FUNDAMENTOS TEÓRICOS DA COMPUTAÇÃO

--- LINGUAGEM LIVRE DE CONTEXTO ---

Lema do Bombeamento

Lema do Bombeamento

O lema do bombeamento para LLCs estabelece o seguinte: para qualquer LLC L, existe um número inteiro positivo p, chamado de "comprimento de bombeamento", tal que para qualquer palavra ω pertencente a L, com comprimento maior ou igual a p, podemos dividi-la em cinco partes: $\omega = \alpha\beta\gamma\lambda\mu$, de tal forma que as seguintes condições são atendidas:

1. $\forall k \geq 0$, a sequência $\alpha\beta^k\gamma\lambda^k\mu \in L$;
2. A sequência $\beta\lambda$ não é vazia, ou seja, $|\beta\lambda| > 0$;
3. O comprimento total de $\beta\gamma\lambda$ é menor ou igual a p;
4. A divisão das partes $\alpha\beta\gamma\lambda\mu$ preserva a ordem relativa dos símbolos

Lema do Bombeamento

Em termos simples, o lema do bombeamento afirma que se uma palavra ω pertence a uma LLC, então é possível "bombeá-la", ou seja, repetir ou eliminar uma parte específica dela e ainda obter uma nova palavra que também pertence à LLC

O lema do bombeamento é útil para provar que certas linguagens **não são livres de contexto**. Se conseguirmos encontrar uma palavra que **não possa ser bombeada** de acordo com as condições do lema, então podemos concluir que a linguagem **não é** livre de contexto

Lema do Bombeamento

Ao usar o lema do bombeamento para LLCs, seguimos uma estratégia de **prova por contradição**

Supomos inicialmente que uma linguagem L é livre de contexto e, em seguida, assumimos o comprimento de bombeamento p

Em seguida, escolhemos uma palavra ω em L com comprimento maior ou igual a p e a dividimos em partes $\alpha\beta\gamma\lambda\mu$

Ao analisar as condições do lema, procuramos encontrar uma contradição, mostrando que pelo menos uma das condições não pode ser satisfeita

Lema do Bombeamento

Se conseguirmos encontrar **uma palavra** que não possa ser bombeada de acordo com as condições do lema, podemos concluir que a linguagem **não é** livre de contexto

No entanto, é importante observar que o lema do bombeamento **não fornece um critério completo** para decidir se uma linguagem é livre de contexto ou não, mas pode ser usado como uma ferramenta útil para **demonstrar a <u>não pertinência</u>** de certas linguagens à classe das LLCs

O lema do bombeamento fornece uma técnica para mostrar que certas linguagens **não são livres de contexto**, através da identificação de palavras que não podem ser bombeadas

Lema do Bombeamento

Pelo lema, existe uma forma de bombear as cadeias de tal forma que: $\exists p, \forall \omega \in L$ com $|\omega| \geq p, \exists \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu$ com $\omega = \alpha\beta\gamma\lambda\mu$ e que valem as seguintes condições:

1) $\beta\lambda \neq \varepsilon$
2) $|\beta\gamma\lambda| \leq p$
3) $\forall k \geq 0, \alpha\beta^k\gamma\lambda^k\mu \in L$

Lema do Bombeamento

Pelo lema, existe uma forma de bombear as cadeias de tal forma que: $\exists p, \forall \omega \in L$ com $|\omega| \geq p, \exists \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu$ com $\omega = \alpha\beta\gamma\lambda\mu$ e que valem as seguintes condições:

1) $\beta\lambda \neq \varepsilon$
2) $|\beta\gamma\lambda| \leq p$
3) $\forall k \geq 0, \alpha\beta^k\gamma\lambda^k\mu \in L$

Usamos o lema em uma **prova por contradição** e mostramos que: $\forall p, \exists \omega \in L$ com $|\omega| \geq p, \forall \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu$ com $\omega = \alpha\beta\gamma\lambda\mu$ em que as as três condições acima não valem. Em outras palavras:

1) $\beta\lambda = \varepsilon$
2) $|\beta\gamma\lambda| > p$
3) $\exists k \geq 0, \alpha\beta^k\gamma\lambda^k\mu \notin L$

Lema do Bombeamento

Pelo lema, existe uma forma de bombear as cadeias de tal forma que: $\exists p, \forall \omega \in L$ com $|\omega| \geq p, \exists \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu$ com $\omega = \alpha\beta\gamma\lambda\mu$ e que valem as seguintes condições:

