FUNDAMENTOS TEÓRICOS DA COMPUTAÇÃO
-- SISTEMAS FORMAIS --

Paradoxos

Paradoxos

Paradoxos

*Um paradoxo é uma sentença declarativa **aparentemente verdadeira** mas que leva a uma **contradição** lógica ou simplesmente a algo que contradiz a intuição*

*A verdade é que, na análise dos paradoxos, **não existe uma única solução** a questões deste tipo*

***Como resolver um paradoxo?** A maioria é impossível. Muitas vezes os paradoxos **testam** nossa intuição. Os paradoxos podem ser úteis para destacar limitações em nosso conhecimento, ou que as declarações são **ambíguas**, ou falta informações, ou que há erros na argumentação*

*Os paradoxos ajudam-nos a perceber a diferença entre **verdade** e **falsidade** e a questão de **como a linguagem** se reflete em si mesma*

Paradoxos

Infinito

O infinito é ***incompreensível*** *à consciência humana porque* ***não existe*** *como entidade física.* ***Quantos números reais há entre 0 e 1?***

O infinito só existe na ***imaginação*** *dos cientistas, que precisam dele basicamente para elaborar teorias com* ***generalidade*** *suficiente para que possam ser interessantes*

Por exemplo, ***não*** *podemos supor que exista um* ***último número natural N****, pois as operações elementares com valores menores que N claramente ultrapassam N*

Somos obrigados a trabalhar com a hipótese de que a sequência dos números naturais é ***ilimitada****, ou seja,* ***infinita*** *(****sempre somar mais um****)*

Perseguir o maior número é uma tarefa sem fim… ∞

Paradoxos

Paradoxo de Galileu

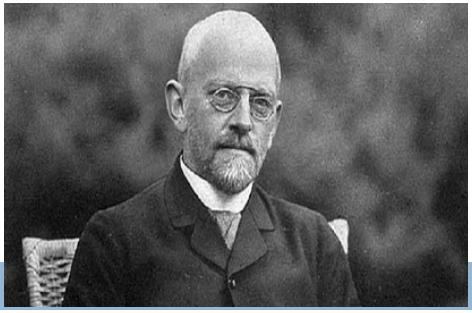
Galileu Galilei ficou muito intrigado com a seguinte questão: se o conjunto dos números pares está contido propriamente no conjunto dos números naturais, ***deve haver menos pares que naturais*** *(os ímpares não são pares, e eles também são infinitos)*

Porém se fizermos a seguinte identificação:

$$
\begin{aligned}
2 &\to 1\\
4 &\to 2\\
6 &\to 3\\
&\dots\\
2n &\to n
\end{aligned}
$$

podemos fazer o conjunto dos pares ***ocupar todo*** *o conjunto dos naturais.*
Como é possível que a parte não seja menor que o todo? Paradoxo

Paradoxos



Paradoxo do Hotel de Hilbert

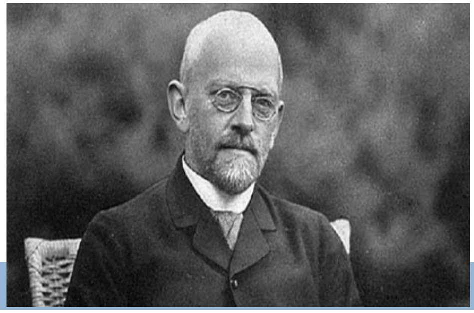
*É um hotel **hipotético** com **infinitos** quartos, **todos** ocupados*

Suponha que um novo hóspede chega. Se o hotel tivesse apenas um número finito de quartos, então o cliente não se hospedaria.

