FUNDAMENTOS TEÓRICOS DA COMPUTAÇÃO

--- LINGUAGENS NÃO REGULARES ---

Exemplos de Lema do Bombeamento

Introdução

Encontrar uma cadeia ω para aplicar o LB algumas vezes requer um pouco de ***criatividade***. Você pode ter que tentar vários candidatos para ω antes de descobrir um que funcione

Sugestão 1: tente membros de L que pareçam exibir mais a "essência" da não-regularidade

Sugestão 2: analise a própria definição da linguagem e veja as características da linguagem antes de definir a cadeia ω

Introdução

Relembramos que o lema do bombeamento é uma condição necessária, mas não suficiente, para a regularidade de uma linguagem

Se o lema não é satisfeito numa dada linguagem L, então L não é regular, mas se o lema **é satisfeito** para uma dada linguagem L, então **há chances** de L ser regular, mas não há nenhuma garantia, exceto, se gerar um AF ou ER ou GR

Apesar de **não ser comum** usar o Lema do Bombeamento para provar que uma linguagem é regular, entretanto, mostraremos **dois exemplos** de linguagens regulares, que mostramos que o **LB é válido para elas** mas, para provar efetivamente, também geramos os AFs para ambas

Exemplo 1

Considere a linguagem $L_1 = \{01^n 0 : n \geq 0\}$

Escolha $\omega = 01^{p-1}0$, $p \geq 2$, neste caso, $|\omega| \geq p$. Lembrando que a escolha acima é a **única forma** de geração de $\omega \in L_1$. Também Assumimos que $\omega = \alpha\beta\gamma$, $\beta \neq \varepsilon$, $|\alpha\beta| \leq p$ e $\alpha\beta^i\gamma \in L, \forall i \geq 0$

Por quê $p \geq 2$?

Exemplo 1

Considere a linguagem $L_1 = \{01^n 0 : n \geq 0\}$

Escolha $\omega = 01^{p-1}0$, $p \geq 2$, neste caso, $|\omega| \geq p$. Lembrando que a escolha acima é a **única forma** de geração de $\omega \in L_1$. Também Assumimos que $\omega = \alpha\beta\gamma$, $\beta \neq \varepsilon$, $|\alpha\beta| \leq p$ e $\alpha\beta^i\gamma \in L, \forall i \geq 0$

Por quê $p \geq 2$?

Porque é o menor comprimento de bombeamento que pode fazer com que as cadeas sejam bombeadas

Exemplo 1

Considere a linguagem $L_1 = \{01^n0 : n \geq 0\}$

Escolha $\omega = 01^{p-1}0$, $p \geq 2$, neste caso, $|\omega| \geq p$. Lembrando que a escolha acima é a única forma de geração de $\omega \in L_1$. Também Assumimos que $\omega = \alpha\beta\gamma$, $\beta \neq \varepsilon$, $|\alpha\beta| \leq p$ e $\alpha\beta^i\gamma \in L, \forall i \geq 0$

$p = 2$

$$\underbrace{\boxed{0}}_{\alpha}\underbrace{\boxed{1}}_{\beta^1}\underbrace{\boxed{0}}_{\gamma}$$

Exemplo 1

Considere a linguagem $L_1 = \{01^n0 : n \geq 0\}$

Escolha $\omega = 01^{p-1}0$, $p \geq 2$, neste caso, $|\omega| \geq p$. Lembrando que a escolha acima é a única forma de geração de $\omega \in L_1$. Também Assumimos que $\omega = \alpha\beta\gamma$, $\beta \neq \varepsilon$, $|\alpha\beta| \leq p$ e $\alpha\beta^i\gamma \in L, \forall i \geq 0$

$p = 2$

$$\underbrace{\boxed{0}}_{\alpha}\underbrace{\boxed{1}}_{\beta^1}\underbrace{\boxed{0}}_{\gamma}$$

$p = 3$

$$\underbrace{\boxed{0}}_{\alpha}\underbrace{\boxed{1}\boxed{1}}_{\beta^2}\underbrace{\boxed{0}}_{\gamma}$$

