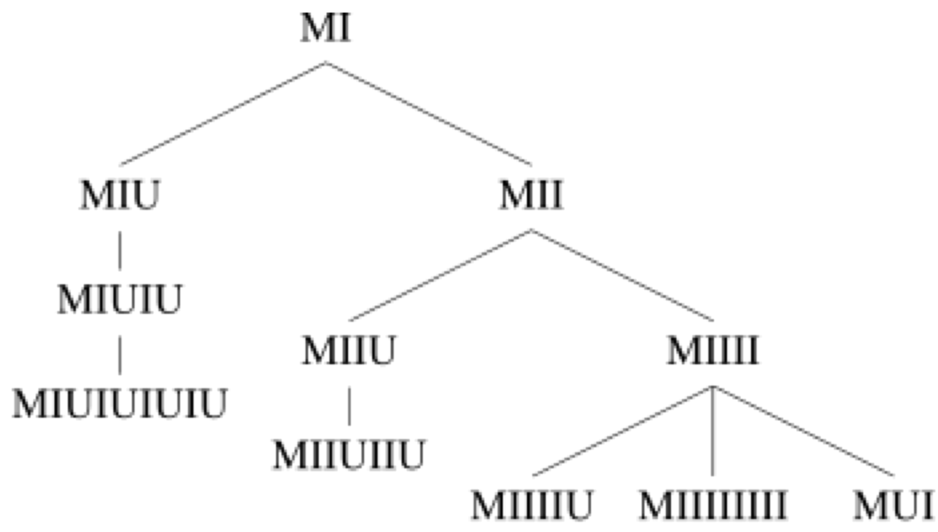
*As regras **1** e **2** nos permitem fazer objetos de **comprimento maior,** e as regras 3 e 4 nos permitem fazer objetos de **comprimento menor***

***Aplicando Regra 3**, poderíamos pegar MIIIIIIII e fazer MIUIIII, MIIUIII, ou mesmo MIIUU*

*A aplicação da Regra **4** ao MIIUU nos devolve o MII*

Sistema MIU

O desafio que Hofstadter propôs, após definir este sistema, é: ***será que é possível gerar o objeto MU?***



Sistema MIU

Usando as regras para gerar novos objetos

*Eu encorajo você a **mexer** com essas regras e construir uma "coleção" de objetos*

Passe algum tempo nisso antes de seguir em frente!

Se você não quiser escrevê-lo, recomendo usar este site
http://miu.edlogic.co.uk.s3-website-eu-west-1.amazonaws.com/

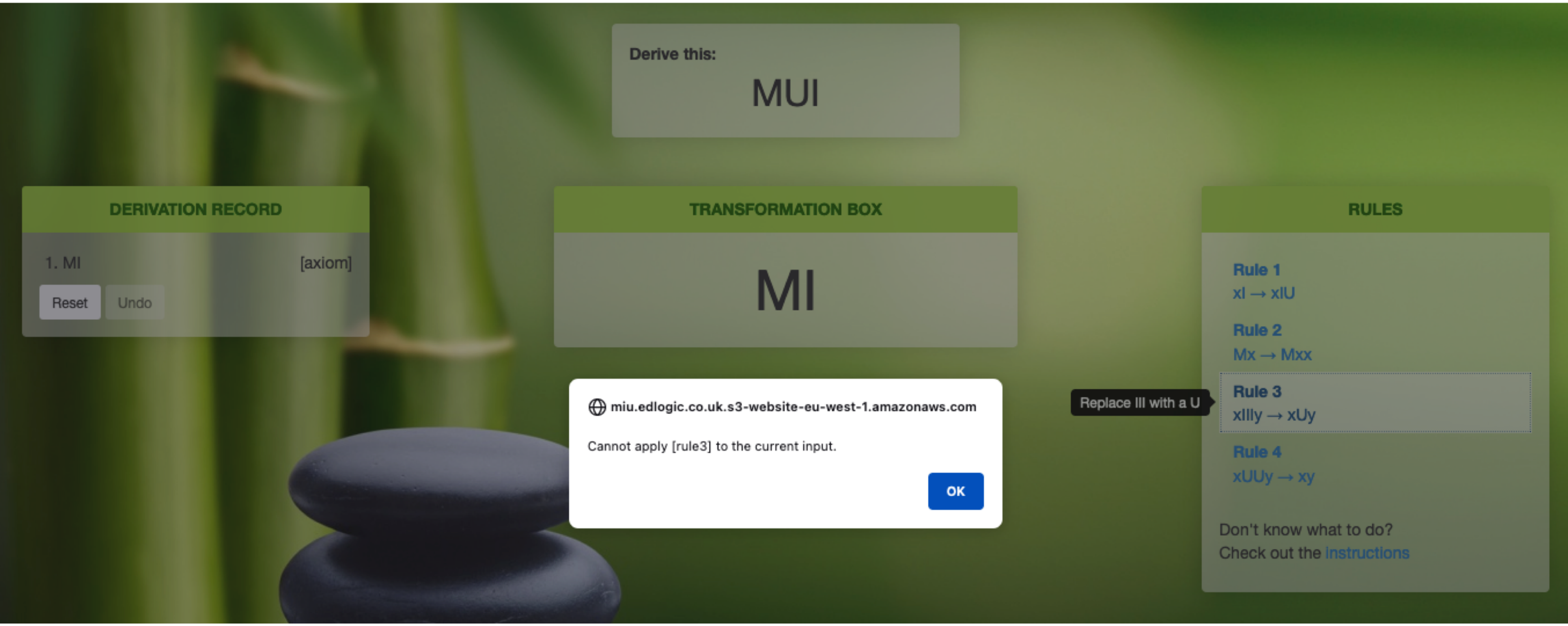
que permite jogar com o sistema MIU online

