Annotation

Успенский Владимир Андреевич - доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова. Родился в 1930 году. Автор филологических и культурологических статей, опубликованных в журналах “Новое литературное обозрение”, “Неприкосновенный запас” и других изданиях. Постоянный автор “Нового мира”.

Успенский Владимир Андреевич

Апология математики, или О математике как части духовной культуры

Успенский Владимир Андреевич - доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова. Родился в 1930 году. Автор филологических и культурологических статей, опубликованных в журналах “Новое литературное обозрение”, “Неприкосновенный запас” и других изданиях. Постоянный автор “Нового мира”.

Мира восторг беспредельный
Сердцу певучему дан.

А. Блок, “Роза и Крест”.

Наука умеет много гитик.

К люч к карточному фокусу

.

Глава 1. Ватсон против Холмса

"Человек отличается от свиньи, в частности, тем, что ему иногда хочется поднять голову и посмотреть на звёзды”. Это изречение принадлежит Виктору Амбарцумяну (в 1961 - 1964 гг. президенту Международного астрономического союза). А почти за двести лет до того на ту же тему высказался Иммануил Кант. Кант поставил звёздное небо, по силе производимого впечатления, на один уровень с пребывающим внутри человека, и прежде всего внутри самого Канта, нравственным законом. Эти высказывания объявляют усеянное звёздами небо частью общечеловеческой духовной культуры и, более того, такой её частью, которая для всякого человека должна быть обязательной. Трудно представить человека, не впечатлявшегося видами неба. (Впрочем, воспоминания переносят меня в осень 1947 года, на лекцию по астрономии для студентов первого курса механико-математического факультета МГУ. Лекцию читает профессор Куликов. Он делает нам назидание. “В прошлом веке профессор Киевского университета Митрофан Хандриков, - говорит профессор Куликов, - на экзамене спросил студента, каков видимый размер Луны во время полнолуния, и получил ответ, что тот не может этого знать, поскольку никогда не видал Луны”.)

Хотя приведённые выше высказывания о роли звёздного неба в духовной культуре человека и не содержат прямого заявления о включении в эту культуру сведений об устройстве небесного свода, косвенно такое включение происходит. Неотъемлемой частью цивилизации является то или иное представление об указанном устройстве - хотя бы признаваемое в наши дни совершенно фантастическим, как, например, такое: “А Земля - это только лишь плесень в перевёрнутой неба корзине; звёзды - это свет другого мира, к нам просвечивающий сквозь дно корзины, сквозь бесчисленные маленькие дыры, не затёртые небесной глиной”. Человек, вовсе не имеющий представлений об устройстве мироздания, признаётся окружающими выпадающим из культуры. Вспомним изумление доктора Ватсона, обнаружившего вскоре после вселения в знаменитый дом 221b по Бейкер-стрит, что Холмс не знал, что Земля вертится вокруг Солнца. И даже считал знать это совершенно излишним. “Ну хорошо, пусть, как вы говорите, мы вращаемся вокруг Солнца, - возражал Холмс. - А если бы я узнал, что мы вращаемся вокруг Луны, много бы это помогло мне или моей работе?” Вот здесь очень важный момент. Холмс признаёт нужным знать только то, что может быть использовано в практических целях. Ватсон считает - и, очевидно, исходит из того, что читатели его записок разделяют эту его точку зрения, - что некоторые знания являются обязательными независимо от их практического применения. При всём уважении к великому сыщику, согласимся с доктором.

Итак, есть определённый объём непрактических знаний, обязательный для всякого культурного человека (несмотря на известное дурновкусие выражения “культурный человек”, в целях ясности изложения приходится его употреблять). Мы полагаем, что в этот объём входят и некоторые из тех математических представлений, которые не связаны с утилитарным использованием математики. Указанные представления состоят не только из фактов, но и из понятий и методов оперирования с этими понятиями.

Роль математики в современной материальной культуре, а также роль её элементарных разделов в повседневном быту достаточно известны, и об этом можно позволить себе не говорить. В этом очерке мы собираемся говорить о математике как о части культуры духовной.

Математические идеи могут вызывать эмоции, сравнимые с эмоциями, возникающими при чтении литературных произведений, слушании музыки, созерцании архитектуры. К сожалению, закостеневшие способы преподавания математики редко позволяют ощутить её эстетическую сторону, доступную, хотя бы частично, отнюдь не только математикам. Математиками же эта сторона ощущается с полной ясностью. Вот что писал выдающийся математик, учитель великого Колмогорова, Николай Николаевич Лузин (1883 - 1950): "Математики изумляются гармонии чисел и геометрических форм. Они приходят в трепет, когда новое открытие открывает им неожиданные перспективы. И та радость, которую они переживают, разве это не есть радость эстетического порядка, хотя обычные чувства зрения и слуха здесь не участвуют. ‹…› Математик изучает свою науку вовсе не потому, что она полезна. Он изучает её потому, что она прекрасна. ‹…› Я говорю о красоте более глубокой, [чем та, которая поражает наши чувства,] проистекающей из гармонии и согласованности воедино всех частей, которую один лишь чистый интеллект и сможет оценить. Именно эта гармония и даёт основу тем красочным видимостям, в которых купаются наши чувства. ‹…› Нужно ли ещё прибавлять, что в развитии этого чувства интеллектуальной красоты лежит залог всякого прогресса?"

Являясь (через Колмогорова) научным внуком Лузина, автор настоящего очерка с сочувствием относится к формуле "математика для математики", образованной по аналогии с известным слоганом "искусство для искусства". Однако всё не так просто. Следует огорчить любителей чистого разума и утешить сторонников практической пользы. Опыт развития математики убеждает, что самые, казалось бы, оторванные от практики её разделы рано или поздно находят важные применения. Всю первую половину XX века математическая логика рассматривалась как наука, занятая исключительно проблемами логического обоснования математики, как своего рода философский анклав в математике; в СССР она находилась под подозрением со стороны борцов со всевозможными "измами", и первая кафедра математической логики была открыта лишь в 1959 году. Сегодня математическая логика переплетена с теоретической информатикой (Theoretical Computer Science) и служит для последней фундаментом. Теория чисел, одна из древнейших математических теорий, долгое время считалась чем-то вроде игры в бисер. Оказалось, что без этой теории немыслима современная криптография, как и другие важные направления, объединённые названием "защита информации". Специалисты по теоретической физике интересуются новейшими разработками алгебраической геометрии и даже такой абстрактной области, как теория категорий.

Применение математики в физике не ограничивается числовыми формулами и уравнениями. Её, математики, абстрактные конструкции позволяют лучше понять природу тех физических явлений, изучение которых находится на передовом крае науки. Поясним сказанное с помощью исторической аналогии. Когда-то считали, что Земля плоская. Ничего другого в то время просто не могло прийти в голову. Затем пришли к мысли о её шарообразности. Вряд ли сама эта мысль была бы возможна, не обладай человеческое сознание уже готовым представлением о шаре. Точно так же долгое время считалось очевидным, что окружающее нас физическое пространство есть самое обычное трёхмерное евклидово пространство из школьного курса геометрии. В этом были уверены все, включая тех, кто не знал учёной терминологии и потому не пользовался термином "евклидово пространство" (вспомним мольеровского Журдена, не знавшего, что говорит прозой). И действительно, а как же может быть иначе? Первые сомнения возникли в XIX веке независимо в Германии у Гаусса и в России у Лобачевского. Они первыми осознали не только существование неевклидовой геометрии как математического объекта, но и возможность неевклидового строения нашего мира (мы коснёмся этой темы в главе 8). Лобачевского тогда никто не понял, кроме Гаусса, сам же Гаусс, предчувствуя непонимание, ни с кем не делился своим прозрением. Теория относительности подтвердила указанную неевклидовость, предсказав прогибание пространства под воздействием массивных тел, что, в свою очередь, было подтверждено наблюдаемым искривлением луча света вблизи таких тел. Некоторые свойства пространства и времени оказались парадоксальными, другие остаются неизвестными. Вместе с тем познание этих свойств может оказаться жизненно важным для человечества. Математика предлагает уже готовые модели, позволяющие лучше понять эти свойства, в особенности же свойства парадоксальные, противоречащие повседневному опыту. Более точно, в математике построены такие структуры, которые обладают требуемыми свойствами.

Здесь мы прикоснулись к важной философской, а именно гносеологической, теме. Только что упомянутое представление о шаре, столь необходимое для осознания фигуры Земли, находило поддержку в повседневном опыте - а именно в наблюдении шарообразных предметов, как природных (яблок, тыкв, ягод, катимых скарабеями навозных шариков и т. п.), так и искусственных (например, пушечных ядер). И когда потребовалось узнать фигуру Земли, оставалось лишь воспользоваться названным представлением. Иначе обстоит дело с попытками познания строения Вселенной. Повседневный опыт не даёт требуемых геометрических форм. Оказалось, однако, что хотя такими формами и не обладают предметы, доступные непосредственному созерцанию, эти формы представлены в уже обнаруженных структурах математики. Поскольку эти математические структуры точно описаны, нетрудно, при желании, понять, как в них реализуются свойства мироздания - даже те, которые кажутся парадоксальными. А тогда остаётся допустить, что геометрия реального мира хотя бы отчасти выглядит так, как геометрия этих структур. Таким образом, математика, не давая ответ на вопрос, как оно есть в реальном мире, помогает понять, как оно может быть - что не менее важно: ведь как оно есть мы вряд ли когда-нибудь узнаем до конца. (В главе 9 мы вернёмся к этой теме.) И эту помощь, которую оказывает математика в познании мира, также следует вписать в перечень её приложений.

Как говорил один из самых крупных математиков XX века Джон фон Нёйман (1903 - 1957): “В конечном счёте, современная математика находит применение. А ведь заранее не ясно, что так должно быть”.

Нередко утверждают, что математику следует рассматривать как часть физики, поскольку она описывает внешний физический мир. Но с тем же успехом её можно считать частью психологии, поскольку изучаемые в ней абстракции суть явления нашего мышления и тем самым должны проходить по ведомству психологии. Взять, например, такое основное (и, может быть, самое главное) понятие математики, как понятие *натурального числа,* то есть числа, являющегося одновременно и целым, и положительным (иногда к натуральным числам причисляют ещё и число ноль, к чему есть серьёзные основания!). Ведь показать, скажем, число пять невозможно, можно только предъявить пять пальцев или пять иных предметов. Уже здесь не такая уж малая степень абстракции. Ещё более высокая степень абстракции в числе пять септиллионов: ясно, что предъявить столько предметов невозможно. И уж совсем высокая (и одновременно глубокая) абстракция заключена в понятии натурального числа вообще и *натурального ряда* как совокупности всех натуральных чисел. Здесь поле, только начатое распахиваться психологией. Упоминавшийся уже Лузин, который был не только математиком, но и философом (и даже его избрание в 1929 году в Академию наук СССР произошло “по кафедре философии”), так высказывался на эту тему: “По-видимому, натуральный ряд чисел не представляет из себя абсолютно объективного образования. По-видимому, он представляет собой функцию головы того математика, который в данном случае говорит о натуральном ряде”.

Тем не менее два математика на разных континентах приходят к одним и тем же выводам о свойствах натурального ряда чисел, хотя никто из них не может наблюдать числа внешним зрением, а лишь зрением внутренним - внутри собственной мысли. В этом труднообъяснимом единстве взглядов на идеальные сущности некоторые усматривают доказательство существования Бога.

Итак, мы отстаиваем два тезиса. Первый, что математика - вне зависимости от её практического использования - принадлежит духовной культуре. Второй, что отдельные фрагменты математики входят в общеобязательную часть этой культуры.

Что же касается вопроса, чтбо именно из математики, причем из математики неприкладной, должно входить в общеобязательный культурный минимум, то однозначный ответ на этот вопрос вряд ли уместен. Каждый должен определять этот минимум для себя. Задача общества - предоставить своему члену ту информацию о математических понятиях, идеях и методах, откуда этот субъективный минимум можно было бы выбирать. Вообще, знание есть дело добровольное, и насилие тут неуместно. На ум приходит замечательное высказывание, принадлежащее Сухарто (второму президенту Индонезии - не путать с первым её президентом, Сукарно): “В наше время чрезвычайно трудно заставить кого-либо сделать что-либо добровольно”. Иногда, тем не менее, в дальнейшем изложении будут встречаться рекомендации о включении в математический минимум тех или иных знаний; эти рекомендации не предлагаются как нечто категорическое и даются лишь в качестве возможных примеров и материала для дальнейшего обсуждения. Школьная программа по математике - слишком болезненная тема, чтобы её здесь затрагивать (хотя эта тема не может не волновать, поскольку касается миллионов наших детей). Ограничусь мнением, что хорошо бы в этой программе устранить перекос в вычислительную сторону математики и уделить больше внимания стороне качественной, не связанной непосредственно с вычислениями.

Замечу в заключение, что математика входит в мировую культуру и своим этическим аспектом. Наличие такового у математики может показаться странным. Он, однако, есть. Математика не допускает лжи. Она требует, чтобы утверждения не просто провозглашались, но и доказывались. Она учит задавать вопросы и не бояться непонимания ответов. Она по природе демократична: её демократизм обусловлен характером математических истин. Их непреложность не зависит от того, кто их провозглашает, академик или школьник. Приведу такой пример. Некий третьекурсник механико-математического факультета МГУ осмелился опровергнуть одно из утверждений лектора, лектором же был не кто иной, как сам Колмогоров. После чего третьекурсник был немедленно приглашён Колмогоровым посетить его дачу, где и был произведён в ученики.

Данный текст писался не для математиков, а скорее для гуманитариев. Поэтому при его составлении в ряде случаев приходилось выбирать между понятностью и точностью. Предпочтение отдавалось понятности. (Достигнуть абсолютной точности всё равно невозможно. Невозможно, впрочем, достигнуть и абсолютной понятности - как и вообще чего-либо абсолютного.) За неточность прошу прощения у математиков, а всякому, любезно указавшему на непонятное место, приношу искреннюю благодарность.

Глава 2. Теорема Пифагора и теорема Ферма

В кажущемся противоречии с настойчивым подчёркиванием, что в данном очерке нас интересует именно непрактический, неприкладной аспект математики, мы предполагаем весьма и весьма поучительным включение в «джентльменский набор» математических представлений знание того, почему треугольник со сторонами 3, 4, 5 назывется *египетским*. А всё дело в том, что древнеегипетские строители пирамид нуждались в способе построения прямого угла. Вот требуемый способ. Верёвка разбивается на 12 равных частей, границы между соседними частями помечаются, а концы веревки соединяются. Затем верёвка натягивается тремя людьми так, чтобы она образовала треугольник, а расстояния между соседними натягивателями составляли бы, соответственно, 3 части, 4 части и 5 частей. В таком случае треугольник окажется прямоугольным, в коем стороны 3 и 4 будут катетами, а сторона 5 - гипотенузой, так что угол между сторонами 3 и 4 будет прямым. Боюсь, что большинство читателей в ответ на вопрос «Почему треугольник окажется прямоугольным?» сошлётся на теорему Пифагора: ведь три в квадрате плюс четыре в квадрате равно пяти в квадрате. Однако теорема Пифагора утверждает, что если треугольник прямоугольный, то в этом случае сумма квадратов двух его сторон равна квадрату третьей. Здесь же используется теорема, *обратная к теореме Пифагора:* если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей, то в этом случае треугольник прямоугольный. (Не уверен, что эта обратная теорема занимает должное место в школьной программе.)

Кажущееся противоречие, упомянутое в начале абзаца, заключается в том, что, обещав говорить о неутилитарном аспекте математики, мы сразу же перешли к её практическому применению. Оно потому названо кажущимся, что описанное применение обратной теоремы Пифагора принадлежит далёкому прошлому. Сейчас едва ли кто-либо строит прямой угол указанным способом: этот способ переместился из мира практики в мир идей - как и вообще многие воспоминания о материальной культуре прошлого вошли в духовную культуру настоящего.

Изложенная только что тема содержит в себе три подтемы: прямой угол, треугольник и равенство $3^2 + 4^2 = 5^2$. В каждой из этих подтем можно усмотреть некие элементы, относящиеся к тому, чтбо автор этих строк понимает под общечеловеческой культурой. Приведём примеры таких элементов.

Сперва о понятии прямого угла. Это понятие может быть использовано для интеллектуального обогащения. Поставим такую задачу: объяснить, какой угол называется прямым, но объяснить не на визуальных примерах, а вербально - например, по телефону. Вот решение. Надо попросить собеседника мысленно взять две жерди, соединить их крест-накрест и заметить, что в точке соединения сходятся четыре угла; если все эти углы окажутся равными друг другу, то каждый из них и называют прямым. Какая же тут духовная культура, если речь идёт о жердях! - возмутится критически настроенный читатель. Но суть здесь, конечно же, не в жердях, а в опыте вербального определения одних понятий через другие. Такой опыт поучителен и полезен, а возможно, что и необходим. Математика вообще представляет собою удобный полигон для оттачивания искусства объяснения. Адресата объяснений следует при этом представлять себе тем внимающим афинскому софисту любопытным скифом, о котором писал Пушкин в послании «К вельможе». Объяснение признаётся успешным, если есть ощущение, что любопытный скиф его поймёт.

Теперь - пример из жизни треугольников. Речь пойдёт о триангуляции. Триангуляция - это сеть примыкающих друг к другу, наподобие паркетин, треугольников различной формы; при этом существенно, что примыкание происходит целыми сторонами, так что вершина одного треугольника не может лежать внутри стороны другого. Триангуляции сыграли важнейшую роль в определении расстояний на земной поверхности, а тем самым и в определении фигуры Земли.

Потребность в измерении больших, в сотни километров, расстояний - как по суше, так и по морю - появилась ещё в древние времена. Капитаны судов, как известно из детских книг, меряют расстояния числом выкуренных трубок. Близок к этому метод, применявшийся во II веке до н. э. знаменитым древнегреческим философом, математиком и астрономом Посидонием, учителем Цицерона: морские расстояния Посидоний измерял длительностью плавания (с учётом, разумеется, скорости судна). Но ещё раньше, в III веке до н. э., другой знаменитый древний грек, заведующий Александрийской библиотекой математик и астроном Эратосфен, измерял сухопутные расстояния по скорости и времени движения торговых караванов. Можно предполагать, что именно так Эратосфен измерил расстояние между Александрией и Сиеной, которая сейчас называется Асуаном (если смотреть по современной карте, получается примерно 850 км). Это расстояние было для него чрезвычайно важным. Дело в том, что Эратосфен считал эти два египетских города лежащими на одном и том же меридиане; хотя это в действительности не совсем так, но близко к истине. Найденное расстояние он принял за длину дуги меридиана. Соединив эту длину с наблюдением полуденных высот Солнца над горизонтом в Александрии и Сиене, он, далее, путём изящных геометрических рассуждений, вычислил длину всего меридиана, а тем самым и величину радиуса земного шара.

Ещё в XVI веке расстояние (примерно стокилометровое) между Парижем и Амьеном определялось при помощи счёта оборотов колеса экипажа. Очевидна приблизительность результатов подобных измерений. Но уже в следующем столетии голландский математик, оптик и астроном Снеллиус изобрёл излагаемый ниже метод триангуляции и с его помощью в течение 1615 - 1617 годов измерил дугу меридиана, имеющую угловой размер в один градус и одиннадцать с половиной минут.

Посмотрим, как триангуляция позволяет определять расстояния. Сперва триангулируется полоса земной поверхности, включающая в себя оба пункта, расстояние между которыми хотят найти. Затем выбирается один из треугольников триангуляции; будем называть его начальным. Далее выбирается одна из сторон начального треугольника. Она объявляется *базой,* и ее длина тщательно измеряется. В вершинах начального треугольника строятся вышки - с таким расчётом, чтобы каждая была видна из других вышек. Поднявшись на вышку, расположенную в одной из вершин базы, измеряют угол, под которым видны две другие вышки. После этого поднимаются на вышку, расположенную в другой вершине базы, и делают то же самое. Так, в результате непосредственного измерения, возникают сведения о длине одной из сторон начального треугольника (а именно о длине базы) и о величине прилегающих к ней углов. По формулам тригонометрии вычисляются длины двух других сторон этого треугольника. Каждую из них можно принять за новую базу, причём измерять её длину уже не требуется. Применяя ту же процедуру, можно теперь узнать величины сторон и углов любого из треугольников, примыкающих к начальному. И так далее. Важно осознать, что непосредственное измерение какого-либо расстояния проводится только один раз, а дальше уже измеряются только углы между направлениями на вышки, что несравненно легче и может быть сделано с высокой точностью. По завершении процесса оказываются установленными величины всех участвующих в триангуляции отрезков и углов. А это, в свою очередь, позволяет находить любые расстояния в пределах участка поверхности, покрытого триангуляцией. Именно так в XIX веке была найдена длина дуги меридиана от Северного Ледовитого океана до Дуная. Триангуляция содержала 258 треугольников, длина дуги оказалась равной 2800 км. Чтобы подавить неточности, при измерениях неизбежные, а при вычислениях возможные, десять баз были подвергнуты непосредственному измерению на местности.

Формулы тригонометрии, упомянутые выше, входят в школьную программу. Подавляющему большинству после школы они никогда не понадобятся, разве что на вступительных экзаменах, и их можно спокойно забыть. Знать - и не только знать, но и осознавать, понимать надо следующее (и именно это входит в обязательный, на наш взгляд, интеллектуальный багаж): треугольник однозначно определяется заданием любой его стороны и прилегающими к ней углами, и этот очевидный факт может быть использован и реально используется для измерения расстояний методом триангуляции. Если всё же кому-нибудь когда-нибудь и понадобятся формулы тригонометрии, их легко можно будет найти в справочниках. Учат ли в наших школах пользоваться справочниками? А ведь это умение несравненно полезнее, чем помнить формулы наизусть.