*Mas como o hotel possui um **número infinito de quartos** então se movermos o hóspede do quarto 1 para o quarto 2, o hóspede do quarto 2 para o quarto 3 e assim por diante (**simultaneamente**), movendo o hóspede do quarto N para o quarto N+1, podemos acomodar o novo hóspede no quarto 1, que agora está vago.*

$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \cdots\ \boxed{N}\ \cdots$

Paradoxos

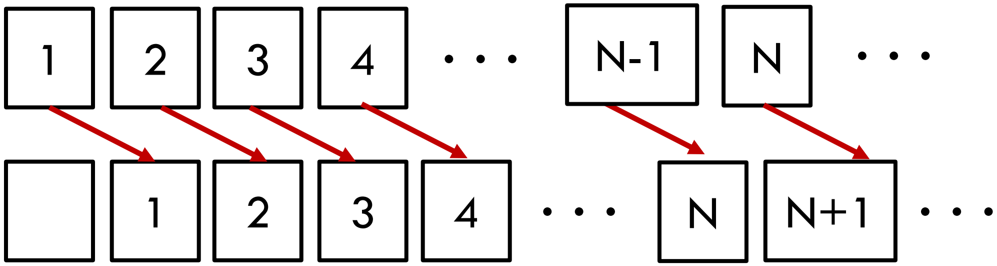


Paradoxo do Hotel de Hilbert

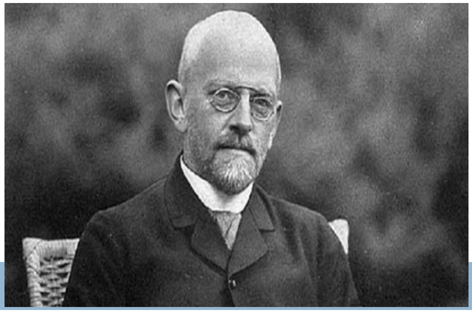
É um hotel hipotético com infinitos quartos, todos ocupados

Suponha que um novo hóspede chega. Se o hotel tivesse apenas um número finito de quartos, então o cliente não se hospedaria.

*Mas como o hotel possui um **número infinito de quartos** então se movermos o hóspede do quarto 1 para o quarto 2, o hóspede do quarto 2 para o quarto 3 e assim por diante (**simultaneamente**), movendo o hóspede do quarto N para o quarto N+1, podemos acomodar o novo hóspede no quarto 1, que agora está vago.*



Paradoxos



Mas onde está o paradoxo?

O paradoxo está na ideia de que, apesar de ***sempre*** *estar lotado, no Hotel de Hilbert* ***sempre*** *há vagas*

*Observe que o movimento dos quartos têm que ser "****simultaneamente****" porque senão o tempo de espera para liberar o quarto 1 seria infinito, já que, para isso acontecer, o enésimo quarto* ***deve estar livre*** *para a liberação do quarto n-1*

Paradoxos

Paradoxo de Russell

Em 1901, enquanto trabalhava em seu livro "Os princípios da Matemática", Bertrand Russell descobriu um paradoxo que expunha ***uma falha*** *nos fundamentos da Teoria dos Conjuntos, de Georg Cantor*

Segundo a teoria de Cantor, um conjunto pode conter outros conjuntos, ***inclusive a si mesmo****, por exemplo, o* ***conjunto das ideias é uma ideia por si só***

Mas isso ***não é verdade*** *<u>para todos os conjuntos</u>, já que existem alguns que não podem conter a si mesmos. É o caso do conjunto de* ***todos os números****, que* ***não é um*** *número, ou do conjunto de* ***todas as frutas****, que* ***não é uma*** *fruta*