1) $\beta\lambda \neq \varepsilon$
2) $|\beta\gamma\lambda| \leq p$
3) $\forall k \geq 0, \alpha\beta^k\gamma\lambda^k\mu \in L$

Usamos o lema em uma **prova por contradição** e mostramos que: $\forall p, \exists \omega \in L$ com $|\omega| \geq p, \forall \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu$ com $\omega = \alpha\beta\gamma\lambda\mu$ em que as as três condições acima não valem. Em outras palavras:

1) $\beta\lambda = \varepsilon$
2) $|\beta\gamma\lambda| > p$
3) $\exists k \geq 0, \alpha\beta^k\gamma\lambda^k\mu \notin L$

É usual considerar que $\beta\lambda \neq \varepsilon$ e que $|\beta\gamma\lambda| \leq p$ e tenta-se mostrar que não vai dar para bombear

Exemplo 1

Prove que $L_1 = \{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$ não é livre de contexto. Suponha que é livre de contexto, então vale o lema. Seja p o valor dado pelo lema e $\omega = a^p b^p c^p \in L_1$. Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma\lambda\mu$ tal que as três condições valem.

Se percebermos que não tem como dividir ω de tal forma que $\beta\lambda = \varepsilon$ já provamos que não vale e chegamos a uma contradição. Se percebermos que não tem como dividir ω de tal forma que $|\beta\gamma\lambda| > p$ já provamos que não vale e chegamos a uma contradição. Podemos assumir que $|\beta\gamma\lambda| \leq p$.

$$\overbrace{a\,a\,\cdots\,a}^{p}\ \overbrace{b\,b\,\cdots\,b}^{p}\ \overbrace{c\,c\,\cdots\,c}^{p}$$

Exemplo 1

$$\overbrace{\underbrace{a}_{\alpha}\ \underbrace{a \cdots a}_{\beta\gamma\lambda}}^{p}\ \underbrace{\overbrace{b\ b \cdots b}^{p}\ \ \overbrace{c\ c \cdots c}^{p}}_{\mu}$$

Este é um caso em que β e λ têm apenas símbolo a e $\beta = a^k$ e $\lambda = a^j$. Considerando $p = 4$, uma divisão possível seria $\alpha = a; \beta = a; \gamma = a; \lambda = a; \mu = bbbbcccc.$ E que $\alpha\beta^2\gamma\lambda^2\mu = a\ aa\ a\ aa\ bbbbcccc \notin L_1$. O problema é que você só bombeia o símbolo a.

Exemplo 1

$$\overbrace{\underbrace{a}_{\alpha}\ \underbrace{a\ \cdots\ a}_{\varepsilon\gamma\lambda}}^{p}\ \underbrace{\overbrace{b\ b\ \cdots\ b}^{p}\ \overbrace{c\ c\ \cdots\ c}^{p}}_{\mu}$$

Este é um caso em que β e λ têm apenas símbolo a e $\beta = \varepsilon$ e $\lambda = a^k$. Considerando $p = 4$, uma divisão possível seria $\alpha = a; \beta = \varepsilon;\ \gamma = aa;\ \lambda = a;\ \mu = bbbbcccc.$ E que $\alpha\beta^2\gamma\lambda^2\mu = a\ \varepsilon\varepsilon\ aa\ aa\ bbbbcccc \notin L_1$. O problema é que você só bombeia o símbolo a.

Exemplo 1

$$\overbrace{\underbrace{a}_{\alpha}\;\underbrace{a\;\cdots\;a}_{\beta\gamma\varepsilon}}^{p}\;\underbrace{\overbrace{b\;b\;\cdots\;b}^{p}\;\overbrace{c\;c\;\cdots\;c}^{p}}_{\mu}$$

Este é um caso em que β e λ têm apenas símbolo a e $\beta = a^k$ e $\lambda = \varepsilon$. Considerando $p = 4$, uma divisão possível seria $\alpha = a; \beta = a; \gamma = aa; \lambda = \varepsilon; \mu = bbbbcccc.$ E que $\alpha\beta^2\gamma\lambda^2\mu = a\ aa\ aa\ \varepsilon\varepsilon\ bbbbcccc \notin L_1$. O problema é que você só bombeia o símbolo a.

