0. 导语

- 本节内容不适合无概率统计基础的听众
- 本节内容从感性上对统计分布进行深入介绍，但不做任何复杂的、理性的工作（长篇大论的数学公式推导）
- 社会学中的一些重要分布（Weibull,Pareto,Zipf,...）都以本次内容作为基础，结合具体工程问题后续介绍

1. 大自然的概率分布 ¶

In [29]:
```
%matplotlib inline
%pylab inline
import numpy as np
import numpy.random as nprnd
import scipy.stats as spstat
import scipy.special as ssp
import itertools as itt
#print nprnd.__all__ ##NumPy随机数生成工具
#print spstat.__all__ ##Scipy更完整的分布采样、概率分布函数曲线、p值检查工具、非参数统计工具
```

```
Populating the interactive namespace from numpy and matplotlib
```

In [30]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
import pylab as pl
from matplotlib.font_manager import FontProperties
fontPath = r"/Users/wangweiyang/Anaconda/lib/python2.7/site-packages/matplotlib/mpl-data/fonts/ttf/msyh.ttf"
fontx = FontProperties(fname=fontPath, size=10)
```

上面的代码中最后几行是为了让Matplotlib能够显示中文的，除了执行以上代码以外还需要在系统中进行如下设置：

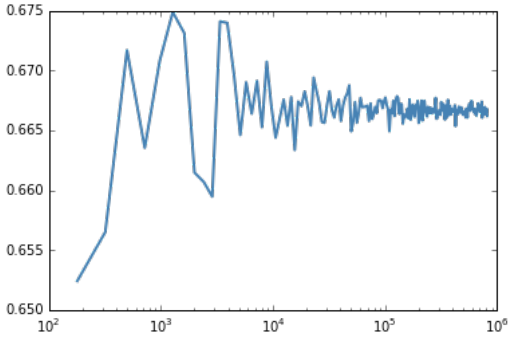
- 修改matplotlibrc,找到找到以下两项，去掉#号
  - font.family : sans-serif
  - font.sans-serif : Microsoft YaHei, Bitstream Vera Sans, Lucida Grande, Verdana, Geneva, Lucid, Arial, Helvetica, Avant Garde, sans-serif
- 为font.sans-serif中添加“Microsoft YaHei”,该行指示缺省字体
- 在上述fontPath中增加msyh.ttf的绝对路径

1.1 大数定律

大数定律（Law of Large Number）：只要数够大，样本均值就会趋近于分布均值

要不要猜一下Beta(2,1)分布的均值?

In [31]:
```
N = (np.arange(200)+3)**2 * 20

betamean = np.zeros_like(N,dtype=float64)

for idx,i in enumerate(N):
    betamean[idx] = np.mean(nprnd.beta(2,1,i))


plt.plot(N,betamean, color='steelblue', lw=2)
plt.xscale('log')
plt.show()
```



似乎是收敛到2/3了？

In [32]:
```
print spstat.beta(2,1).mean()
```

```
0.666666666667
```

对于一个分布的数字特征，总是可以简单的用如下方法快速得到，验证公式：

In [33]:
```
print spstat.beta(2,1).mean(), 2.0/(2+1)
print spstat.beta(2,1).var(), 2*1.0/(2+1+1)/(2+1)**2
```

```
0.666666666667 0.666666666667
0.0555555555556 0.0555555555556
```

1.2 中心极限定理：正态分布

中心极限定理：

$$\sqrt{N}(\bar{X}-\mu) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$$

- N: 样本数目
- μ: 分布均值
- σ: 分布方差
- $\mathcal{N}$: 正态分布

使用随机数生成 + 核函数，而不是用直方图来验证连续型分布，这种分布更像概率密度函数：

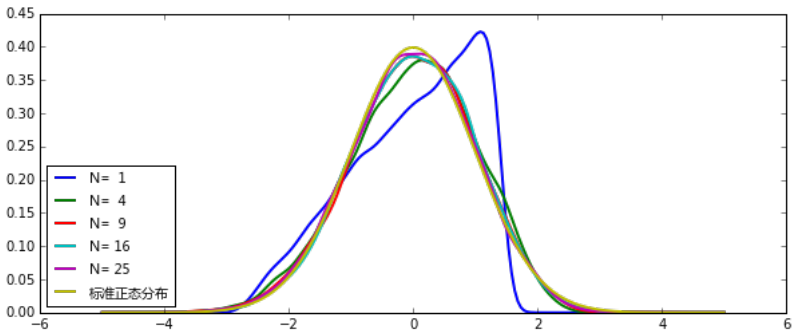
发现恰好与正态分布形状一致

正态分布$N(\mu,\sigma^2)$: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

并且$N(\mu,\sigma^2) \sim \mu + N(0,1)*\sigma$

In [34]:
```
N = (np.arange(5)+1)**2
M = 10000

betaCLT = np.zeros((len(N),M),dtype=float64)

for idx,x in enumerate(N):
    for j in xrange(M):
        betaCLT[idx,j] = (np.mean(nprnd.beta(2,1,x))-2.0/3)*np.sqrt(x) * 6.0/np.sqrt(2)


fig, ax = plt.subplots(figsize=(10,4))

for i in xrange(len(N)):
    density = spstat.gaussian_kde(betaCLT[i,:])
    xs = np.linspace(-5,5,200)
    density.covariance_factor = lambda : .15
    density._compute_covariance()
    ax.plot(xs,density(xs),lw=2,label='N={0:>3}'.format(N[i]))

ax.plot(xs,spstat.norm().pdf(xs),lw=2,label=u'标准正态分布')