Paradoxos

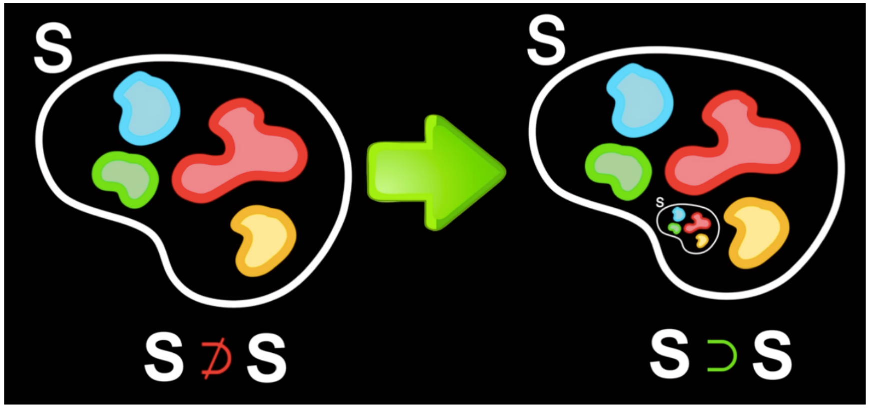
Paradoxo de Russell

O matemático criou um outro grupo: ***o conjunto dos conjuntos que não contém a si mesmos.*** *Nesse grupo, entra o conjunto de todos os números e o de todas as frutas. Vamos chamar esse conjunto de S.*

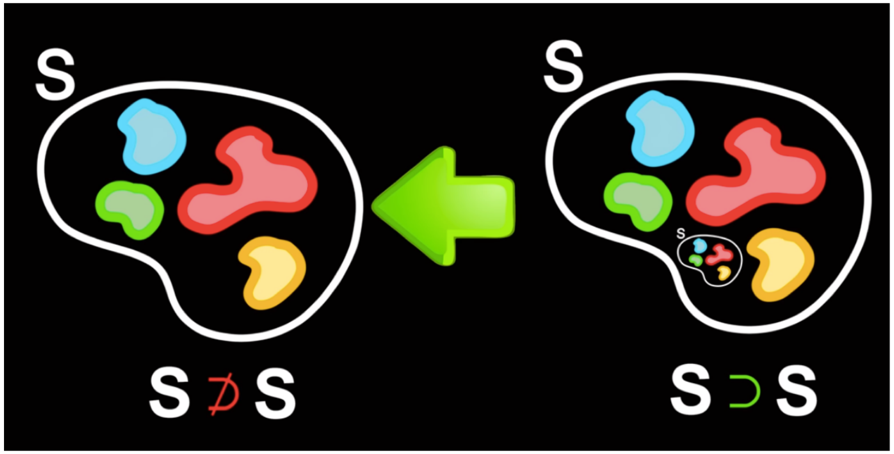
*Finalmente, ele se perguntou: "**Esse conjunto dos conjuntos (S) pertence a si mesmo?**" Existem duas repostas possíveis:* ***sim****, ele pertence a si mesmo, ou* ***não****, não pertence a si mesmo.*

Paradoxos

Esse conjunto dos conjuntos (S) pertence a si mesmo?



Se o conjunto S **é um** membro de si mesmo (S), então deve satisfazer a definição de um **conjunto que não é membro de si mesmo**, o que é uma **contradição**



Se o conjunto **S** **não é** um membro de si mesmo (**S**), então ele deveria ser um membro de si mesmo, pois **S** contém todos os conjuntos que não são membros de si mesmos, o que é uma **contradição**

Paradoxos

Paradoxo do Barbeiro

Esse paradoxo pode ser entendido também no contexto da ***autorreferência****, que é quando uma afirmação faz referência a si mesma*

Em uma cidade com uma lei rígida quanto ao uso da barba, a regra é que todo homem adulto é ***obrigado*** *a se* ***barbear*** *diariamente*

O homem pode fazer a barba ***sozinho****, em casa, ou* ***pode ir no barbeiro*** *– o único da cidade*

A lei diz que "o barbeiro deverá fazer a barba daqueles que optarem por não fazer a barba sozinhos"

Dessa afirmação, surge um ***paradoxo****, já que o próprio barbeiro não pode se barbear. Por ser o barbeiro,* ***fazer a própria barba*** *significaria ser barbeado pelo homem que faz a barba* ***só daqueles*** *que optaram por não fazer a própria barba*

Paradoxos

Sentença do Mentiroso

*Considere a seguinte afirmação: "**Esta afirmação é falsa**". A sentença do mentiroso nos leva a uma **contradição** quando tentamos determinar se ela é verdadeira ou não*