Exemplo 1

Considere a linguagem $L_1 = \{01^n0 : n \geq 0\}$

Escolha $\omega = 01^{p-1}0$, $p \geq 2$, neste caso, $|\omega| \geq p$. Lembrando que a escolha acima é a única forma de geração de $\omega \in L_1$. Também Assumimos que $\omega = \alpha\beta\gamma$, $\beta \neq \varepsilon$, $|\alpha\beta| \leq p$ e $\alpha\beta^i\gamma \in L, \forall i \geq 0$

$p = 2$

$$\underbrace{0}_{\alpha}\ \underbrace{1}_{\beta^1}\ \underbrace{0}_{\gamma}$$

$p = 3$

$$\underbrace{0}_{\alpha}\ \underbrace{1\ 1}_{\beta^2}\ \underbrace{0}_{\gamma}$$

$p = 6$

$$\underbrace{0}_{\alpha}\ \underbrace{1\ 1\ 1\ 1\ 1}_{\beta^5}\ \underbrace{0}_{\gamma}$$

Exemplo 1

Considere a linguagem $L_1 = \{01^n0 : n \geq 0\}$

Escolha $\omega = 01^{p-1}0$, $p \geq 2$, neste caso, $|\omega| \geq p$. Lembrando que a escolha acima é a única forma de geração de $\omega \in L_1$. Também Assumimos que $\omega = \alpha\beta\gamma$, $\beta \neq \varepsilon$, $|\alpha\beta| \leq p$ e $\alpha\beta^i\gamma \in L, \forall i \geq 0$

$p = 2$

$$\underbrace{\boxed{0}}_{\alpha}\underbrace{\boxed{1}}_{\beta^1}\underbrace{\boxed{0}}_{\gamma}$$

$p = 3$

$$\underbrace{\boxed{0}}_{\alpha}\underbrace{\boxed{1}\boxed{1}}_{\beta^2}\underbrace{\boxed{0}}_{\gamma}$$

$p = 6$

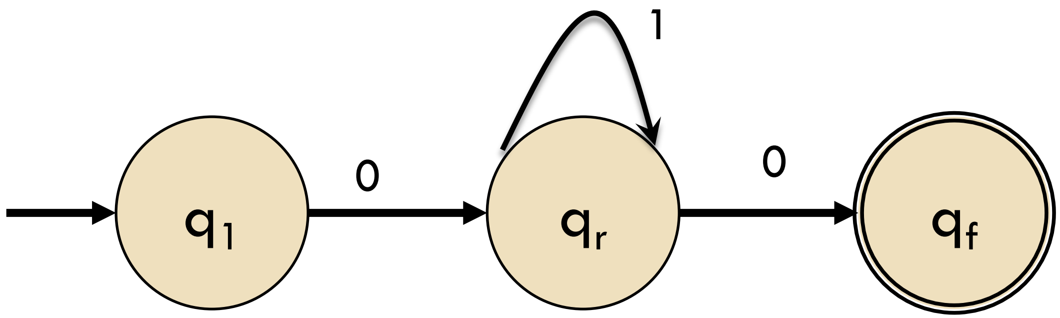
$$\underbrace{\boxed{0}}_{\alpha}\underbrace{\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}}_{\beta^5}\underbrace{\boxed{0}}_{\gamma}$$

Note que β é a subcadeia a ser bombeada, i.e., pode ser **removida** ou **repetida** arbitrariamente, ou seja, $\forall i$, $\alpha\beta^i\gamma \in L$ (**lema do bombeamento satisfeito**)

Exemplo 1

A satisfação do lema do bombeamento **não prova que a linguagem L_1 é regular**

Para provar, tem que gerar um AF ou ER ou GR



O AF acima prova que realmente a linguagem L_1 é regular

Verificamos que a cadeia 0<u>1</u>0 é realmente bombeável em L_1, ou seja, o "1" pode ser "**bombeado**" quantas vezes se queira, e a palavra obtida sempre pertencerá a L_1