Exemplo 1

$$\underbrace{\overbrace{a\,a\,\cdots\,a}^{p}}_{\alpha}\ \underbrace{\overbrace{b\,b\,\cdots\,b}^{p}}_{\beta\gamma\lambda}\ \underbrace{\overbrace{c\,c\,\cdots\,c}^{p}}_{\mu}$$

Este é um caso em que β e λ têm apenas o símbolo b e $\beta = b^k$ e $\lambda = b^j$. Considerando $p = 4$, uma divisão possível seria $\alpha = aaaa; \beta = b;\ \gamma = bb;\ \lambda = b;\ \mu = cccc.$ E que $\alpha\beta^2\gamma\lambda^2\mu = aaaa\ bb\ bb\ bb\ cccc \notin L_1$. O problema é que você só bombeia o símbolo b.

Exemplo 1

$$\underbrace{\overbrace{a\,a\,\cdots\,a}^{p}}_{\alpha}\ \underbrace{\overbrace{b\,b\,\cdots\,b}^{p}}_{\varepsilon\gamma\lambda}\ \underbrace{\overbrace{c\,c\,\cdots\,c}^{p}}_{\mu}$$

Este é um caso em que β e λ têm apenas o símbolo b e $\beta = \varepsilon$ e $\lambda = b^j$. Considerando $p = 4$, uma divisão possível seria $\alpha = aaaa; \beta = \varepsilon;\ \gamma = bb;\ \lambda = bb;\ \mu = cccc.$ E que $\alpha\beta^2\gamma\lambda^2\mu = aaaa\ \varepsilon\varepsilon\ bb\ bbbb\ cccc \notin L_1$. O problema é que você só bombeia o símbolo b.

Exemplo 1

$$\underbrace{\overbrace{a\,a\,\cdots\,a}^{p}}_{\alpha}\;\underbrace{\overbrace{b\,b\,\cdots\,b}^{p}}_{\beta\gamma\varepsilon}\;\underbrace{\overbrace{c\,c\,\cdots\,c}^{p}}_{\mu}$$

Este é um caso em que β e λ têm apenas o símbolo b e $\beta = b^k$ e $\lambda = \varepsilon$. Considerando $p = 4$, uma divisão possível seria $\alpha = aaaa; \beta = bb;\ \gamma = bb;\ \lambda = \varepsilon;\ \mu = cccc.$ E que $\alpha\beta^2\gamma\lambda^2\mu = aaaa\ bbbb\ bb\ \varepsilon\varepsilon\ cccc \notin L_1$. O problema é que você só bombeia o símbolo b.

Exemplo 1

$$\underbrace{\overbrace{a\,a\,\cdots\,a}^{p}\;\;\overbrace{b\,b\,\cdots\,b}^{p}}_{\alpha}\;\;\overbrace{\underbrace{c\,c\,\cdots}_{\beta\gamma\lambda}\,\underbrace{c}_{\mu}}^{p}$$

Este é um caso em que β e λ têm apenas o símbolo c e $\beta = c^k$ e $\lambda = c^j$. Considerando $p = 4$, uma divisão possível seria $\alpha = aaaabbbb; \beta = c;\ \gamma = c;\ \lambda = c;\ \mu = c.$ E que $\alpha\beta^2\gamma\lambda^2\mu = aaaabbbb\ cc\ c\ cc\ c \notin L_1$. O problema é que você só bombeia o símbolo c.

Exemplo 1

$$\underbrace{\overbrace{a\ a\ \cdots\ a}^{p}\ \ \overbrace{b\ b\ \cdots\ b}^{p}}_{\alpha}\ \ \overbrace{\underbrace{c\ c\ \cdots}_{\varepsilon\gamma\lambda}\ \underbrace{c}_{\mu}}^{p}$$

Este é um caso em que β e λ têm apenas o símbolo c e $\beta = \varepsilon$ e $\lambda = c^j$. Considerando $p = 4$, uma divisão possível seria $\alpha = aaaabbbb; \beta = \varepsilon;\ \gamma = cc;\ \lambda = c;\ \mu = c$. E que $\alpha\beta^2\gamma\lambda^2\mu = aaaabbbb\ \varepsilon\varepsilon\ cc\ cc\ c \notin L_1$. O problema é que você só bombeia o símbolo c.

