FUNDAMENTOS TEÓRICOS DA COMPUTAÇÃO

--- LINGUAGENS NÃO REGULARES ---

Lema do Bombeamento

Bombeamento (ou repetição)

Para toda linguagem regular existe um AF que a reconhece

- Seja o AF com o **menor número possível** de estados
- Seja k a **quantidade de estados** desse AF
- Seja $\omega \in L : |\omega| \geq k$
- Neste caso, há uma sequência de estados $q_0, q_1, \cdots, q_f$ que reconhece ω
- Como o AF tem apenas k estados e $|\omega| \geq k$, de acordo com o **Princípio da Casa de Pombos**, ao menos **um estado** é visitado mais de uma vez
- Seja q_r o estado visitado múltiplas vezes
- A cada visita ao estado q_r, uma cadeia de símbolos se **repete**, ou seja é **bombeada**

Bombeamento (ou repetição)

O Lema do Bombeamento (LB) é a técnica que só serve para provar a **não-regularidade** de uma linguagem

Considerando que, se $P \rightarrow Q$, então $\neg Q \rightarrow \neg P$ (contrapositiva)

Exemplo:

sol → praia *(se fizer sol eu vou à praia)*

¬ praia → ¬ sol *(se não fui à praia é porque não fez sol)*

Mas, ¬ sol → ??? *(se não fez sol o que acontece? Não sei!)*

Portanto:

O lema diz que: L é uma LR → ∃ propriedade de bombeamento

Se ∄ propriedade de bombeamento → L **não é** uma LR

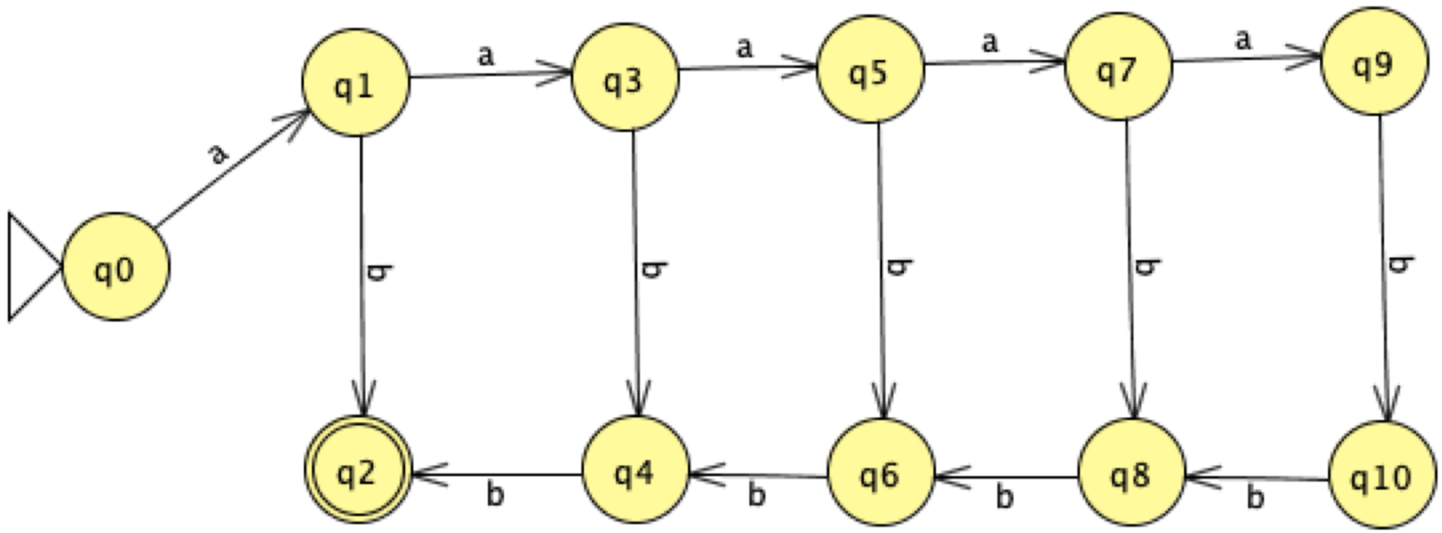
E se ∃ propriedade de bombeamento, **não posso falar nada!**

Bombeamento (ou repetição)

Se a linguagem possuir palavras de tamanho menor ou igual a p?