ax.legend(loc=3,prop=fontx)
```

Out[34]:
```
<matplotlib.legend.Legend at 0x10aad2210>
```



回顾大数定理：“放大100倍，抖动幅度缩减10倍”

1.3 不知道分布？建议了解大自然的规律

- 分布在给定条件下服从最大熵原理，如果你已经了解变分法、拉格朗日法，建议阅读或等待后续课程
- 统计物理通过状态转移概率矩阵来获得分布形式，建议阅读离散状态随机过程、Boltzmann分布或等待后续课程
- 随机模拟通过MCMC来实现获得分布模拟，或者在其上直接进行其他数学实验，建议阅读Gibbs Sampling、Metropolis Hastings算法或等待后续课程

2. 计算机界的概率分布

2.1 用有限的值域近似无限的随机数

- int8: -128 ~ 127
- int16: -32768 ~ 32767
- int32: -2^{31} ~ 2^{31} -1
- int64: -2^{63} ~ 2^{63} -1
- uint8: 0 ~ 255
- uint16: 0 ~ 65535
- uint32: 0 ~ 2^{32} -1
- uint64: 0 ~ 2^{64} -1
- float16: 符号 + 5bit指数 + 10bit小数
- float32: 符号 + 8bit指数 + 23bit小数
- float64: 符号 + 11bit指数 + 52bit小数
- complex64: 单精度浮点复数
- complex128: 双精度浮点复数

我们仅用x个bit(0-1位)，故至多表示2^x 个**离散**的数值。（更详细的浮点数内容请参考：IEEE Standard 754）

2.2 “好的”随机数生成器与标准均匀分布

$U(0,1)$: “均匀的"从0到1的实数中选取一个

$U(a,b) \sim a + (b-a)U(0,1)$: “均匀的"从a到b的实数中选取一个

好的随机数生成器应该满足

- 服从给定分布
- 无自相关
- 给定种子可重复（伪随机）

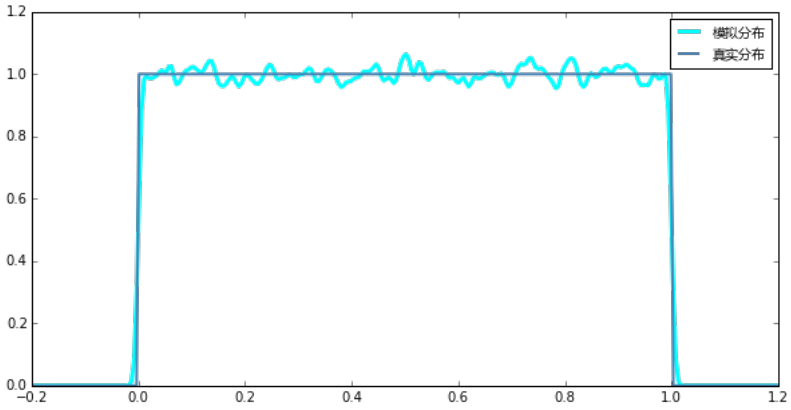
常见的随机数生成器（C，各种BLAS等）：

- Mersenne Twister http://en.wikipedia.org/wiki/Mersenne_Twister (http://en.wikipedia.org/wiki/Mersenne_Twister)

当我们想要U(0,1):

In [35]:
```
x = np.random.rand(1e5)
xs = np.linspace(-0.2,1.2,300)
density = spstat.gaussian_kde(x)
density.covariance_factor = lambda : .02
density._compute_covariance()
fig,ax = plt.subplots(figsize=(10,5))


ax.plot(xs,density(xs),lw=3,color='cyan',label=u'模拟分布')
ax.plot(xs,spstat.uniform().pdf(xs),color='steelblue',lw='2',label=u'真实分布')
ax.legend(loc=1,prop=fontx)
```

Out[35]: <matplotlib.legend.Legend at 0x10a4364d0>

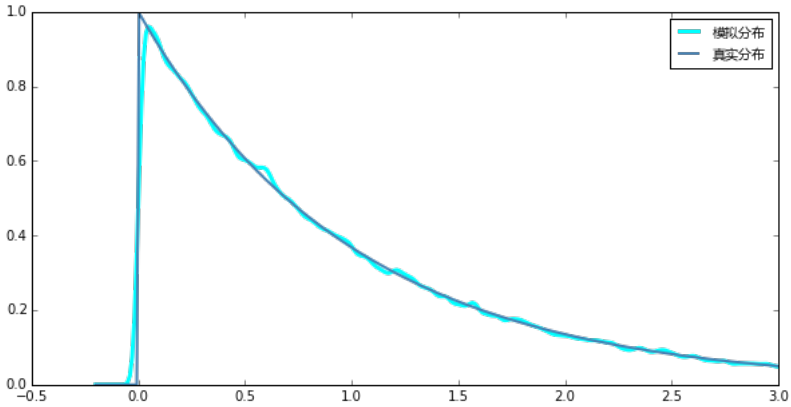


当我们想要某个叫做指数分布的分布**Exp(1)**

$Exp(\lambda) \sim Exp(1)/\lambda$

In [36]:
```
x = np.random.rand(1e5)
x = - np.log(x) # 来自均匀分布经过函数转换
xs = np.linspace(-0.2,3,300)
density = spstat.gaussian_kde(x)
density.covariance_factor = lambda : .02
density._compute_covariance()
fig,ax = plt.subplots(figsize=(10,5))


ax.plot(xs,density(xs),lw=3,color='cyan',label=u'模拟分布')
ax.plot(xs,spstat.expon().pdf(xs),color='steelblue',lw='2',label=u'真实分布') # 来自指数分布
ax.legend(loc=1,prop=fontx)
```

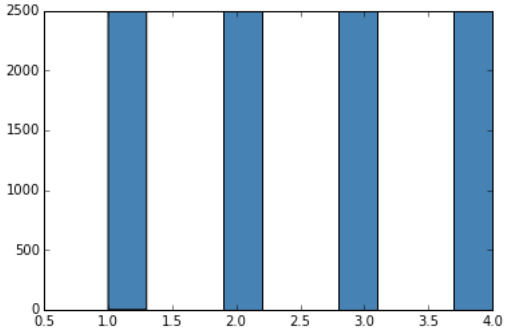
Out[36]: <matplotlib.legend.Legend at 0x10a7f8450>



当我们想要一个在**1-4**上的均匀分布

In [37]:
```
x = np.array([(2**i)%5 for i in xrange(10000)])
plt.hist(x,color='steelblue')
print x[0:20]
```

```
[1 2 4 3 1 2 4 3 1 2 4 3 1 2 4 3 1 2 4 3]
```



分布倒是均匀，可是并不真的随机！你能够精确的知道x这个序列每一个位置是什么。

当我们想要可以重现的随机数生成序列

In [38]:
```
for i in xrange(3):
    np.random.seed(0)
    print nprnd.beta(2,1,6)

np.random.seed(0)