Exemplo 2

Considere a linguagem $L_2 = \{0(10)^n : n \geq 1\}$

As cadeias válidas para L_2 são
$\{\mathbf{010}, 01010, 0101010, 0101010, 010101010, \dots\}$
o valor mínimo de $\boldsymbol{p}$ é 3 (por quê?)
Escolha $\omega = 0(10)^p$
Para que L_2 seja regular, temos que assumir que $\omega = \alpha\beta\gamma, \beta \neq \varepsilon$, $|\alpha\beta| \leq p$ e $\alpha\beta^i\gamma \in L_2, \forall i \geq 0$
Se dividirmos ω da seguinte forma: $\alpha = 0;\ \beta = 10;\ \gamma = (10)^{p-1}$, ω poderá ser bombeada ($\alpha\beta^i\gamma \in L_2, \forall i \geq 0$)
Entretanto, para que $|\alpha\beta| \leq p$ faz-se necessário que $p \geq 3$ que, neste caso, pelas características de L_2, é o **valor mínimo de $\boldsymbol{p}$**

Exemplo 2

Para $p = 3$ e $i = 0$, $\quad \alpha\beta^0\gamma = 01010 \in L_2$

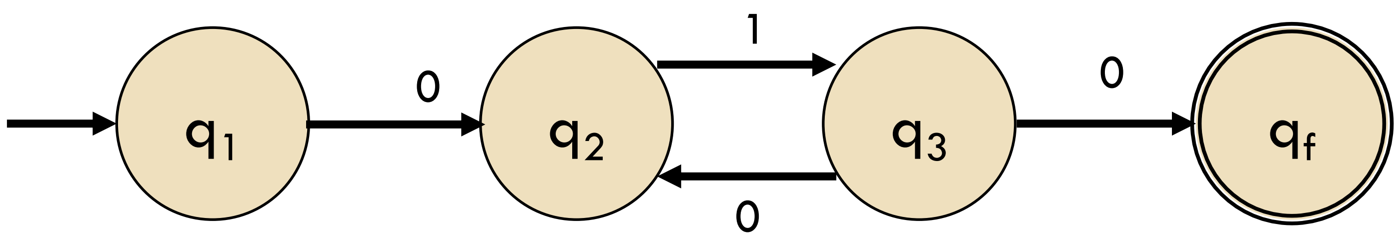
$$\underbrace{\boxed{0}}_{\alpha}\underbrace{\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}}_{\gamma}$$

Para $p = 3$ e $i = 1$, $\quad \alpha\beta^1\gamma = 0{\color{red}10}1010 \in L_2$

$$\underbrace{\boxed{0}}_{\alpha}{\color{red}\underbrace{\color{black}\boxed{1}\boxed{0}}_{\beta^1}}\underbrace{\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}}_{\gamma}$$

Exemplo 2

A satisfação do lema do bombeamento **não prova que a linguagem L_2 é regular**
Para provar, tem que gerar um AF ou ER ou GR



Olhando para o AFN acima, a cadeia "10" é bombeável em L_2, ou seja, "10" pode ser "**repetido**" quantas vezes se queira, e a palavra obtida sempre pertencerá a L_2

Exemplo 3

Considere a linguagem $L_3 = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$

Analisando a linguagem L_3, escolha $\omega = 0^p 1^p$, onde p é o comprimento do bombeamento. Note que $|\omega| \geq p$

Assumimos que $\omega = \alpha\beta\gamma$, $\beta \neq \varepsilon$ e $\alpha\beta^i\gamma \in L, \forall i \geq 0$

Exemplo 3

Primeira possibilidade: $\boldsymbol{\beta}$ contém apenas 0s

Ex: $\omega = 000111,\ \alpha = 0,\ \boldsymbol{\beta} = \mathbf{00},\ \gamma = 111$

Entretanto: $\alpha\beta^2\gamma \notin L$ (**0 <u>00</u> <u>00</u> 111**)