Ou este outro que te guia dando as opções disponíveis a cada passo -
https://demonstrations.wolfram.com/MIUExplorer/

Sistema MIU

http://miu.edlogic.co.uk.s3-website-eu-west-1.amazonaws.com/

Sistema MIU



http://miu.edlogic.co.uk.s3-website-eu-west-1.amazonaws.com/

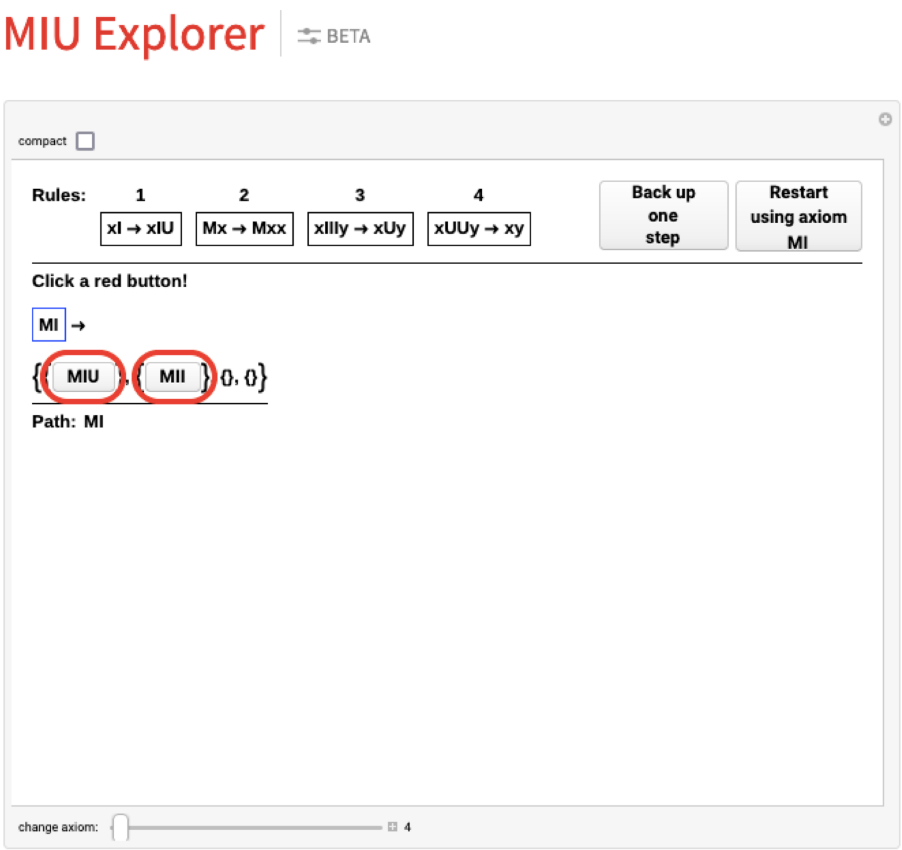
Sistema MIU

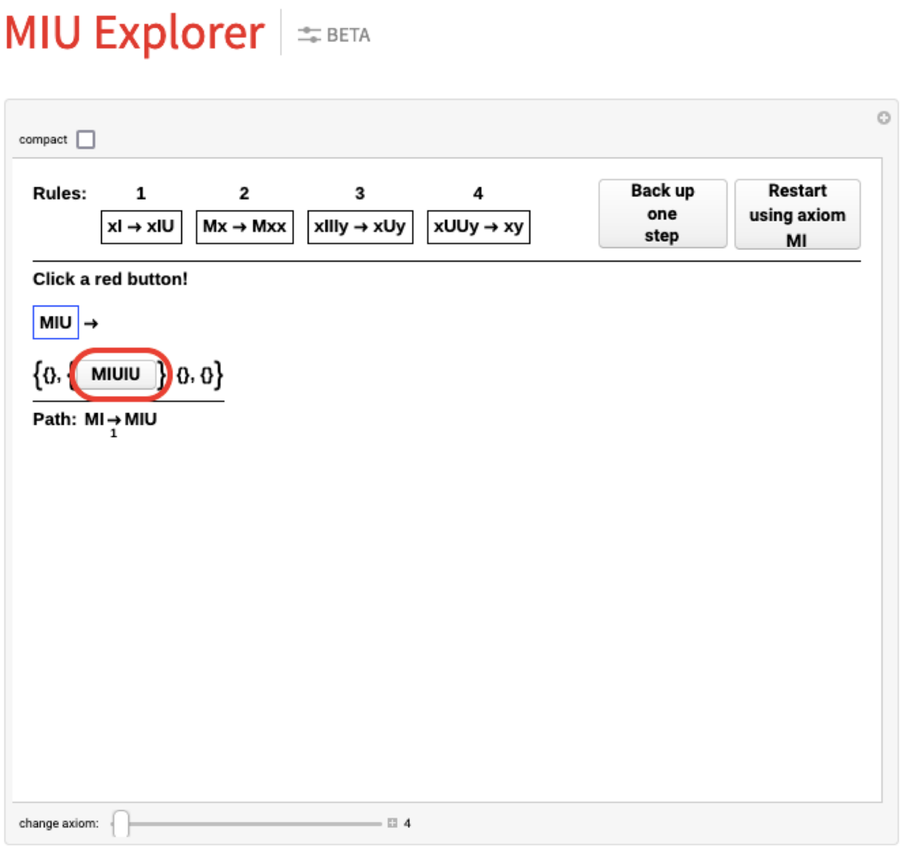
http://miu.edlogic.co.uk.s3-website-eu-west-1.amazonaws.com/

Sistema MIU

http://miu.edlogic.co.uk.s3-website-eu-west-1.amazonaws.com/

Sistema MIU





https://demonstrations.wolfram.com/MIUExplorer/

Sistema MIU

Resposta do enigma

*É **impossível** fazer MU a partir de MI*

*Na página da Wikipedia (**https://en.wikipedia.org/wiki/MU_puzzle**) tem uma prova do motivo exato pelo qual você **não pode** fazer MU*

Esta prova baseia-se em fazer observações sobre a estrutura das próprias regras, em vez dos objetos (tem a ver com a quantidade de I que teria que ser divisível por 3)

*O fato de não podermos fazer MU **depende inteiramente** do objeto inicial*

*Se tivéssemos começado com **MUUU**, poderíamos criar MU*

*Se tivéssemos começado com **MIII**, também geraríamos MU*

Sistema MIU

Sintaxe e semântica

*O sistemas MIU também demonstra o **contraste** entre a interpretação no nível "**sintático**" dos símbolos e no nível "**semântico**" dos significados*