Наконец, о равенстве $3^2 + 4^2 = 5^2$. Если положительные числа *a, b, c* обладают тем свойством, что $a^2 + b^2 = c^2$, то, по обратной теореме Пифагора, они представляют собою длины сторон некоторого прямоугольного треугольника; если они к тому же суть числа целые, их называют *пифагоровыми*. Вот ещё пример пифагоровой тройки: 5, 12, 13. Возникает естественный вопрос, а что будет, если в соотношении, определяющем пифагоровы числа, заменить возведение в квадрат на возведение в куб, в четвёртую, пятую и так далее степень? Можно ли привести пример таких целых положительных чисел *a, b, c,* чтобы выполнялось равенство $a^3 + b^3 = c^3$, или равенство $a^4 + b^4 = c^4$, или $a^5 + b^5 = c^5$ и т. п.? Любую тройку целых положительных чисел, для которых выполняется одно из указанных равенств, условимся называть *тройкой Ферма*.

Только что сформулированным вопросом заинтересовался великий французский математик середины XVII века Пьер Ферма (вообще-то он занимался математикой, а заодно и оптикой, как хобби: служебные его обязанности состояли в заведовании отделом петиций тулузского парламента). Поиски требуемых примеров ни к чему не привели, и Ферма пришёл к убеждению, что их не существует. Утверждение о несуществовании троек Ферма принято называть *Великой теоремой Ферма*. Строго говоря, его следовало бы называть *Великой гипотезой Ферма*, поскольку автор утверждения не оставил нам его доказательства. Всё, что Ферма оставил потомкам на эту тему, - это две латинские фразы, написанные им около 1637 года на полях изданной в 1621 году в Париже на двух языках, греческом и латинском, «Арифметики» древнегреческого математика Диофанта. Указанное издание обладало широкими полями, и когда у Ферма появлялись те или иные мысли по ходу чтения, он записывал их на этих полях. И вот какие две фразы он, в частности, написал - приводим эти фразы в переводе: «Невозможно для куба быть записанным в виде суммы двух кубов, или для четвёртой степени быть записанной в виде суммы двух четвёртых степеней, или вообще для любого числа, которое есть степень больше двух, быть записанным в виде суммы двух таких же степеней. Я нашёл поистине удивительное доказательство этого предложения, но оно не уместится на полях [hanc marginis exiguitas non caperet; *буквально:* скудость поля его не вмещает]».

Своих математических открытий Ферма никогда не публиковал, часть их (да и то без доказательств) сообщалась им в частной переписке, а часть стала известной только после его смерти в 1665 году. К числу последних принадлежит и Великая теорема: в 1670 году старший сын Пьера переиздал в Тулузе Диофантову «Арифметику», включив в издание и 48 примечаний, сделанных его отцом на полях. Лишь в 1994 г. Эндрю Уайлз при участии своего ученика Ричарда Тэйлора доказал наконец Великую теорему - и притом доказал с использованием всей мощи современной математики, так что если сам Ферма и владел доказательством (что более чем сомнительно), то заведомо не таким. А до того Великая теорема оставалась Великой гипотезой.

Задача доказать гипотезу Ферма составила содержание *Проблемы Ферма*. Простота формулировки проблемы, доступной школьнику младших классов, делала её привлекательной для широких кругов любителей. Привлекательность усиливалась давностью постановки и ореолом некоей таинственности, сопутствующей постановке. А тут ещё в 1908 году была объявлена премия в сто тысяч германских марок за решение Проблемы Ферма. Вскоре мировая война обесценила премию, но было уже поздно: слух о премии привлёк к Проблеме Ферма ещё больше «старателей». Возникла особая разновидность людей, называемых *ферматистами*. Ферматисты - это люди, не имеющие специального математического образования, фанатично убеждённые в том, что они решили Проблему Ферма, и настойчиво ищущие признания. Признания они, естественно, не получили, но, завалив своими рукописями математические кафедры ряда крупных западных университетов, заставили эти кафедры занять оборонительную позицию: университеты стали возвращать авторам любые доказательства Великой теоремы Ферма, прилагая при этом стандартное письмо с указанием, что доказательство будет рассмотрено только после получения денежного залога. А известный гётттингенский профессор Эдмунд Ландау (избранный в 1932 году иностранным почётным членом Академии наук СССР) даже изобрёл специальный бланк, который он поручал заполнять своим аспирантам: «Дорогой сэр (мадам)! Мы получили Ваше доказательство Великой теоремы Ферма. Первая ошибка находится на странице…, строка…»

Одного из ферматистов мне довелось увидеть в мои студенческие годы. Сейчас я об этом расскажу. (Недоброжелательно настроенный читатель возразит, что рассказ о ферматисте не имеет отношения к заявленной теме - о месте математики в общечеловеческой духовной культуре; на наш взгляд - имеет.) Дело происходит в 1950 году или около того в Москве. Я нахожусь в одной из редакций, расположенных на Большой Калужской улице (сейчас это начало Ленинского проспекта). В редакцию входит другой посетитель и просит разрешения позвонить по телефону; в те годы вход в офисы ещё не охранялся ни охранниками, ни кодовыми замками. Посетитель живописен: худ, длинноволос и держит в руках сетчатую авоську, в которой лежит скрипка. Как мне потом расскажут знающие люди, он зарабатывал на жизнь, играя на этой скрипке на палубе речных теплоходов. На моих глазах, а также ушах, он делает два звонка. Первый звонок: «Это Московский университет? Попросите, пожалуйста, к телефону ректора. Ах, ректор занят и не может подойти? Дело в том, что я посылал на его имя ценное письмо с решением проблемы Ферма и хотел бы узнать результат. Ну хорошо, я позвоню позже». Второй звонок: «Это Академия наук? Попросите, пожалуйста, к телефону президента. Ах, президент занят и не может подойти? Дело в том, что я посылал на его имя ценное письмо с решением проблемы Ферма и хотел бы узнать результат. Ну хорошо, я позвоню позже». Позвонив, он вежливо благодарит и удаляется.

Но отнюдь не все советские ферматисты были столь травоядны. Часто, не найдя поддержки, они писали жалобу в так называемый «директивный орган», то есть в ЦК КПСС. В жалобе указывалось, что имеется возможность показать Западу кузькину мать и в очередной раз продемонстрировать всему миру приоритет советской науки, предъявив решение знаменитой проблемы, а нехорошие люди чинят этому препятствия. К жалобе прилагалась рукопись. А иной раз рукопись и не сопровождалась жалобой, а сразу посылалась в ЦК. В обоих вариантах ЦК переправлял рукопись тому же ректору Московского университета или тому же президенту Академии наук. А далее она, украшенная грозными резолюциями, спускалась вниз, на кафедру или в отдел. Теперь уже отмахнуться было невозможно и приходилось разбираться в заведомо ложном доказательстве, отыскивая в нём ошибку. Когда-то я прикинул, сколько времени профессиональные математики вынуждены тратить на переписку с ферматистами (переписку бесплодную, поскольку истинного ферматиста переубедить невозможно), - прикинул и ужаснулся.

В сравнительно редких случаях ферматисту удавалось опубликовать свой труд. (Это сейчас за счёт автора можно опубликовать что угодно, а в советское время даже ксероксы находились под строжайшим контролем, что уж говорить об издательствах и типографиях.) В частности, это удалось Виктолию Будкину. В 1975 году расположенное в Ярославле Верхне-Волжское книжное издательство выпустило пятитысячным тиражом его брошюру «Методика познания „истины". Доказательство великой теоремы Ферма». То, что написано на её странице 45, весьма типично для самоосознания ферматиста: «Итак, сменилось 13 поколений людей, а Великая теорема Ферма осталась ещё не доказанной. Только в настоящей работе впервые приводится полное доказательство теоремы в общем виде».

Казалось бы, после того как доказательство теоремы Ферма было не только найдено (в сентябре 1994 г.), но и опубликовано (в 1995 г.) и признано мировой математической общественностью, с ферматизмом как с явлением будет покончено. Не тут-то было - ряды ферматистов хотя и поредели, но не иссякли. Сведения о том, что Великая теорема доказана, дошли не до всех: ведь, повторяю, ферматисты не являются математиками (хотя имеющие техническое образование часто считают себя таковыми). А многие из тех, до кого и дошло, продолжали искать какое-нибудь простое доказательство. В России ферматизм дал неожиданную вспышку в августе 2005 года. К «Новой газете» я питал уважение и - до того августа - доверие и не думал, что когда-либо выступлю её оппонентом; но приходится. Номер 61 газеты от 22 августа 2005 года открывался крупным и чуть ли не цветным заголовком «ЧЕЛОВЕЧЕСТВО МОЖЕТ РАССЛАБИТЬСЯ?»; сообщалось, что «омский академик Александр Ильин предложил простое доказательство знаменитой теоремы Ферма». Заместителю главного редактора газеты О. Н. Хлебникову я пытался объяснить накануне, то есть 21 августа, что если доктор технических наук Александр Иванович Ильин и является академиком, то академиком одной из десятков тех академий, кои, как грибы, возникли у нас в постсоветское время (одних только академий энергоинформационных наук две: Международная и Сибирская) - но никак не членом Российской академии наук (РАН); попытки мои успеха не имели; Олег Никитович отвечал, что он знает точно: А. И. Ильин - член РАН. Более того, через неделю, в № 63 от 29 августа 2005 года, та же газета сообщала, что «академики Новиков и Никитин решение теоремы Ферма уже видели и ошибок в нем не нашли». Надо ли объяснять читателю, что г-да Новиков и Никитин (как, впрочем, и А. И. Ильин) не являлись не только членами РАН, но и математиками? Некоторое время сенсация сверкала на экранах телевизоров и в различных газетах, не говоря уже об Интернете. Потом как-то тихо всё сошло на нет. Ферматизм тоже часть человеческой культуры - но ведь не материальной же, а значит, духовной.

В качестве завершения темы снова вернусь в 1950-е годы. Посетителя офиса на Большой Калужской мне довелось увидеть ещё один раз. Это произошло на третьем этаже дома 9 по Моховой улице, в канцелярии механико-математического факультета Московского университета, где я тогда учился. Всё с той же скрипкой в авоське он вошёл в канцелярию, попросил лист бумаги и, примостившись у стола, стал писать. Не в силах сдержать любопытства, я заглянул ему через плечо. Каллиграфическим почерком выводились буквы: «… бывшего студента ‹…› Императорского университета прошение…» (какого именно университета - не помню). Затем он попросил указать ему специалиста по теории чисел. В качестве такового ему был назван заведующий кафедрой теории чисел член-корреспондент Гельфонд. В это время по коридору шёл член-корреспондент Гельфанд, к теории чисел отношения не имеющий. Услышав его фамилию, бывший студент Императорского университета бросился к нему навстречу. Всем было известно, что Гельфанд - математик великий, но непредсказуемый и легко может нахамить. Я не стал дожидаться столкновения двух тел и в страхе убежал.

Глава 3. Проблемы нерешённые и проблемы нерешимые

Проблема - это всегда требование что-то найти, указать. Это «что-то» может иметь самую различную природу: это может быть ответ на заданный вопрос, законопроект, доказательство теоремы, число (при решении уравнений), последовательность геометрических построений (при решении геометрических задач на построение). Опыт математики позволяет провести точную грань между проблемами *нерешёнными* и проблемами *нерешимыми*. Первые ждут своего решения, вторые же решения не имеют и иметь не могут, у них решения просто-напросто не существует.

К числу первых долгое время относилась проблема Ферма. В математике таких проблем много, но абсолютное большинство из них требует для понимания их формулировок специального образования. Нерешённых проблем с простыми формулировками гораздо меньше. Из них наиболее известны, пожалуй, следующие четыре проблемы теории чисел. Теория чисел (в ортодоксальном понимании этого термина) занимается только положительными целыми числами. Поэтому только такие числа разумеются здесь под словом «число».

Две проблемы о совершенных числах. Число 6 делится на 1, на 2, на 3 и на 6 - эти числа 1, 2, 3, 6 суть *делители* числа 6. Если из списка делителей числа 6 мы удалим само это число, а остальные сложим, получим 6. Действительно, 1 + 2 + 3 = 6. Тем же свойством обладает число 28. Его делителями служат числа 1, 2, 4, 7, 14, 28. Если их все, кроме 28, сложить, получим как раз 28: действительно, 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28. В VI веке до н. э. это редкое свойство чисел вызывало мистический восторг у Пифагора и его учеников: по их мнению, оно свидетельствовало об особом совершенстве числа, обладающего таким свойством. А потому каждое число, совпадающее с суммой своих делителей, отличных от самого этого числа, получило титул *совершенного*. Первые четыре совершенных числа (6, 28, 496 и 8128) были известны уже во II веке н. э. А в сентябре 2006 года было обнаружено сорок четвёртое совершенное число; оно колоссально, в его десятичной записи около двадцати миллионов знаков. Все найденные совершенные числа оказались чётными. И вот две простые по формулировке, но не решённые до сих пор проблемы. Существуют ли нечётные совершенные числа? Конечна или бесконечна совокупность всех совершенных чисел? Эквивалентная формулировка второй проблемы: существует ли наибольшее совершенное число?

Две проблемы о простых числах. Напомним (мы говорим «напомним», потому что теоретически это должно быть известно из средней школы), что *простым* называется такое число, которое, во-первых, больше единицы, а во-вторых, не имеет других делителей, кроме единицы и самого себя. Ещё в III веке до н. э. в «Началах» Евклида было установлено, что среди простых чисел нет наибольшего, их ряд 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 и т. д. никогда не кончается; иными словами, совокупность простых чисел бесконечна. Предложение 20 девятой книги «Начал» гласит, что простых чисел больше, чем в любом предъявленном списке таковых; доказательство же этого предложения состоит в описании способа, позволяющего для любого списка простых чисел указать простое число, в этом списке не содержащееся. Отметим, что Евклид нигде не говорит о совокупности простых чисел в целом - само представление о бесконечных совокупностях как об особых сущностях появилось значительно позже. Когда-то изучение простых чисел рассматривалось как чистая игра ума; оказалось, что они играют решающую роль во многих практических задачах криптографии.

Среди нерешённых проблем, связанных с простыми числами, приведём две: **проблему**

Гольдбаха - Эйлера и **проблему близнецов**.

Первая была поставлена в 1742 году великим Леонардом Эйлером в его переписке с Христианом Гольдбахом. Основная деятельность обоих протекала в России; в 1764 году Гольдбах был похоронен в Москве, а Эйлер в 1783 году - в Петербурге.

Кто есть Эйлер, один из самых великих математиков за всю историю человечества, и в чём заключается его величие - всё это легко узнать, если заглянуть, как встарь, в энциклопедический словарь. Сведения же о том, что собой представляет Гольдбах, словари дают скупо; такие сведения следует искать в специальной литературе или же в Интернете; некоторые из фактов заслуживают того, чтобы здесь их изложить. Хотя математические статьи, опубликованные Гольдбахом в научных журналах, и не оставили сколько-нибудь заметного следа в математике, он был признанным членом математического сообщества своего времени. Он был лично знаком или состоял в переписке с рядом выдающихся умов, в том числе с Лейбницем и с Эйлером; переписка с Эйлером продолжалась 35 лет и прекратилась лишь со смертью Гольдбаха. Один из историков науки (кстати, правнук Эйлера и непременный секретарь Петербургской академии наук) писал: «Его [Гольдбаха] переписка показывает, что если он не прославился ни в одной специальности, то это следует приписать большой универсальности его познаний. То мы видим его обсуждающим ‹…› кропотливые вопросы классической и восточной филологии; то он пускается в нескончаемые археологические споры ‹…›». В своих письмах Гольдбах предстаёт как человек, наделённый и интуицией, и способностью чувствовать новое. Проблема Гольдбаха - Эйлера, например, возникла как реакция Эйлера на некое предположение, сообщённое ему Гольдбахом (предположение состояло в том, что всякое целое число, большее, чем 2, разлагается в сумму трёх слагаемых, каждое из коих есть либо простое число, либо единица). В России, куда он приехал в 1725 году в тридцатипятилетнем возрасте, Гольдбах сделал головокружительную карьеру. Он сразу получил место секретаря, а также историографа организуемой во исполнение замысла Петра I Императорской академии наук; именно он вёл (на латинском языке) первые протоколы Академии. С 1737 по 1740 год он был одним из двух лиц, осуществлявших административное управление Академией (другим был Шумахер; обоим по этому случаю был присвоен ранг коллежского советника). В конце 1727 года он был назначен наставником двенадцатилетнего императора Петра II. Рассказывают, что руководство по обучению царских детей, составленное Гольдбахом в 1760 году, применялось на практике в течение ста последующих лет. В 1742 году Гольдбах сделался ответственным работником министерства иностранных дел (как сказали бы теперь), стал получать награды, земли и чины и к 1760 году дослужился до чина тайного советника. Чин этот довольно точно отражал его обязанности, поскольку Гольдбах состоял в должности криптографа. Эйлеру тоже захотелось чина. Однако Екатерина II, благосклонно встретившая пожелания Эйлера относительно жалованья, казённой квартиры и обеспечения его трёх сыновей позициями и доходами, весьма дипломатично отказала: «Я дала бы, когда он хочет, чин, если бы не опасалась, что этот чин сравняет его с множеством людей, которые не стоят г. Эйлера. Поистине его известность лучше чина для оказания ему должного уважения».

Перейдем, однако, к сути названных проблем.

Непосредственное наблюдение подсказывает, что всякое чётное число, большее двух, удаётся представить в виде суммы двух слагаемых, каждое из которых является простым числом: $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 5 + 5$, $12 = 5 + 7$,…, $24 = 5 + 19$,…, $38 = 7 + 31$ и т. д. Однако проверке может быть подвергнуто лишь ограниченное количество чётных чисел, а всего их бесконечно много. Имеющиеся свидетельства, полученные от просмотра конечного (пусть гигантского) количества примеров, не могут гарантировать, что когда-нибудь в будущем не появится астрономически большого чётного числа, для которого разложение на два простых слагаемых невозможно. А ведь современные компьютеры позволяют строить и использовать для важных практических целей числа с сотнями десятичных знаков. Вот и встаёт вопрос: *всякое* ли чётное число, большее двух, можно представить как сумму двух простых слагаемых? Проблема отыскания ответа на это вопрос и есть проблема Гольдбаха - Эйлера.

Теперь о проблеме близнецов. Заметим, что встречаются очень близко расположенные друг к другу простые числа, а именно такие, расстояние между которыми равно 2. Пример: 41 и 43. Такие числа называются *близнецами*. Начнём последовательно выписывать пары близнецов: (3, 5); (5, 7); (11, 13); (17, 19); и. т. д. Спрашивается, закончится ли когда-нибудь этот ряд пар? Наступит ли момент, когда будет выписана последняя пара и список близнецов окажется исчерпанным, или же ряд близнецовых пар продолжается неограниченно и их совокупность бесконечна (как бесконечна совокупность простых чисел)? Проблема отыскания ответа на этот вопрос и есть проблема близнецов.

Осознание того, что есть простые по формулировке вопросы, столетиями ждущие ответа, представляется поучительным. Не менее поучительно осознание того, что есть и проблемы другого типа, не ждущие решения по причине того, что решения не существует в принципе.

Принято считать, что первой по времени проблемой, относительно которой доказано принципиальное отсутствие решения, была приписываемая школе Пифагора проблема нахождения общей меры двух отрезков. Осторожные выражения «принято считать» и «приписываемая» означают, что как о бесспорных датировках, так и о бесспорном авторстве идей, относящихся к столь глубокой древности, говорить затруднительно. Мы всё же будем придерживаться традиционной версии, к тому же она достаточно правдоподобна.

Пифагор и пифагорейцы, с их мистическим отношением к числам, считали натуральные числа мерилом всех вещей, выразителями мирового порядка и основой материального бытия. Их занимала мысль об универсальной единице измерения длин. То есть о таком едином отрезке, который в каждом другом отрезке укладывался бы целое число раз. Прежде всего они пришли к пониманию, что такого единого отрезка не существует. Это сейчас его отсутствие кажется очевидным, тогда же осознание этого факта было подлинным открытием. Но оставался вопрос, существует ли подобный измеряющий отрезок не для всех отрезков сразу, а свой для каждых двух отрезков. Для ясности сформулируем проблему более развёрнуто. Представим себе два каких-то отрезка. Их *общей мерой* называется такой отрезок, который в каждом из них укладывается целое число раз. Скажем, если второй из наших двух отрезков составляет треть первого, то этот второй отрезок и будет общей мерой: действительно, в первом отрезке он укладывается три раза, а во втором - один. Отрезок, составляющий одну шестую нашего первого отрезка, будет укладываться в нём шесть раз, а во втором два раза, так что он также будет их общей мерой. Легко предъявить пару отрезков, для которых их общая мера будет укладываться в первом отрезке шесть раз, а во втором - пять; другая общая мера тех же отрезков будет укладываться в первом из них восемнадцать, а в другом пятнадцать раз. Теперь спросим себя, для любых ли двух отрезков существует их общая мера. Ответ неочевиден. В школе Пифагора был получен следующий поразительный результат: если взять какой-либо квадрат, а в нём его сторону и его диагональ, то окажется, что эта сторона и эта диагональ не имеют общей меры! Говорят, что диагональ квадрата и его сторона *несоизмеримы*. А *соизмеримыми* как раз и называются такие два отрезка, которые имеют общую меру.

Сегодня трудно себе представить силу эмоционального потрясения, испытанного, по дошедшим до нас из глубины веков сведениям, пифагорейцами, когда они обнаружили, что бывают несоизмеримые отрезки. Рассказывают, что они принесли в благодарственную жертву богам около сотни быков (и с тех пор, как выразился кто-то, скоты всегда ревут, когда открывается новая истина). Рассказывают также, что пифагорейцы поклялись никому не сообщать о своём открытии. (Современная аналогия: по распространённому мнению, в наши дни велено скрывать от публики свидетельства о летающих тарелках. Я относил это мнение к числу предрассудков - и был неправ: в марте 2007 года было объявлено, что Франция рассекречивает собиравшиеся десятилетиями данные о неопознанных летающих объектах.) По одной из легенд - возможно, придуманной самими пифагорейцами в острастку другим нарушителям, - нашёлся преступивший клятву, и он был убит.