Considere a linguagem $L = \{a^n b^n : n \leq 5\}$

Nos casos em que L possui apenas $|\omega|$ limitado, é sempre possível construir um AF para reconhecer L



Toda linguagem **finita** é uma **Linguagem Regular**

Lema do Bombeamento

O teorema afirma que toda linguagem regular têm uma **propriedade especial**. Se pudermos provar que uma linguagem **<u>não</u> possui** esta propriedade, temos a garantia de que ela **<u>não</u> é regular**

A propriedade diz que todas as cadeias da linguagem podem ser "bombeadas" (ou repetidas) se elas são no mínimo tão longas quanto um determinado valor especial, chamado de ***comprimento do bombeamento.*** Isto significa que cada cadeia contém uma parte **<u>que pode ser repetida várias vezes</u>**, e a cadeia permanece na linguagem

Comprimento do Bombeamento

É comum assumirmos que o **comprimento do bombeamento** seja o **número de estados do AF**, porque toda cadeia maior que o número de estados necessariamente força pelo menos um estado do AF a se repetir

Entretanto, não sabemos o **comprimento do bombeamento** porque não temos o AF correspondente. Por isso, temos que fazer **suposições** sobre os valores do **comprimento do bombeamento**

Definição do lema do bombeamento

Se L é uma linguagem **regular**, então existe um número $p > 0$ (***comprimento do bombeamento***) tal que toda cadeia $\omega \in L$ com $|\omega| \geq p$ pode ser escrita da forma $\omega = \alpha\beta\gamma$ em que

1. $\forall\, k \geq 0, \alpha\beta^k\gamma \in L$
2. $\beta \neq \varepsilon$
3. $|\alpha\beta| \leq p$

Definição do lema do bombeamento

Sempre assumimos que L é uma linguagem regular. Não sabemos qual é o número p, só assumimos que ele existe

A ideia é mostrar (por absurdo) que **para <u>toda</u> decomposição** de ω em $\alpha\beta\gamma$, **existe** um $k \geq 0$ tal que $\alpha\beta^k\gamma \notin L$

β não pode ser ε, porque é a subcadeia a ser bombeada, isto é, **repetida** ($\beta^k, k \geq 0$) ou até **removida** ($\beta^0 = \varepsilon$).

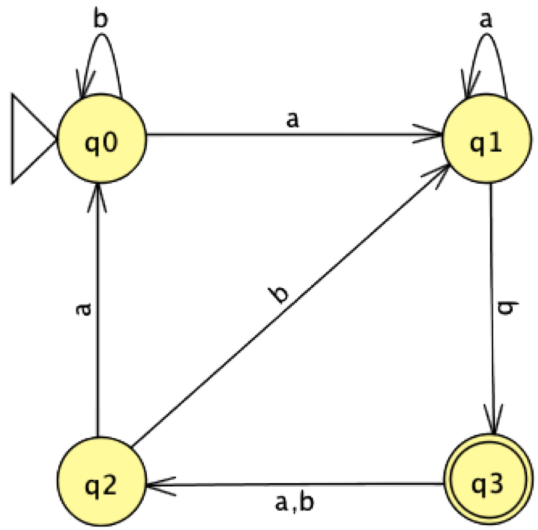
Entretanto, α e γ podem ser ε

A ideia da prova do lema

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AF que reconhece L. Seja o ***comprimento do bombeamento*** p o número de estados de M (que não sabemos). A ideia é verificar que toda cadeia $\omega \in L$ pode ser quebrada em três partes $\alpha\beta\gamma$ satisfazendo as três condições (ou mostrar o contrapositivo)