Exemplo 3

Primeira possibilidade: β contém apenas 0s

Ex: $\omega = 000111,\ \alpha = 0,\ \beta = 00,\ \gamma = 111$

Entretanto: $\alpha\beta^2\gamma \notin L$ (**0 <u>00</u> <u>00</u> 111**)

Segunda possibilidade: $\boldsymbol{\beta}$ contém apenas 1s

Ex: $\omega = 000111,\ \alpha = 000,\ \boldsymbol{\beta} = \mathbf{11},\ \gamma = 1$

Entretanto: $\alpha\beta^2\gamma \notin L$ (**000 <u>11</u> <u>11</u> 1**)

Exemplo 3

Primeira possibilidade: β contém apenas 0s

Ex: $\omega = 000111,\ \alpha = 0,\ \beta = 00,\ \gamma = 111$

Entretanto: $\alpha\beta^2\gamma \notin L$ (**0 <u>00</u> <u>00</u> 111**)

Segunda possibilidade: β contém apenas 1s

Ex: $\omega = 000111,\ \alpha = 000,\ \beta = 11,\ \gamma = 1$

Entretanto: $\alpha\beta^2\gamma \notin L$ (**000 <u>11</u> <u>11</u> 1**)

Terceira possibilidade: $\boldsymbol{\beta}$ contém 0s e 1s

Ex: $\omega = 000111,\ \alpha = 00,\ \boldsymbol{\beta = 01},\ \gamma = 11$

Entretanto: $\alpha\beta^2\gamma \notin L$ (**00 <u>01</u> <u>01</u> 11**)

Exemplo 3

Primeira possibilidade: β contém apenas 0s

Ex: $\omega = 000111,\ \alpha = 0,\ \beta = 00,\ \gamma = 111$

Entretanto: $\alpha\beta^2\gamma \notin L$ (**0 $\underline{\textbf{00}}$ $\underline{\textbf{00}}$ 111**)

Segunda possibilidade: β contém apenas 1s

Ex: $\omega = 000111,\ \alpha = 000,\ \beta = 11,\ \gamma = 1$

Entretanto: $\alpha\beta^2\gamma \notin L$ (**000 $\underline{\textbf{11}}$ $\underline{\textbf{11}}$ 1**)

Terceira possibilidade: β contém 0s e 1s

Ex: $\omega = 000111,\ \alpha = 00,\ \beta = 01,\ \gamma = 11$

Entretanto: $\alpha\beta^2\gamma \notin L$ (**00 $\underline{\textbf{01}}$ $\underline{\textbf{01}}$ 11**)

Que contradizem a suposição de que a linguagem é regular

Exemplo 3

Note que neste exemplo só usamos a regra 1 do Lema do Bombeamento. Poderíamos simplificar a análise das possibilidades 2 e 3 (mostradas anteriormente) aplicando somente a regra 3

Reanálise da segunda possibilidade: $\boldsymbol{\beta}$ contém apenas 1s

$\omega = 000111,\ \alpha = 000,\ \beta = 11,\ \gamma = 1,\ p = 3$

Entretanto: $|\alpha\beta| \nleq p\ (\mathbf{5} \nleq 3)$

Reanálise da terceira possibilidade: $\boldsymbol{\beta}$ contém 0s e 1s

$\omega = 000111,\ \alpha = 00,\ \beta = 01,\ \gamma = 11, p = 3$

Entretanto: $|\alpha\beta| \nleq p\ (\mathbf{4} \nleq 3)$

Exemplo 4

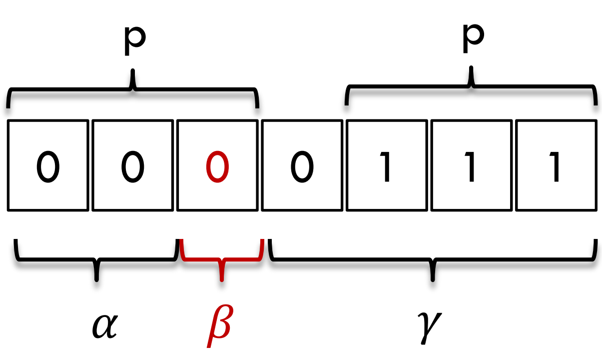
Considere a linguagem $L_4 = \{0^i 1^j : i > j\}$