for i in xrange(3):
    #np.random.seed(0)
    print spstat.beta(2,1).rvs(6)
```

```
[ 0.86716215  0.68316348  0.86937866  0.66270128  0.96905629  0.5057031 ]
[ 0.86716215  0.68316348  0.86937866  0.66270128  0.96905629  0.5057031 ]
[ 0.86716215  0.68316348  0.86937866  0.66270128  0.96905629  0.5057031 ]
[ 0.86716215  0.68316348  0.86937866  0.66270128  0.96905629  0.5057031 ]
[ 0.58977924  0.58475563  0.4209777   0.59576436  0.78400889  0.47801871]
[ 0.79828678  0.88390508  0.5308493   0.93149258  0.52822535  0.58509245]
```

2.3 From One To Many

刚才的例子说明，随机数之间可以通过函数来互相转换。

对于离散随机分布，可以通过对连续的$U(0,1)$离散化，了解这个分布的含义直接进行模拟。

对于连续随机分布，例如$-log(U(0,1)) \sim Exp(1)$可以进行转换。

如果你能知道一个随机分布T的 累积概率分布（Cumulative Distribution Function）F，你就可以用

$T = F^{-1}(U)$ 来生成T的分布了。

比如我知道Exp(1)的概率密度函数是

$f(x) = e^{-x}$, 于是 $F(x) = \int_0^x e^{-x} = 1 - e^{-x}$

于是： $-log(1 - U(0,1)) \sim Exp(1)$，因为$1 - U(0,1) \sim U(0,1)$

接下来，仅仅凭借均匀分布走遍天下吧！

3. 离散分布

离散分布最好用直方图来表示Probability Mass Function。

3.1 二值分布，或称伯努利分布(Bernoulli Distribution)

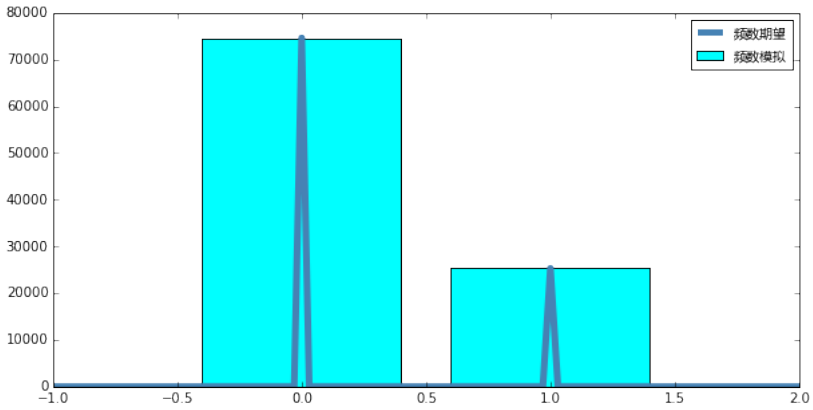
具体：两人反复进行比赛，其中前者赢得比赛的概率是p，赢得比赛计为1，否则为0，每一场比赛结果独立而且随机时就为Bernoulli分布。

抽象：Bernoulli(p)以概率p取到1，以概率1-p取到0，也就是P(X=1) = p

In [39]:
```
p = nprnd.rand()
print "p = {0:3.5f}".format(p)
x = np.int64(nprnd.rand(1e5)<p)

fig,ax = plt.subplots(figsize=(10,5))
xs = np.linspace(-1,2,100)
ax.bar(np.arange(2),np.bincount(x),color='cyan',align='center',label=u'频数模拟')
ax.plot(xs,spstat.bernoulli(p).pmf(xs)*1e5,color='steelblue',lw=5,label=u'频数期望')
ax.legend(loc = 1,prop = fontx)
```

```
p = 0.25329
```

Out[39]: <matplotlib.legend.Legend at 0x10b9f68d0>



3.2 多值分布(Multi Value Distribution)

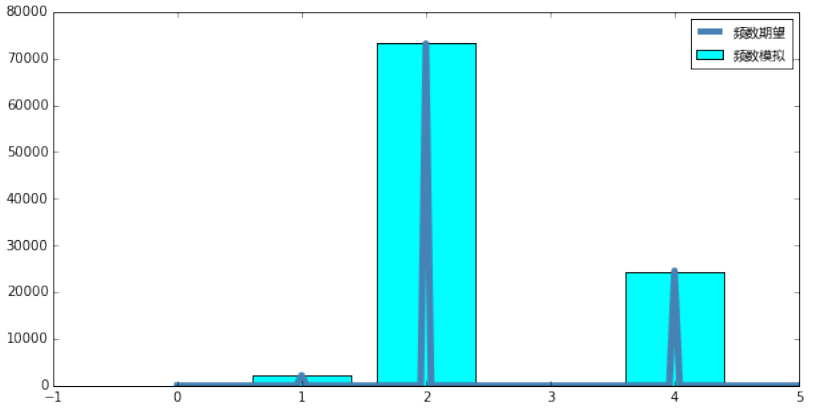
具体：4个人打麻将，分别取得胜利的概率为$p_i, i = 0, 1, 2, 3$而且$\Sigma_i p_i = 1$

$P(X = i) = p_i$

抽象：这个[1/4,1/4,1/4,1/4]叫做超参数，是他们通过Dirichlet分布生成了多值分布的参数（也就是每个人的胜利概率）

In [40]:
```
dirichlet = spstat.dirichlet(np.ones(4)/4.0).rvs() #这时用Dirichlet分布直接生成一组随机数更方便
#print dirichlet

cs_dirichlet = np.cumsum(dirichlet) #累计加和
#print cs_dirichlet


dict_dirichlet = {(4-i):dirichlet[0,i] for i in xrange(4)} #
#print dict_dirichlet

p = nprnd.rand(1e5)

p_discrete = np.zeros_like(p,dtype=int64)
for i in cs_dirichlet:
    p_discrete += p<i

fig,ax = plt.subplots(figsize=(10,5))
xs = np.linspace(0,5,121)
ax.bar(np.arange(5),np.bincount(p_discrete),color='cyan',align='center',label=u'频数模拟')
ax.plot(xs,np.array([dict_dirichlet.get(i,0) for i in xs])*1e5,color='steelblue',lw=5,label=u'频数期望')
ax.legend(loc = 1,prop = fontx)
```

Out[40]: <matplotlib.legend.Legend at 0x10bad7450>



3.3 排列与组合的威力：二项分布(Binomial Distribution)、多项分布(Multinomial Distribution)

二项分布就是重复的Bernoulli实验，对2种结果计数。

类似的，多项分布就是重复的多值分布实验，对每一种不同结果分别计数，当只关心某一种结果时仍然是二项分布。

二项分布：$Binomial(N,p) \xrightarrow{\mathcal{D}} \Sigma_{N,i.i.d} Bernoulli(p)$

从排列组合角度看，

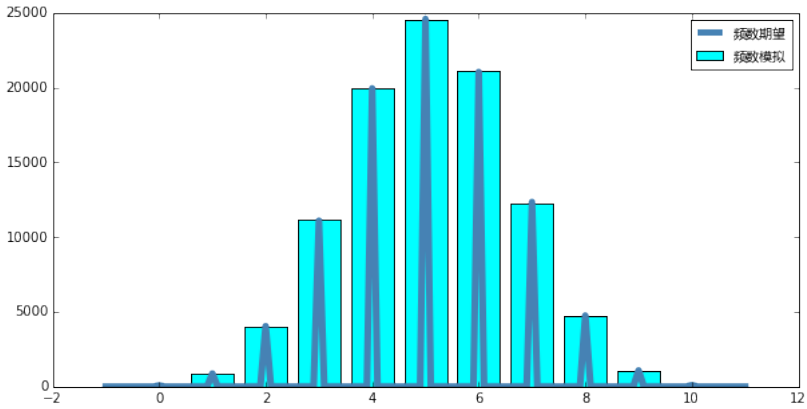
二项分布的PMF：$P(X=k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$

多项分布的PMF：$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots X_n = k_n) = \binom{N}{k_1, k_2, \dots k_n} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$

In [41]:
```
N = 10
M = 1e5
p = nprnd.rand()*0.5+0.25
print p


binomial_simresult = np.zeros((M,),dtype=int64)
for i in xrange(N):
    binomial_simresult += nprnd.rand(M)<p

fig,ax = plt.subplots(figsize=(10,5))
xs = np.linspace(-1,11,121)
ax.bar(np.arange(11),np.bincount(binomial_simresult),color='cyan',align='center',label=u'频数模拟')
ax.plot(xs,spstat.binom(N,p).pmf(xs)*M,color='steelblue',lw=5,label=u'频数期望')
ax.legend(loc = 1,prop = fontx)
```