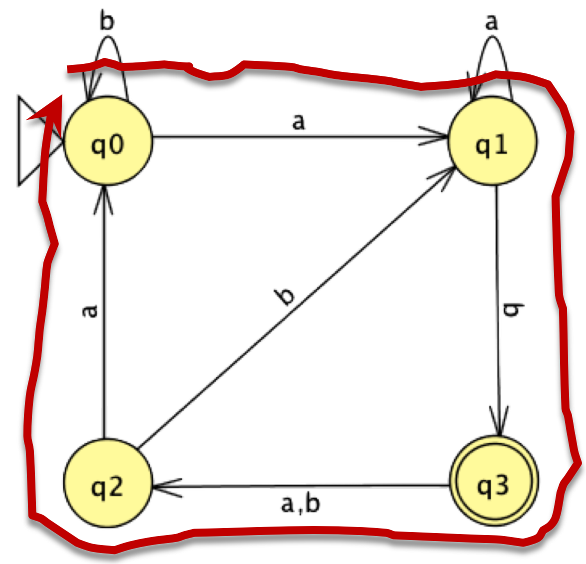
O comprimento da cadeia ω tem que ser **grande o suficiente** para que tenha o "**bombeamento**". Se $|\omega| \geq p$, quer dizer que o comprimento da cadeia é pelo menos p, que é o comprimento do bombeamento (o número de estados de M)

A ideia da prova do lema



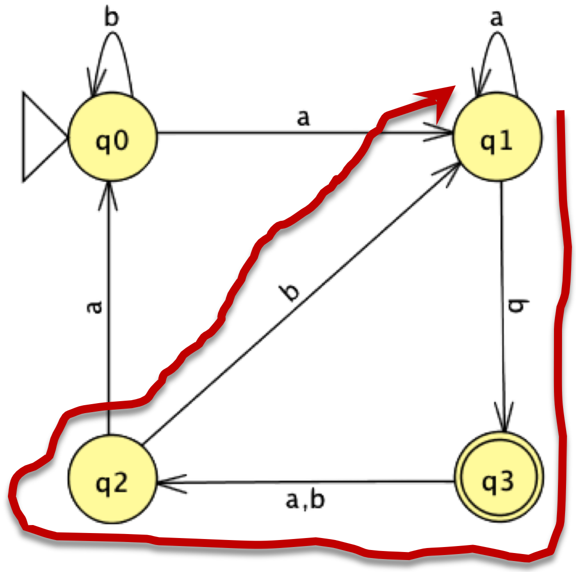
Considere o AFD acima. Independente da cadeia de entrada, dá para perceber alguns ciclos?

A ideia da prova do lema



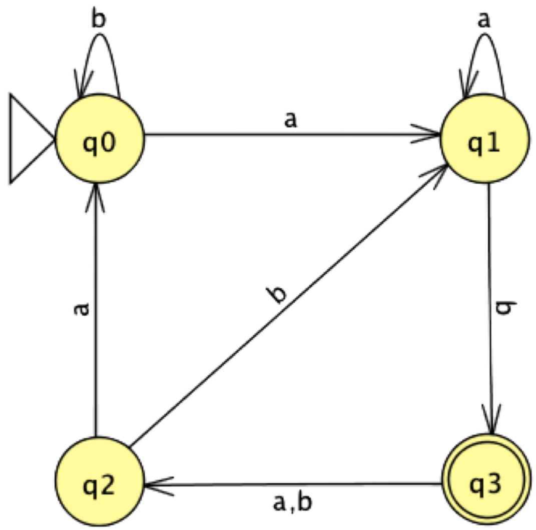
Considere o AFD acima. Independente da cadeia de entrada, dá para perceber alguns ciclos?

A ideia da prova do lema



Considere o AFD acima. Independente da cadeia de entrada, dá para perceber alguns ciclos?