Оценивая открытие несоизмеримых отрезков с современных позиций, по прошествии двух с половиной тысяч лет, можно усмотреть два имеющих общекультурное значение аспекта этого открытия.

Первый общекультурный аспект открытия несоизмеримости заключается в том, что впервые было доказательно установлено отсутствие чего-то - в данном конкретном случае общей меры стороны и диагонали одного и того же квадрата. Произошёл один из самых принципиальных поворотов в интеллектуальном развитии человечества. В самом деле, доказать, что что-то существует, можно, предъявив это «что-то». Например, если бы гипотеза Ферма оказалась неверна, то для её опровержения достаточно было бы предъявить тройку Ферма. Но как доказать, что чего-то нет? Если искомое «что-то» заведомо содержится в известной и ограниченной совокупности, то, вообще говоря, можно перебрать все элементы этой совокупности и убедиться, что ни один из них нам не подходит. Но что делать, если искать наше «что-то» надлежит в совокупности необозримой? А именно эта ситуация и имеет место при поиске общей меры: ведь искать её приходится в необозримой совокупности *всех* мыслимых отрезков. Остаётся единственный способ: доказывать отсутствие не путём непосредственного наблюдения, а путём логического рассуждения. Такой способ и был применён пифагорейцами.

Сегодня трудно сказать, как именно рассуждали в школе Пифагора, доказывая несоизмеримость стороны квадрата и его диагонали. От старых времён дошло до нас чисто геометрическое, и притом чрезвычайно изящное, доказательство отсутствия общей меры, но является ли оно тем самым первоначальным доказательством - это неизвестно. Сейчас наиболее популярно сведение вопроса к вопросу из теории чисел. Именно используя прямую и обратную теоремы Пифагора, легко обнаружить, что несоизмеримость стороны и диагонали квадрата равносильна невозможности решить в целых числах уравнение $2x^2 = y^2$. (Мы говорим здесь лишь о положительных целых числах; разумеется, нулевые значения икса и игрека дают решение.) Боюсь, что в нашей средней школе эту равносильность не разъясняют, а очень надо бы: на этом примере демонстрируется и соотношение между прямой и обратной теоремами, и то, как одна невозможность перетекает в другую. Доказательство же указанной равносильности происходит очень просто и состоит, как и доказательство любой равносильности, из двух частей. В первой части доказывается, что если бы диагональ и сторона квадрата были соизмеримы, то существовали бы такие целые числа x и y, что $2x^2 = y^2$. Во второй части доказывается обратное утверждение: если бы такие числа существовали, то и диагональ оказалась бы соизмерима со стороной. В первой части используется прямая теорема Пифагора: если диагональ и сторона соизмеримы, то их общая мера укладывается в стороне какое-то число x раз, а в диагонали какое-то число y раз; тогда по теореме Пифагора $2x^2 = y^2$. Во второй части используется обратная теорема Пифагора: если найдутся такие целые числа x и y, что $2x^2 = y^2$, то по этой обратной теореме треугольник с длинами сторон x, x и y будет прямоугольным и его можно достроить до квадрата со стороной длины x и диагональю длины y. Таким образом, великое пифагорейское открытие было не только замечательным само по себе, но и проложило дорогу к установлению отсутствия решений у уравнений. Обнаружить, что какое-то уравнение не имеет решения (в целых числах, как в нашем примере, или в действительных числах, как уравнение $x^2 =$

-1), подчас бывает не менее важно, чем его решить. Заметим ещё, что доказательство отсутствия целочисленных решений у уравнения $2x^2 = y^2$ настолько просто, что доступно школьнику младших классов; боюсь, что в школах его не излагают.

Разговор о несуществованиях решений мы продолжим в главах 5 и 6, а пока укажем второй общекультурный аспект открытия явления несоизмеримости. Этот второй аспект заключается в том, что открытие несоизмеримости привело, хотя и очень не сразу, к понятию действительного числа, лежащему в основе не только математики, но и всего современного естествознания и современной техники.

Глава 4. Длины и числа

Длина отрезка есть некое соотнесённое с отрезком число. Из теоремы о несоизмеримости немедленно следует, что длина диагонали единичного квадрата, то есть квадрата со стороной длины единица, не может быть выражена ни целым, ни дробным числом. Таким образом, возникает дилемма: или признать, что существуют отрезки, не имеющие длины, или изобрести какие-то новые числа, помимо целых и дробных. Человечество выбрало второе. Ввиду важности сделанного выбора изъяснимся более подробно.

Давайте осознаем, как возникает понятие длины - с логической точки зрения, но отчасти также и с исторической. Прежде всего, вводится единица измерения, то есть отрезок, длиной которого объявляется число единица. Этот отрезок называется *единичным отрезком*. Если теперь этот единичный отрезок укладывается в каком-то другом отрезке семь или семьдесят семь раз, то этому другому отрезку приписывается длина семь или, соответственно, семьдесят семь. Таким способом приписываются целочисленные длины всем отрезкам, такую длину имеющим. За бортом указанного процесса остаются все те многочисленные отрезки, в которых единичный отрезок не укладывается конечное число раз. Посмотрим, как обстоит дело с ними. Возьмём какой-нибудь из таких отрезков и предположим, что он соизмерим с единичным. Пусть, для примера, их общая мера укладывается в нашем отрезке 18 раз, а в единичном отрезке 12 раз. Тогда в нашем отрезке укладывается восемнадцать двенадцатых долей единичного отрезка, и ему приписывается длина восемнадцать двенадцатых. Если для двух отрезков найдена их общая мера, то для них всегда можно указать и другие общие меры - и при том в бесконечном количестве. Для рассматриваемого случая таковыми будут, скажем, мера, укладывающаяся в избранном отрезке 180 раз, а в единичном 120 раз; а также мера, укладывающаяся в избранном отрезке 9 раз, а в единичном 6 раз; а также мера, укладывающаяся в избранном отрезке 6 раз, а в единичном 4 раза; а также мера, укладывающаяся в избранном отрезке 3 раза, а в единичном 2 раза. Следовательно, нашему избранному отрезку можно приписать и длину сто восемьдесят сто двадцатых, и длину девять шестых, и длину шесть четвёртых, и длину три вторых. Именно поэтому дроби $^{180}/_{120}$, $^{18}/_{12}$, $^{9}/_{6}$, $^{6}/_{4}$ и $^{3}/_{2}$, будучи различными дробями, выражают одно и то же число. Указанные дроби можно трактовать как имена этого числа, то есть как синонимы. Таким образом, длина у отрезка единственна, хотя и именоваться может по-разному.

Числа, выражаемые дробями, называются *дробными*. Целые и дробные числа объединяются вместе под названием *рациональные числа*. (Для простоты изложения мы ничего не говорим об отрицательных числах; для наших целей они не нужны, и о них можно просто забыть.) Казалось бы, какие ещё могут быть числа? Но, как мы знаем, диагональ квадрата не имеет общей меры с его стороной. Поэтому если взять квадрат со стороной длины единица, то оказывается, что длина диагонали этого квадрата никаким рациональным числом не выражается. Следовательно, у этой диагонали либо вовсе нет длины, либо эта длина выражается числом какого-то нового типа, каковой тип ещё только подлежит введению в рассмотрение. Числа этого нового типа называются *иррациональными,* вместе с рациональными они образуют систему *действительных,* или *вещественных,* чисел. Теперь уже каждый отрезок обретает длину в виде некоторого действительного числа.

Надо иметь в виду, что изложенный взгляд на понятие числа, включающий в объём этого понятия и иррациональные числа, есть взгляд с современной точки зрения. Чтобы прийти к этой точке зрения, потребовались тысячелетия. В древности лишь натуральные числа считались числами. Число понималось как совокупность единиц. Очень постепенно в обиход входили дроби - сперва с числителем единица и небольшим знаменателем, затем числителю уже разрешалось быть ббольшим единицы, но всё-таки непременно меньшим знаменателя, и так далее. Но и дробь не сразу была признана выражающей число, поначалу она трактовалась иначе - как выражающая отношение величин. Открытие явления несоизмеримости привело к осознанию того поразительного факта, что не всякое отношение величин может быть выражено дробью, и, в конечном счёте, к возникновению понятия действительного числа. Возможно, впервые ясное представление о действительных числах сформулировал великий арабский учёный и государственный деятель XIII века Насирэддин Тусби. Рассуждая об однородных величинах (таковыми являются длины, или веса, или объёмы и т. п.) и отношениях величин одного и того же рода, он писал: «Каждое из этих отношений может быть названо числом, которое определяется единицей так же, как один из членов этого отношения определяется другим из этих членов». И наконец, завершающую точку в развитии ясного, хотя всё ещё интуитивного, представления о действительных числах поставил Ньютон в своей «Всеобщей арифметике» (1707): «Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлечённое отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой нами за единицу. Число бывает трёх видов: целое, дробное и иррациональное. Целое есть то, что измеряется единицей; дробное есть кратное долей единицы; иррациональное число несоизмеримо с единицей».

Нормы научной строгости со временем ужесточаются. Можно полагать, что формулировки Туси и Ньютона воспринимались современниками как определения понятия действительного числа. В наши дни они воспринимаются как всего лишь полезные комментарии. Заключённая в этих комментариях вербализация свидетельствует, что в XIII - XVIII веках понятие действительного числа уже с достаточной отчётливостью воспринималось именно как понятие. Постепенно, однако, возрастала потребность не только в интуитивном осознании, но и в исчерпывающих определениях. Формулировки Туси и Ньютона потому не являются таковыми, что содержашиеся в них термины «величина» и «отношение» сами нуждаются в разъяснении. Теории действительных чисел, отвечающие сегодняшним требованиям строгости, появились лишь около 1870 года. Первопроходцем здесь был почти забытый ныне французский математик Шарль Мерэ (Charles Мberay; 1835 - 1911). В его жизни было два события, каждое из которых поставило его на почётнейшее первое место в некоторой значимой сфере. В 1854 году Мерэ оказался касбиком - то есть первым среди принятых по конкурсу в парижскую Высшую нормальную школу (каковую благополучно окончил в 1857 г.); в первоначальном своём значении слово *cacique* означает индейского племенного вождя в доколумбовой Латинской Америке. В 1869 году Мерэ опубликовал статью, в которой было впервые дано определение действительного числа и впервые изложена математическая теория действительных чисел. Не только первое, но и второе из этих событий остались лишь фактами его биографии. Мерэ имел статус уважаемого, но не ведущего математика своего времени, хотя имел основания числиться именно таковым. Его идеи не были должным образом оценены современниками и никак не повлияли на развитие науки. На развитие науки повлияли появившиеся через несколько лет публикации прославленных, в отличие от Мерэ, немецких математиков Рихарда Дедекинда (1831 - 1916) и Георга Кантора (1845 - 1918), о котором мы ещё поговорим в главе 7. Каждый из них предложил некую конструкцию, посредством которой действительные числа строились на базе чисел рациональных. Хотя нет сомнений, что конструкция Кантора была найдена им независимо, она повторяет конструкцию Мерэ.

У нас здесь нет возможности излагать теории Дедекинда и Мерэ - Кантора. Отметим лишь, что строительным материалом для математического понятия действительного числа служат рациональные числа, каковые, в свою очередь, строятся на основе целых чисел. Это обстоятельство дало возможность выдающемуся немецкому математику Леопольду Кбонекеру

(1823 - 1891) произнести в 1886 году знаменитую фразу *«Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk»* («Бог создал целые числа, всё остальное есть дело рук человеческих»). Возможно, более точным переводом немецкого слова «ganzen» было бы здесь русское слово «натуральные» - потому что не вызывает сомнений, что Кронекер имел в виду не все целые, а именно *натуральные числа* (из которых уже путём сознательной человеческой деятельности строятся отрицательные целые числа). Согласие с божественным происхождением натуральных чисел ещё не означает торжества креационизма. Потому что ничто не мешает считать, что натуральные числа появились в процессе исторической эволюции, оставляя при этом в стороне вопрос, управляется ли эволюция Господом Богом или происходит сама по себе. Став на эту точку зрения, приходим к выводу, что натуральные числа родились в процессах пересчитывания предметов, а также (и, надо полагать, позже) в процессах определения количества предметов. Это разные процессы, и они, с философской точки зрения, приводят к различным (хотя и соотнесённым друг с другом) системам натуральных чисел. Не знаю, как другие языки, но русский язык демонстрирует это различие достаточно наглядно. Пересчёт мы начинаем обычно со слова «раз», а наименьшее возможное количество чего-нибудь есть ноль. Таким образом, наименьшее *количественное* число есть число ноль, а наименьшее *считательное* число есть число раз (один, единица). Некоторые поэтому начинают *натуральный ряд,* то есть ряд натуральных чисел, с нуля, другие же - с единицы.

Упоминавшийся уже Дедекинд называл числа *свободными творениями человеческого духа* (а книга Дедекинда, в которой была провозглашена эта формула, сама имела примечательное название: «Was sind und was sollen die Zahlen» - «Что такое числа и каково их назначение»). Для понимания сущности чисел важно помнить, что число есть понятие абстрактное. Никакое число, даже число, скажем, два, нельзя ни увидеть, ни услышать. Увидеть можно два стола или двух слонов, а услышать можно слово «два» - но это совсем другое дело. Полезно отметить, что абстрактность понятий не есть отличительная (и потому многих пугающая) черта математики. Если вдуматься, то, скажем, такие физические понятия, как электрон, протон и т. п., весьма абстрактны. На память приходит вопрос, заданный на знаменитом семинаре Гельфанда, действовавшем на механико-математическом факультете Московского университета, одним из участников семинара: «Какой реальный математический смысл имеет эта физическая абстракция?»

Вернёмся, однако, к проблемам, не имеющим решения.

Глава 5. Квадратура круга

Выражение «квадратура круга» прочно вошло в язык в качестве красивого обозначения всякой не имеющей решения задачи. В таком своём значении это выражение используется в расширенном смысле - как метафора. В узком же, буквальном смысле квадратура круга означает некую пришедшую к нам из античности геометрическую задачу, относящуюся к *задачам на построение*.

Не одно тысячелетие задача о квадратуре круга оставалась костью в горле математики: не получалось ни её решения, ни доказательства отсутствия такового. Постепенно укреплялось мнение о невозможности решения, и в XVIII веке это мнение превратилось в убеждение настолько твёрдое, что академии наук разных стран заявили о прекращении приёма к рассмотрению трактатов, претендующих на решение. Наконец, в конце XIX века вопрос был закрыт: развитие математики позволило доказать, что решения и в самом деле не существует. Понимание того, в чём состоят задачи на построение, и в частности древняя задача о квадратуре круга, входит, на наш взгляд, в общекультурный минимум. Чтобы дать возможность читателю согласиться или не согласиться с этим тезисом, напомним необходимые сведения.

Геометрия требует чертежа, и античные математики делали такие чертежи. Самым удобным и дешёвым способом было чертить на песке. Архимед, величайший учёный древности (да и не только древности!), был убит римским солдатом в 212 году до н. э., во время Второй пунической войны, на Сицилии, в своих родных Сиракузах. По преданию, солдат застал его на песчаном пляже и, взбешённый его словами «Не трогай мои чертежи!», зарубил мечом. Основными элементами чертежей служили прямые линии и окружности. Для их вычерчивания имелись специальные инструменты. Таких инструментов было два: линейка, позволяющая проводить прямые, и циркуль, позволяющий проводить окружности. Под термином *циркуль* условимся понимать любое устройство, пригодное для заданной цели. Скорее всего, древнейший циркуль состоял из двух палок, соединенных верёвкой; одна палка («игла») втыкалась в песок в центре намеченной окружности, верёвка натягивалась, и второй палкой («писалом», «чертилом», «стилом») чертилась окружность с радиусом, равным длине верёвки. Задача на построение состояла в том, чтобы построить, то есть начертить, геометрическую фигуру с требуемыми свойствами. Вот простейший пример такой задачи: для заданного отрезка требуется построить его середину. Решение: для каждого из концов отрезка проводим окружность с центром в этом конце и с радиусом, равным длине отрезка; далее проводим прямую через те две точки, в которых наши окружности пересеклись; эта прямая пересечёт заданный отрезок в его середине. А вот формулировка задачи о квадратуре круга: для заданного круга требуется построить квадрат, равновеликий (то есть равный по площади) этому кругу. Неразрешимость квадратуры круга доказал в 1882 году немецкий математик Фердинанд Линдеман. Рассказывают, что он завершил доказательство 12 апреля, в день своего тридцатилетия, и, спрошенный друзьями, отчего это он сияет так, словно решил проблему квадратуры круга, отвечал, что так оно и есть. Жена Линдемана была недовольна, что муж удовлетворен той славой, которую заслуженно принесла ему задача о квадратуре круга, и заставляла его доказывать Великую теорему Ферма. Он страдал, но вынужден был подчиняться. Он скончался в 1939 году и, пока был в силах, занимался Проблемой Ферма. Результатом были слабые публикации на эту тему.

Мы, разумеется, не собираемся здесь доказывать неразрешимость задачи о квадратуре круга. Можно было бы попытаться в доступных терминах наметить общее направление доказательства - но мы и этого делать не будем, потому что это вывело бы нас за пределы того, что мы считаем общекультурным математическим минимумом. А вот самоё формулировку обсудим. Казалось бы, что тут обсуждать, формулировка достаточно ясная. Сейчас мы увидим, что на самом деле её смысл нуждается в разъяснении. Приносим извинения тому читателю, который почтёт эти разъяснения занудными и излишними. Но надеемся встретить и иного читателя, который найдет здесь пищу для размышлений и оценит то обстоятельство, что именно математика является поставщиком такой пищи.

Каждая задача на построение предполагает наличие некоторой исходной геометрической фигуры и состоит в требовании указать способ, позволяющий построить новую фигуру, связанную с исходной указанными в задаче соотношениями. Так, в задаче о середине отрезка исходной фигурой был отрезок, а новой фигурой - точка, являющаяся его серединой; в задаче о квадратуре круга исходная фигура - круг, а новая - квадрат, имеющий ту же площадь. Вот ещё пример: по данной стороне построить правильный треугольник (то есть такой треугольник, у которого одинаковы все стороны и все углы). Исходной фигурой здесь служит отрезок, а новой фигурой - треугольник, у которого все стороны конгруэнтны этому отрезку. Надеемся, что читатель легко решит эту задачу. Можно построить и правильный семнадцатиугольник, но это уже не столь просто. А вот аналогичная задача о построении правильного семиугольника не имеет решения - это в конце XVIII века доказал один из величайших математиков всех времён Карл Фридрих Гаусс (1777 - 1855). До Гаусса существование таких задач на построение, решить которые невозможно, было лишь правдоподобной гипотезой. Он же указал способ построения правильного 17-угольника. Вот ещё пример весьма известной и древней задачи на построение: *задача о трисекции угла*. В ней требуется для каждого угла построить другой угол, составляющий треть исходного. Для некоторых углов специального вида - например, для прямого угла - построение трети не составляет труда. Однако в середине XIX века про некоторые углы было доказано, что, оперируя линейкой и циркулем, построить их невозможно. Оказалось, в частности, что невозможно построить углы в 10 и 20 градусов и, следовательно, осуществить трисекцию углов в 30 и 60 градусов. Тем самым была установлена *неразрешимость задачи о трисекции угла*.

Итак, в каждой задаче на построение требуется указать некоторый способ построения. Когда такой способ предъявляется, как это было для задачи о середине отрезка, он, способ, обычно не вызывает сомнений. Но когда утверждается, что такого способа нет, как это утверждается для квадратуры круга или для трисекции угла, возникает необходимость уточнить, чего именно нет.

Всякий способ построения состоит в указании некоторой последовательности разрешённых операций. Последовательность эта - своя для каждой задачи. Сам же перечень разрешённых операций один и тот же для всех задач на построение. Он весьма невелик, и мы сейчас с ним познакомимся.

Прежде всего, это операции, связанные с линейкой. Читателя может удивить множественное число. Что ещё можно делать с линейкой, как не чертить прямую? А вот что: чертить луч, то есть полупрямую; чертить отрезок. Более точно: разрешается, приложив линейку к двум уже построенным точкам, начертить отрезок между этими точками; или луч, начинающийся в одной из этих точек и проходящий через другую; или прямую, проходящую через эти две точки. Господи! - воскликнет читатель, да это же и так ясно, стоило ли тратить слова на такую очевидность. Я благодарен читателю за это восклицание, потому что оно даёт возможность объяснить, почему стоило. Для этого рассмотрим ещё одну операцию, не менее простую для исполнения, чем проведение прямой через две точки, но, однако же, не входящую в перечень разрешённых: через данную точку провести касательную к данной окружности. Начертив окружность и взяв точку вне круга, читатель убедится, как легко провести касательную, используя реальную, деревянную или металлическую, линейку. Тем не менее в перечень разрешённых операций проведение касательной не включено. Мы только что прибегли к важному, как нам кажется, приёму обучения понятиям: надо не только приводить примеры вещей, входящих в объём вводимого понятия, но и контрпримеры вещей, в указанный объём не входящих. Так, чтобы на примерах объяснить, что такое чётное число, надо не только сказать, что числа 0, 2, 4, 6 и так далее являются чётными, но и сказать, что числа 1, 3, 5, 7 и так далее таковыми не являются; чтобы объяснить марсианину, что такое кошка, надо предъявить ему не только несколько кошек, но также и несколько собак, сказав, что они кошками не являются.