```
0.506679459366
```

Out[41]: <matplotlib.legend.Legend at 0x10c2b5a10>



3.4 到达时间：几何分布(Geometric Distribution)与负二项分布(Negative Binomial Distribution)

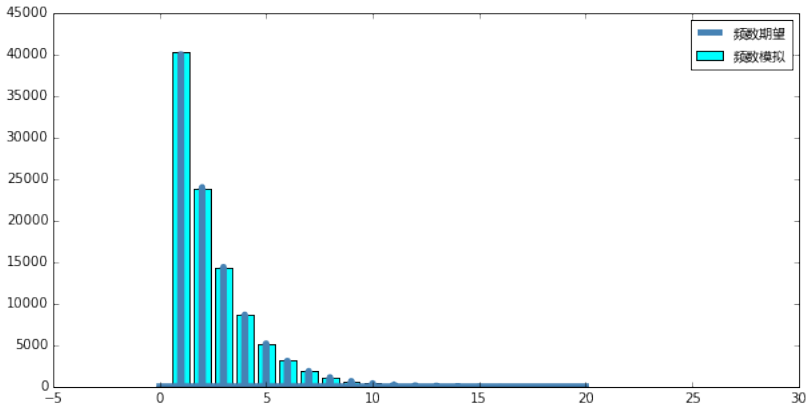
当你打开LOL开始排位赛，你发现尽管胜率不算太低，但你今天的运气格外差，拿不到首胜。

第N盘才拿到首胜的概率是$P(X=N) = (1-p)^{N-1} p$，可以看到，就算平均来讲你10盘赢4盘，仍然有可能今天打到第十盘才赢，十分悲惨。

连掉几段的滋味大概并不好受吧！（喂）

In [42]:
```
M = 1e5
p = 0.4
geometry_simresult = np.zeros((M,),dtype=int64)
for i in xrange(np.int(M)):
    c = 1
    while(nprnd.rand() > p):
        c += 1
    geometry_simresult[i] = c


bincount_geom = np.bincount(geometry_simresult)

fig,ax = plt.subplots(figsize=(10,5))
xs = np.linspace(0,20,1001)
ax.bar(np.arange(len(bincount_geom)),bincount_geom,color='cyan',align='center',label=u'频数模拟')
ax.plot(xs,spstat.geom(p).pmf(xs)*M,color='steelblue',lw=5,label=u'频数期望')
ax.legend(loc = 1,prop = fontx)
```

Out[42]: <matplotlib.legend.Legend at 0x10c47e410>



几何分布就是离散分布中的无记忆分布：这盘赢了实验停止，如果输了开始完全无关的比赛，仍然不会提高未来赢的预期。

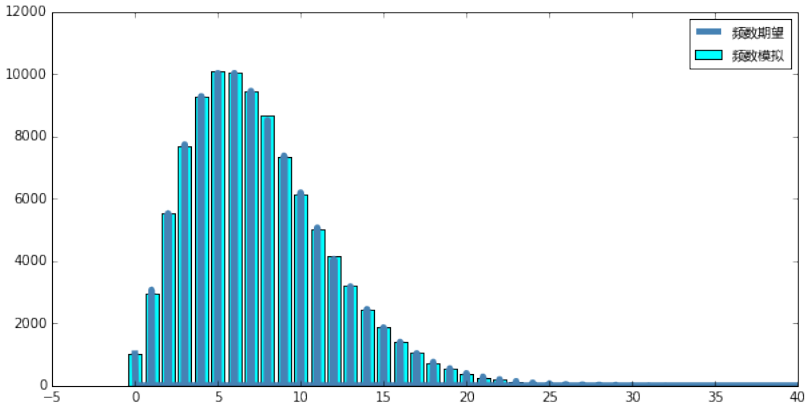
下一盘你对输赢的感觉会和这盘开始之前**完全一致**。

好了，现在新的目标变成了“不赢5盘不睡觉了！”

为了迎接N盘胜利你要承受多少失败呢？一盘游戏30分钟，你知道你大概几点才能睡觉吗？！

In [43]:
```
M = 1e5
p = 0.4
N = 5
nbinom_simresult = np.zeros((M,),dtype=int64)
for i in xrange(np.int(M)):
    c = 0
    win = 0
    while(win<5):
        if nprnd.rand()<p:
            win += 1
        else:
            c += 1
    nbinom_simresult[i] = c

bincount_nbinom = np.bincount(nbinom_simresult)

fig,ax = plt.subplots(figsize=(10,5))
xs = np.linspace(0,40,1001)
ax.bar(np.arange(len(bincount_nbinom)),bincount_nbinom,color='cyan',align='center',label=u'频数模拟')
ax.plot(xs,spstat.nbinom(N,p).pmf(xs)*M,color='steelblue',lw=5,label=u'频数期望')
ax.legend(loc = 1,prop = fontx)
```

Out[43]: <matplotlib.legend.Legend at 0x10d4121d0>



3.5 给定条件：超几何分布(Hypergeometric Distribution)

首先对条件化简：假定你的胜率变成了五五开（p = 1-p）

今天你逃课了，打了20盘LOL，在最后一盘赢到第五局才回家。

试问你前5盘赢了多少局？显然这是一个概率分布，取值从0到4都可能。

再化简一下，已知第五盘赢在20局，则前19盘只赢了4局。

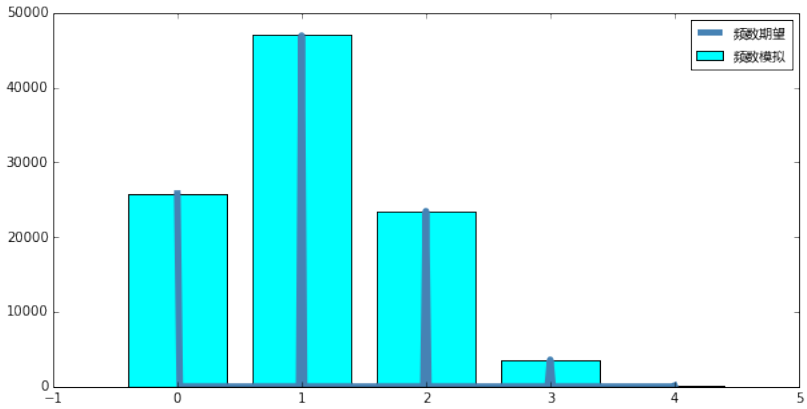
联系之前提到的itertools一块解决这个问题，并对照超几何分布的PMF：

- A 事件总数
- N 某类事件在A中的总数
- X 在A中随机的k个事件中某类事件的数目

$$P(X = i) = \binom{N}{i} \cdot \binom{A-N}{k-i} / \binom{A}{k}$$

In [44]:
```
M = 1e5
N = 5
k = 4
A = 19