Por exemplo, a cadeia $\omega = \{0000111\}$ é aceita por L_4

Seja p a constante do lema e que $\omega = 0^{p+1}1^p \in L_4$

Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrito como $\alpha\beta\gamma$ e $\alpha\beta^i\gamma \in L_4, \forall i \geq 0$

Note que as condições têm que ser válidas para $\forall i \geq 0$ e que $\beta \neq \varepsilon$ e $|\alpha\beta| \leq p$.



Note que β é a subcadeia a ser bombeada, i.e., pode ser **removida** ou **repetida** arbitrariamente, ou seja, para $\alpha\beta^0\gamma = 000111 \notin L$ (**contradição**)

Note que a única forma de provar por contradição foi "*bombear para baixo*" (β^0)

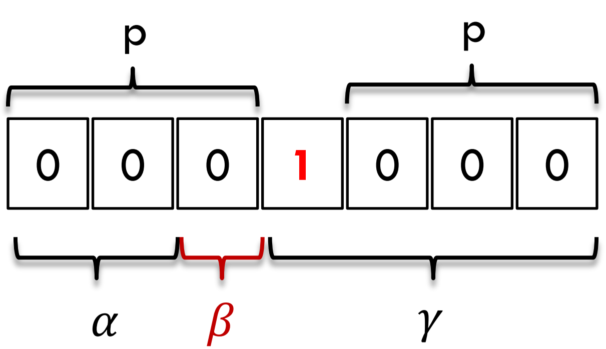
Exemplo 5

Considere a linguagem $L_5 = \{x \in \{0,1\}^* \ : x = x^R\}$, ou seja, x é um palíndromo

Seja p a constante do lema e que $\omega = 0^p 1 0^p \in L_5$

Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrito como $\alpha\beta\gamma$ e $\alpha\beta^i\gamma \in L_5, \forall i \geq 0$

Note que as condições têm que ser válidas para $\forall i \geq 0$ e que $\beta \neq \varepsilon$ e $|\alpha\beta| \leq p$.

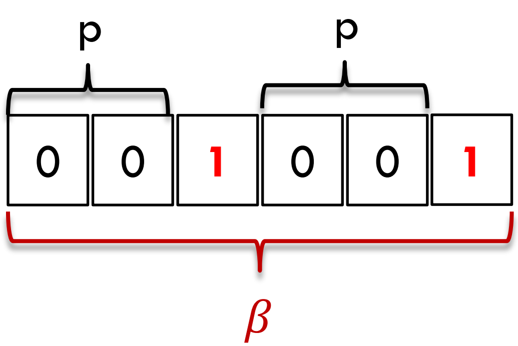


Note que β é a subcadeia a ser bombeada, i.e., pode ser **removida** ou **repetida** arbitrariamente, ou seja, para $\alpha\beta^2\gamma = 00001000 \notin L$ (**contradição**). Não esqueça que $|\boldsymbol{\alpha\beta}| \leq \boldsymbol{p}$