A ideia da prova do lema

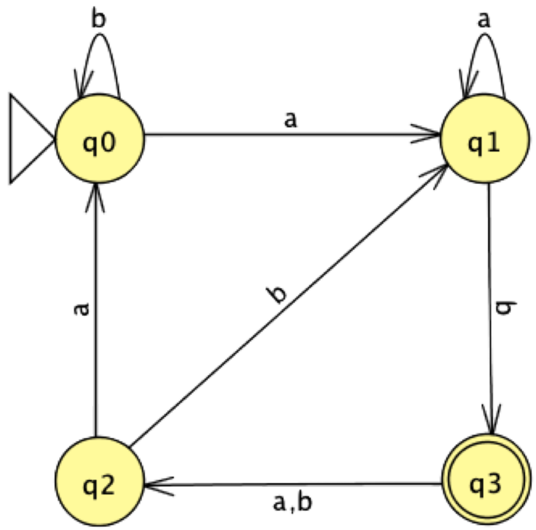


Considere o AFD acima e a cadeia $\omega = ababbaaab$

$$q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_3 \xrightarrow{a} q_2 \xrightarrow{b} q_1 \xrightarrow{b} q_3 \xrightarrow{a} q_2 \xrightarrow{a} q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_3$$

Dá para perceber alguns termos que se **repetem**?

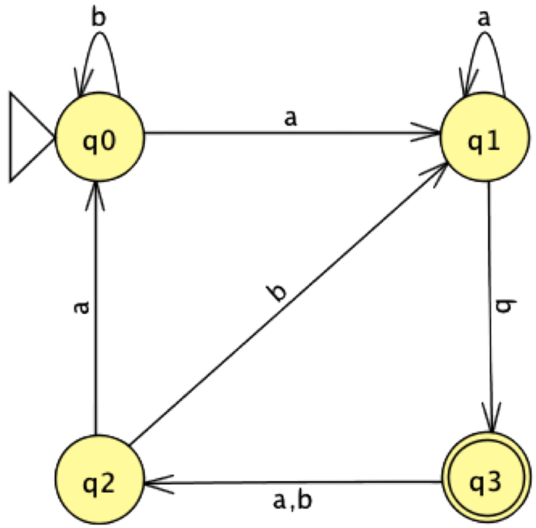
A ideia da prova do lema



Considere o AFD acima e a cadeia $\omega = abababb$

$$\underbrace{q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_3 \xrightarrow{a} q_2 \xrightarrow{b}}\, q_1 \xrightarrow{a} q_3 \xrightarrow{b} q_2 \xrightarrow{b} q_3$$

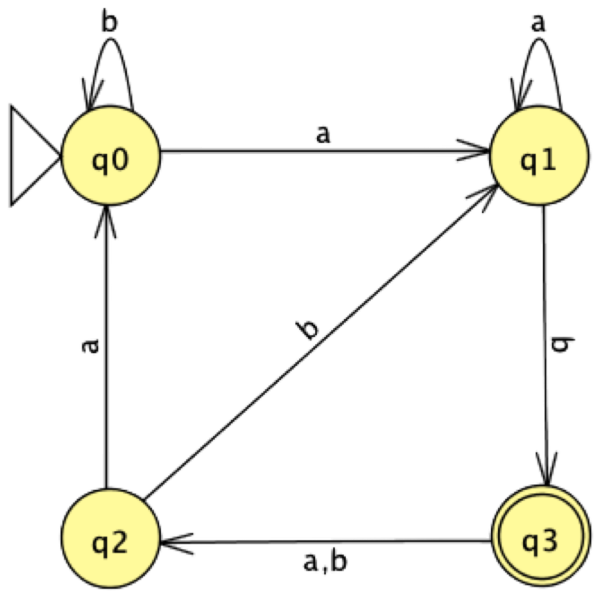
A ideia da prova do lema



Considere o AFD acima e a cadeia $\omega = abababb$

$$q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_3 \xrightarrow{a} q_2 \underbrace{\xrightarrow{b} q_1 \xrightarrow{a} q_3 \xrightarrow{b} q_2} \xrightarrow{b} q_3$$