sample_space = list(itt.combinations(xrange(A),k))
choice_idx = nprnd.rand(M)*len(sample_space)
hypergeom_simresult = np.zeros((M,),dtype=int64)

for i in xrange(np.int(M)):
    hypergeom_simresult[i] = np.sum(np.array(sample_space[np.int64(choice_idx[i])])<N)

bincount_hypergeom = np.bincount(hypergeom_simresult)

fig,ax = plt.subplots(figsize=(10,5))
xs = np.linspace(0,4,201)
ax.bar(np.arange(len(bincount_hypergeom)),bincount_hypergeom,color='cyan',align='center',label=u'频数模拟')
ax.plot(xs,spstat.hypergeom(A,k,N).pmf(xs)*M,color='steelblue',lw=5,label=u'频数期望')
ax.legend(loc = 1,prop = fontx)
```

Out[44]: <matplotlib.legend.Legend at 0x10d8824d0>



3.6 实践的重要注意事项

- 为合适的问题准备合适的分布
- 前提假设条件要满足

4. 连续分布

前面已经叙述过，连续分布最好用核密度函数（KDE，Kernel Density Function）配合合适的窗口宽度来表示概率密度函数（pdf，Probability Distribution Function）。在这一章中了美观和有效传达分布的概念，都使用KDE来描述离散样本点所形成的概率分布。

4.1 指数分布(Exponential Distribution)

“传说中好的灯泡能用很久，不管过去工作了多少年，人们对他未来良好工作的预期都和刚拆封的新灯泡一样。”

指数分布是最容易从$U(0,1)$得到的分布，同样他是连续分布中的无记忆分布。

$Exp(\lambda) : f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

结合条件分布我们理解一个概念：Hazard Function

对于几何分布我们已经简单尝试一下下面等式的推导：

$P(X = 1) = P(X = 2|X > 1) = P(X = 3|X > 2) = \ldots = p$

对于指数分布我们继续尝试一下类似的推导对于任何X：

$f(x)/(1 - F(x)) = e^{-\lambda x}/\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} = \lambda$

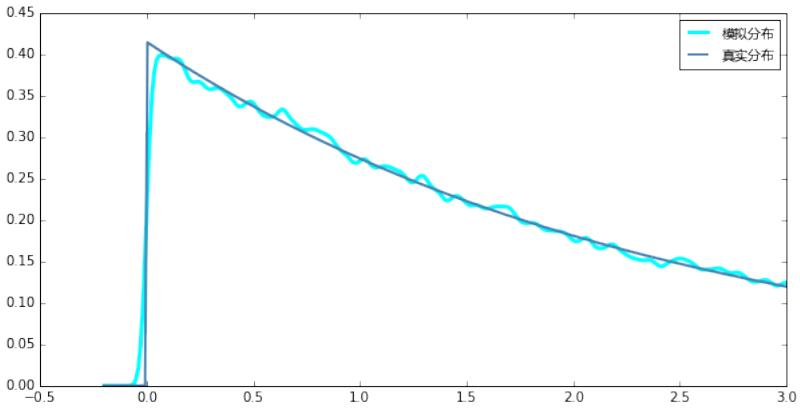
所谓无记忆性就是Hazard Function是常数：“下一秒发生事件的概率不受这一秒之前任何事件的影响”。

无记忆性这个很好的性质导致了指数分布与几何分布有个非常相似的地方：遮住画面的左边一部分，等比例放大一下函数，和原来的形状一样。

如果把几何分布的$X = x$变成$\frac{x}{N}$，将p替换成$\frac{p}{N}$，他其实就变成了……指数分布

In [45]:
```
M = 1e5
p = nprnd.rand()*2+1
x = - np.log(nprnd.rand(M))*p # 来自均匀分布经过函数转换, lambda = 1/p
T = 10
poisson_parameter = T/p
xs = np.linspace(-0.2,3,300)
density = spstat.gaussian_kde(x)
density.covariance_factor = lambda : .01
density._compute_covariance()
fig,ax = plt.subplots(figsize=(10,5))


ax.plot(xs,density(xs),lw=3,color='cyan',label=u'模拟分布')
ax.plot(xs,spstat.expon(0,p).pdf(xs),color='steelblue',lw='2',label=u'真实分布') # 来自指数分布
ax.legend(loc=1,prop=fontx)
```

Out[45]: <matplotlib.legend.Legend at 0x1078ad910>



3.7 停时（Stopping Time）计数问题：Poisson过程与Poisson分布

虽然是离散分布，但是放在指数分布后讲解更符合逻辑。

当你有一堆工作时长为$Exp(\lambda)$（指数分布）的灯泡，把他们排列在一起，一个坏了马上换一个新的。

提问：在某一时刻T，你用坏了几个灯泡？—— 答案是用坏的灯泡数是随机的，满足$Poisson(\lambda T)$，验证之：

我们还知道：

- 二项分布是Bernoulli序列
- Bernoulli的首达是几何分布
- 几何分布的计数步长趋近于0保持无记忆变为指数分布
- 指数分布作为首达多次累积变成Poisson分布

所以

- 二项分布令$N \to \inf, p \to 0, Np = \lambda$可以逼近Poisson分布。

因为在T走过连续时间轴时变成一个随机过程Poisson Process，也称Poisson流。对任意t和很小的Δt就有

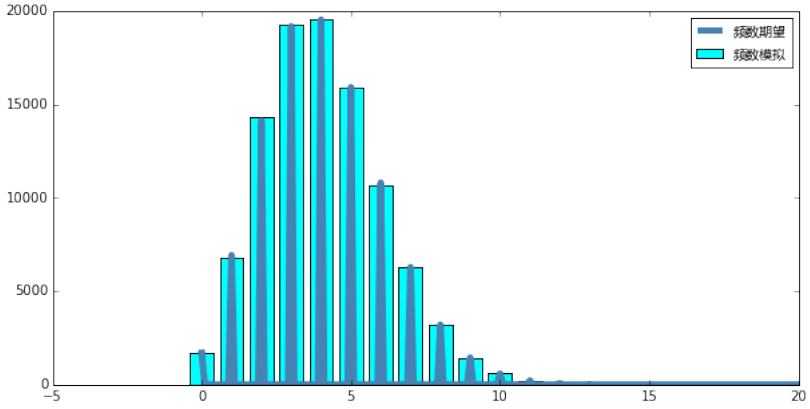
$$P(X = PP(t + \Delta t) - PP(t) = 1) = \lambda \Delta t$$

$$P(X = PP(t + \Delta t) - PP(t) = 0) = 1 - \lambda \Delta t$$

这个二值分布是不是很像Bernoulli分布？你get了么？

In [46]:
```
M = 1e5
p = nprnd.rand()*2+1