С циркулем связана такая операция. Установив иглу циркуля в уже построенную точку, а стило в другую уже построенную точку, разрешается начертить окружность. И даже более общо: установив иглу и стило в две уже построенные точки, разрешается, не меняя раствора циркуля, перенести иглу в третью уже построенную точку и начертить окружность.

Разрешается находить пересечения друг с другом уже построенных прямых, лучей, отрезков, окружностей и дуг окружностей (но не всяких дуг, а расположенных между двумя уже построенными точками).

Наконец, разрешается совершать так называемый *выбор произвольной точки*. Это значит, что разрешается нанести стилом точку в любом месте плоскости, а также в любом месте уже построенной фигуры и использовать эту точку в дальнейших построениях. (Термин «фигура» обозначает здесь отрезок, луч, прямую, окружность, дугу окружности, а также участок плоскости, граница которой составлена из перечисленных только что простейших фигур.)

Только теперь, после описания всех разрешённых операций, обретает точный смысл утверждение о нерешимости той или иной задачи на построение, в частности задачи о квадратуре круга. Отсутствие решения означает здесь отсутствие такой цепочки разрешённых операций, которая приводила бы от круга к квадрату той же площади.

Заметим, что сам перечень разрешённых операций в значительной степени обусловлен историческими причинами и, вообще говоря, мог бы быть другим. Например, можно было бы включить в число разрешённых операций операцию построения касательной, о которой говорилось выше (заметим, кстати, что это не дало бы ничего принципиально нового, потому что касательную можно построить, подобрав подходящую цепочку разрешённых операций из старого перечня). Можно было бы включить в число разрешённых операций вычерчивание эллипса - ведь устройство для вычерчивания эллипса лишь немногим сложнее циркуля (достаточно вбить два гвоздя в фокусы эллипса и протянуть между ними нить, более длинную, нежели расстояние между фокусами; зацепим нить стилом и натянем; тогда, перемещая стило так, чтобы нить оставалась натянутой, получим эллипс). Да даже и не надо заботиться о лёгкости выполнения разрешённой операции: строго говоря, мы вправе объявить разрешённой любую операцию по нашему усмотрению. Перечень разрешённых операций, с чисто логической точки зрения, достаточно произволен. Однако, коль скоро он выбран, он уже не меняется. Полезная аналогия: свод юридических актов. С чисто логической, опять же, точки зрения, законы произвольно устанавливаются законодателем, но, будучи принятыми, они уже - хотя бы на определённый период - не меняются; во всяком случае, так должно быть.

Объясним теперь, почему задачам на построение было уделено здесь такое внимание. Причина в том, что на примере этих задач мы пытались продемонстрировать некоторые математические представления принципиального характера, представления, которые можно отнести к философии математики, а то и к философии вообще. Перечислим эти представления.

Во-первых, был ещё раз проиллюстрирован тезис, что *задача,* или *проблема,* всегда есть требование что-то найти, указать, построить.

Во-вторых, была показана необходимость уточнения того, в пределах какого класса объектов ищется решение задачи. Иногда этот класс состоит из объектов довольно простой (честнее было бы сказать: довольно привычной) природы - троек чисел в проблеме Ферма, отрезков в проблеме соизмеримости, но иногда он состоит из довольно-таки специальных объектов, подобно цепочкам операций в задачах на построение.

В-третьих, уточнение, о котором только что шла речь, особенно необходимо в случае, если задача оказывается нерешимой.

В-четвёртых, представление о разрешённой операции, в его общем виде, шире сферы задач на построение. Оно существенно и для компьютерной науки (Computer Science), и для компьютерной практики, а именно для программирования. Каждый компьютер имеет свой набор разрешённых операций, а каждая компьютерная программа есть некоторая цепочка операций, выбранных из этого набора.

Именно в силу своего философского аспекта задачи на построение должны занимать достойное место в школьном курсе геометрии. Мы не имеем в виду сложных задач, требующих зачастую большой изобретательности, - такие задачи должны изучаться в специализированных математических классах. Нет, мы имеем в виду самые простые задачи вроде задачи о построении правильного треугольника или задачи о нахождении середины отрезка.

Глава 6. Массовые задачи и алгоритмы

В который уже раз подчеркнем, что задача - это всегда требование что-то найти, построить, указать. В школе это «что-то» обычно называют *ответом,* а систему рассуждений, приводящую к ответу, - *решением*. Во «взрослой» математике ответ чаще всего тоже называют решением. Таким образом, термин «решение» приобретает два значения: ‘решение-ответ’ и ‘решение-процесс’ - причём первое есть результат второго. С точки зрения русской лексики ситуация здесь отнюдь не уникальна: например, печенье как изделие есть результат печения как действия по глаголу «печь». К путанице подобная полисемия, как правило, не приводит: из контекста всегда бывает ясно, что имеется в виду. Так что согласимся употреблять «взрослую» терминологию.

В замечательной одноактной пьесе «Урок» Эжена Ионеско есть такой диалог, который мы приведём с купюрами.

«Учитель. ‹…› Сколько будет, ну, скажем, если три миллиарда семьсот пятьдесят пять миллионов девятьсот девяносто восемь тысяч двести пятьдесят один умножить на пять миллиардов сто шестьдесят два миллиона триста три тысячи пятьсот восемь?

Ученица. Это будет девятнадцать квинтиллионов триста девяносто квадриллионов два триллиона восемьсот сорок четыре миллиарда двести

девятнадцать миллионов сто шестьдесят четыре тысячи пятьсот восемь

‹…›

Учитель *(сосчитав в уме, с нарастающим изумлением)*. Да… Вы правы… ответ, действительно… *(невнятно бормочет)* квадриллионов… триллионов… миллиардов… миллионов… *(разборчиво)* сто шестьдесят четыре тысячи пятьсот восемь… *(Ошеломленно.)* Но каким образом вы это вычислили, если вам недоступны простейшие приемы арифметического мышления?

Ученица. Очень просто. Поскольку я не могу положиться на свое арифметическое мышление, я взяла и выучила наизусть все результаты умножения, какие только возможны».

Всех результатов умножения бесконечно много, так что выучить их наизусть невозможно. Да и не нужно: Ионеско справедливо утверждает, что «математика - заклятый враг зубрёжки». (Кстати, теоретическая невозможность выучить все результаты получила в приведённом диалоге и экспериментальное подтверждение. Дело в том, что Ученица дала неправильный ответ: правильным ответом является число 19 389 602 947 179 164 508, а ею названо число 19 390 002 844 219 164 508. Не берусь судить, получил ли этот факт должное отражение в ионесковедении.)

Но мы ведь умеем умножать. Это потому, что ещё в начальной школе нам сообщают некоторый общий способ умножения любых целых чисел, а именно способ умножения столбиком. Любой человек, овладевший этим способом, имеет право заявить, что теперь он готов умножить друг на друга любые два натуральных числа - и не потому, что он выучил все результаты (что, повторим, невозможно), а именно потому, что указанный способ позволяет найти требуемый результат для любой пары сомножителей.

На примере с умножением можно получить представление о понятии *массовая задача*. Массовая задача образуется путём совместного рассмотрения серии однотипных единичных задач. В случае умножения каждая единичная задача состоит в указании пары конкретных чисел (как, например, тех, которые были названы Ученице Учителем) и требовании найти их произведение. Это произведение является *решением* предложенной единичной задачи. Массовая же задача состоит здесь в требовании найти некий метод, позволяюший найти произведение для каждой отдельной пары чисел. Другой простой пример. Задача решить квадратное уравнение x^2 -

$13x + 30 = 0$ - это единичная задача, и её решением служит пара чисел 3 и 10. А вот изучаемая в средней школе задача о решении произвольного квадратного уравнения - это массовая задача, и её решением служит всем известная (или долженствующая быть всем известной) формула, дающая решение для любого конкретного квадратного уравнения. Остановим свой взгляд на какой-нибудь массовой задаче и посмотрим, чем отличаются друг от друга составляющие её единичные задачи. Мы видим, что они отличаются своими *исходными данными*. Для каждой единичной задачи умножения исходным данным служит конкретная пара чисел. А для каждой единичной задачи на решение квадратного уравнения исходное данное - это конкретное квадратное уравнение.

Решением же массовой задачи является общий метод, дающий для каждой из составляющих её единичных задач решение этой задачи. Если предложенный общий метод состоит в последовательности строго детерминированных операций, ведущих от исходного данного к результату, он называется *конструктивным,* или *эффективным,* или *алгоритмическим,* или, короче, *алгоритмом*. Таким образом, можно говорить об алгоритме сложения столбиком, об алгоритме умножения столбиком, об алгоритме решения квадратных уравнений и т. п. Алгоритмы играют в математике, да и во всей нашей жизни, большую роль - особенно в связи с развитием компьютерной технологии.

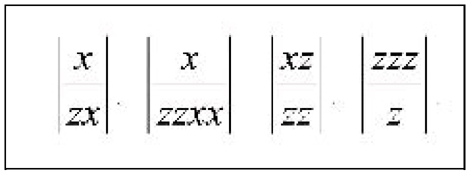
Само слово «алгоритм» достаточно интересно: это, возможно, единственный математический термин, имеющий в своей этимологии географическое название. Таким названием служит слово «Хорезм». Великий учёный Мухаммед бен Муса аль-Хорезмби жил в конце VIII - первой половине IX века. Арабское имя «аль-Хорезми» буквально означает ‘из Хорезма’. Аль-Хорезми предложил некоторые методы решения арифметических задач, и на его авторитет ссылались средневековые европейские авторы, писавшие, как это было принято, на латыни. При этом начиная с XII века его имя транслитерировалось как «Algoritmi». Отсюда и пошёл термин «алгоритм». Поиски общего метода для решения массовой задачи велись со времён античности. Однако впервые ясное понимание алгоритма в качестве самостоятельной сущности встречается лишь в 1912 году в трудах великого французского математика Эмиля Бореля.

Понятие алгоритма - одно из центральных в математике. Программа для компьютера есть не что иное, как запись какого-то алгоритма на компьютерном языке. Прорыв в осознании этого важнейшего понятия произошёл в 1936 году, когда независимо друг от друга Алонзо Чёрч в Америке и Алан Тьюринг в Англии предложили математические уточнения понятия алгоритма (каждый своё) и на основе этих уточнений предъявили первые примеры массовых проблем, неразрешимых алгоритмически, в числе которых оказалась и очень знаменитая, стоявшая с 1915 года так называемая «das Entscheidungsproblem» («проблема разрешения»), считавшаяся главной проблемой математической логики. Поясним, что термины «проблема» и «задача» для нас синонимы и что массовая проблема считается *алгоритмически неразрешимой,* если не существует решающего её алгоритма, то есть такого единого алгоритма, который позволял бы находить решение для каждой из тех единичных проблем, которые и составляют рассматриваемую массовую проблему.

Алгоритмически неразрешимые проблемы, указанные Чёрчем и Тьюрингом, слишком сложны, чтобы их здесь формулировать. Сейчас мы приведём достаточно простой пример такой проблемы. Разумеется, мы вынуждены ограничиться её формулировкой и не приводить ни доказательства, ни даже намёка на доказательство её неразрешимости. Пример этот покажет, что массовые проблемы, для которых отсутствует требуемый алгоритм, лежат совсем близко к нашей повседневной жизни.

В целях большей наглядности изложим наш пример в терминах некоей игры. Любезный читатель согласится, что такая игра вполне мыслима в нашу эпоху пиара, рекламных акций, казино и игровых автоматов.

Средствами игры будут служить пластинки, наподобие тех доминошек, что используются при игре в домино. Как и в домино, каждая пластинка разделена на верхнюю и нижнюю половину. В каждой половине что-то написано. Отличие от домино в том, чтбо именно написано. В случае домино в каждой из половин записывается количество очков, от 0 до 6. А нашем случае в каждой из половин записывается какая-то цепочка из букв икс и зет. Вот примеры таких цепочек. Цепочки длины один: *x*, *z*. Цепочки длины два: *xx*, *xz*, *zx*, *zz*. Цепочки длины три: *xxx, xxz, xzx, xzz, zxx, zxz, zzx, zzz*. Возможна и цепочка длины ноль, в этом случае не записано ничего. А вот одна из 128 цепочек длины семь: *zxzxxxz*. Проиллюстрируем сказанное примерами возможных пластинок:



Перечисленные 4 пластинки, в том порядке, как они указаны, обозначим - для дальнейших ссылок - буквами *A, B, C, D*. Если приложить одну пластинку к другой, но не торцами, как при игре в домино, а боками, то в результате получим две строчки букв: одну сверху, другую снизу. Так, прикладывая *A* к *D* (слева *D*, справа *A*), получаем *zzzx* сверху и *zzx* снизу. Если приложить в другом порядке, получим *xzzz* сверху, *zxz* снизу. Аналогично можно прикладывать друг к другу несколько пластинок и считывать верхнюю и нижнюю строчки букв. Более того. Каждую пластинку разрешается воспроизводить в неограниченном количестве и создавать сочетания из повторяющихся пластинок - такие, например, как *AACA*. В этом примере верхней строчкой будет *xxxzx*, а нижней - *zxzxzzzx*. Прошу у читателя прощение за затянувшееся предварение к игре, но хотелось бы, чтобы всё было предельно ясно.

Теперь - сама игра. Она состоит в следующем. В средствах массовой информации объявляется некоторый конкретный набор пластинок. Далее предлагается, воспроизводя каждую из пластинок набора в необходимом количестве, приложить пластинки друг к другу так, чтобы верхняя и нижняя строчки иксов и зетов совпали друг с другом. Первым пяти, приславшим решения, будет выплачен внушительный приз.

Поясним сказанное на примерах. Пусть объявленный набор содержит всего только одну пластинку *A* из приведённого выше перечня. Ясно, что решение невозможно, поскольку, сколько раз ни прикладывай пластинку *A* саму к себе, нижняя строка всегда окажется длиннее верхней. По сходной причине решения не существует, если объявленный набор состоит из одной только пластинки *D*, только тут длиннее будет верхняя строка. Желающие могут попытаться доказать, что решения не существует и в том случае, когда объявленный набор состоит из двух пластинок, *A* и *D*. А вот если объявить набор из всех наших четырёх пластинок *A*, *D*, *C* и *D*, то решение существует. Действительно, если сложить пластинки в таком порядке: *DBCDA*, то и верхняя, и нижняя строка окажутся одинаковы: *zzzxxzzzzx*.

Итак, набор объявлен. Все хотят получить приз. Но прежде, чем пытаться найти такое расположение пластинок, при котором верхняя и нижняя строки окажутся одинаковыми, желательно узнать, возможно ли такое расположение в принципе. Ведь если оно невозможно, то бесперспективно его искать, это будет пустой потерей времени. Так вот, оказывается, что не существует никакого эффективного способа это узнавать. Не существует (именно не существует, а не просто неизвестен) такого алгоритма, который позволял бы для любого объявленного набора пластинок узнать, имеется ли решение, то есть возможно или невозможно сложить пластинки требуемым образом. Для каждого отдельно взятого набора пластинок задача узнать, к какой из двух категорий этот набор относится - к той, для которой решения имеются, или же к той, для которой решений нет, - она, эта задача, есть сугубо творческая задача, своя для каждого такого набора, а общий метод получения ответа для всех таких задач отсутствует.

Глава 7. Парадокс Галилея, эффект Кортасара и понятие количества

В детстве меня иногда посещал следующий кошмар. Мне представлялось большое число стульев (наглядно - в виде стульев в партере летнего театра). И вот их начинают пересчитывать. Получают некоторое число. Затем пересчитывают в другом порядке и получают другое число. Кошмар заключался в том, что при обоих подсчётах не было ошибки.

Только в университете я узнал, что невозможность описанного только что явления составляет предмет особой, и притом не слишком просто доказываемой, теоремы математики. А потом я прочёл “Записи в блокноте” Хулио Кортасара. Там говорилось о произведённой в 1946 или 1947 году операции по учёту пассажиров на одной из линий метро Буэнос-Айреса: “‹…›Было установлено точное количество пассажиров, в течение недели ежедневно пользующихся метро. ‹…› Учёт производился с максимальной строгостью у каждого входа и выхода. ‹…› В среду результаты исследований были неожиданными: из вошедших в метро 113 987 человек на поверхность вышли 113 983. Здравый смысл подсказывал, что в расчётах произошла ошибка, поэтому ответственные за проведение операции объехали все места учёта, выискивая возможные упущения. ‹…› Нет необходимости добавлять, что никто не обнаружил мнимой ошибки, из-за которой предполагались (и одновременно исключались) четверо исчезнувших пассажиров. В четверг все было в порядке: сто семь тысяч триста двадцать восемь жителей Буэнос-Айреса, как обычно, появились, готовые к временному погружению в подземелье. В пятницу (теперь, после принятых мер, считалось, что учёт ведется безошибочно) число людей, вышедших из метро, превышало на единицу число вошедших”.

При дальнейшем чтении я, к сожалению, обнаружил, что Кортасар предлагает некое рациональное объяснение изложенному им парадоксу; вот тут очевидное отличие Кортасара от его старшего соотечественника Борхеса (влияние коего Кортасар, несомненно, испытал): Борхес не стал бы искать рационального оправдания. “К сожалению” сказано потому, что поначалу мне показалось, что здесь выражена глубокая идея о возможности, хотя бы в фантазии, следующего эффекта: при очень большом количестве предметов это количество не меняется при добавлении или убавлении сравнительно небольшого их числа. И хотя, повторяю, приписывание Кортасару открытия и опубликования этого воображаемого эффекта оказалось ошибочным, я всё же буду называть его для краткости *эффектом Кортасара;* тем более что такое название полностью соответствует так называемому *принципу Арнольда,* установленному нашим выдающимся математиком Владимиром Игоревичем Арнольдом: если какое-либо явление или утверждение носит чьё-либо имя, то это означает, что оно не имеет своим автором носителя этого имени. Предположение, что эффект Кортасара имеет отношение не только к воображению, но и к реальности, может показаться бредом, но, как будет видно ниже, сформулированное в нём явление действительно имеет место, если очень большое становится бесконечным.

Бесконечное вообще следует - в понятийном аспекте - трактовать как упрощённое представление о конечном, но очень большом. А бывает ли вообще бесконечное количество предметов? Бывает ли оно в физической реальности - этого никто не знает. Количество звёзд во Вселенной - конечно оно или бесконечно? Мнения расходятся, и проверить, кто прав, довольно затруднительно. В реальности же идеальной - да, бывает. Например, бесконечен *натуральный ряд,* то есть ряд *натуральных чисел* 1, 2, 3, 4,… Предупредим для ясности, что в этой главе, вплоть до особого распоряжения, никаких других чисел рассматриваться не будет, а потому натуральные числа будут именоваться просто *числами*.

Натуральный ряд представляет собой, пожалуй, наиболее простой пример бесконечной совокупности, или, как говорят математики, *бесконечного множества*. И уже в нём можно наблюдать некоторые парадоксальные явления, в частности - нарушение древней философемы “Целое больше части”. На это обратил внимание Галилей, описавший ситуацию с полной отчётливостью и наглядностью. В 1638 году вышла его книга “Беседы и математические доказательства…”. Изложение, в духе тогдашнего времени, выглядело как запись бесед, которые в течение шести дней вели между собою вымышленные персонажи. В первый же день была затронута тема бесконечности, в том числе применительно к натуральному ряду. Послушаем, что говорит один из участников беседы, синьор Сальвиати:

“Сальвиати. ‹…› Мне пришёл в голову пример, который я для большей ясности изложу в форме вопросов, обращённых к синьору Симпличио, указавшему на затруднения. Я полагаю, что вы прекрасно знаете, какие числа являются квадратами и какие нет.

Симпличио. Я прекрасно знаю, что квадратами являются такие числа, которые получаются от умножения какого-либо числа на самого себя; таким образом числа четыре, девять и т. д. суть квадраты, так как они получаются от умножения двух и соответственно трёх на самих себя.

Сальвиати. Великолепно. Вы знаете, конечно, и то, что как произведения чисел называются квадратами, так и образующие их, т. е. перемножаемые, числа носят название сторон или корней; другие числа, не являющиеся произведениями двух равных множителей, не суть квадраты. Теперь, если я скажу, что количество всех чисел вместе - квадратов и не квадратов - больше, нежели одних только квадратов, то такое утверждение будет правильным; не так ли?

Симпличио. Ничего не могу возразить против этого.

Сальвиати. Если я теперь спрошу вас, каково число квадратов, то

можно по справедливости ответить, что их столько же числом, сколько существует корней, так как каждый квадрат имеет свой корень и каждый корень - свой квадрат; ни один квадрат не может иметь более одного корня и ни один корень - более одного квадрата.

Симпличио. Совершенно верно.

Сальвиати. Но если я спрошу, далее, каково число корней, то вы не станете отрицать, что оно равно количеству всех чисел вообще, потому что нет ни одного числа, которое не могло бы быть корнем какого-либо квадрата; установив это, приходится сказать, что число квадратов равняется общему количеству всех чисел, так как именно таково количество корней, каковыми являются все числа. А между тем ранее мы сказали, что общее количество всех чисел превышает число квадратов, так как бболышая часть их не является квадратами”.

“Что же нужно сделать, чтобы найти выход из такого положения?” - в растерянности спрашивает еще один участник беседы, Сагредо. Возможны два выхода. Первый состоит в том, чтобы отказаться от сравнения бесконечных количеств по их величине и признать, что в отношении двух таких количеств не следует даже и спрашивать, равны ли они, первое ли больше второго, второе ли больше первого, - и то, и другое бесконечно, и этим всё сказано. Такой выход и предлагает Галилей устами Сальвиати. Но возможен и другой выход. Можно предложить общую схему сравнения любых количеств по их величине. В случае конечных количеств эта схема не будет расходиться с нашими привычками. Для количеств бесконечных она тоже, если вдуматься, не будет им противоречить - хотя бы потому, что каких-либо привычек оперирования с бесконечностями у нас нет. Именно этот второй выход и принят в математике. Забегая вперёд, укажем, что если к квадратам добавить сколько угодно не-квадратов, то полученная расширенная совокупность чисел будет равна по количеству исходной совокупности квадратов (эффект Кортасара). Можно, в частности, добавить все не-квадраты и получить тем самым совокупность всех чисел. Тем самым оказывается, что количество всех чисел действительно равно количеству квадратов - хотя квадраты составляют только часть чисел. Это явление -

равенство по количеству совокупности и её собственной части - для конечных совокупностей невозможно, для совокупностей же бесконечных возможно, и сама эта возможность может служить одним из определений бесконечности.