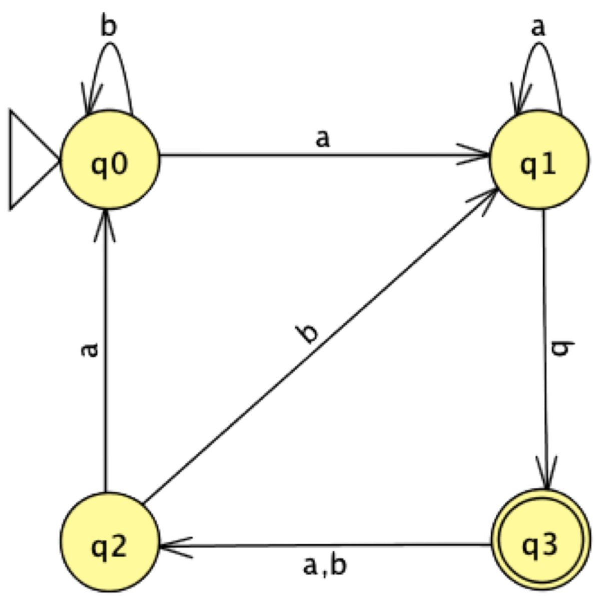
A ideia da prova do lema

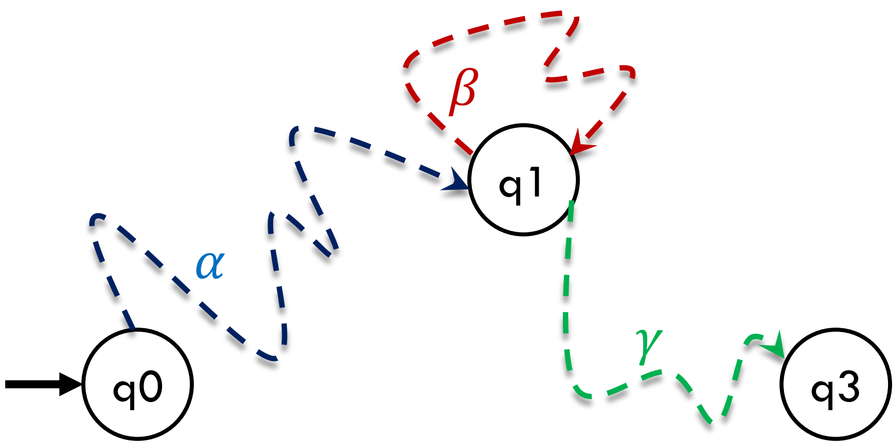


Sei que $p = 4$. Podemos dividir $\omega = ababb$ da seguinte forma:
$\alpha = a$; $\beta = bab$; $e\ \gamma = b$. Note que as três regras são satisfeitas.

1. $\forall\ k \geq 0, \alpha\beta^k\gamma\ \in L$
2. $\beta \neq \varepsilon$
3. $|\alpha\beta| \leq p$

A ideia da prova do lema





Note que o β inicia na transição para q_1, e que pode ser repetido várias vezes que, após o γ, o resultado ω sempre será $\in L$

Por isso é em todas as cadeias reconhecidas, o último estado tem que ser **estado de aceitação** (q_3)

Observação importante

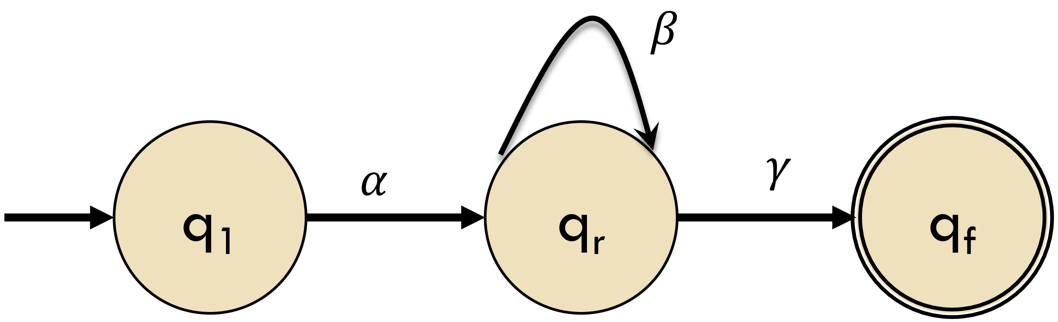
O objetivo do Lema do Bombeamento **não é provar que uma linguagem é regular**