poisson_simresult = np.zeros((M,),dtype=int64)
T = 10
for i in xrange(np.int(M)):
    t = 0  # 计时
    c = -1 # 从－1开始计数穿过T时刻之前的事件
    while ( t < T ):
        c += 1
        t += -np.log(nprnd.rand())*p # lambda = 1/p
    poisson_simresult[i] = c

bincount_poisson = np.bincount(poisson_simresult)

fig,ax = plt.subplots(figsize=(10,5))
xs = np.linspace(0,20,201)
ax.bar(np.arange(len(bincount_poisson)),bincount_poisson,color='cyan',align='center',label=u'频数模拟')
ax.plot(xs,spstat.poisson(T/p).pmf(xs)*M,color='steelblue',lw=5,label=u'频数期望')
ax.legend(loc = 1,prop = fontx)
```

Out[46]: <matplotlib.legend.Legend at 0x10dd22410>



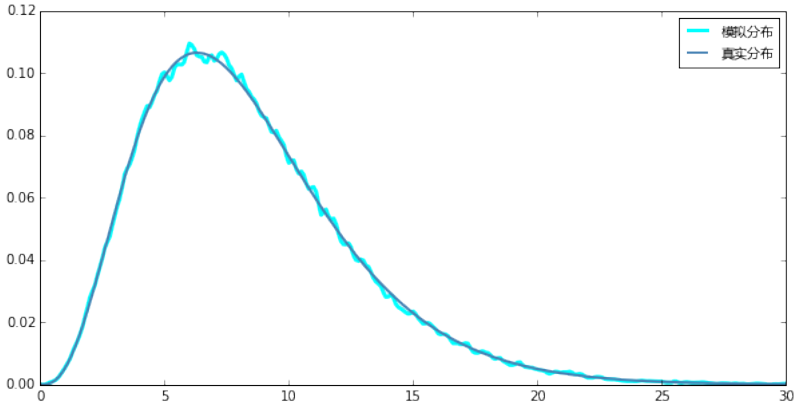
4.2 计时问题：Gamma分布（或称Erlang分布）

新问题：给定参数为λ的Poisson流$Poisson(\lambda)$，不再关心T时刻有多少个事件发生，而关心第N个事件发生的时间（有完没完）

$Gamma(k, loc = 0, \theta = \lambda, scale = p = 1/\lambda) : f(x) = \frac{1}{\Gamma(k)p^k} x^{k-1} e^{-\frac{x}{p}}$

In [47]:
```
M = 1e5
p = nprnd.rand()*2+1 # lambda = 1/p
gamma_simresult = np.zeros((M,),dtype=float64)
C = nprnd.randint(3)+2


for i in xrange(np.int(M)):
    gamma_simresult[i] = np.sum(-np.log(nprnd.rand(C))*p)  # 计时

gamma_parameter = C,p
xs = np.linspace(0,30,301)
density = spstat.gaussian_kde(gamma_simresult)
density.covariance_factor = lambda : 0.02
density._compute_covariance()
fig,ax = plt.subplots(figsize=(10,5))


ax.plot(xs,density(xs),lw=3,color='cyan',label=u'模拟分布')
ax.plot(xs,spstat.gamma(C,loc=0.,scale=p).pdf(xs),color='steelblue',lw='2',label=u'真实分布') # 来自指数分布
ax.legend(loc=1,prop=fontx)
```

Out[47]: <matplotlib.legend.Legend at 0x10de38b50>



4.3 条件概率：Beta分布

新问题：给定时刻T时刚好发生了第N+1个事件，那么前N个事件中的某一个事件发生的时间点是什么？（有完没完）

给定任意时刻Poisson流事件数＝N＋1的T，前N事件发生的时间比上T的分布就是Beta分布！这个分布是与T无关永远成立的，这是一个令人惊诧的结果。

而N个$U(0,1)$的顺序统计量仍然是Beta分布！Shocked ... Again .

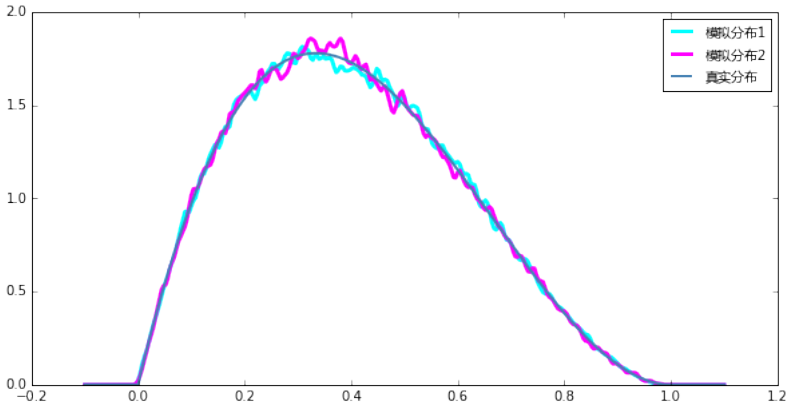
比较三种方式生成的分布吧：（可以自行更改k和N看看效果）

$Beta(a,b)$的PDF:

$$f(x)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}=\frac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}$$

In [48]:
```
k = 2
N = 5
rk = N - k
p = nprnd.rand()*3+2
beta_sim1result = np.zeros((M,),dtype=float64)
beta_sim2result = np.zeros((M,),dtype=float64)


for i in xrange(np.int(M)):
    beta_sim1result[i] = np.sort(nprnd.rand(N-1))[k-1]
    firstktime = np.sum(-np.log(nprnd.rand(k)))
    lastrktime = np.sum(-np.log(nprnd.rand(N-k)))
    beta_sim2result[i] = firstktime/(firstktime+lastrktime)

xs = np.linspace(-0.1,1.1,301)
density1 = spstat.gaussian_kde(beta_sim1result)
density1.covariance_factor = lambda : 0.02
density1._compute_covariance()
density2 = spstat.gaussian_kde(beta_sim2result)
density2.covariance_factor = lambda : 0.02
density2._compute_covariance()


fig,ax = plt.subplots(figsize=(10,5))