Exemplo 1

$$\underbrace{\overbrace{a\,a\,\cdots\,a}^{p}\quad\overbrace{b\,b\,\cdots\,b}^{p}}_{\alpha}\quad\overbrace{\underbrace{c\,c\,\cdots}_{\beta\gamma\varepsilon}\,\underbrace{c}_{\mu}}^{p}$$

Este é um caso em que β e λ têm apenas o símbolo c e $\beta = c^k$ e $\lambda = \varepsilon$. Considerando $p = 4$, uma divisão possível seria $\alpha = aaaabbbb; \beta = c;\ \gamma = cc;\ \lambda = \varepsilon;\ \mu = c.$ E que $\alpha\beta^2\gamma\lambda^2\mu = aaaabbbb\ cc\ cc\ \varepsilon\varepsilon\ c \notin L_1$. O problema é que você só bombeia o símbolo c.

Exemplo 1

$$\underbrace{\overbrace{a\ a\ \cdots}^{p}}_{\alpha}\ \underbrace{\overbrace{a\ \ b\ b}}_{\beta\gamma\lambda}\ \overbrace{\cdots\ b}^{p}\ \ \underbrace{\overbrace{c\ c\ \cdots\ c}^{p}}_{\mu}$$

Este é um caso em que β e λ têm dois símbolos a e b; $\beta = a^k b^j$ e $\lambda = b^t$. Considerando $p = 4$, uma divisão possível seria $\alpha = aaa; \beta = ab;\ \gamma = b;\ \lambda = b;\ \mu = bcccc.$ E que $\alpha\beta^2\gamma\lambda^2\mu = aaa\ abab\ b\ bb\ bcccc \notin L_1$. O problema é que você bombeia a mistura de a com b.

Exemplo 1

$$\underbrace{\overbrace{a\ a\ \cdots}^{p}}_{\alpha}\overbrace{\underbrace{a\ \ b\ b}_{\varepsilon\gamma\lambda}\ \cdots b}^{p}\ \overbrace{c\ c\ \cdots c}^{p}$$

$$\underbrace{a\ a\ \cdots}_{\alpha}\ \underbrace{a\ b\ b}_{\varepsilon\gamma\lambda}\ \underbrace{\cdots b\ c\ c\ \cdots c}_{\mu}$$

Este é um caso em que β e λ têm dois símbolos a e b; $\beta = \varepsilon$ e $\lambda = b^t$. Considerando $p = 4$, uma divisão possível seria $\alpha = aaa; \beta = \varepsilon;\ \gamma = \varepsilon;\ \lambda = ab;\ \mu = bbbcccc.$ E que $\alpha\beta^2\gamma\lambda^2\mu = aaa\ \varepsilon\varepsilon\ \varepsilon\ abab\ bbbcccc \notin L_1$. O problema é que você bombeia a mistura de a com b.

Exemplo 1

$$\overbrace{a\ a\ \cdots\ a}^{p}\ \ \overbrace{b\ b\ \cdots\ b}^{p}\ \ \overbrace{c\ c\ \cdots\ c}^{p}$$

$$\underbrace{a\ a\ \cdots}_{\alpha}\ \underbrace{a\ \ b\ b}_{\beta\gamma\varepsilon}\ \underbrace{\cdots\ b\ \ c\ c\ \cdots\ c}_{\mu}$$

Este é um caso em que β e λ têm dois símbolos a e b; $\beta = a^k b^j$ e $\lambda = \varepsilon$. Considerando $p = 4$, uma divisão possível seria $\alpha = aaa; \beta = ab;\ \gamma = bb;\ \lambda = \varepsilon;\ \mu = bcccc.$ E que $\alpha\beta^2\gamma\lambda^2\mu = aaa\ abab\ bb\ \varepsilon\varepsilon\ bcccc \notin L_1$. O problema é que você bombeia a mistura de a com b.