Только что изложенное свойство бесконечных совокупностей не столь трудно для понимания, как это может показаться. И сейчас мы попытаемся его объяснить. Сама логическая конструкция проста, изящна и поучительна. Мы надеемся, что читатель согласится включить её в свой интеллектуальный багаж, причём в качестве носимой с собой ручной клади, а не тяжеловесного предмета, сдаваемого в багажное отделение.

Для начала перестанем избегать термина *множество,* как это мы делали до сих пор, стыдливо заменяя его синонимом "совокупность". Множество состоит из элементов, которых не обязательно много. (Это в русском языке слова "множество" и "много" однокоренные, а вот английское "set" и французское "ensemble" не несут на себе вводящего в заблуждение оттенка множественности.) Возможны множества, состоящие из одного только элемента, и даже *пустое множество,* вовсе не имеющее элементов. Зачем же рассматривать такие патологические образования, как пустое множество, спросит читатель. И мы ему ответим: это удобно. Удобно иметь право говорить, например, о множестве слонов в зоопарке города N, не зная заранее, есть ли в этом зоопарке хотя бы один слон. Какое множество ни взять, среди его частей присутствует и пустое множество: так, среди частей множества всех слонов земного шара присутствует не только множество слонов московского зоопарка, но и множество слонов любого зоопарка, слонов не имеющего. Во избежание недоразумений заметим, что пустое множество одно: пустое множество слонов и пустое множество мух представляют собою одно и то же множество. (Совершенно так же, как стакан газированной воды без вишневого сиропа не отличается от стакана газированной воды без апельсинового сиропа; сравнение понятно для тех читателей старших поколений, которые ещё помнят торговлю газировкой на улицах советских городов.)

Учение о сравнении количеств элементов в любых, а не только конечных, множествах целиком принадлежит великому немецкому математику и философу Георгу Кантору (1843 - 1918). Назвав Кантора немцем, мы всего лишь следовали укоренившейся традиции. Не вполне ясно, как его следует называть. Его отец родился в Дании, мать - в России. Сам он также родился в России, а именно в Санкт-Петербурге; в этом городе он провел первые одиннадцать лет своей жизни, о которых вспоминал с ностальгией. Вот, скажем, Пьера Ферма, о котором говорилось выше, в главе 2, можно было, не испытывая сомнений, назвать французом: он всегда жил во Франции, ей служил и говорил по-французски; трудно представить, чтобы Ферма ощущал себя кем-то иным, а не французом. Кем ощущал себя Кантор - загадка. Его биографы указывают, что хотя свою взрослую жизнь он и прожил в Германии, уютно ему там не было.

Выдающийся российский математик Павел Сергеевич Александров (1896 - 1982) писал: "Думаю, что во второй половине XIX века не существовало математика, оказавшего большее влияние на развитие математической науки, чем создатель абстрактной теории множеств Георг Кантор".

Учение о бесконечном оказалось настолько трудным, что привело его автора к тяжёлой нервной болезни. В 1884 году у Кантора начались приступы депрессии, а с 1897 года он уже не публиковал научных работ. С 1899 года Кантор становится пациентом нервных санаториев, а потом и клиник, проводя в них всё больше и больше времени. В одной из таких клиник он и скончался. Любезному читателю это не грозит, поскольку мы ограничимся началами.

Построения Кантора основаны на чрезвычайно простой мысли (которая, как и всякая гениальная мысль, после своего осознания кажется очевидной): понятие количества является вторичным по отношению к понятию равенства количеств. Не дболжно смущаться тем, что в выражении "равенство количеств" слово "количество" уже присутствует: нас должна интересовать не лингвистическая этимология терминов, а логическая генеалогия понятий. Для установления равноколичественности двух множеств вовсе не нужно пересчитывать их элементы, даже вообще можно не уметь считать. Для примера представим себе двух первобытных людей, один из которых располагает стадом коз, а другой - стадом овец. Они хотят обменяться своими стадами, но при условии, что стада равноколичественны. Счёта они не знают. Но это им и не нужно. Нужно просто связать попарно овец и коз, так чтобы каждая коза была связана ровно с одной овцой, а каждая овца - ровно с одной козой. Успех процедуры и означает равенство количеств.

Пример из первобытной жизни приводит нас к важнейшему понятию *эквивалентности множеств*. Говорят, что два множества *эквивалентны,* если можно так сопоставить друг с другом элементы первого множества и элементы второго множества, что каждый элемент первого множества окажется сопоставленным ровно с одним элементом второго множества и каждый элемент второго множества окажется сопоставленным ровно с одним элементом первого множества. Наши скотоводы как раз и установили эквивалентность своих стад. А синьор Сальвиати установил эквивалентность множества всех квадратов и множества всех чисел; эту эквивалентность можно наглядно показать посредством следующей таблицы:

Чтобы продемонстрировать эффект Кортасара на простом примере, добавим к множеству квадратов какие-нибудь три числа, квадратами не являюшихся, - ну, скажем, 7, 23 и 111. Следующая таблица показывает эквивалентность множества квадратов и расширенного множества, состоящего из всех квадратов и трёх указанных не-квадратов:

Читатель да благоволит изобразить на листе бумаги любые два отрезка и, в качестве несложного упражнения, убедиться, что множество точек, расположенных на первом отрезке, и множество точек, расположенных на втором отрезке, являются эквивалентными.

Но не окажутся ли все вообще бесконечные множества эквивалентны друг другу? Великое открытие Кантора состояло в том, что он обнаружил неэквивалентные бесконечности. Так, одна из его замечательных теорем гласила, что множество всех точек прямой и множество всех натуральных чисел неэквивалентны. Оказалось, что наиболее знакомые нам бесконечные множества подразделяются на два основных рода, так что множества первого рода эквивалентны друг другу и множества второго рода эквивалентны друг другу, а множества разных родов друг другу не эквивалентны. Множества первого рода называются *счётными,* к ним относятся: натуральный ряд, любая бесконечная часть натурального ряда (например, множество всех квадратов), множество всех дробей, множество всех мыслимых комбинаций (как ведущих к выигрышу, так и проигрышных) пластинок из четырёхчленого набора, заявленного в игре предыдущей главы. Множества второй категории называются *континуальными;* таковы множество всех точек прямой, всех точек плоскости, всех окружностей, множество всех частей натурального ряда. Бывают и такие бесконечные множества, которые не являются ни счётными, ни континуальными, но в “математическом быту” такие множества почти не встречаются.

Позволим себе теперь рассматривать и другие числа, помимо натуральных, - те, о которых говорилось в главе 4 “Длины и числа”. Хотя каждое рациональное число может быть записано посредством многих дробей, а более точно - бесконечного их количества, множество рациональных чисел оказывается эквивалентным множеству дробей, то есть счётным. С другой стороны, как известно из средней школы, каждому действительному числу можно поставить в соответствие некоторую точку на прямой, и при этом каждая точка будет сопоставлена ровно с одним числом, своей *координатой;* тем самым обнаруживается, что множество точек прямой и множество действительных чисел эквивалентны и, следовательно, множество действительных чисел континуально. Как было сообщено в предыдущем абзаце, континуальность и счётность не могут сочетаться в одном и том же множестве. Поэтому множество рациональных чисел не может совпасть с множеством всех действительных чисел, а отсюда следует, что существуют такие действительные числа, которые не являются рациональными; их называют *иррациональными*. Таким образом, сам факт существования иррациональных чисел, без указания какого-либо конкретного иррационального числа, может быть получен из совершенно общих рассуждений.

И ещё об одном виде чисел - о так называемых *алгебраических числах*. Действительное число называется *алгебраическим,* если оно является корнем какого-либо алгебраического уравнения. Всякое уравнение имеет две части, левую и правую, разделённые (или, если угодно, соединённые) знаком равенства. Алгебраическими называют уравнения особо простого вида: в правой части стоит число ноль, а левая есть многочлен какой-то степени с одним неизвестным и целыми коэффициентами, которые могут быть как положительными, так и отрицательными. Частный вид алгебраических уравнений образуют те квадратные уравнения, у которых все коэффициенты (при иксе в квадрате, при иксе, свободный член) суть целые числа. Всякое рациональное число есть число алгебраическое (вопрос к читателю: почему?), и алгебраические числа образуют как бы следующий за рациональными разряд чисел по шкале “от простого к сложному”. Математиков долгое время интересовал вопрос, бывают ли действительные числа, не являющиеся алгебраическими; такие числа называют “трансцендентными”. Существование трансцендентных чисел было установлено в 1844 году путём приведения соответствующих достаточно сложных примеров; лишь в 1873 году и, соответственно, в 1882 году была доказана трансцендентность известных чисел e и . Однако, если не требовать указания конкретных примеров трансцендентных чисел, само существование таковых может быть установлено тем же методом, каким выше было установлено существование чисел иррациональных. Именно, в 1874 году Кантор показал, что множество всех алгебраических уравнений счётно, из чего уже несложно вывести счётность множества алгебраических чисел. А мы знаем, что множество всех действительных чисел континуально, так что оно никак не может состоять из одних только алгебраических чисел.

Понятие эквивалентности служит основой для возникновения понятия количества элементов множества. *Количество* - это то общее, что имеется у всех эквивалентных друг другу множеств. Для каждой коллекции эквивалентных друг другу множеств это количество своё - одно и то же для всех множеств этой коллекции. Возьмём, например, множество чудес света, множество дней недели, множество нот гаммы, множество смертных грехов и множество федеральных округов России. Все они эквивалентны. Просвещённый читатель добавит к ним множество городов, споривших за честь быть родиной Гомера, и множество земных душ “по”, присутствующих, согласно учению китайцев, в каждом человеке. И множество столбов того дома мудрости, о котором говорится в “Притчах Соломона”. И множество невест ефрейтора Збруева. И множество пядей во лбу. Если теперь рассмотреть не только перечисленные только что множества, но и все мыслимые множества, эквивалентные перечисленным, то обнаружим, что в них присутствует некая общность. Эта общность есть количество элементов в каждом из них. В данном конкретном случае это количество называется, как всем известно, так: *семь*. А количество элементов, характерное для множества планет Солнечной системы и всех эквивалентных ему множеств, теперь (после разжалования Плутона) называется так: *восемь*.

Надеемся, что читатель уже пришёл к выводу, что все счётные множества обладают одним и тем же количеством элементов. В частности, количество всех квадратов равно количеству всех натуральных чисел. Количество элементов какого-либо счётного множества (а у всех счётных множеств количество элементов одно и то же!) называется *счётной мощностью* и обозначается буквой алеф с нижним индексом ноль

$$\aleph_0$$

(произносится *алеф-ноль*). Вот и соответствующая цитата из одноимённого рассказа Борхеса - кстати, с довольно отчётливой формулировкой эффекта Кортасара: “в Mengenlehre Алеф - символ трансфинитных множеств, где целое не больше, чем какая-либо из частей”.

В математике вообще количество элементов в каком-либо множестве называют *мощностью,* или *кардинальным числом,* этого множества. В частности, все континуальные множества имеют одну и ту же мощность, называемую *континуальной*; она обозначается посредством строчной буквы цэ из печатного готического алфавита.

Описанный выше способ, посредством которого существование иррациональных и трансцендентных чисел можно получить из общих соображений, без предъявления конкретных примеров, мы вправе назвать количественным, ибо он основан на несовпадении количеств - счётного количества, присущего как множеству рациональных, так и множеству алгебраических чисел, и континуального количества, присущего множеству всех действительных чисел.

Теперь о сравнении количеств. Два количества могут быть равны или не равны. Давайте осознаем, чтбо это означает. Каждое количество представлено коллекцией всех мыслимых эквивалентных друг другу множеств. Равенство количеств означает совпадение соответствующих коллекций, а неравенство - их несовпадение. Семь потому не равно восьми, что коллекция всех множеств, эквивалентных множеству смертных грехов, не совпадает с коллекцией всех множеств, эквивалентных множеству планет. Количество квадратов потому равно количеству натуральных чисел, что коллекция всех множеств, эквивалентных множеству квадратов, совпадает с коллекцией всех множеств, эквивалентных натуральному ряду. Но хотелось бы иметь право говорить не только о равенстве или неравенстве двух количеств, но и о том, которое из них больше, а которое меньше. (Не запутайтесь: слова “больше” и “меньше” относятся к количествам, а не к представляющим их коллекциям множеств!)

Спросим уже знакомых нам не умеющих считать первобытных скотоводов, могут ли они определить, в каком из их стад больше элементов - в предположении, что стада различны по численности. Их ответ будет положительным. Если в стаде коз удастся выделить такую часть, не совпадающую со всем стадом, которая окажется эквивалентной множеству овец, то ббольшим является количество коз. Если же в стаде овец удастся выделить такую часть, не совпадающую со всем стадом, которая окажется эквивалентной множеству коз, то ббольшим будет количество овец. (В математике каждое множество считается частью самого себя, поэтому оговорка о несовпадении существенна.) Однако, как мы видели, такой способ не годится в случае бесконечных множеств. Действительно, в натуральном ряду можно выделить часть, с ним не совпадающую (а именно - множество квадратов), которая эквивалентна множеству квадратов; тем не менее натуральный ряд и множество квадратов, как мы видели, эквивалентны. Что же делать? Надо придумать такой критерий, который действует применительно к любым множествам. Решение состоит в том, чтобы к предложенной нашими скотоводами формулировке добавить некую клаузулу, излишнюю (хотя и ничему не мешающую) в конечном случае, но необходимую в случае бесконечном. Клаузула состоит в требовании неэквивалентности сравниваемых множеств. Полная формулировка того, что количество элементов первого множества больше количества элементов второго множества, такова: множества неэквивалентны, но в первом множестве имеется часть, эквивалентная второму множеству.

Вот теперь мы можем сказать, что континуальная мощность больше счётной. В самом деле, эти мощности различны, но в континуальном множестве действительных чисел можно выделить счётную часть - например, натуральный ряд. Счётную часть можно выделить в любом бесконечном множестве, поэтому счётная мощность - наименьшая из всех бесконечных мощностей. Одна из замечательных теорем Кантора утверждает, что количество всевозможных частей какого-либо множества всегда больше, чем количество элементов в самом этом множестве. (Читатель легко проверит этот факт для конечных множеств; надо только не забыть учесть пустую часть и часть, совпадающую со всем множеством.) В частности, количество всех частей натурального ряда больше счётного количества натуральных чисел, оно *несчётно*. А количество всех частей прямой линии больше континуального количества точек на ней.

Противопоставление счётных и несчётных бесконечных множеств приводит к глубокому философскому последствию, лежащему на стыке семиотики и гносеологии. А именно: оказывается, что мыслимы сущности, которые нельзя назвать. Постараемся изложить ситуацию как можно более ясно. Когда мы что-то называем, мы снабжаем это что-то индивидуальным (то есть присущим только этому и ничему другому) именем. Всякое же имя есть конечная цепочка знаков из некоторого выбранного для данной системы имён конечного списка знаков. Любой конечный список знаков математики называют *алфавитом,* составляющие его знаки - *буквами,* а всякую конечную цепочку букв - *словом* в данном алфавите. [В отличие от “языковедческого” *слова,* “математическое” слово может быть совершенно непроизносимым. Например, в русском переводе рассказа Лема “Вторжение с Альдебарана” встречаются такие имена альдебаранцев: *НГТРКС* и *ПВГДРК;* эти имена являются словами в русском алфавите. Возможно и такое, скажем, слово:)))=hgйъh=+(.] Нетрудно убедиться, что какой ни взять алфавит, множество всех слов в этом алфавите будет счётным. Тем самым никак не больше счётной будет любая система имён, созданная на основе этого алфавита; эта система может быть лишь конечной или счётной. И если мы имеем дело с несчётным множеством объектов, то в этом множестве непременно встретятся объекты - и даже очень много таких объектов, - для которых в рассматриваемой системе имён не найдётся никакого имени. В частности, какую систему именований ни придумать, всегда окажется, что существуют не имеющие имени части натурального ряда, не имеющие имени точки прямой, не имеющие имени действительные числа.

Только что приведённые соображения можно использовать для доказательства счётности множества алгебраических чисел и, следовательно, для доказательства существования трансцендентных чисел. Известно, что для всякого алгебраического уравнения множество его действительных корней, то есть таких действительных чисел, которые служат корнями этого уравнения, всегда конечно (оно может быть, в частности, и пустым). Расположим это множество в порядке возрастания, тогда каждый корень получит свой порядковый номер в этом расположении. Именем данного алгебраического числа объявим запись, состоящую из записи любого алгебраического уравнения, корнем которого данное число является (таких уравнений всегда много!), и записи порядкового номера этого корня среди всех корней этого уравнения. Общее количество всех введённых таким способом имён счётно. Отсюда легко выводятся два факта. Во-первых, оказывается счётным количество чисел, получивших имя, - а это как раз и есть алгебраические числа. Во-вторых, многие действительные числа не получат никакого имени - это и будут трансцендентные числа.

Возникает естественный вопрос, а бывают ли мощности, промежуточные между мощностями счётной и континуальной. Иначе говоря, вопрос состоит в том, какое из двух альтернативных утверждений справедливо:

(1) по количеству элементов континуум действительных чисел идёт сразу вслед за натуральным рядом или же

(2) в указанном континууме можно выделить *промежуточное множество,* то есть такую бесконечную часть, которая не равномощна ни всему континууму, ни натуральному ряду.

Гипотезу, что справедливо первое из этих утверждений, называют *гипотезой континуума* или *континуум-гипотезой,* а требование доказать или опровергнуть эту гипотезу - *проблемой континуума*. В 1877 году Кантор объявил, что континуум-гипотеза представляет собою математическую истину, и с 1879 года начал отдельными порциями публиковать трактат, имеющий целью эту истину доказать. Статья с шестой порцией была завершена 15 ноября 1883 года. Она содержала доказательство того факта, что промежуточное множество заведомо отсутствует в определённом классе множеств (а именно в классе замкнутых множеств), а также обещание в последующих статьях доказать, что такого множества вообще не существует, - то есть доказать гипотезу в её полном объёме. Однако обещанных последующих статей не последовало. Кантор осознал, что он не может доказать континуум-гипотезу, и в мае 1884 года у него случился первый приступ нервной болезни. В середине XX века было установлено, что ни доказать, ни опровергнуть континуум-гипотезу невозможно. Здесь мы остановимся из страха повторить судьбу Кантора.

На языке лингвистики то, чем мы занимались в этой главе, есть семантика количественных числительных. При этом выяснилось, что привычный бесконечный ряд “конечных” числительных: один, два, три,…, сорок восемь,…, две тысячи семь,… - может быть дополнен “бесконечным” числительным алеф-ноль -

$$\aleph_0$$

Но ведь бывают и числительные порядковые: первый, второй, третий и т. д. Вкратце поговорим и о них. Как количественное числительное есть словесное выражение (имя) *количественного числа* (оно же *кардинальное число,* оно же *мощность*), так порядковое числительное есть словесное выражение (имя) *порядкового числа*. Чтобы отличать порядковые числа от количественных, будем обозначать их - в конечном случае (а про бесконечный мы пока ничего не знаем) - римскими цифрами, как это и принято в русской орфографии. Ведь мы пишем “Генрих VIII”, а не “Генрих 8”. Порядковое число - это особая сущность, для которой сейчас будет предложено не определение (что перегрузило бы изложение), а ассоциативная иллюстрация. С этой целью обращусь к своим детским ощущениям - ещё более ранним, чем кошмар, упомянутый в самом начале данной главы. В свои студенческие годы я с изумлением узнал, что эти ощущения испытал не только я.

Итак, раннее детство. Я размышляю, какой я плохой. Но тут же приходит в голову мысль, что раз я это понял, значит, я хороший. Но если я считаю себя хорошим, то, значит, я плохой. Но тогда я хороший - и так далее. Какую замечательную бесконечную лестницу я выстроил, хвалю я себя. Какой я плохой, что себя хвалю. И так далее. Здесь иллюстрация понятия порядкового числа. В самом деле, естественно называть ступени возникшей лестницы словами “первая”, “вторая”, “третья” и так далее. А можно сказать и так: со ступенями соотносятся порядковые числа I (“я плохой”), II (“я хороший, потому что осознал, что плохой”), III (“я плохой, потому что себя похвалил”) и так далее. С лестницей же в целом (“я хороший, потому что смог увидеть всю лестницу”) соотносится некоторое новое, бесконечное порядковое число (омега). Далее следуют + I (“я плохой, потому что себя похвалил”), + II, + III и так далее. А потом, за ними всеми, +. Здесь мы остановимся, однако читатель волен продолжить это ряд и далее. Начиная с идут *бесконечные порядковые числа*. Их именами служат выражения “омега”, “омега плюс один”, “омега плюс два”, “омега плюс три” и так далее. С семантической точки зрения эти выражения представляют собою порядковые числительные. С синтаксической точки зрения порядковые числительные должны быть похожи на прилагательные, и потому следовало бы говорить “омеговый”, “омега плюс первый” и так далее; но так почему-то не говорят.