*Se assumimos a sentença como **verdadeira**, então o que ela afirma deve ser o caso e, portanto, ela deve ser **falsa**! Por outro lado, se a assumimos como **falsa** então ela de fato expressa aquilo que é o caso, sendo portanto **verdadeira**!*

*Em qualquer uma das duas possíveis situações, somos conduzidos a uma **contradição**, ou seja, se a sentença é **verdadeira** então ela é **falsa**, e se a sentença é **falsa** então ela é **verdadeira***

Paradoxos

Paradoxo do Pinóquio

*Se Pinóquio dissesse "**Meu nariz irá crescer agora**", você sabe dizer o que aconteceria? Seu nariz iria crescer ou não?*

*Como seu nariz **sempre cresce** quando ele **mente** então, quando ele disser "Meu nariz irá crescer agora" se seu nariz **crescer** significa que ele **não** estava mentido, pois foi exatamente isso que ele disse que aconteceria*

*Mas, neste caso, **como ele não estava mentindo**, seu nariz **não iria** crescer, o que faz com que sua afirmação seja **falsa***

*O que por sua vez significa que seu nariz deveria crescer, o que faria com que a sentença não mais seja **falsa**. E assim por diante!*

*Ou seja, **se a afirmação de Pinóquio for <u>verdadeira</u> então seu nariz crescerá, o que significa que ela é <u>falsa</u>**. E vice-versa!*

Paradoxos

Outros Exemplos de Paradoxos

Epimênides, o ***Cretense****, dissera: "Todos os* ***cretenses*** *são mentirosos". Ele estava dizendo a verdade?*

Numa folha de papel em branco escreva: "A sentença do outro lado é verdadeira". No outro lado escreva: "A sentença do outro lado é falsa". As sentenças são verdadeiras ou falsas?

Numa folha de papel em branco escreva: "A sentença do outro lado é falsa". No outro lado escreva: "A sentença do outro lado é falsa". As sentenças são verdadeiras ou falsas?

Paradoxos e os Sistemas Formais

*Os **paradoxos** são frequentemente usados para testar a **consistência** e a **completude** dos sistemas formais*

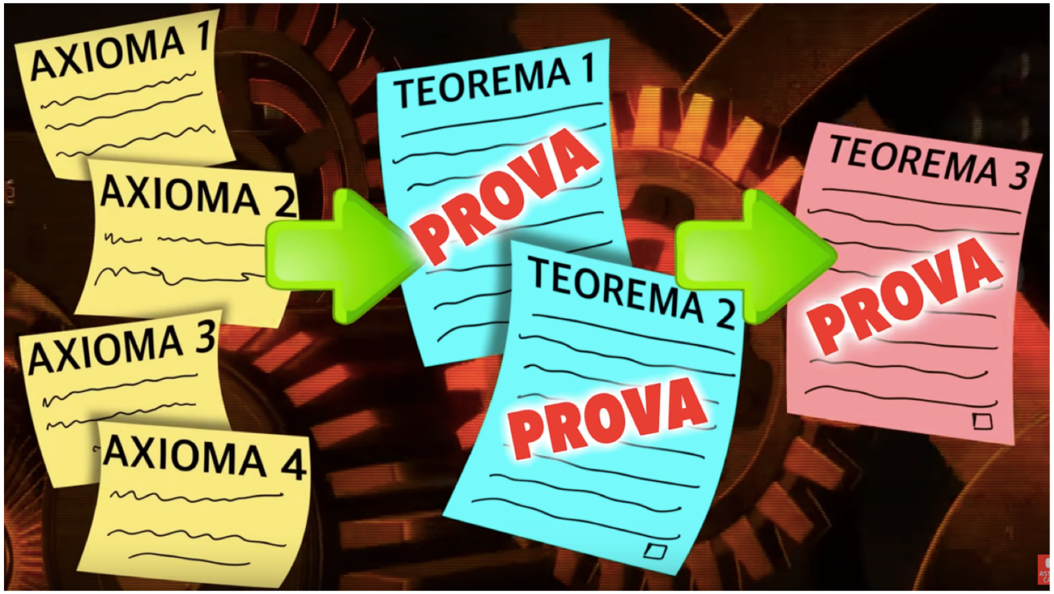
*Se um sistema formal é **consistente**, isso significa que **não é possível derivar uma contradição** dentro do sistema, ou seja, não é possível provar que uma declaração e sua negação são verdadeiras dentro do sistema, ou seja, **se um paradoxo** puder ser derivado dentro do sistema, isso significa que o sistema é inconsistente*