Exemplo 1

$$\overbrace{a\ a\ \cdots\ \color{red}{a}}^{p}\quad \overbrace{\color{red}{b\ b}\ \cdots\ b}^{p}\quad \overbrace{c\ c\ \cdots\ c}^{p}$$

$$\underbrace{a\ a\ \cdots}_{\alpha}\ \underbrace{\color{red}{a}\ \ \color{red}{b\ b}}_{\beta\gamma\lambda}\ \underbrace{\cdots\ b\ \ c\ c\ \cdots\ c}_{\mu}$$

Este é um caso em que β e λ têm dois símbolos $\color{red}{a}$ e $\color{red}{b}$; $\beta = a^k$ e $\lambda = a^j b^t$. Considerando $p = 4$, uma divisão possível seria $\alpha = a; \beta = a; \gamma = a; \lambda = ab; \mu = bbbcccc.$ E que $\alpha\beta^2\gamma\lambda^2\mu = a\ aa\ a\ \color{red}{abab}\ bbbcccc \notin L_1$. O problema é que você bombeia a mistura a com b. **O mesmo vale para $\boldsymbol{\beta = \varepsilon}$ e, depois, $\boldsymbol{\lambda = \varepsilon}$.**

Exemplo 1

$$\underbrace{\overbrace{a\,a\,\cdots\,a}^{p}\;\overbrace{b\,b\,\cdots\,b}^{p}}_{\alpha}\;\underbrace{\overbrace{b\;c}}_{\beta\gamma\lambda}\underbrace{c\,\cdots\,c}_{\mu}$$

Este é um caso em que β e λ têm dois símbolos b e c; $\beta = b^k c^j$ e $\lambda = c^t$. Considerando $p = 4$, uma divisão possível seria $\alpha = aaaabbb$; $\beta = bc$; $\gamma = c$; $\lambda = c$; $\mu = c$. E que $\alpha\beta^2\gamma\lambda^2\mu = aaaabbb\ bcbc\ c\ cc\ c \notin L_1$. O problema é que você bombeia a mistura de a com b. **O mesmo vale para $\beta = \varepsilon$ e, depois, $\lambda = \varepsilon$.**

Exemplo 1

$$\overbrace{a\,a\,\cdots\,a}^{p}\;\;\overbrace{b\,b\,\cdots\,\color{red}{b}}^{p}\;\;\overbrace{\color{red}{c}\,c\,\cdots\,c}^{p}$$

$$\underbrace{a\,a\,\cdots\,a\;\;b\,b\,\cdots}_{\alpha}\;\underbrace{\color{red}{b}\;\;\color{red}{c}}_{\beta\gamma\lambda}\;\underbrace{c\,\cdots\,c}_{\mu}$$

Este é um caso em que β e λ têm dois símbolos $\color{red}{b}$ e $\color{red}{c}$; $\beta = b^k$ e $\lambda = b^j c^t$. Considerando $p = 4$, uma divisão possível seria $\alpha = aaaabb$; $\beta = b$; $\gamma = \varepsilon$; $\lambda = bc$; $\mu = ccc$. E que $\alpha\beta^2\gamma\lambda^2\mu = aaaabb\ b\ \varepsilon\ \color{red}{bcbc}\ ccc \notin L_1$. O problema é que você bombeia a mistura de b com c. **O mesmo vale para $\boldsymbol{\beta = \varepsilon}$ e, depois, $\boldsymbol{\lambda = \varepsilon}$.**

Exemplo 1

$$\overbrace{a\ a\ \cdots\ {\color{red}a}}^{p}\ \overbrace{{\color{red}b\ b\ \cdots\ b}}^{p}\ \overbrace{{\color{red}c}\ c\ \cdots\ c}^{p}$$

$$\underbrace{a\ a\ \cdots}_{\alpha}\ \underbrace{{\color{red}a\ b\ b\ \cdots\ b\ c}}_{\beta\gamma\lambda}\ \underbrace{c\ \cdots\ c}_{\mu}$$

Não é possível ter três símbolos porque $|\beta\gamma\lambda| \leq p$

Exemplo 1

Resumindo…

1) se β e λ têm apenas um símbolo cada:
1.1) $\beta = a^k$ e $\lambda = a^j \mid b^j \mid \varepsilon$
1.2) $\beta = b^k$ e $\lambda = b^j \mid c^j \mid \varepsilon$
1.3) $\beta = c^k$ e $\lambda = c^j \mid \varepsilon$
1.4) $\beta = \varepsilon$ e $\lambda = a^j \mid b^j \mid c^j$
Com $k, j \geq 1$. Em todos os casos, $\alpha\beta^2\gamma\lambda^2\mu$ terá quantidades diferentes dos três símbolos

11 possibiidades

Exemplo 1

2) se β e λ têm dois símbolos:
2.1) $\beta = a^k b^j$ e $\lambda = b^t \mid \varepsilon$
2.2) $\beta = b^k c^j$ e $\lambda = c^t \mid \varepsilon$
2.3) $\beta = a^k \mid \varepsilon$ e $\lambda = a^j b^t$
2.4) $\beta = b^k \mid \varepsilon$ e $\lambda = b^j c^t$
Com $k, j, t \geq 1$. Em todos os casos, $\alpha\beta^2\gamma\lambda^2\mu$ terá os símbolos foram de ordem

Nos dois casos gerais, não importa como ω é dividida, temos que $\alpha\beta^2\gamma\lambda^2\mu \notin L_1$. Logo L_1 **não é** livre de contexto.