Читатель, желающий проверить себя на понимание бесконечных порядковых чисел (а автора - на способность понятно изложить), благоволит выполнить такое упражнение. Возьмите множество, состоящее из числа 3, числа 2, всех чисел 0, $^1/_2$, $^2/_3$, $^3/_4$, $^4/_5$ и так далее и всех чисел 1, $1^1/_2$, $1^2/_3$, $1^3/_4$, $1^4/_5$ и так далее. Занумеруйте элементы этого множества, в порядке их возрастания, порядковыми числами. Какие номера они получат? Ответ: первым, наименьшим элементом является здесь 0 и он получит номер I, элемент $^1/_2$ получит номер II, элемент $^2/_3$ получит номер III, и так далее; далее, элемент 1 получит номер, элемент $1^1/_2$ получит номер + I, элемент $1^2/_3$ получит номер + II, и так далее; наконец, элемент 2 получит номер +, и элемент 3 получит номер ++ I.

Глава 8. Параллельные прямые в мифологии, в реальности и в математике

То, что общественное сознание отчасти мифологично, давно перестало быть новостью. Все знают, что во время Второй мировой войны, в период германской оккупации Дании, датский король надел жёлтую звезду. На самом деле этого не было. Всем известны слова Ленина, что искусство должно быть понятно массам, и сетования Пушкина на то, что он родился в России с умом и талантом. На самом деле Ленин (в беседе с Кларой Цеткин) говорил не “понятно массам”, а “понято массами”, а Пушкин (в письме к жене) писал не “с умом”, а “с душою”. Замена понятности на необходимость понимания и ума на душу в корне меняет смысл привычных формулировок. Если искажение слов Ленина можно списать на неправильный перевод с немецкого (а подлинник текста Цеткин был доступен в России единицам), то случай с Пушкиным требует более глубокого анализа. Объяснение состоит здесь, по-видимому, в том, что наше сознание готово допустить неуместность в России ума (которым, как известно, Россию не понять), но никак не души (это в России-то, этом заповеднике духовности и душевности!). Сила предубеждённости в этом вопросе поистине замечательна: ведь тираж изданий писем Пушкина исчисляется сотнями тысяч! Тем не менее ошибку в цитате делают даже филологи весьма известные. Вот ещё распространённый миф - формула *Обещаю говорить правду, только правду и ничего, кроме правды*, якобы применяемая в американском судопроизводстве (формула довольно странная, поскольку смысл оборотов “только правду” и “ничего, кроме правды” один и тот же). На самом деле в Америке говорят по-другому: “Обещаю говорить правду, всю правду и ничего, кроме правды, и да поможет мне Бог” *(Promise to tell the truth, the whole truth, and nothing but the truth, so help me God).*

Математика может чувствовать себя польщённой тем, что к числу деталей, в которых мифологическая картина мира отличается от картины реальной, принадлежат и некоторые математические сюжеты. Например, большинство убеждено, что в математике все понятия определяются и все утверждения доказываются. Но ведь каждое понятие определяется через другие понятия, а каждое утверждение доказывается, опираясь на другие утверждения. Вспоминается риторический вопрос г-жи Простаковой: “Портной учился у другого, другой у третьего, да первой портной у кого же учился?” Автору этих строк приходилось слышать и такое определение площади поверхности шара: “Площадь поверхности шара есть предел площадей поверхностей правильных многогранников, вписанных в этот шар, - при неограниченном возрастании числа граней этих многогранников”. Подобное представление о площади поверхности явно возникло по аналогии с тем фактом, что длина окружности действительно есть предел периметров правильных многоугольников, вписанных в эту окружность, - при неограниченном возрастании числа сторон этих многоугольников. Но всё дело в том, что в правильном многоугольнике может быть какое угодно количество сторон, в правильном же многограннике количеством граней может служить лишь одно из следующих пяти чисел: четыре (у тетраэдра), шесть (у куба, он же гексаэдр), восемь (у октаэдра), двенадцать (у додекаэдра) или двадцать (у икосаэдра) - так что ни о каком неограниченном возрастании числа граней не может быть речи.

Самое же замечательное явление связано с отражением в мифологическом сознании учения о параллельных прямых.

Что такое параллельные прямые, знают практически все. Практически все слышали и об аксиоме о параллельных прямых - ведь её проходят в школе. Никто из так называемых “людей с улицы", которых я спрашивал, в чём состоит аксиома о параллельных, не отговорился незнанием. Абсолютное большинство из опрошенных отвечали так: аксиома о параллельных состоит в том, что параллельные прямые не пересекаются. Рекомендуем читателю самому произвести опрос и убедиться, что именно такая формулировка аксиомы о параллельных входит в массовое сознание.

Получив указанный выше ответ на вопрос о содержании аксиомы о параллельных, следует немедленно задать следующий вопрос: а что такое параллельные прямые? Скорее всего, вам ответят, что параллельными называются такие прямые, которые не пересекаются. (Если даже клаузула "и лежат в одной плоскости" не будет произнесена, этому не следует придавать значения: её необходимость понимают все.) Многие сразу же осознают, что тут что-то не так: ведь никакая аксиома не может заключаться в том, что непересекающиеся прямые не пересекаются. Многих из тех, кто не поймёт это сразу сам, удастся в этом убедить. Останется незначительное меньшинство, считающее аксиому о непересекаемости непересекающихся прямых вполне возможной. С представителями этого меньшинства договориться трудно - разговор происходит на разных языках. (Ведь параллельные прямые и в самом деле не пересекаются. А возможна ли такая аксиома: "Всякий зелёный предмет является зелёным"? - спрашивал я. Конечно возможна, отвечали мне представители меньшинства; вот если сказать "Всякий зелёный предмет является красным", то такая аксиома невозможна.)

Замечательно, что присутствие в общественном сознании ложной формулировки аксиомы о параллельных ("параллельные прямые не пересекаются") имеет интернациональный характер. В этом несколько неожиданном обстоятельстве автор этих строк убедился следующим образом. В марте 2006 года на симпозиуме в Пекине, посвящённом проблемам математического образования, я рассказал о своих наблюдениях относительно аксиомы о параллельных - наблюдениях, полученных на русскоязычном материале. Среди присутствовавших был американский профессор математики Веллеман (Daniel J. Velleman) из довольно известного Амхерст Колледжа (Amherst College), что в штате Массачусетс. В тот же день он спросил свою жену Шелли (Shelley L. Velleman), бакалавра и магистра нескольких гуманитарных наук, приехавшую вместе с ним в Пекин, в чём состоит аксиома о параллельных прямых. И получил ответ: "В том, что параллельные прямые не пересекаются". Тогда он спросил, а что такое параллельные прямые. Ответом ему был хохот: супруга профессора сразу же поняла бессмысленность своего ответа. Итак, хотя бы в этой детали русская и американская мифологические картины мира оказались одинаковы.

Но сюжет с параллельными прямыми на этом не заканчивается. Респондента, осознавшего абсурдность своего ответа, можно спросить, в чём же всё-таки состоит аксиома о параллельных. На этом этапе вы скорее всего получите такой ответ: "Через точку, не лежащую на заданной прямой, можно провести прямую, параллельную этой заданной прямой". Это уже значительно лучше, потому что такой ответ всего лишь неверен, но уже не абсурден. Неверен же ответ потому, что представляет собою не аксиому, а теорему. (Теорема эта доказывается чрезвычайно просто: из точки надо сперва опустить перпендикуляр на заданную прямую, а затем из той же точки восставить перпендикуляр к опущенному перпендикуляру; тогда заданная прямая и восставленный перпендикуляр будут перпендикулярны к одной и той же прямой - а именно к опущенному перпендикуляру - и потому параллельны.) Подлинный же смысл аксиомы о параллельных не разрешительный, а запретительный: она утверждает не то, что нечто сделать можно, а то, что чего-то сделать нельзя, что чего-то не существует. Вот её правильная формулировка: *Через точку, не лежащую на заданной прямой, нельзя провести более одной прямой, параллельной этой заданной прямой*. (Проницательный читатель усмотрит здесь аналогию с восемью из первых десяти поправок к американской конституции, известных в своей совокупности под названием “Билль о правах”. В этих восьми поправках свободы формулируются в терминах запретов: “Конгресс не должен” в поправке I, “ни один солдат не должен” в поправке II и т. п.) Причина искаженного восприятия аксиомы о параллельных, на наш взгляд, заключается в следующем. В средней школе, для простоты, обычно внушают такую формулировку: *...можно провести одну и только одну прямую…*, не заостряя внимания на том, что оборот *можно провести* выражает здесь теорему, а *можно провести только одну* - аксиому. В результате в сознании остаётся более простая идея о возможности, а более сложная (и более глубокая) идея о единственности теряется.

Учение о параллельных - основа геометрии Лобачевского. Чем эта геометрия отличается от обычной, евклидовой, будет сказано несколькими абзацами ниже. А пока констатируем, что Лобачевский, возможно, является единственным российским математиком, присутствующим в общественном сознании (а если брать всех математиков, а не только российских, то, скорее всего, один из двух; другой - Пифагор). Его место закреплено в поэзии: “Пусть Лобачевского кривые / Украсят города / Дугою ‹…›”, “И пусть пространство Лобачевского / Летит с знамён ночного Невского”, - призывает Хлебников в поэме “Ладомир”. Бродский, в стихотворении “Конец прекрасной эпохи”, не призывает, но констатирует:

Жить в эпоху свершений, имея возвышенный нрав,
к сожалению, трудно. Красавице платье задрав,
видишь то, что искал, а не новые дивные дивы.
И не то чтобы здесь Лобачевского твёрдо блюдут,
но раздвинутый мир должен где-то сужаться, и тут -
тут конец перспективы.

Если спросить “человека с улицы”, в чём состоит вклад Лобачевского в науку, в подавляющем большинстве случаев ответ будет таким: “Лобачевский доказал, что параллельные прямые пересекаются” (в более редком и изысканном варианте: “Лобачевский открыл, что параллельные прямые могут и пересечься”). Тогда надо немедленно задать второй вопрос: “А что такое параллельные прямые?” - и получить ответ “Параллельные - это такие прямые, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются”. После чего можно пытаться (с успехом или без оного) убедить своего собеседника в несовместимости между собой двух его ответов. Намёк на схождение параллельных в точку содержится уже в приведённой цитате из Бродского о сужении мира до финального “конца перспективы”. Более раннее свидетельство[1] встречаем в романе В. А. Каверина “Скандалист, или Вечера на Васильевском острове”. Открываем изданный в 1963 году первый том шеститомного Собрания сочинений на страницах 447 и 448. Герой романа Нагин[2] просматривает читанную ранее “книгу по логике”, и вот “он внезапно наткнулся на вопросительный знак, который был поставлен на полях книги его рукою. Одна страница осталась непонятой при первом чтении курса. Вопросительный знак стоял над теорией Лобачевского о скрещении параллельных линий в пространстве”. Нагин собирается писать рассказ на эту тему: “Он кусал себе ногти. „Параллели, параллели”, написал он здесь и там на листе ‹…›. „Нужно заставить их встретиться”, - начертал он крупно ‹…›”. Наконец, прямое указание находим в фольклоре (а ведь буквальное значение слова *folklore* - ‘народная мудрость’):

Однажды Лобачевский думал, кутаясь в пальто:
Как мир прямолинеен, видно, что-то здесь не то!
И он вгляделся пристальней в безоблачную высь,
И там все параллельные его пересеклись.
(Сообщено Н. М. Якубовой)

Имеются и более современные свидетельства. Каждое утро по будням, между 9 и 11 часами, на “Эхе Москвы” идёт интерактивная программа “Разворот”. 15 февраля 2006 года в рамках этой программы слушателям предлагалось выразить своё отношение к идее провести в Москве парад геев. Ведущий Алексей Венедиктов, беседуя с очередным слушателем, призывал его к толерантности и к признанию права каждого иметь свою собственную точку зрения. Происходил такой диалог:

“Венедиктов. Вот вы скажите, параллельные прямые пересекаются?

Слушатель. Нет.

Венедиктов. А вот у Лобачевского пересекаются, там другая система отсчёта”.

Правда, как известно, у каждого своя, но истина одна. Истина состоит в том, что параллельные прямые не пересекаются даже у Лобачевского.

Природа мифологического представления об открытии Лобачевского понятна: все знают, что в его геометрии происходит что-то необычное с параллельными прямыми; а что может быть необычнее их пересечения! Поражает всё же степень распространённости этого представления. Впрочем, апологет математики вправе испытать и чувство законного удовлетворения: хоть какие-то серьёзные математические представления, пусть даже ложные, в массовом сознании присутствуют!

Не в интересах правды, а в интересах истины сообщим, что же происходит в геометрии Лобачевского. Отличие геометрии Лобачевского от привычной, известной из школы евклидовой геометрии в следующем. В евклидовой геометрии через точку проходит только одна прямая, параллельная заранее указанной прямой, а в геометрии Лобачевского - много таких прямых. В аксиоме о параллельных, сформулированной выше, надо заменить слово “нельзя” на слово “можно”, и аксиома о параллельных в версии Евклида превратится в аксиому о параллельных в версии Лобачевского: *Через точку, не лежащую на заданной прямой, можно провести более одной прямой, параллельной этой заданной прямой*.

Особое положение аксиомы о параллельных вызвано тем, что она не столь очевидна, как другие аксиомы геометрии. Возьмём, например, аксиому о том, что через две любые различные точки проходит одна и только одна прямая. Её можно проверить экспериментально. Надо выбрать плоский участок, вбить два колышка и туго натянуть между ними нить - вот вам наглядное подтверждение наличия прямой, проходящей через две точки. Если же мы возьмём другую натянутую нить, соединяющую те же колышки, то обе нити сольются в одну линию - на глаз, конечно, но вся наша проверка и идёт “на глаз”; так подтверждается единственность прямой. А вот убедиться столь же просто, что проходящая через точку параллельная всегда только одна, невозможно. Мысленно представим себе, что мы провели параллельную и, кроме того, через ту же точку какую-то другую прямую под очень маленьким углом к этой параллельной. По евклидовой аксиоме эта другая прямая обязана пересечь ту исходную прямую, к которой и была проведена наша параллельная. Но где она, эта точка пересечения? Она ведь может оказаться не только вне выбранного участка, доступного нашему обозрению, но и астрономически далеко, вне нашей Галактики. И может не оказаться иного способа убедиться в том, что такая точка существует, как просто поверить в евклидову аксиому о параллельных. Но такой, основанный на чистой вере, способ подтверждения того факта (а лучше сказать - того предположения, той гипотезы), что аксиома о параллельных выполняется в реальном физическом пространстве, был не по душе математикам.

Поэтому в течение долгого времени предпринимались попытки доказать содержащееся в аксиоме о параллельных утверждение, исходя из остальных аксиом, и тем самым как бы понизить статус этого утверждения, переведя его из аксиом в теоремы. Однако все эти попытки проваливались. Как правило, в каждое такое доказательство незаметно проскальзывало какое-нибудь геометрическое утверждение, не вызывающее, казалось бы, никаких сомнений, но на самом деле равносильное аксиоме о параллельных. Например, в "доказательстве" знаменитого французского математика XVIII - XIX веков Лежандра использовалось такое вроде бы невинное предложение: *через любую точку внутри угла можно провести прямую, пересекающую обе стороны угла.* Оказалось, что это предложение равносильно аксиоме о параллельных: оно не только опирается на эту аксиому, но и из него, в свою очередь, можно вывести самоё аксиому.

С большим трудом в сознание математиков проникало убеждение, что скорее всего сформулированное в аксиоме о параллельных утверждение вообще нельзя доказать. Осознать это было трудно ещё и потому, что вплоть до самого конца XIX века какой-либо чёткой системы аксиом геометрии вообще не существовало. Для аксиомы о параллельных решающим оказалось третье десятилетие XIX века. В этот период два великих геометра - российский математик Николай Иванович Лобачевский и венгерский математик Янош Бойаи (по-русски часто пишется "Больяй") - совершенно независимо друг от друга построили геометрическую теорию, основанную на отрицании аксиомы о параллельных. Эту теорию называют *геометрией Лобачевского - Бойаи* или же просто **геометрией Лобачевского** (предполагаю, что в Венгрии она называется *геометрия Бойаи*). Первые публикации по геометрии Лобачевского принадлежат её авторам: Лобачевскому - в 1829 году, Бойаи - в 1832 году. Их предшественником можно считать немецкого юриста Швейкарта, который пришёл к мысли о возможности такой геометрии в 1818 году, но ничего не публиковал. "Король математиков" великий Гаусс, о котором уже было сказано в главе 5 о квадратуре круга, пришёл к этой мысли ещё раньше, но тоже ничего не публиковал, справедливо полагая, что научная общественность ещё не готова воспринять столь смелые мысли. И действительно, геометрия Лобачевского не получила признания современников (за исключением Гаусса, который её оценил и даже выучил русский язык, чтобы читать сочинения Лобачевского в подлиннике). Гениальность Лобачевского и Бойаи была признана только после их смерти (случившейся соответственно в 1856 и 1860 годах). Когда же, наконец, возможность неевклидовой геометрии была осознана, это произвело переворот не только в математике, но и в философии.

В геометрии Лобачевского много непривычного для нас, воспитанных на евклидовой геометрии. Например: сумма углов треугольника своя у каждого треугольника и притом всегда меньше 180 градусов; если треугольники подобны, то они равны; не бывает треугольников сколь угодно большой площади (это значит, что площадь треугольника не может быть больше некоторого числа, зависящего, разумеется, от выбора единицы площади).

Кажется естественным вопрос, какая же из аксиом всё же истинна - аксиома Евклида или аксиома Лобачевского. Давайте разберёмся. Здесь мы вынуждены обратиться к проблемам философским. Прежде всего надо понять, что значит "истинна". Казалось бы, ясно: истинна - значит, соответствует реальному положению вещей. Как там, в реальном мире, - одна параллельная прямая или много? А никак, потому что в реальном мире вообще нет прямых - как нет и других объектов геометрии. Геометрических шаров, например, в природе не бывает, а бывают лишь предметы, приближающиеся по форме к геометрическому шару; при этом арбуз в меньшей степени шар, чем волейбольный мяч, а мяч - в меньшей степени шар, чем биллиардный шар или подшипник. С прямыми дело обстоит ещё сложнее: ведь прямая бесконечна, а все примеры, которые мы можем предъявить, будь то линия, начерченная на песке или бумаге, или натянутая нить, или граница между стеной и потолком - все они демонстрируют нам (опять-таки, разумеется, приблизительно) лишь ограниченные, конечные участки прямых линий, то есть то, что на языке современной геометрии называется отрезками. Да даже и отрезков в точном геометрическом смысле в природе не существует: самая тонкая нить имеет толщину, самая отшлифованная поверхность лишь приближается к идеальной форме, а под электронным микроскопом выглядит как рябь. Луч света - и тот искривляется в реальном пространстве. Для возникновения же представления о бесконечной прямой одного только наглядного способа недостаточно - требуется ещё и воображение. От зарождения геометрии прошли тысячелетия, пока люди осознали, что мы не можем непосредственно наблюдать точки, прямые, отрезки, плоскости, углы, шары и прочие геометрические объекты, и потому предметом геометрии служит не реальный мир, а мир воображаемый, населённый этими идеальными геометрическими объектами и который всего лишь похож на мир реальный (по терминологии некоторых философских школ, является *отражением* реального мира).

“Поверхности, линии, точки, как их определяет Геометрия, существуют только в нашем воображении”, - писал в 1835 году Лобачевский во вступлении к своему сочинению “Новые начала геометрии с полной теорией параллельных”. Аксиомы геометрии как раз и уточняют свойства этих существующих в нашем воображении понятий. Значит ли это, что мы можем написать какие угодно аксиомы? Нет, если мы хотим, чтобы геометрические понятия отражали наши представления о реальном физическом пространстве. Потому что хотя точки, прямые, поверхности не существуют реально, некие физические объекты и явления, приводящие к этим понятиям, безусловно существуют (если вообще признавать реальное существование окружающего нас мира). Поэтому вопрос надо ставить так: какая из аксиом, Евклида или Лобачевского, точнее описывает те представления о структуре реального физического пространства, которые отражаются в геометрических образах? Строгий ответ на это вопрос таков: неизвестно. Однако можно с уверенностью утверждать, что в доступных нашему наблюдению областях пространства евклидова геометрия соблюдается с высокой степенью точности. Так что когда мы говорим о неизвестности, мы имеем в виду очень большие области пространства. Дело в том, что в геометрии Лобачевского отличие суммы углов треугольника от 180 градусов тем больше, чем длиннее стороны этого треугольника; поэтому чем больше треугольник, тем больше надежды заметить это отличие - и тем самым подтвердить на практике аксиому Лобачевского. Отсюда возникает мысль измерять треугольники с вершинами в звёздах (упомянутый выше Швейкарт употреблял для геометрии, впоследствии предложенной Лобачевским, название *звёздная геометрия)*. Такими измерениями занимался сам Лобачевский (“И он вгляделся пристальней в безоблачную высь…”), но точность измерительных приборов оказалась недостаточной, чтобы уловить отклонение суммы углов треугольника от суммы двух прямых углов, даже если таковое отклонение и существует.

Чтобы пояснить, как это может быть, что для меньших участков пространства действует одна геометрия, а для ббольших другая, воспользуемся следующей аналогией. При составлении плана местности нет нужды учитывать шарообразность Земли - именно потому, что участок, план которого снимается, небольшой. Поэтому для сравнительно небольших участков разумно исходить из того, что Земля плоская - именно поэтому это заблуждение так долго держалось. При составлении же карты России необходимо учитывать шарообразность Земли, а при тонких расчётах - то, что Земля есть эллипсоид (а точнее - геоид). При ружейной стрельбе можно проследить на карте местности траекторию пули, приложив линейку к двум точкам: к положению стрелка и к цели. Но маршрут самолёта, совершающего дальний перелёт по кратчайшей линии, на плоской карте выглядит как дуга. Аналогично, евклидова геометрия хорошо работает “в малом”, то есть в доступных нам участках пространства. Мы не знаем, что происходит “в очень большом”. В рассказе Уэллса “История Платтнера” его герой Готфрид Платтнер претерпевает некое фантастическое путешествие, после чего возвращается зеркально перевёрнутым. Уэллс объясняет это явление выходом в другой мир, в четвёртое измерение. Теоретические представления о возможной геометрической структуре Вселенной не исключают того, что путешествие, приводящее к зеркальному отражению путешественника, может быть осуществлено и без выхода из нашего трёхмерного мира. Мы вернёмся к этому в следующей главе нашего очерка.