*Se um sistema formal é **completo**, isso significa que é possível derivar **todas as proposições verdadeiras** dentro do sistema, por isso, **se** um paradoxo não puder ser derivado dentro do sistema, isso significa que o sistema é **incompleto***

*Voltaremos ao assunto dos **paradoxos** quando estivermos estudando sobre decidibilidade, Máquinas de Turing e o Problema da Parada*

Teoria da Incompletude de Gödel

Qualquer teoria axiomática recursivamente enumerável e capaz de expressar algumas verdades básicas de aritmética ***não pode ser, ao mesmo tempo, <u>completa</u> e <u>consistente</u>****. Em uma teoria consistente, sempre há proposições que não podem ser demonstradas nem verdadeiras, nem falsas*



Por exemplo, considere a estrutura (N, <), onde N é o conjunto dos números naturais e < é a relação de ordem usual nos números naturais. Nessa estrutura, todos os axiomas da aritmética são verdadeiros, exceto o conjunto vazio que não tem um menor elemento

Teoria da Incompletude de Gödel

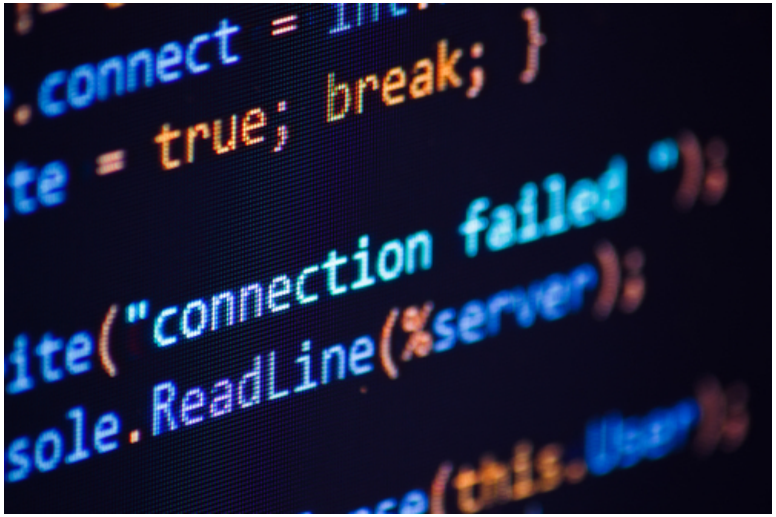
*O Teorema afirma que **sempre haverá** afirmações que são verdadeiras, mas que não podem ser deduzidas a partir das regras do sistema formal*

Na aritmética básica, 2+2=4 é uma afirmação verdadeira e que pode ser provada usando as regras da aritmética básica

*No entanto, a afirmação de que a sequência de **números primos é infinita**, que é verdadeira, mas **não pode ser provada** usando as regras da aritmética básica*

Teoria da Incompletude de Gödel

- *O Teorema de Gödel pode ser aplicado para mostrar que* ***<u>todo</u>*** ***sistema formal possui limites***
- *Um verificador de software pode ser usado para encontrar bugs em um aplicativo, mas nunca será capaz de* ***garantir*** *que o próprio aplicativo esteja* ***completamente*** *livre de bugs*
- *O próprio verificador pode* ***conter bugs****, porque, como Gödel mostrou, não é possível provar a* ***completude*** *e a* ***consistência*** *de um sistema formal* ***em si mesmo****, e a verificação de software é essencialmente um sistema formal*




WHAT IF ?
R = { S | S ∉ S }