8 possibiidades

Exemplo 2

Prove que $L_2 = \{a^i b^j c^k : 0 \geq i \geq j \geq k\}$ não é livre de contexto. Suponha que é livre de contexto, então vale o lema. Seja p o valor dado pelo lema e $\omega = a^p b^p c^p \in L_2$. Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma\lambda\mu$ tal que as três condições valem.

Qualquer divisão em que $|\beta\gamma\lambda| \leq p$ e $\beta\lambda \neq \varepsilon$ deixará $\beta\gamma\lambda$ com no máximo dois símbolos diferentes (não tem como ser três símbolos).

Temos, portanto, dois casos:
1) β e λ possuem somente um símbolo; e
2) β e λ possuem dois símbolos

Exemplo 2

1) se β e λ têm apenas um símbolo cada:

1.1) $\beta = a^k$ e $\lambda = a^j \mid b^j \mid \varepsilon \;\; \rightarrow \;\; \alpha\beta^2\gamma\lambda^2\mu$ tem menos c's do que a's e b's

1.2) $\beta = b^k$ e $\lambda = b^j \mid c^j \mid \varepsilon \;\; \rightarrow \;\; \alpha\beta^0\gamma\lambda^0\mu$ se eu bombear para baixo tem menos b's ou c's do que a's

1.3) $\beta = c^k$ e $\lambda = c^j \mid \varepsilon \;\; \rightarrow \;\; \alpha\beta^0\gamma\lambda^0\mu$ se eu bombear para baixo tem menos c's do que a's e b's

1.4) $\beta = \varepsilon$ e $\lambda = a^j \mid b^j \rightarrow \alpha\beta^2\gamma\lambda^2\mu$ tem menos c's do que a's e b's

1.5) $\beta = \varepsilon$ e $\lambda = c^j \;\; \rightarrow \;\; \alpha\beta^0\gamma\lambda^0\mu$ tem menos c's do que a's e b's

Com $k, j \geq 1$. Em todos os casos, sempre terá quantidades diferentes dos três símbolos

Exemplo 2

2) se β e λ têm dois símbolos:

2.1) $\beta = a^k b^j$ e $\lambda = b^t \mid \varepsilon$

2.2) $\beta = b^k c^j$ e $\lambda = c^t \mid \varepsilon$

2.3) $\beta = a^k \mid \varepsilon$ e $\lambda = a^j b^t$

2.4) $\beta = b^k \mid \varepsilon$ e $\lambda = b^j c^t$

Com $k, j, t \geq 1$. Em todos os casos, $\alpha\beta^2\gamma\lambda^2\mu$ terá os símbolos **fora de ordem** (p.ex., $abab$, ou $bcbc$)

Nos dois casos gerais, não importa como ω é dividida, temos que $\alpha\beta^2\gamma\lambda^2\mu \notin L_2$ ou $\alpha\beta^0\gamma\lambda^0\mu \notin L_2$. Logo L_2 **não é** livre de contexto.

Exemplo 3

Prove que $L_3 = \{\omega\omega : \omega \in \{0,1\}^*\}$ não é livre de contexto. Suponha que é livre de contexto, então vale o lema. Seja p o valor dado pelo lema e $\omega = 0^p10^p1 \in L_2$. Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma\lambda\mu$ tal que as três condições valem.

Entretanto, essa cadeia ω não ajuda porque é possível dividi-la em $\alpha\beta\gamma\lambda\mu$ e ela ainda é possível ser bombeada.

$$\underbrace{00\cdots0}_{\alpha}\,\underbrace{0}_{\beta}\,\underbrace{1}_{\gamma}\,\underbrace{0}_{\lambda}\,\underbrace{0\cdots01}_{\mu}$$

$$0^{p-1}0^k10^k0^{p-1}1$$

Se bombear β e λ :
$\alpha\beta^k\gamma\lambda^k\mu \in L_3$

Exemplo 3

Prove que $L_3 = \{\omega\omega : \omega \in \{0{,}1\}^*\}$ não é livre de contexto. Suponha que é livre de contexto, então vale o lema. Seja p o valor dado pelo lema e $\omega = 0^p 1 0^p 1 \in L_2$. Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma\lambda\mu$ tal que as três condições valem.