Но что же представляют из себя идеальные геометрические объекты: точки, прямые, углы, плоскости и тому подобные, - отражающие наши представления о физической реальности? И в каком смысле они подчиняются аксиомам? Проще всего объяснить это с помощью хотя и искусственной, но поучительной аналогии. Выпишем следующие четыре утверждения:

(1) *Для каждых двух куздр существует бокр, которого они будлают.*

(2) *Две различные куздры не могут будлать вместе более одного бокра.*

(3) *Существуют три куздры, для которых нет такого бокра, которого все они будлают.*

(4) *Каждого бокра будлают по меньшей мере две куздры.*

Ни что такое куздры, ни что такое бокры, ни что такое будлать - всё это оставляется неразъяснённым. Оказывается, однако, что разъяснения и не требуются для получения из этих утверждений определённых заключений - то есть таких утверждений, которые непременно являются истинными при условии истинности всех утверждений нашего исходного квартета. Убедимся, например, что (5) *два различных бокра не могут одновременно быть будлаемы более чем одной куздрой.* В самом деле, если бы таких куздр было две, то они совместно будлали бы двух наших бокров, что запрещено утверждением (2). Для собственного развлечения читатель может доказать, например, такой факт: (6) *для каждых двух куздр найдётся такая третья куздра, что нет бокра, которого будлали бы все эти три куздры*.

Итак, что мы имеем. Мы имеем какие-то объекты (в данном случае - куздры и бокры) и отношения между ними (в данном случае - отношение будлания). Относительно этих объектов и отношений нам не известно ничего, кроме некоторых их свойств, сформулированных в заявленных утверждениях, в данном случае - в утверждениях (1) - (4). Эти заявленные утверждения суть не что иное, как *аксиомы* (в данном случае - аксиомы куздроведения). Они используются для того, чтобы, принимая их в качестве истин, выводить из них *теоремы,* то есть дальнейшие утверждения о наших объектах и отношениях (одну теорему куздроведения мы доказали, другую предложили доказать читателю). Так строится любая аксиоматическая теория, в частности - геометрия. Ограничимся для простоты планиметрией, то есть геометрией плоскости, без выхода в трёхмерное пространство. Основные объекты планиметрии суть точки и прямые. Основных отношений четыре:

1. Отношение *инцидентности* между точками и прямыми: точка и прямая могут быть или не быть *инцидентны* друг другу. В школьной геометрии употребляется более приземлённая терминология: когда точка и прямая инцидентны, говорят “точка *лежит на* прямой” или же “прямая *проходит через* точку”.

2. Отношение ‘между’, связывающее тройки точек: из трёх точек одна может лежать или не лежать *между* двумя другими.

3-4. Отношение *конгруэнтности отрезков* и отношение *конгруэнтности углов:* два отрезка или два угла могут быть или не быть *конгруэнтны* друг другу. Когда-то в наших школах не боялись слова “конгруэнтны”; сейчас, к сожалению, там велено заменить это слово на слово “равны”. Почему “к сожалению”? А потому, что ведь имеется в виду отношение не между длинами отрезков или между величинами углов (и те, и другие действительно равны, если соответствующие отрезки или углы конгруэнтны), а между отрезками и между углами как геометрическими фигурами. А каждая сущность, геометрическая фигура в частности, может быть равна только самой себе.

Аксиоматическое построение геометрии не предполагает разъяснения того, чтбо такое точки, прямые и названные отношения. Вместо этого формулируются аксиомы, в которых указывается, каким законам подчиняются точки, прямые, инцидентность, отношение ‘между’, конгруэнтность отрезков и конгруэнтность углов. Из этих аксиом и выводятся теоремы геометрии. Говоря формально, аксиомы могут быть какими угодно, лишь бы они не противоречили друг другу. Но ежели мы желаем, чтобы теория описывала реальность, то, как уже отмечалось, и аксиомы, связывающие идеальные объекты и отношения теории, должны отражать свойства тех сущностей реального, физического мира, отражением каковых и служат указанные идеальные объекты и отношения, положенные в основу теории. В частности, отношение конгруэнтности геометрических фигур должно отражать возможность одной фигуры быть совмещённой с другой посредством перемещения.

На примере куздр, бокров и будлания мы попытались вкратце изложить суть аксиоматического метода. Несколько заключительных замечаний относительно этого примера. Заменим в вышеприведённых аксиомах (1) - (4) слово “куздра” на слово “точка”, слово “бокр” на слово “прямая”, слово “будлать” на выражение “лежать на”. Аксиома (4) превратится тогда в такое утверждение (!4): *На каждой прямой лежат по меньшей мере две точки*. Аналогично, аксиомы (1), (2) и (3) превратятся в утверждения (!1), (!2) и (!3), которые мы просим любезного читателя образовать самостоятельно. Утверждения (!1), (!2), (!3) и (!4) составляют в своей совокупности группу так называемых *аксиом связи* планиметрии, регулирующих то, как точки связаны с прямыми. Читатель может теперь перевести аксиому о параллельных на язык куздр: *Для куздры, не будлающей заданного бокра, существует не более одного бокра*... (благоволите продолжить). И последнее - странные эти слова мы заимствовали у выдающегося отечественного языковеда Льва Владимировича Щербы, который в двадцатых годах XX века учил студентов извлекать максимум лингвистической информации из фразы: *Глокая куздра штеко будланула бокра и курдячит бокрёнка*.

Глава 9. Проблема на миллион долларов

Давно известна классическая формула репортёров: если собака укусила человека, это не новость; если человек укусил собаку - это новость. Сведения о том, что петербургский математик Григорий Перельман решил великую математическую проблему, стоявшую более ста лет, начали появляться в средствах массовой информации с 2003 года. Но это была ещё не новость. Подлинной новостью, согласно приведённой формуле, стала сенсация, облетевшая СМИ и заметное время удерживаемая ими летом 2006 года: Перельман отказался от всех присуждённых ему наград - в частности, от миллиона долларов. Корреспондентам, пытавшимся взять у него интервью, Перельман вежливо, но решительно отказал во встрече, сославшись на неуместную шумиху, но прежде всего на то, что должен идти в лес по грибы, - эти причины отказа были названы им в оглашённой по телевидению записи телефонного разговора с домогающимися корреспондентами. Одновременно сообщалось, что проблема не только трудная и знаменитая, но и существенная для теоретической физики, а именно для понимания устройства окружающего нас физического пространства.

Пожалуй, со времени вхождения в общекультурный оборот проблемы Ферма ни одна математическая проблема с сопровождающим её шлейфом обстоятельств не приобретала такой массовой известности. Произошло вторжение математической проблематики в общественное сознание. Следует ли закрепить величие великой проблемы тем, что оставить её окружённой ореолом тайны, открытой лишь для посвящённых и полностью недоступной пониманию широкой публики? Не знаю; может быть, и стоит. Тем не менее в этой главе мы попытаемся в самых общих чертах объяснить читателю-нематематику, в чём состоит проблема.

Но сперва о “шлейфе обстоятельств”. Григорию Яковлевичу Перельману, безработному кандидату физико-математических наук, в отличие от якобы доказавших теорему Ферма “академиков” (см. выше главу 2) и в самом деле решившему так называемую *проблему Пуанкаре,* ещё только предстоит отказаться (или не отказаться) от миллиона долларов.

До тех пор, пока премия не будет ему предложена, Перельман, по его собственным словам, не намерен заниматься решением вопроса, принимать её или нет. Что касается самой этой премии, то расположенный в Массачусетсе частный Математический институт Клэя (Clay Mathematics Institute) действительно включил проблему Пуанкаре в список из семи математических “Проблем Тысячелетия” и за решение каждой из них обещает выплатить миллион. Но выплата происходит по прошествии определённого срока и после специальной экспертизы. В случае проблемы Пуанкаре ни то, ни другое, кажется, ещё не произошло. К тому же к рассмотрению, как правило, принимаются лишь решения, опубликованные в авторитетных изданиях, реферируемых в специальных реферативных журналах. Ни одно из бумажных изданий Перельман не удостоил и своё решение обнародовал лишь в Интернете. От чего Перельман действительно отказался, так это от медали Филдса.

Математика, как известно, не входит в список наук, за которые присуждают Нобелевские премии. Существует забавная литература, посвящённая попыткам выяснить причину того, почему математика не была включена в завещание Нобеля. Наиболее популярное объяснение сводится к *cherchez la femme!* - якобы Нобель не поделил женщину с неким знаменитым шведским математиком и не хотел, чтобы тому досталась премия его имени. Однако такие объяснения всего лишь привлекательны, но не слишком достоверны.

Медаль Филдса по уровню престижа занимает в мире математиков примерно такое же положение, какое занимает Нобелевская премия в мире, скажем, физиков, и как бы заменяет собою эту премию. Имеются по меньшей мере три отличия филдсовской медали от Нобелевской премии. Нобелевская премия присуждается ежегодно, филдсовская медаль - раз в четыре года; зато присуждается от двух до четырёх медалей сразу. В нобелевском случае возраст лауреата ничем не ограничен, и премия зачастую присуждается за достижения весьма и весьма давние. Возраст математического лауреата ограничен 40 годами, и потому Уайлс, решивший проблему Ферма в возрасте 41 года, медали не получил; вместо медали председатель Филдсовского комитета торжественно вручил ему специальную серебряную табличку. Наконец, хотя медаль и сопровождается некоей суммой, но сумма эта в несколько десятков раз меньше Нобелевской премии. Медали вручают на происходящем раз в четыре года Международном конгрессе математиков. Президент Международного математического союза специально прилетал в Петербург, чтобы уговорить Перельмана посетить конгресс в Мадриде, предстоявший в августе 2006 года, и получить там медаль из рук короля Испании. Перельман остался непреклонен и на конгресс не поехал.

Это был первый случай отказа от филдсовской медали. Проблемы и даже скандалы, сопровождавшие процедуры присуждения и вручения филдсовских медалей, возникали и раньше. Так, по причине Мировой войны не было ни конгрессов, ни присуждений в промежутке между 1936 и 1950 годами (в 1936 году в Осло прошёл последний предвоенный Международный конгресс математиков, а в 1950 году в Кембридже, что в Массачусетсе, - первый послевоенный). Все последующие причины были порождены советскими властями. Например, конгресс в Варшаве, намеченный на 1982 год, был перенесён на август 1983 года из-за объявленного в Польше военного положения. В 1966 году французский математик Александр Гротендик, один из крупнейших математиков XX века, в знак протеста против советской политики в Восточной Европе не приехал в Москву на очередной конгресс, где ему должны были вручить медаль. Церемония вручения проходила в Кремле, во Дворце съездов; вручавший медали президент Академии наук М. В. Келдыш скороговоркой огласил список лауреатов и всех чохом пригласил на сцену для получения медалей; кто есть ху, понять из зала было невозможно. В 1970 и в 1978 годах конгрессы состоялись, соответственно, в Ницце и в Хельсинки. На них должны были получить свои медали два математика из СССР: в Ницце - Сергей Петрович Новиков (родился в 1938 году; кстати, племянник того самого Келдыша), а в Хельсинки - Григорий Александрович Маргулис (родился в 1946 году). Их поездки были признаны, по советской бюрократической терминологии, “нецелесообразными”, а сами они не были выпущены за пределы СССР. Маргулис был тогда кандидатом наук, и в “Московском комсомольце” (едва ли не единственном издании, откликнувшемся на присуждение ему высшей математической награды) появилась статья с замечательной фразой: “и… [даже] докторская диссертация на подходе”. Владимир Игоревич Арнольд был номинирован на медаль Филдса 1974 году. Далее - изложение рассказа самого Арнольда; надеюсь, что помню его правильно. Всё было на мази, Филдсовский комитет рекомендовал присудить Арнольду медаль. Окончательное решение должен был принять высший орган Международного математического союза - его исполнительный комитет. В 1971 - 1974 годах вице-президентом Исполнительного комитета был один из крупнейших советских (да и мировых) математиков академик Лев Семёнович Понтрягин. Накануне своей поездки на заседание исполкома Понтрягин пригласил Арнольда к себе домой на обед и на беседу о его, Арнольда, работах. Как Понтрягин сообщил Арнольду, он получил задание не допустить присуждение тому филдсовской медали. В случае, если исполком с этим не согласится и всё же присудит Арнольду медаль, Понтрягин был уполномочен пригрозить неприездом советской делегации в Ванкувер на очередной Международный конгресс математиков, а то и выходом СССР из Международного математического союза. Но чтобы суждения Понтрягина о работах Арнольда звучали убедительно, он, Понтрягин, по его словам, должен очень хорошо их знать. Поэтому он и пригласил Арнольда, чтобы тот подробно рассказал ему о своих работах. Что

Арнольд и сделал. По словам Арнольда, задаваемые ему Понтрягиным вопросы были весьма содержательны, беседа с ним - интересна, а обед - хорош. Не знаю, пришлось ли Понтрягину оглашать свою угрозу, но только филдсовскую медаль Арнольд тогда не получил - и было выдано две медали вместо намечавшихся трёх. К следующему присуждению медалей родившийся в 1937 году Арнольд исчерпал возрастной лимит. В 1995 году Арнольд уже сам стал вице-президентом, и тогда он узнал, что в 1974 году на членов исполкома большое впечатление произвела глубина знакомства Понтрягина с работами Арнольда.

Проблема, которую решил Перельман, состоит в требовании доказать гипотезу, выдвинутую в 1904 году великим французским математиком Анри Пуанкаре (1854 - 1912) и носящую его имя. О роли Пуанкаре в математике трудно сказать лучше, чем это сделано в энциклопедии: “Труды Пуанкаре в области математики, с одной стороны, завершают классическое направление, а с другой - открывают пути к развитию новой математики, где наряду с количественными соотношениями устанавливаются факты, имеющие качественный характер” (БСЭ, изд. 3-е, т. 2).

Гипотеза Пуанкаре как раз и имеет качественный характер - как и вся та область математики (а именно топология), к которой она относится и в создании которой Пуанкаре принял решающее участие.

На современном языке **гипотеза Пуанкаре** звучит так: *всякое односвязное компактное трёхмерное многообразие без края гомеоморфно трёхмерной сфере.*

В следующих абзацах мы постараемся хотя бы частично и очень приблизительно разъяснить смысл этой устрашающей словесной формулы.

Для начала заметим, что обычная сфера, которая есть поверхность обычного шара, двумерна (а сам шар - тот трёхмерен). *Двумерная сфера* состоит из всех точек трёхмерного пространства, равноудалённых от некоторой выделенной точки, называемой центром и сфере не принадлежащей. *Трёхмерная сфера* состоит из всех точек четырёхмерного пространства, равноудалённых от своего центра (сфере не принадлежащего). В отличие от двумерных сфер трёхмерные сферы недоступны нашему непосредственному наблюдению, и нам представить себе их так же трудно, как Василию Ивановичу из известного анекдота квадратный трёхчлен. Не исключено, однако, что все мы как раз в трёхмерной сфере и находимся, то есть что наша Вселенная является трёхмерной сферой. В этом состоит значение результата Перельмана для физики и астрономии. Термин “односвязное компактное трёхмерное многообразие без края” содержит указания на предполагаемые свойства нашей Вселенной. Термин “гомеоморфно” означает некую высокую степень сходства, в известном смысле неотличимость. Формулировка в целом означает, следовательно, что если наша Вселенная обладает всеми свойствами односвязного компактного трёхмерного многообразия без края, то она - в том же самом “известном смысле” - и есть трёхмерная сфера.

Понятие односвязности - довольно простое понятие. Представим себе канцелярскую резинку (то есть резиновую нить со склеенными концами) столь упругую, что она, если её не удерживать, стянется в точку. От нашей резинки мы потребуем ещё, чтобы при стягивании в точку она не выходила за пределы той поверхности, на которой мы её расположили. Если мы растянем такую резинку на плоскости и отпустим, она немедленно стянется в точку. То же произойдёт, если мы расположим резинку на поверхности глобуса, то есть на сфере. Для поверхности спасательного круга ситуация окажется совершенно иной: любезный читатель легко найдёт такие расположения резинки на этой поверхности, при которой стянуть резинку в точку, не выходя за пределы рассматриваемой поверхности, невозможно. Геометрическая фигура называется *односвязной,* если любой замкнутый контур, расположенный в пределах этой фигуры, можно стянуть в точку, не выходя за названные пределы. Мы только что убедились, что плоскость и сфера односвязны, а поверхность спасательного круга не односвязна. Не односвязна и плоскость с вырезанной в ней дырой. Понятие односвязности применимо и к трёхмерным фигурам. Так, куб и шар односвязны: всякий находящийся в их толще замкнутый контур можно стянуть в точку, причём в процессе стягивания контур будет всё время оставаться в этой толще. А вот баранка не односвязна: в ней можно найти такой контур, который нельзя стянуть в точку так, чтобы в процессе стягивания контур всё время находился в тесте баранки. Не односвязен и крендель. Можно доказать, что трёхмерная сфера односвязна.

Надеемся, что читатель не забыл ещё разницу между отрезком и интервалом, которой обучают в школе. *Отрезок* имеет два конца, он состоит из этих концов и всех точек, расположенных между ними. *Интервал* же состоит только из всех точек, расположенных между его концами, сами же концы в состав интервала не входят; можно сказать, что интервал - это отрезок с удалёнными из него концами, а отрезок -это интервал с добавленными к нему концами. Интервал и отрезок являются простейшими примерами одномерных *многообразий,* причём интервал есть многообразие *без края,* а отрезок - многообразие *с краем;* край в случае отрезка состоит из двух концов. Главное свойство многообразий, лежащее в основе их определения, состоит в том, что в многообразии окрестности всех точек, за исключением точек края (которого может и не быть), устроены совершенно одинаково. При этом *окрестностью* какой-либо точки *A* называется совокупность всех точек, расположенных вблизи от этой точки *A*. Микроскопическое существо, живущее в многообразии без края и способное видеть только ближайшие к себе точки этого многообразия, не в состоянии определить, в какой именно точке оно, существо, находится: вокруг себя оно всегда видит одно и то же. Ещё примеры одномерных многообразий без края: вся прямая линия целиком, окружность. Примером одномерной фигуры, не являющейся многообразием, может служить линия в форме буквы **T**: здесь есть особая точка, окрестность которой не похожа на окрестности других точек - это точка, где сходятся три отрезка. Другой пример одномерного не-многообразия - линия в форме восьмёрки; в особой точке здесь сходятся четыре линии. Плоскость, сфера, поверхность спасательного круга служат примерами двумерных многообразий без края. Плоскость с вырезанной в ней дырой также будет многообразием - а вот с краем или без края, зависит от того, куда мы относим контур дыры. Если мы относим его к дыре, получаем многообразие без края; если оставляем контур на плоскости, получаем многообразие с краем, каковым и будет служить этот контур. Разумеется, мы имели здесь в виду идеальное математическое вырезание, а при реальном физическом вырезании ножницами вопрос, куда относится контур, не имеет никакого смысла.

Несколько слов о трёхмерных многообразиях. Шар вместе со сферой, служащей его поверхностью, представляет собою многообразие с краем; указанная сфера как раз и является этим краем. Если мы удалим этот шар из окружающего пространства, получим многообразие без края. Если мы сдерём с шара его поверхность, получится то, что на математическом жаргоне называется “ошкуренный шар”, а в более научном языке - *открытый шар*. Если удалить открытый шар из окружающего пространства, получится многообразие с краем, и краем будет служить та самая сфера, которую мы содрали с шара. Баранка вместе со своей корочкой есть трёхмерное многообразие с краем, а если отодрать корочку (которую мы трактуем как бесконечно тонкую, то есть как поверхность), получим многообразие без края в виде “ошкуренной баранки”. Всё пространство в целом, если понимать его так, как оно понимается в средней школе, есть трёхмерное многообразие без края.

Математическое понятие *компактность* отчасти отражает тот смысл, какой слово “компактный” имеет в повседневном русском языке: ‘тесный’, ‘сжатый’. Геометрическая фигура называется *компактной,* если при любом расположении бесконечного числа её точек они накапливаются к одной из точек или ко многим точкам этой же фигуры. Отрезок компактен: для любого бесконечного множества его точек в отрезке найдётся хотя бы одна так называемая *предельная точка,* любая окрестность которой содержит бесконечно много элементов рассматриваемого множества. Интервал не компактен: можно указать такое множество его точек, которое накапливается к его концу, и только к нему, - но ведь конец не принадлежит интервалу! За недостатком места мы ограничимся этим комментарием. Скажем лишь, что из рассмотренных нами примеров компактными являются отрезок, окружность, сфера, поверхности баранки и кренделя, шар (вместе со своей сферой), баранка и крендель (вместе со своими корочками). Напротив, интервал, плоскость, ошкуренные шар, баранка и крендель не являются компактными. Среди трёхмерных компактных геометрических фигур без края простейшей является трёхмерная сфера, но в нашем привычном “школьном” пространстве такие фигуры не умещаются.

Самое, пожалуй, глубокое из тех понятий, которые связывает между собой гипотеза Пуанкаре, - это понятие гомеоморфии. Гомеоморфия - это наиболее высокая ступень геометрической одинаковости. Сейчас мы попытаемся дать приблизительное разъяснение этому понятию путём постепенного к нему приближения.