Exemplo 6

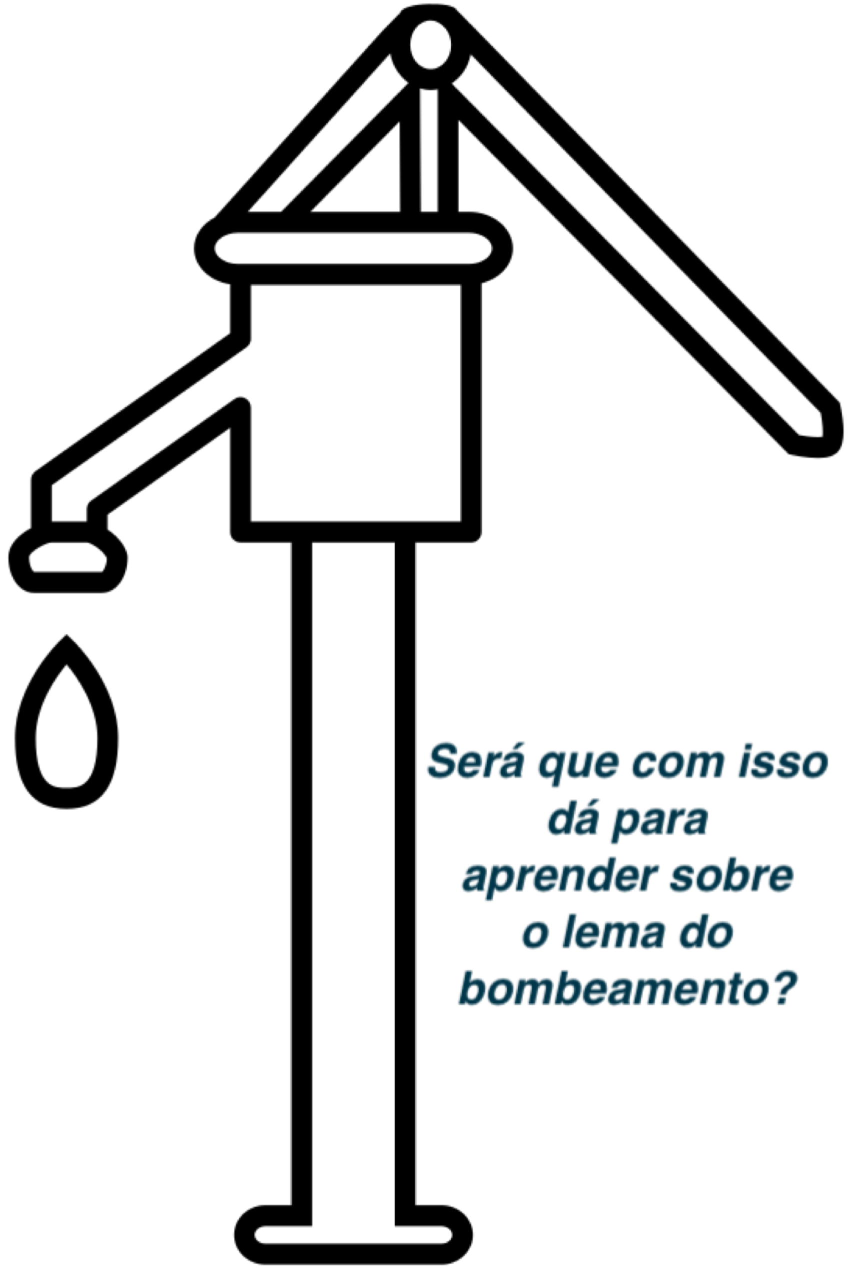
Considere a linguagem $L_6 = \{\varphi\varphi : \ \varphi \in \{0,1\}^*\}$, ou seja é a mesma cadeia φ duplicada

Seja p a constante do lema e que $\omega = 0^p 1 0^p 1 \in L_6$
Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrito como $\alpha\beta\gamma$ e $\alpha\beta^i\gamma \in L_6, \forall i \geq 0$
Note que as condições têm que ser válidas para $\forall i \geq 0$ e que $\beta \neq \varepsilon$ e $|\alpha\beta| \leq p$.



Note que: $|\alpha\beta| > p$

Note que β poderia ser bombeada caso $\alpha = \gamma = \varepsilon$. Entretanto, mesmo assim, **a regra 3 é violada**. Observe que escolhemos $\omega = 0^p 1 0^p 1 \in L_6$ como uma cadeia que exibe a "essência" da não-regularidade de L_6, em vez da cadeia $0^p \in L_6$ mas que, neste caso, não serve para demonstrar a contradição


Será que com isso
dá para
aprender sobre
o lema do
bombeamento?