Entretanto, essa cadeia ω **não ajuda** porque é possível dividi-la em $\alpha\beta\gamma\lambda\mu$ e ela ainda é possível ser bombeada.

Fica claro que mesmo que o Lema do Bombeamento não seja verificado, isso não quer dizer que a linguagem é Livre de Contexto. Mas essa linguagem não é Livre de Contexto, só precisamos encontrar uma cadeia que ao ser bombeada não siga as três condições

Exemplo 3

Temos que verificar **outra alternativa**. Suponha que $\omega = 0^p1^p0^p1^p \in L_3$. Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma\lambda\mu$ tal que as três condições valem.

Denote $\omega = AB$, com $A = B = 0^p1^p$. Qualquer divisão que tenha $|\beta\gamma\lambda| \leq p$ e $\beta\lambda \neq \varepsilon$ será de uma das três formas:

1) $\beta\gamma\lambda$ está totalmente em A. Quando bombear, $\alpha\beta^2\gamma\lambda^2\mu$ terá 1 na primeira posição de B, mas A começa com 0, não sendo da forma $\omega\omega$

000111	000111
0000111	1000111

Quando bombear, a parte A vai crescer, mas não a parte B. Quando dividir no meio, com certeza, vai ter 1 na primeira posição da segunda metade

Exemplo 3

Temos que verificar **outra alternativa**. Suponha que $\omega = 0^p1^p0^p1^p \in L_3$. Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma\lambda\mu$ tal que as três condições valem.

Denote $\omega = AB$, com $A = B = 0^p1^p$. Qualquer divisão que tenha $|\beta\gamma\lambda| \leq p$ e $\beta\lambda \neq \varepsilon$ será de uma das três formas:

2) $\beta\gamma\lambda$ está totalmente em B. Quando bombear, $\alpha\beta^2\gamma\lambda^2\mu$ tem "0" na última posição de A, mas a parte B termina em "1" e, portanto, não sendo da forma $\omega\omega$

000111 | 000111

0001110 | 0001111

Quando bombear, só a parte B vai crescer, mas não a parte A. Quando dividir no meio, com certeza, vai ter 0 na última posição da primeira metade

Exemplo 3

Temos que verificar **outra alternativa**. Suponha que $\omega = 0^p 1^p 0^p 1^p \in L_3$. Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma\lambda\mu$ tal que as três condições valem.

Denote $\omega = AB$, com $A = B = 0^p 1^p$. Qualquer divisão que tenha $|\beta\gamma\lambda| \leq p$ e $\beta\lambda \neq \varepsilon$ será de uma das três formas:

3) $\beta\gamma\lambda$ tem uma parte em A e outra parte em B. Então $\beta\gamma\lambda = 1^k 0^j$, de modo que $\alpha\beta^0\gamma\lambda^0\mu = 0^p 1^{p-k} 0^{p-j} 1^p$, que não pode ser escrita como $\omega\omega$.

$\beta\gamma\lambda$

0001 110 00111

0001 1 00111

Assuma que $\beta = 1$; $\gamma = 1$; $\lambda = 0$. Quando bombear para baixo, você vai arrancar 1's e 0's. Portanto, a cadeia resultante não faz parte da linguagem.

Exemplo 3

Temos que verificar **outra alternativa**. Suponha que $\omega = 0^p 1^p 0^p 1^p \in L_3$. Como $|\omega| \geq p$, ω pode ser escrita como $\alpha\beta\gamma\lambda\mu$ tal que as três condições valem.