Уже в школьной геометрии мы встречаемся с двумя видами одинаковости - с конгруэнтностью фигур и с их подобием. Напомним, что фигуры называются *конгруэнтными,* если они совпадают друг с другом при наложении. В школе конгруэнтные фигуры как бы не различают, и потому конгруэнтность называют равенством. Конгруэнтные фигуры имеют одинаковые размеры во всех своих деталях. Подобие же, не требуя одинаковости размеров, означает одинаковость пропорций этих размеров; поэтому подобие отражает более сущностное сходство фигур, нежели конгруэнтность. Геометрия в целом - более высокая ступень абстракции, нежели физика, а физика - чем материаловедение. Возьмём, к примеру, шарик подшипника, биллиардный шар, крокетный шар и мяч. Физика не вникает в такие детали, как материал, из которого они сделаны, а интересуется лишь такими свойствами, как объём, вес, электропроводность и т. п. Для математики - все они шары, различающиеся только размерами. Если шары имеют разные размеры, то они различаются для *метрической геометрии,* но все они одинаковы для *геометрии подобия*. С точки зрения геометрии подобия одинаковы и все шары, и все кубы, а вот шар и куб - не одинаковы.

А теперь посмотрим на тор. Тор - эта та геометрическая фигура, форму которой имеют баранка и спасательный круг. Энциклопедия определяет тор как фигуру, полученную вращением круга вокруг оси, расположенной вне этого круга. Призываем благосклонного читателя осознать, что шар и куб “более одинаковы” между собой, чем каждый из них с тором. Наполнить это интуитивное осознание точным смыслом позволяет следующий мысленный эксперимент. Представим себе шар сделанным из материала столь податливого, что его можно изгибать, растягивать, сжимать и, вообще, деформировать как угодно, - нельзя только ни разрывать, ни склеивать. Очевидно, что шар тогда можно превратить в куб, но вот в тор превратить невозможно. Толковый словарь Ушакова определяет крендель как выпечку (буквально: как сдобную витую булку) в форме буквы В. При всём уважении к этому замечательному словарю, слова “в форме цифры **8**” кажутся мне более точными; впрочем, с той точки зрения, которая выражена в понятии гомеоморфии, и выпечка в форме цифры **8**, и выпечка в форме буквы В, и выпечка в форме фиты имеют одну и ту же форму. Даже если предположить, что хлебопёки сумели получить тесто, обладающее вышеуказанными свойствами податливости, колобок невозможно - без разрывов и склеиваний! - превратить ни в баранку, ни в крендель, как и последние две выпечки друг в друга. А вот превратить шарообразный колобок в куб или в пирамиду - можно. Любезный читатель несомненно сумеет найти и такую возможную форму выпечки, в которую нельзя превратить ни колобок, ни крендель, ни баранку.

Не назвав этого понятия, мы уже познакомились с гомеоморфией. Две фигуры называются *гомеоморфными,* если одну можно превратить в другую путём непрерывной (т. е. без разрывов и склеиваний) деформации; сами такие деформации называются *гомеоморфизмами*. Мы только что выяснили, что шар гомеоморфен кубу и пирамиде, но не гомеоморфен ни тору, ни кренделю, а последние два тела не гомеоморфны между собой. Просим читателя понимать, что мы привели лишь приблизительное описание понятия гомеоморфии, данное в терминах механического преобразования.

Коснёмся философского аспекта понятия гомеоморфии. Представим себе мыслящее существо, живущее внутри какой-либо геометрической фигуры и не обладающее возможностью посмотреть на эту фигуру извне, "со стороны". Для него фигура, в которой оно живёт, образует Вселенную. Представим себе также, что когда объемлющая фигура подвергается непрерывной деформации, существо деформируется вместе с нею. Если фигура, о которой идёт речь, является шаром, то существо никаким способом не может различить, пребывает ли оно в шаре, в кубе или в пирамиде. Однако для него не исключена возможность убедиться, что его Вселенная не имеет формы тора или кренделя. Вообще, существо может установить форму окружающего его пространства лишь с точностью до гомеоморфии, то есть оно не в состоянии отличить одну форму от другой, коль скоро эти формы гомеоморфны.

Для математики значение гипотезы Пуанкаре, превратившейся теперь из гипотезы в **теорему Пуанкаре - Перельмана,**огромно (не зря ведь за решение проблемы был предложен миллион долларов), равно как огромно и значение найденного Перельманом способа её доказательства, но объяснить это значение здесь - вне нашего умения. Что же касается космологической стороны дела, то, возможно, значимость этого аспекта была несколько преувеличена журналистами. Впрочем, некоторые авторитетные специалисты заявляют, что осуществлённый Перельманом научный прорыв может помочь в исследовании процессов формирования чёрных дыр.

Чёрные дыры, кстати, служат прямым опровержением положения о познаваемости мира - одного из центральных положений того самого передового, единственно верного и всесильного учения, которое 70 лет насильственно вдалбливалось в наши бедные головы. Ведь, как учит физика, никакие сигналы из этих дыр не могут к нам поступать в принципе, так что узнать, что там происходит, невозможно. О том, как устроена наша Вселенная в целом, мы вообще знаем очень мало, и сомнительно, что когда-нибудь узнаем. Да и сам смысл вопроса о её устройстве не вполне ясен. Не исключено, что этот вопрос относится к числу тех, на которые, согласно учению Будды, не существует ответа. Физика предлагает лишь модели устройства, более или менее согласующиеся с известными фактами. При этом физика, как правило, пользуется уже разработанными заготовками, предоставляемыми ей математикой.

Математика не претендует, разумеется, на то, чтобы установить какие бы то ни было геометрические свойства Вселенной. Но она позволяет осмыслить те свойства, которые открыты другими науками. Более того. Она позволяет сделать более понятными некоторые такие свойства, которые трудно себе вообразить, она объясняет, как такое может быть. К числу таких возможных (подчеркнём: всего лишь возможных!) свойств относятся конечность Вселенной и её неориентируемость.

Долгое время единственной мыслимой моделью геометрического строения Вселенной служило трёхмерное евклидово пространство, то есть то пространство, которое известно всем и каждому из средней школы. Это пространство бесконечно; казалось, что никакие другие представления и невозможны; помыслить о конечности Вселенной казалось безумием. Однако ныне представление о конечности Вселенной не менее законно, чем представление о её бесконечности. В частности, конечна трёхмерная сфера. От общения с физиками у меня осталось впечатление, что одни отвечают “скорее всего, Вселенная бесконечна”, другие же - “скорее всего, Вселенная конечна”.

Ниже мы попытаемся объяснить теоретическую возможность *конечности Вселенной*. Пока что заметим лишь, что конечность Вселенной не означает наличие у неё края, “стены”. Ведь само по себе отсутствие у геометрической фигуры конца и края ещё не означает её бесконечности. Поверхность нашей планеты, например, конечна, но края у неё нет. В детстве я, как и другие, наслаждался старинной картинкой, на которой был изображён монах, дошедший до Края Земли и просунувший голову сквозь небесный свод. Ещё более, чем упомянутая картинка, детское воображение увлекала модная гипотеза (потом она как-то заглохла), что некие две далёкие туманности, наблюдаемые с Земли в противоположных концах небосвода, являются на самом деле не различными астрономическими объектами, а одним и тем же объектом, видимым с разных сторон. Если бы это подтвердилось, это было бы доказательством конечности Вселенной. Вот три мысленных эксперимента, способные засвидетельствовать указанную конечность, если она действительно имеет место. Первый: экспериментатор отправляется в космическое путешествие и, двигаясь всё время в одну сторону, возвращается в исходную точку. Второй: обнаруживается окружность, длина которой меньше той, которую сообщают нам в школе, то есть меньше двух пи, помноженных на длину радиуса. Третий (предложен Эйнштейном): экспериментатор окружает себя сферой, сделанной из прочной и неограниченно растягивающейся плёнки, и начинает эту сферу раздувать; площадь поверхности сферы сперва будет возрастать, но начиная с некоторого момента - уменьшаться, а в итоге вся сфера стянется в точку - при том, что экспериментатор остаётся внутри сферы.

Чтобы понять, как такое возможно, надо напрячь воображение, а затем рассуждать по аналогии.

Вообразим себе обычную двумерную сферу, населённую двумерными же существами; их принято называть *флатландцами*. Мы с вами живём **на** сфере (на поверхности Земли), флатландцы же пребывают **в** теле сферы, в её “толще”; эта “толща”, конечно, не имеет толщины, но ведь и флатландцы её не имеют. Органы чувств не позволяют флатландцам ощутить что-нибудь вне пределов этой сферы, которая для них составляет Вселенную. Сфера большая, а двумерные жители обитают на небольшом её участке и - внимание! - полагают, что их Вселенная представляет собою двумерное евклидово пространство, то есть плоскость. Посмотрим, что может поколебать их в этом убеждении. Если считать, что флатландцы умеют видеть чрезвычайно далеко, то удалённый от них объект они видят с двух сторон: ведь в их Вселенной луч света идёт по сфере, огибая её. Космический путешественник, двигающийся всё время в одну сторону, возвращается, обогнув сферу, в исходную точку. Радиус окружности двумерные существа проводят по сфере, и его длина оказывается больше радиуса той же окружности, проведённого в недоступном им “внешнем” пространстве, - а потому длина окружности окажется меньшей, нежели та, которая вычисляется через “фатландский радиус” по нашей школьной формуле. Посмотрим теперь, что произойдёт, если двумерный экспериментатор окружит себя канцелярской резинкой, способной неограниченно растягиваться, придаст ей форму окружности и станет увеличивать радиус этой окружности. Сперва длина окружности будет возрастать, а после прохождения через “экватор” уменьшаться и в итоге уменьшится до нуля.

А теперь картину, только что изложенную нами для двумерного мира, надо по аналогии перенести на мир трёхмерный. Мы, как и флатландцы, убеждены, что пребываем в “прямом” евклидовом пространстве школьной геометрии. Однако не исключено, что на самом деле - в (не “на”, а “в”) сфере, только трёхмерной. И эту трёхмерную сферу можно представлять себе расположенной в евклидовом четырёхмерном пространстве - наподобие того, как двумерная сфера расположена в пространстве трёхмерном. Четырёхмерного пространства мы, разумеется, не воспринимаем своими органами чувств, но ведь и флатландцы не воспринимают пространства трёхмерного. Как и флатландцы, мы можем убедиться в кривизне мира, увидев какой-нибудь весьма отдалённый предмет с двух противоположных сторон или сравнивая длину окружности с той, которая выражает эту длину через радиус по стандартной, известной из школы формуле. Вместо эксперимента с канцелярской резинкой надлежит произвести тот эксперимент с растягивающейся плёнкой, о котором было сказано выше.

Нередко представления об устройстве Вселенной, уже включённые наукой в перечень подтверждённых, кажутся парадоксальными; не исключено, что некоторые её свойства могут оказаться ещё более парадоксальными. Пожалуй, сейчас уже всем известен так называемый *парадокс близнецов*. Если один из двух близнецов совершает космическое путешествие, а другой остаётся на Земле, то в момент возвращения из космоса космонавт непременно окажется моложе своего брата; если ускорения, которым подвергался космонавт во время путешествия, были достаточно велики и длительны, разница в возрасте будет заметна на глаз. Сейчас мы опишем другое явление - *парадокс зеркального отражения*. Встретится ли когда-либо названный парадокс в действительности, неизвестно; в отличие от парадокса близнецов, описывающего реальные (точнее сказать - общепризнанные) свойства мироздания, возможность осуществления зеркального отражения чисто теоретическая, она всего лишь не опровергнута.

Итак, *парадокс зеркального отражения*. В 1896 году Г. Дж. Уэллс написал свою “Историю Платтнера” (“The Plattner story”) - уже упоминавшийся рассказ о том, как школьный учитель Готфрид Платтнер претерпевает фантастическое путешествие, после чего возвращается зеркально перевёрнутым. До путешествия он не был левшой и имел нормальное строение тела за исключением лёгкой асимметрии: “Левый глаз немного больше правого и челюсть чуть-чуть отвисает с левой стороны”. А вот каким он сделался после своего путешествия: “Правый глаз немного больше левого, и правая часть челюсти слегка тяжелее левой. ‹…› Сердце Готфрида бьётся с правой стороны! ‹…› Все другие несимметричные части его тела расположены не на своих местах. Правая доля его печени расположена с левой стороны, левая - с правой, аналогично перепутаны и лёгкие. ‹…› Он может писать только левой рукой, причём справа налево”.

Уэллс объясняет происшедшие с Платтнером изменения выходом в другой мир, в четвёртое измерение: “Если вы вырежете из бумаги любую фигуру, имеющую правую и левую стороны, вы можете легко переместить эти стороны, если подымете и перевернёте фигуру. Но с предметом объёмным дело обстоит иначе. Теоретики-математики говорят нам, что единственный способ, посредством которого правая и левая сторона какого-нибудь твёрдого тела могут перемениться, - это если изъять тело из пространства (в том виде, в каком мы понимаем пространство), вынуть его из обычных условий и переместить куда-то вне пространства. ‹…› Случившаяся у Платтнера перемена местами правой и левой частей есть не что иное, как доказательство того, что он переходил из нашего пространства в так называемое Четвёртое Измерение, а затем снова вернулся в Наш Мир”.

Здесь существенна заключённая в скобки оговорка: “…в том виде, в каком мы понимаем пространство…” Имеется в виду стандартное, школьное понимание пространства. Математики, однако, обнаружили теоретическую возможность такой формы трёхмерного пространства, что поменять местами правую и левую части тела можно и без выхода за пределы этого пространства. При стандартном школьном понимании формы окружающего нас трёхмерного пространства действительно никаким перемещением в этом пространстве невозможно превратить кисть правой руки в кисть левой руки. Но это невозможно именно при стандартном школьном понимании. Существуют, однако, и иные формы пространства, допускающие такое перемещение. Попытаемся разъяснить, как такое может быть.

Как справедливо замечает Уэллс, вырезанный из бумаги силуэт правой ладони невозможно превратить в силуэт левой ладони, ограничиваясь перемещением по плоской поверхности стола; чтобы это сделать, надо поднять силуэт над столом, то есть выйти в третье измерение, перевернуть и снова положить на стол. Существует, однако, такая поверхность, перемещением по которой правое превращается в левое. Два немецких математика, Иоганн Бенедикт Листинг и Август Фердинанд Мёбиус, независимо друг от друга открыли её в 1858 году. По имени одного из них поверхность получила название *лист Мёбиуса*.

Изображение листа Мёбиуса можно встретить на обложках математических изданий и значках математических сообществ (в частности - на значке мехмата Московского университета). Рекомендуем любезному читателю самому изготовить эту знаменитую поверхность. Сделать это просто. Если взять бумажную ленту и склеить её торцы, то полученная поверхность будет боковой поверхностью цилиндра. Если же перед склеиванием ленту крутануть на 180 градусов, как раз и получится лист Мёбиуса. Во избежание недоразумений повторим сказанное на языке математики. Надо взять прямоугольник ABCD, у которого сторона AB параллельна стороне CD, а сторона AD параллельна стороне BC, и склеить друг с другом стороны AD и BC (“торцы”). Склейку можно производить различными способами. Если сделать это без перекрутки, точка A склеится с точкой B, а D - с C, и получится боковая поверхность цилиндра. Если же A склеить с C, а D с B, получим лист Мёбиуса. Случается, что, подпоясавшись и застегнув ремень, вы обнаруживаете, что ремень перекрутился; такой перекрученный и застёгнутый ремень может служить примером листа Мёбиуса[3].

Лист Мёбиуса обладает рядом замечательных свойств. Так, он имеет всего лишь одну сторону. Чтобы убедиться в этом, проделаем такой мысленный эксперимент. Представим себе сделанный из прочного материала и расположенный в невесомости лист Мёбиуса, поставим на него человека и попросим этого человека прогуляться. Можно выбрать такой маршрут, что в какой-то момент прогулки человек окажется в положении антипода по отношению к тому положению, какое он имел в исходный момент. Ясно, что ни для боковой поверхности цилиндра, ни для плоскости, ни для сферы такая прогулка невозможна. Лист бумаги можно закрасить с одной стороны в чёрный цвет, оставив другую его сторону незакрашенной. Точно так же и поверхность цилиндра, и сферу можно выкрасить с одной стороны, оставив другую незакрашенной. Поступить так с листом Мёбиуса не удастся. И плоскость, и поверхность цилиндра, и сфера суть поверхности *двусторонние*. Лист же Мёбиуса является *односторонней* поверхностью.

Другое свойство листа Мёбиуса особенно важно для целей нашего изложения. Оно состоит в так называемой *неориентируемости*. Лист Мёбиуса, как и всякая поверхность, не имеет толщины. Если на листе изображён силуэт ладони, то невозможно сказать, правая она или левая, - это зависит от того, с какой стороны посмотреть. (Читатель да не смутится употреблением здесь слова “сторона”: лист Мёбиуса в целом односторонен, но тот малый его участок, на котором изображена ладонь, двусторонен, и гуляющий по этому участку не может стать своим антиподом.) Если рядом изображены две ладони, то можно сказать, одинаковы ли они или же одна есть зеркальное отражение другой. Так вот, можно совершить такое передвижение силуэта ладони по листу Мёбиуса, при котором этот силуэт вернётся на прежнее место зеркально отражённым, а возможность такого передвижения и означает неориентируемость. Каждый может проверить наличие указанной возможности; для наглядности полезно представлять себе лист Мёбиуса изготовленным из промокательной бумаги, так что любой рисунок, нанесённый чернилами, проступает насквозь. Снова прибегнем к методу аналогии и перенесёмся из двумерного мира в трёхмерный. Очень трудно представить себе трёхмерную геометрическую фигуру, которая была бы неориентируемой, то есть такой, внутри которой возможна траектория, приводящая к зеркальному отражению. В нашем обычном трёхмерном пространстве такие фигуры не умещаются. Те из них, которые компактны и не имеют края, не умещаются даже в "обычном" (то есть евклидовом) четырёхмерном пространстве - подобно тому, как неориентируемые компактные поверхности без края не умещаются в трёхмерном пространстве (умещающийся в трёхмерном пространстве лист Мёбиуса имеет край). Однако уже не вызывает протеста предположение о существовании таких фигур в высших измерениях - ведь и двумерный лист Мёбиуса, не умещаясь на плоскости, требует для своего размещения трёхмерного пространства. И действительно, все неориентируемые трёхмерные тела хорошо себя чувствуют в пятимерном евклидовом пространстве.

Итак, неориентируемая поверхность - это поверхность, перемещая по которой силуэт правой ладони можно (без выхода за пределы поверхности!) превратить его в силуэт левой ладони. Лист Мёбиуса - самая известная и самая простая из неориентируемых поверхностей. Из других наиболее известна так называемая *бутылка Клейна,* названная по имени знаменитого немецкого математика Феликса Клейна, запустившего её в математический оборот в 1874 году. Представим себе бутылку с очень длинным и очень гибким горлышком. Толщиной материала, из которого изготовлена бутылка, мы пренебрегаем, так что бутылку воспринимаем как двумерную фигуру, то есть как поверхность. Можно ли изогнуть горлышко так, чтобы дотронуться им до дна бутылки? Разумеется, можно; прикосновение при этом произойдёт с наружной стороны дна. Коснуться же горлышком дна изнутри бутылки невозможно, для этого горлышку пришлось бы пройти сквозь стенку. Но вот если бы это удалось, как раз и получилась бы бутылка Клейна.

Так зачем же говорить о такой поверхности, которой нет и не может быть, возмутится читатель. А дело в том, что такая поверхность есть, только "живёт" она в четырёхмерном пространстве. Чтобы понять, как можно изготовить бутылку Клейна при помощи четвёртого измерения, следует вновь обратиться к флатландской аналогии. Обычная бутылка есть двумерная поверхность в трёхмерном пространстве. Что является её аналогом на плоскости? Тень бутылки? Нет, аналог должен быть на одно измерение меньше окружающего пространства, то есть в данном случае одномерным. Обведём карандашом контур тени, сделав в этом обводе перерыв на месте отверстия горлышка. Полученная линия и является искомым одномерным аналогом двумерной бутылки. Представим себе эту линию в виде тонкой и гибкой проволоки. У этой проволочной фигуры можно выделить дно, горлышко и две стенки. Можно ли, не выходя за пределы плоскости, изогнуть горлышко так, чтобы коснуться им дна? Разумеется, можно, но только с наружной стороны; коснуться с внутренней стороны (то есть со стороны тени) невозможно, для этого пришлось бы пересечь одну из стенок. Однако можно коснуться и с внутренней стороны, если разрешить выход за пределы плоскости: в том месте, где проволочное горлышко хочет пересечь проволочную стенку, надо приподнять горлышко над плоскостью, провести его над стенкой наподобие моста, а затем снова опустить на ту же плоскость - но уже внутри бутылки. И дотянуть горлышко до дна. А теперь, напрягая воображение и прибегая к аналогии, можно постараться представить себе изгибание горлышка двумерной бутылки в четвёртом измерении - с последующим касанием дна изнутри.

И евклидово пространство средней школы, и трёхмерная сфера ориентируемы. В них отсутствуют траектории, приводящие к зеркальному отражению. Но теоретические представления о возможной геометрической структуре Вселенной не исключают того, что она неориентируема. А тогда *путешествие, приводящее к зеркальному отражению путешественника, может быть осуществлено и без выхода из нашего трёхмерного мира.* Таким образом, не вполне прав был поэт, сказавший:

Какая тяжкая обида

Существовать и твёрдо знать,
Что из пустых пространств Евклида
Нам никуда не убежать.

И нам с тобою неужели
Идти в грядущие года -
Как в бесконечность параллели,
Не пересекшись никогда.

[1] Благодарю В. И. Беликова, подсказавшего это свидетельство.
[2] В 8-томнике В. А. Каверина (1980) фамилия персонажа Ногин. *(Примеч. ред.)*
[3] Этот многим знакомый пример листа Мёбиуса автор узнал от Г. Б. Шабата.

обсудить в форуме

- ›

в начало страницы