*No nível sintático, **dentro do sistema**, um algoritmo poderia gerar sucessivas cadeias de símbolos válidas em uma tentativa de gerar MU*

*Para um **humano**, eventualmente, percebe-se que o sistema é de alguma forma sobre a **divisibilidade por três** dos Is. Este é o nível "semântico" do sistema - um nível de significado que o sistema atinge **naturalmente***

*Há um "salto para fora do sistema" e começa-se a raciocinar **sobre o** sistema, em vez de trabalhar **dentro** do sistema*

*Neste nível semântico, o quebra-cabeça MU pode ser visto como **impossível***

Sistema MIU

Interesse por sistemas formais

*Por que tantos matemáticos estavam interessados em sistemas formais? É porque essas eram **versões simples** da própria matemática!*

***MI** é um **axioma** do sistema. Também podemos pensar nas Regras 1-4 como **métodos de prova**, como indução, contradição e raciocínio formal*

*Usando as Regras 1–4 podemos **gerar** **novos objetos**, que são os **teoremas***

*Os matemáticos usaram **sistemas formais** para fazer algumas previsões surpreendentes sobre nossas limitações com a matemática, como o **Teorema Incompletude de Gödel***

*Este teorema basicamente afirma que qualquer sistema formal consistente não será capaz de **provar tudo** sobre os números naturais. Essa é uma grande afirmação!*

Sistema pq-

Definição

Este sistema formal também foi inventado por ***Hofstadter***

Alfabeto*: {p, q, –}*

Sintaxe*: As strings da linguagem têm a forma de um ou mais hífens seguidos de p seguido de um ou mais hífens seguidos de q seguido de um ou mais hífens*

Sejam x e y sequências de um ou mais hífens

Axioma*: xp-qx-*

Regra de Inferência*: x****p****y****q****z → x****p****y-****q****z-*

Sistema pq-

Alguns teoremas

(1) `--p-q---`	*Axioma*
(2) `--p--q----`	*De (1) aplicando a regra*
(3) `-p-q--`	*Axioma*
(4) `-----p-q------`	*Axioma*
(5) `-----p--q-------`	*De (4) aplicando a regra*
(6) `-----p---q--------`	*De (5) aplicando a regra*
(7) `-----p----q---------`	*De (6) aplicando a regra*

Sistema pq-

Exercícios

(1) `---p----q-------` *é um teorema? Por quê?*

(2) `---p-----q-------` *é um teorema? Por quê?*

(3) `---p--p--q-------` *é um teorema? Por quê?*

(4) O que você acha que esses teoremas significam?

Sistema pq-

Isomorfismo no sistema pq

p ⇔ *mais*

q ⇔ *igual*

sequência de n traços ⇔ *n*

Exemplo: `--p-q---`

Exemplo: `-----p----q---------`

Sistema pq- modificado

Definição

*Este sistema formal também foi proposto por **Hofstadter***

***Alfabeto**:* **{p, q, −}**

***Sintaxe**: As strings da linguagem têm a forma de um ou mais hífens seguidos de p seguido de um ou mais hífens seguidos de q seguido de um ou mais hífens.*

Sejam x e y sequências de um ou mais hífens

***Axioma 1**:* **xp−qx-**

***Axioma 2**:* **xp−qx**

***Regra de Inferência**:* **xpyqz** → **xpy−qz−**

Sistema pq- modificado

Inconsistência?

(1) **--p-q---** *Axioma 1*

(2) **--p-q--** *Axioma 2*

(3) **--p--q---** *De (2) pela regra*

Quer dizer, 2+1=3, 2+1=2 e 2+2=3? ***Nosso sistema é inconsistente?***

É apenas ***inconsistente*** *em relação à* ***antiga interpretação*** *onde* **q** *significava "igual", mas se alterarmos para "****maior ou igual a****" nos permite "****recuperar****" a consistência*

Referências

Douglas Hofstadter. Godel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid. Editora Basic Books. 1999.

https://www.cantorsparadise.com/your-first-formal-system-da2fffbf7888

https://cs.lmu.edu/~ray/notes/formalsystems/


Using one single word
A more complicated and formal way of saying the same thing so that nobody understands it
imgflip.com