Denote $\omega = AB$, com $A = B = 0^p 1^p$. Qualquer divisão que tenha $|\beta\gamma\lambda| \leq p$ e $\beta\lambda \neq \varepsilon$ será de uma das três formas:

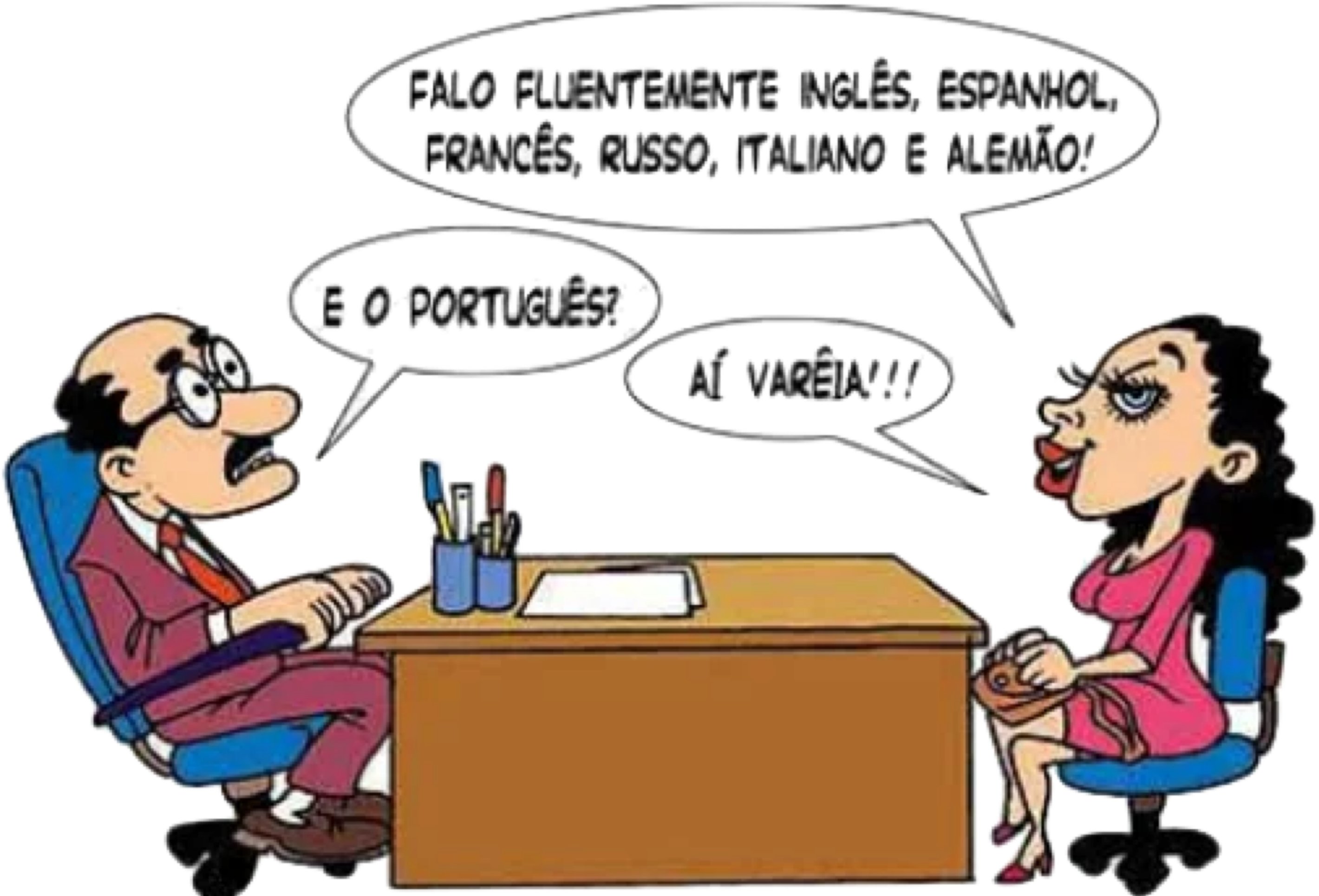
3) $\beta\gamma\lambda$ tem uma parte em A e outra parte em B. Então $\beta\gamma\lambda = 1^k 0^j$, de modo que $\alpha\beta^0\gamma\lambda^0\mu = 0^p 1^{p-k} 0^{p-j} 1^p$, que não pode ser escrita como $\omega\omega$.

$\beta\varepsilon\lambda$

00011	10	00111

0001111	0000111

Para bombear para cima, é necessário que $\gamma = \varepsilon$. Neste caso, $\alpha\beta^2\gamma\lambda^2\mu \notin L_3$


FALO FLUENTEMENTE INGLÊS, ESPANHOL, FRANCÊS, RUSSO, ITALIANO E ALEMÃO!
E O PORTUGUÊS?
AÍ VARÊIA!!!