ax.plot(xs,density1(xs),lw=3,color='cyan',label=u'模拟分布1')
ax.plot(xs,density2(xs),lw=3,color='magenta',label=u'模拟分布2')
ax.plot(xs,spstat.beta(k,rk).pdf(xs),color='steelblue',lw='2',label=u'真实分布') # 来自指数分布
ax.legend(loc=1,prop=fontx)
```

Out[48]: <matplotlib.legend.Legend at 0x10e44cb50>



4.5 指数分布族的共轭分布

指数分布族：PDF或者PMF分布在参数θ条件下满足

$$f_X(x|\theta) \sim \exp\left(\eta(\theta) \cdot T(x) - A(\theta) + B(x)\right)$$

$\eta(\theta)$与$T(x)$可以是向量

因为分布的积分应该等于1，所以确定等式右边的形式之后，归一化常量都会被唯一确定了。

比如正态分布

$$f(x) \sim \exp\left(-2 \cdot log(\sigma) - x^2 \frac{1}{2\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} + x\frac{\mu}{\sigma^2}\right)$$

比如二项分布

$$P(X = k) \sim \exp\left(-log(\binom{N}{k}) + klog(p) + (N-k)log(1-p)\right)$$

比如Gamma分布

$$f(x) \sim \exp\left(-log(\Gamma(k)) - klog(p) + (k-1)log(x) - x\frac{1}{p}\right)$$

比如Beta分布

$$f(p) \sim \exp\left(-log(\mathcal{B}(a,b)) + (a-1)log(p) + (b-1)log(1-p)\right)$$

共轭分布是指数分布族一个非常重要的概念，能够直接指导贝叶斯推断

仔细看Beta分布和二项分布，二项分布中的p是参数，Beta分布的p则是随机变量值，他们的形式**完全一致**很容易多重积分求解后验概率。

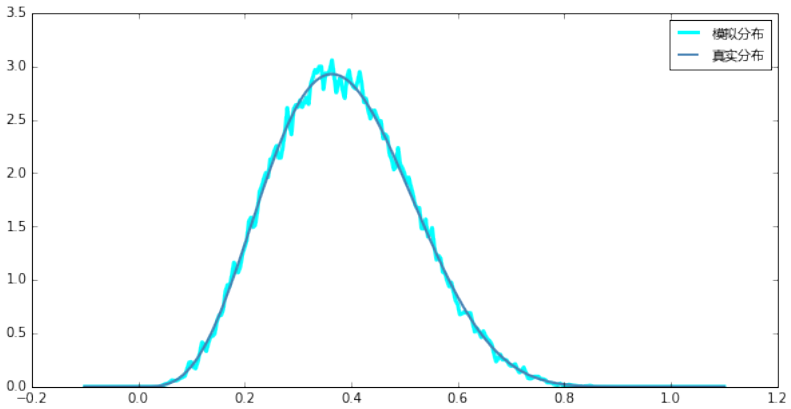
这是，一个先验分布Beta分布产生出参数后，再用参数生成对一个二项分布的观测（N次试验有k次事件），可以估计出参数的后验分布仍然是Beta分布。

- Binomial的共轭：Beta
- Multinomial的共轭：Dirichlet
- Normal的共轭：Normal

现在就用代码检验一下吧！随意改变 N, k , prior_a , prior_b 看看你的结果！

In [49]:
```
N = 10.
k = 3.
M = 5e5
prior_a = 2.
prior_b = 1.
post_a = prior_a + k
post_b = prior_b + N - k

#生成先验分布
ps = spstat.beta(prior_a,prior_b).rvs(np.int(M))
#生成随机二项分布
binom_simresult = spstat.binom(N,ps).rvs()
#限制二项分布的结果必须为k
restricted_binom_to_k = (binom_simresult == k)
#取出对应的p来检查分布
ps_restricted = ps[restricted_binom_to_k]

xs = np.linspace(-0.1,1.1,301)
density = spstat.gaussian_kde(ps_restricted)
density.covariance_factor = lambda : 0.02
density._compute_covariance()


fig,ax = plt.subplots(figsize=(10,5))

ax.plot(xs,density(xs),lw=3,color='cyan',label=u'模拟分布')
ax.plot(xs,spstat.beta(post_a,post_b).pdf(xs),color='steelblue',lw='2',label=u'真实分布') # 来自指数分布
ax.legend(loc=1,prop=fontx)
```

Out[49]: <matplotlib.legend.Legend at 0x10e768550>



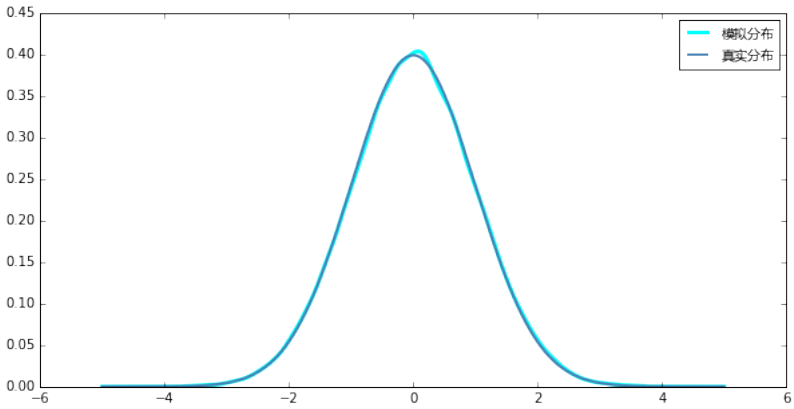
5. 回归大自然

5.1 正态分布

每用一次正态就要生成很多个分布然后套用中心极限定理吗？并不。 Box-Muller公式表示，2个均匀分布就能生成一对互相独立的正态分布了！

In [50]:
```
M = 1e5

x = np.zeros((M,),dtype=float64)
for i in xrange(np.int(M)/2):
    u,v = nprnd.rand(2)
    x[2*i] = np.sqrt(-2.0*np.log(u))*np.sin(2.0*np.pi*v)
    x[2*i+1] = np.sqrt(-2.0*np.log(u))*np.cos(2.0*np.pi*v)

xs = np.linspace(-5.0,5.0,3001)
density = spstat.gaussian_kde(x)
density.covariance_factor = lambda : 0.1
density._compute_covariance()


fig,ax = plt.subplots(figsize=(10,5))

ax.plot(xs,density(xs),lw=3,color='cyan',label=u'模拟分布')
ax.plot(xs,spstat.norm().pdf(xs),color='steelblue',lw='2',label=u'真实分布') # 来自指数分布
ax.legend(loc=1,prop=fontx)
```

Out[50]: <matplotlib.legend.Legend at 0x10ea5ae90>



在期权定价等公式中对于标准正态分布的CDF可以用如下的函数来逼近，常见于金融工程代码。

$$\Phi(x) = 1 - \phi(x)\left(b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5\right) + \varepsilon(x), \qquad t = \frac{1}{1+b_0 x}$$

- b0 = 0.2316419
- b1 = 0.319381530
- b2 = −0.356563782
- b3 = 1.781477937
- b4 = −1.821255978
- b5 = 1.330274429

接下来的以下几个分布可以方便的从正态分布得到。

5.2 卡方分布

卡方分布是正态分布（随机扰动）的平方和，所以它被用来估计在假定的拟合残差的分布、方差、自由度下，残差平方和是否显著过大。

- 半整数阶的Gamma分布

PDF: $f(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$

- 可以通过df个独立正态分布的平方和生成：

$$\chi^2(df) \sim \Sigma_1^{df}(N(0,1))^2$$

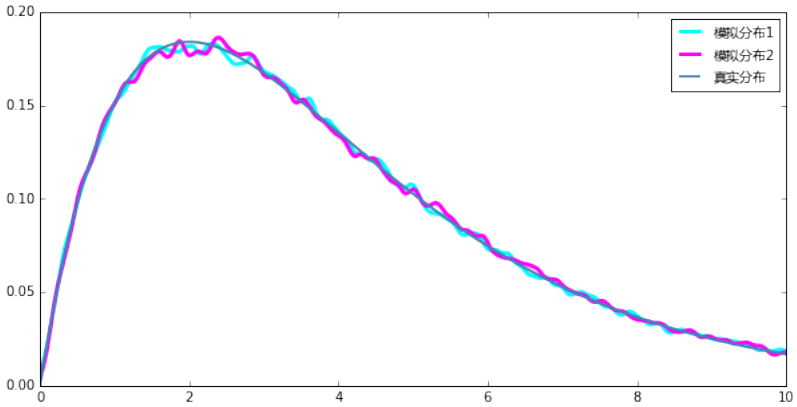
df=2的卡方分布同分布于k = 1,scale=2的Gamma分布，也就是一个参数λ为$\frac{1}{2}$的指数分布

回忆刚才描述的Box-Muller公式，以上两点就是用2个独立均匀分布生成两个独立的正态分布的数学基础。

以下代码比较三种生成$df = 4$的卡方分布：

In [51]:
```
M = 1e5
df = 4
chisq_simresult1 = np.zeros((M,),dtype=float64)
chisq_simresult2 = np.zeros((M,),dtype=float64)
for i in xrange(np.int(M)):
    chisq_simresult1[i] = np.sum(nprnd.randn(df)**2)
    chisq_simresult2[i] = np.sum(-np.log(nprnd.rand(df/2)))*2