A **única forma** de provar isso é construindo um AFD, AFN, ER ou GR

O objetivo do Lema do Bombeamento é provar que uma linguagem **não é regular**

Intuição

É possível dividir as cadeias em $\alpha\beta\gamma$. Vamos assumir que α e γ têm que ocorrer 1 vez. $\forall i \geq 0, \alpha\beta^i\gamma \in L$



$$\alpha\beta^0\gamma = \alpha\gamma \in L$$
$$\alpha\beta^1\gamma = \alpha\beta\gamma \in L$$
$$\alpha\beta^2\gamma = \alpha(\beta\beta)\gamma \in L$$
$$\alpha\beta^3\gamma = \alpha(\beta\beta\beta)\gamma \in L$$
$$\ldots$$
$$\alpha\beta^n\gamma = \alpha(\beta^n)\gamma \in L$$

Passos do lema do bombeamento

Usamos o LB para provar que a linguagem **não é** regular

1) Supõe-se que L seja regular

2) Escolhe-se uma palavra $\omega \in L$ com $|\omega| \geq p$

3) Mostra-se que para **toda divisão** de ω em $\alpha\beta\gamma$, existe um $k \geq 0$ tal que $\alpha\beta^k\gamma \notin L$ (**contradição**); ou demonstra-se que **as duas condições** $\beta \neq \varepsilon$ e $|\alpha\beta| \leq p$ do LB não são satisfeitas

Importante: Usa-se o lema do bombeamento quando você está em dúvidas se a linguagem é regular. Note que o objetivo é encontrar uma **contradição** à propriedade do lema

Lema do bombeamento

Todas as linguagens regulares têm uma propriedade especial, se uma dada linguagem não tem essa propriedade, ela não é regular

Infelizmente, se a linguagem tem a propriedade, não significa que ela é regular

O lema do bombeamento é uma condição necessária, mas não suficiente para a regularidade de uma linguagem: ***se o lema não é satisfeito numa dada linguagem L, então L não é regular***, mas se o lema é satisfeito para uma dada linguagem L, então L **pode ou não ser** regular

Resumindo: se a linguagem **não** tiver a propriedade, com certeza ela **não** é regular

Comprimento mínimo de bombeamento

O LB diz que toda linguagem regular tem um comprimento de bombeamento p, tal que toda cadeia na linguagem pode ser bombeada se ela tiver comprimento p ou mais

Se p é um comprimento de bombeamento para uma linguagem L, o mesmo acontece com qualquer comprimento $p' \geq p$

O comprimento **mínimo** de bombeamento para L é o menor p que pode ser um comprimento de bombeamento para L

Por exemplo, se $L = 01^*$, o comprimento **mínimo** de bombeamento para L é 2. Sabemos que a cadeia 0 está em L, mas o problema é que a cadeia contendo somente o "0" não pode ser bombeada

Comprimento mínimo de bombeamento

Se $L = 0001^*$ o menor comprimento de bombeamento de L é 4. Apesar da cadeia 000 estar na linguagem, ela **não pode ser** bombeada

Se $L = 0^*1^*$ o menor comprimento de bombeamento de L é 1. Apesar da cadeia vazia (ε) estar na linguagem, ela **não pode ser** bombeada, mas se tiver um símbolo, a divisão em $\alpha\beta\gamma$ pode ocorrer ($\beta = 0$ ou $\beta = 1$)

Se $L = 0^*1^+0^+1^* \cup 10^*1$, o comprimento **mínimo** de bombeamento para L é 3. Sabemos que as cadeias 10 e 11 estão em L, mas o problema é que ambas as cadeias **não podem ser** bombeadas