xs = np.linspace(0,10,301)
density1 = spstat.gaussian_kde(chisq_simresult1)
density1.covariance_factor = lambda : 0.02
density1._compute_covariance()
density2 = spstat.gaussian_kde(chisq_simresult2)
density2.covariance_factor = lambda : 0.02
density2._compute_covariance()


fig,ax = plt.subplots(figsize=(10,5))

ax.plot(xs,density1(xs),lw=3,color='cyan',label=u'模拟分布1')
ax.plot(xs,density2(xs),lw=3,color='magenta',label=u'模拟分布2')
ax.plot(xs,spstat.chi2(df).pdf(xs),color='steelblue',lw='2',label=u'真实分布') # 来自卡方分布
ax.legend(loc=1,prop=fontx)
```

Out[51]: <matplotlib.legend.Legend at 0x10f350c10>



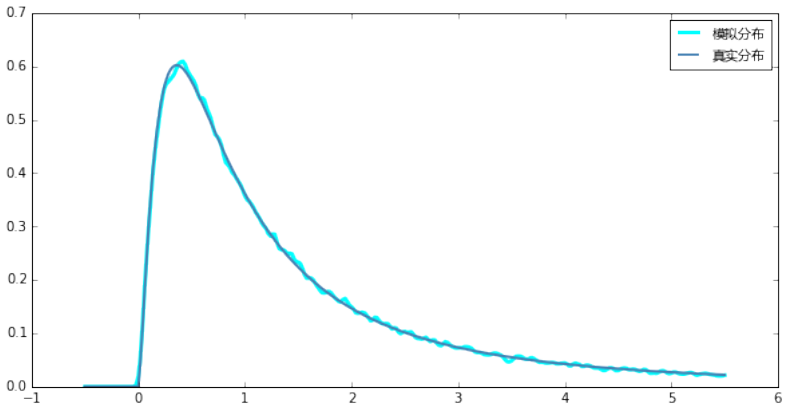
5.3 F分布

$F(m,n)$分布是两组正态分布均方之比，所以常常用来比较两组数据估计出的方差是否有显著差异（也称方差齐性）：

$F(m,n) \sim \frac{\chi^2(m)/m}{\chi^2(n)/n}$

In [52]:
```
M = 1e5
m = 5
n = 3

f_simresult = np.zeros((M,),dtype=float64)
for i in xrange(np.int(M)):
    f_simresult[i] = np.mean(nprnd.randn(m)**2)/np.mean(nprnd.randn(n)**2)

xs = np.linspace(-.5,5.5,301)
density = spstat.gaussian_kde(f_simresult)
density.covariance_factor = lambda : 0.001
density._compute_covariance()


fig,ax = plt.subplots(figsize=(10,5))

ax.plot(xs,density(xs),lw=3,color='cyan',label=u'模拟分布')
ax.plot(xs,spstat.f(m,n).pdf(xs),color='steelblue',lw='2',label=u'真实分布') # 来自F分布
ax.legend(loc=1,prop=fontx)
```

Out[52]: <matplotlib.legend.Legend at 0x10f60e610>



5.4 t分布

t分布是正态分布比上一个均方分布的平方根，常常用来判断在方差未知的情况下，单自由度扰动是否显著，也就是回归中“单变量的显著性”检验的指标。

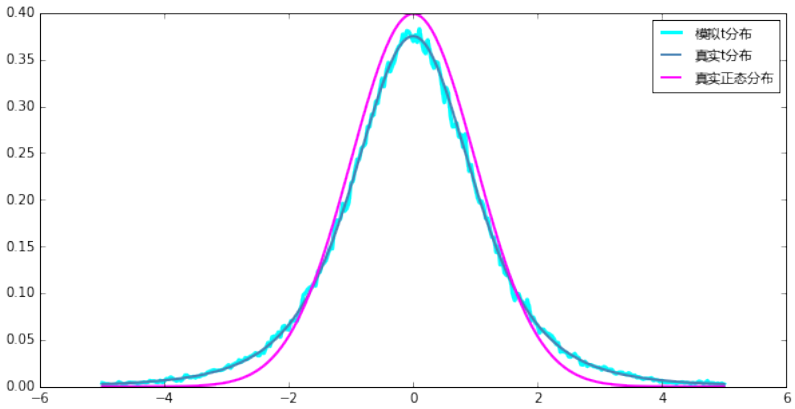
$$t(df) \sim \frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2(df)/df}}$$

- t分布的平方就是F(1,df)的F分布，你看出来了么?
- t的尾部比正态分布厚，但由大数定律，当$df \to \inf$时t分布会逼近标准正态分布

In [53]:
```
M = 1e5
df = 4

t_simresult = np.zeros((M,),dtype=float64)

print nprnd.randn()

for i in xrange(np.int(M)):
    t_simresult[i] = nprnd.randn()/np.sqrt(np.mean(nprnd.randn(df)**2))

xs = np.linspace(-5.0,5.0,301)
density = spstat.gaussian_kde(t_simresult)
density.covariance_factor = lambda : 0.01
density._compute_covariance()


fig,ax = plt.subplots(figsize=(10,5))

ax.plot(xs,density(xs),lw=3,color='cyan',label=u'模拟t分布')
ax.plot(xs,spstat.t(df).pdf(xs),color='steelblue',lw='2',label=u'真实t分布')
ax.plot(xs,spstat.norm().pdf(xs),color='magenta',lw='2',label=u'真实正态分布')
ax.legend(loc=1,prop=fontx)
```

```
0.559634547839
```

Out[53]:
```
<matplotlib.legend.Legend at 0x10f7af590>
```



In [ ]: