IPB University
Bogor Indonesia

AKT 1442

K7 SIMULASI MODEL AKTUARIA

5. Penerapan pada Pengintegralan

5.1 Pengantar
5.2 Pengintegralan Crude Monte Carlo ✓
5.3 Teknik Reduksi Ragam ✓

5.1 Pengantar

Simulasi

masalah $\longrightarrow$ model matematika $\xrightarrow{\text{prob}}$ penyelesaian

analitik numerik

- Simulasi merupakan suatu teknik yang fleksibel dan sering kali dapat menyelesaikan suatu masalah dengan cepat.

  sulit

- Biasanya waktu yang dibutuhkan untuk menulis suatu program untuk menyelesaikan suatu masalah dengan simulasi relatif lebih singkat dibandingkan dengan waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan masalah tersebut secara matematis.
- Namun, simulasi biasanya menjadi pilihan yang terakhir ketika metode-metode lain tidak dapat dilakukan atau sangat sulit untuk dilakukan.

5.2 Pengintegralan *Crude* Monte Carlo

Nilai Harapan

Sebelum mendiskusikan pengintegralan *Crude Monte Carlo* (CMC), ada baiknya jika kita mengingat kembali definisi nilai harapan dari suatu fungsi dari sebuah peubah acak dan hukum lemah bilangan besar (HLBB).

Nilai harapan dari suatu fungsi, g, dari sebuah peubah acak kontinu X dengan FKP $f(x)$ adalah

$x \in D$

pa

$g(X)$

$$E(g(X)) = \int_{\forall x} g(x) f(x)\, dx.$$

$x \in D$

Hukum Lemah Bilangan Besar (HLBB)

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *adalah suatu barisan peubah acak yang bebas stokastik identik dengan* $E(X_i) = \mu$ *dan* $Var(X_i) = \sigma^2 < \infty$, *untuk semua* $i = 1, 2, \ldots, n$, *serta*

rata^2

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n},$$

maka

$$\lim_{n \to \infty} \Pr\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| > \epsilon\right) = 0$$

atau dengan kata lain, $\overline{X}_n$ *konvergen ke* μ.

Hal ini berarti bahwa untuk n yang besar, rata-rata contoh/sampel konvergen ke rata-rata populasi.

IPB University
Bogor Indonesia

Pengintegralan *Crude Monte Carlo* (CMC) (1)

- Dengan menyatukan kedua hal tersebut, dapat diperoleh suatu hasil yang menarik.
- Misalkan $X \sim S(0,1)$, maka $f(x) = 1$, untuk $0 \leq x \leq 1$, sehingga $E(g(X)) = \int_0^1 g(x) f(x)\, dx = \int_0^1 g(x)\, dx$.
- Karena untuk n yang besar, sebuah nilai harapan dapat dihampiri dengan sebuah rata-rata, maka kita dapat menulis:

$$\int_0^1 g(x)\, dx \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} g(x_i)}{n}$$

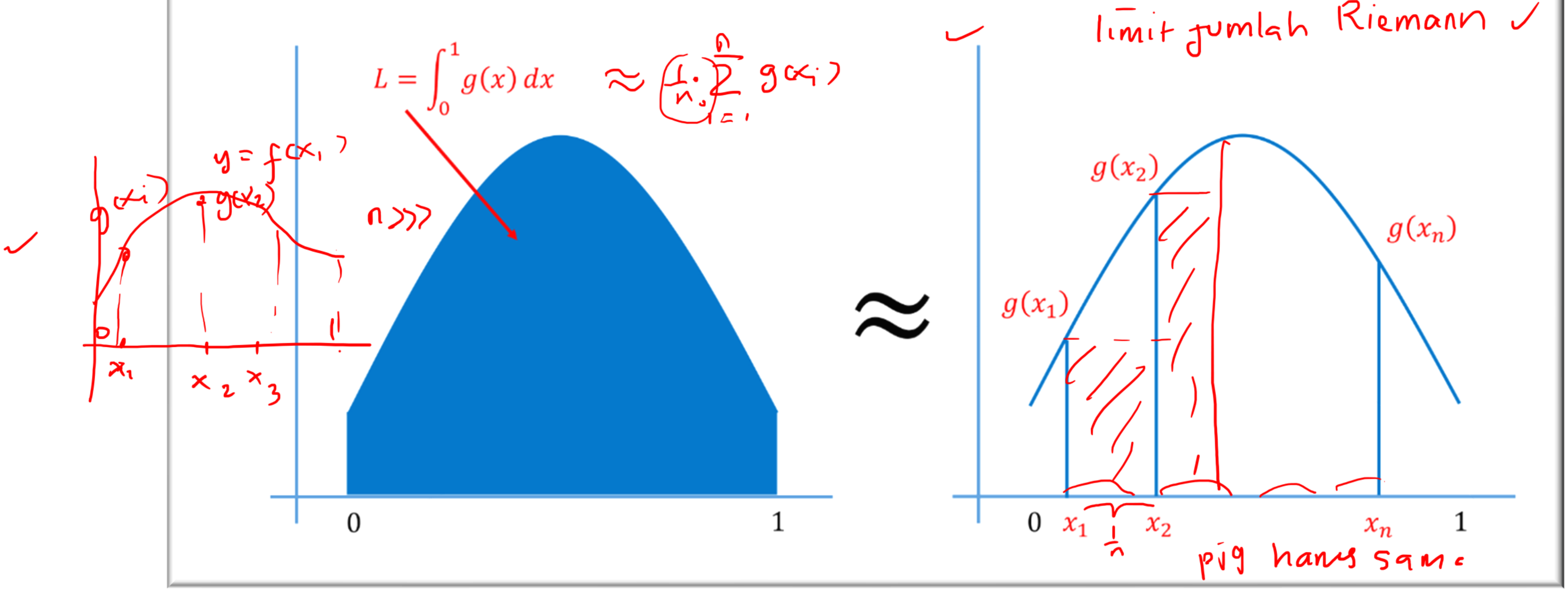
di Kalkulus I

dengan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah n buah realisasi dari peubah acak X.

- Hal ini berarti bahwa luas daerah di bawah suatu fungsi dapat dihampiri dengan rata-rata tinggi fungsi tersebut.

Pengintegralan *Crude Monte Carlo* (CMC) (2)

- Hal tersebut dapat diilustrasikan dengan gambar berikut:



Pengintegralan *Crude Monte Carlo* (CMC) (3)

Hal ini menghasilkan sebuah prosedur yang sederhana untuk menduga nilai dari suatu integral tentu.

Prosedur Pengintegralan Crude Monte Carlo (CMC):

Misalkan $\theta = \int_0^1 g(x)\, dx$.

1. Bangkitkan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dari sebaran $S(0,1)$.
2. Hasilkan $\widehat{\theta} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} g(x_i)}{n}$.

Contoh

Gunakan pengintegralan CMC untuk menduga nilai dari integral tentu $\theta = \int_0^1 x^2\,dx$.

→ diketahui   Kalkulus

Dari Kalkulus, kita tahu bahwa $\theta = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3} \approx 0.3333333$.

Jika kita membangkitkan 1000 buah realisasi $(x_1, x_2, \ldots, x_{1000})$ dari suatu peubah acak yang memiliki sebaran $S(0,1)$, maka nilai dugaan bagi θ dapat diperoleh dengan rumus berikut:

$g(x) = x^2$

$g(x_i) = x_i^2$ ✓

$$\widehat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{1000} x_i^2}{1000}.$$

Kode R:

```
set.seed(1)
x <- runif(1000)
g <- x^2
> mean(g)
[1] 0.3327757
```

0,33333...

Kita mungkin bertanya-tanya kenapa kita menggunakan 1000 nilai contoh?

Pada saat ini, bilangan ini secara sederhana akan menjadi *default* yang digunakan untuk kebanyakan contoh soal. Nanti dalam bab ini kita akan mendiskusikan berapa banyak nilai contoh yang dibutuhkan untuk mendapatkan sebuah hasil dengan tingkat keakuratan yang diinginkan.

Pengintegralan *Crude Monte Carlo* (CMC) (4)

θ

$\hat{\theta}$ dugaan

$\tilde{\theta}$ penduga

- Perhatikan bahwa parameternya adalah $X \sim$ seragam $(0,1)$

$$\theta = E(g(X)) = \int_0^1 g(x)\, dx,$$

sedangkan dugaannya adalah

$$\hat{\theta}_{CMC} = \frac{\sum_{i=1}^{n} g(x_i)}{n}. \quad \checkmark$$

- Dengan demikian, penduga yang bersesuaiannya adalah

$$\tilde{\theta}_{CMC} = \frac{\sum_{i=1}^{n} g(X_i)}{n}.$$

Pengintegralan *Crude Monte Carlo* (CMC) (5)

- Menariknya, $\widetilde{\theta}$ adalah sebuah penduga yang takbias bagi θ.
- Bukti:

$$E\left(\widetilde{\theta}_{CMC}\right) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} g\left(X_i\right)}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} E\left(g\left(X_i\right)\right)}{n} = \frac{\overbrace{\sum_{i=1}^{n} \theta}^{n\theta}}{\cancel{n}} = \theta.$$

$E[\widetilde{\theta}] = \theta$

$Var[\widetilde{\theta}] = \frac{\sigma_g^2}{n}$

- Selanjutnya, ragam dari $\widetilde{\theta}$ dapat ditentukan dengan mudah seperti berikut:

$n\sigma_g^2$ σ_g^2

$$Var\left(\widetilde{\theta}_{CMC}\right) = Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} g\left(X_i\right)}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} Var\left(g\left(X_i\right)\right)}{n^2}$$

karena $g\left(X_i\right) \perp g\left(X_j\right), \forall i \neq j, i, j = 1, 2, \ldots, n.$

$X_i \perp X_j$

- Dengan memisalkan $Var\left(g\left(X_i\right)\right) = \sigma_g^2$, untuk semua $i = 1, 2, \ldots, n$, diperoleh

$$Var\left(\widetilde{\theta}_{CMC}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_g^2}{n^2} = \frac{\sigma_g^2}{n}.$$

Pengintegralan *Crude Monte Carlo* (CMC) (6)

- Kemudian, karena $\widetilde{\theta}_{CMC}$ adalah sebuah rata-rata, maka berdasarkan teorema limit pusat, untuk n yang besar,

$$\widetilde{\theta}_{CMC} \sim N\left(\theta, \frac{\sigma_g^2}{n}\right).$$

- Dengan demikian, sebuah selang kepercayaan bagi θ adalah

tingkat kepercayaan $(1-\alpha)\%$

$$\underset{\text{dugaan}}{\widehat{\theta}_{CMC}} \pm \underbrace{c\sqrt{\frac{\widehat{\sigma}_g^2}{n}}}_{\text{Error}}$$

dengan c ditentukan dari panjang selang kepercayaannya.

Contoh

Gunakan pengintegralan CMC untuk menduga nilai integral tentu $\theta = \int_0^1 \ln(x+1)\,dx$. *Bangun sebuah selang kepercayaan* 95% *bagi* θ.

Dari Kalkulus kita tahu bahwa

Integral Parsial (*) $u = \ln(x+1)$ $du = \frac{1}{x+1}dx$

$dv = dx \rightarrow v = x$

$\theta = u.v\Big|_0^1 - \int_0^1 v\,du$

$$\begin{aligned}
\theta &= \int_0^1 \ln(x+1)\,dx \\
&= \left[x\ln(x+1) - (x+1) + \ln(x+1)\right]_0^1 \\
&= \left[\ln(2) - 2 + \ln(2)\right] - \left[0 - 1 + 0\right] \\
&= 2\ln(2) - 1 \approx 0.3862944.
\end{aligned}$$

$\theta = x\ln(x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx$

(*) $\int \frac{x}{x+1}dx = \int \frac{x+1-1}{x+1}dx$

$= \int 1\,dx - \int \frac{dx}{x+1}$

$= x - \ln|x+1|$ $x \in (0,1)$

$= x - \ln(x+1)$

$\theta = x\ln(x+1)\Big|_0^1 - (x - \ln(x+1))\Big|_0^1 = 1\ln 2 - \{(1 - \ln 2) - 0\}$

$= 2\ln 2 - 1$

Jika kita membangkitkan 1000 buah realisasi $(x_1, x_2, \ldots, x_{1000})$ dari suatu peubah acak yang memiliki sebaran $S(0,1)$, maka nilai dugaan bagi θ dapat diperoleh dengan rumus berikut:

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{1000} \ln(x_i + 1)}{1000}.$$

Kode R:

```
set.seed(1)
x <- runif(1000)
g <- log(x+1) # Di R, fungsi log digunakan untuk ln
> mean(g)
[1] 0.3862329
```

$\hat{\theta}$

$\hat{\theta} \pm c\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_g^2}{n}}$

Untuk membangun sebuah selang kepercayaan bagi θ, kita perlu menghitung nilai $\widehat{\sigma}_g^2$.

Kode R:

```
> var(g)
[1] 0.03874664
```

$\hat{\sigma}_g^2$

Karena panjang selang kepercayaannya adalah 95%, maka $c = 1.96$.

Kode R untuk menghitung batas kiri dan batas kanan selang kepercayaan:

$\hat{\theta} \pm 1{,}96 \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}$ $n = 1000$

```
> mean(g) - 1.96 * sqrt(var(g) / 1000)
[1] 0.3740325
> mean(g) + 1.96 * sqrt(var(g) / 1000)
[1] 0.3984333
```

Jadi, sebuah selang kepercayaan 95% bagi θ adalah $(0.3740325, 0.3984333)$.

ada yg sudah dihitung

Perhatikan bahwa $\theta \approx 0.3862944$ terletak di dalam selang kepercayaan tersebut.

Pengintegralan CMC dengan Batas Bukan (0,1) (1)

$E[g(X)] = \theta = \int_0^1 g(x)\,dx$ $X \sim$ seragam $(0,1)$

$x = a \to y = 0$
$x = b \to y = 1$
fs linear
$y = mx + n$, $m, n = ?$
$0 = ma + n$
$1 = mb + n$
$1 = m(b-a)$
$m = \frac{1}{b-a}$
$n = -ma = \frac{-a}{b-a}$

Prosedur Pengintegralan Crude Monte Carlo (CMC):

Misalkan $\theta = \int_a^b k(x)\,dx$, dengan $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Lakukan sebuah substitusi dengan memisalkan $y = \dfrac{x-a}{b-a}$ sehingga diperoleh $\theta = \int_0^1 g(y)\,dy$.
2. Bangkitkan $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dari sebaran $S(0,1)$.
3. Hasilkan $\widehat{\theta} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} g(y_i)}{n}$.

transf linearnya
$y = \frac{x-a}{b-a}$

Contoh

Gunakan pengintegralan CMC untuk menduga nilai dari integral tentu $\theta = \int_{-2}^{5} (2x-5)^2 \, dx$.

Pertama, kita misalkan $y = \frac{x-a}{b-a}$

$$y = \frac{x-(-2)}{5-(-2)} = \frac{x+2}{7}$$

sehingga diperoleh $x = 7y - 2$ dan $dx = 7dy$.

Kemudian, kita substitusikan ke pengintegralan sehingga diperoleh

$(2 \cdot (7y-2) - 5)^2 \cdot 7\,dy$

$$\theta = \int_0^1 \underbrace{7(14y-9)^2}_{g(y)} dy.$$

$\hat{\theta}$

Jika kita membangkitkan 1000 buah realisasi $(y_1, y_2, \ldots, y_{1000})$ dari suatu peubah acak yang memiliki sebaran $S(0,1)$, maka nilai dugaan bagi θ dapat diperoleh dengan rumus berikut:

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{1000} 7\,(14y_i - 9)^2}{1000}.$$

Kode R:

```
set.seed(1)
y <- runif(1000)
g <- 7 * (14 * y - 9) ^ 2
> mean(g)
[1] 142.1121
```

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \rightarrow \int_0^1 \bigcirc\,dy$$

transformasi $y = e^{-x}$

$x = 0 \rightarrow y = e^{-0} = 1$

$x = +\infty \rightarrow y = e^{-\infty} = 0$

$$\int_1^0 \bigcirc\,dy = -\int_0^1 \bigcirc\,dy$$

Penghitungan Ukuran Sampel pada Pengintegralan CMC (1)

- Nilai-nilai contoh/sampel dari fungsi $g(x)$ membentuk suatu contoh/sampel tunggal.

$n = 1000$

- Oleh karena itu, kita dapat menggunakan penghitungan ukuran contoh/sampel pada Bab 2.

Error — ✓

Rumus untuk menghitung ukuran contoh/sampel untuk mencari nilai dugaan bagi θ:

$$E = \text{Error} = c\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

$$n = \frac{c^2\sigma^2}{E^2}.$$

Penghitungan Ukuran Sampel pada Pengintegralan CMC (2)

Prosedur Penghitungan Ukuran Contoh/Sampel:

1. Lakukan sebuah pengintegralan CMC yang melibatkan contoh/sampel berukuran kecil $m < n$.
2. Hitung nilai dugaan bagi σ^2 dari hasil pengintegralan CMC tersebut.
3. Gunakan rumus $n = \dfrac{c^2\widehat{\sigma}^2}{E^2}$ untuk menghitung n. untuk Error E yg diinginkan.
4. Lakukan sebuah pengintegralan CMC yang melibatkan contoh/sampel berukuran besar n.

Contoh

Gunakan pengintegralan CMC untuk menduga nilai dari integral tentu $\theta = \int_0^1 \sin(x)\,dx$ *supaya nilainya cukup akurat, yakni error-nya tidak lebih dari* 0.0001 *satuan, pada tingkat kepercayaan* 95%.

E $\alpha = 5\%$

Kita mulai dengan melakukan sebuah pengintegralan CMC dengan melibatkan contoh/sampel berukuran kecil $m = 1000$ (yang dipilih sembarang) untuk mendapatkan nilai dugaan bagi σ^2.

$$n = \frac{c\sigma^2}{E^2}$$

Kode R:

```
set.seed(1)
x <- runif(1000)
g <- sin(x)
> var(g)
[1] 0.06086992
```

Selanjutnya, kita hitung nilai n seperti berikut:

$$n = \frac{c^2\widehat{\sigma}^2}{E^2} = \frac{1.96^2\,(0.06086992)}{0.0001^2} = 23,383,788.$$

(*)

Kemudian, kita lakukan sebuah pengintegralan CMC dengan melibatkan contoh/sampel berukuran besar $n = 23,383,788$.

Kode R:

(*)

```
set.seed(1)
x <- runif(23383788)
g <- sin(x)
> mean(g)
[1] 0.4597501
```

$= \hat{\theta}$

nilai sebenar

Perhatikan bahwa jawaban yang sebenarnya kira-kira 0.4596977. Dugaan kita akurat hingga 3 angka di belakang koma sebagaimana yang diminta pada soal.

- 23 juta sekian adalah sebuah bilangan yang luar biasa besar, dan mungkin untuk beberapa komputer, hal ini melampaui batas dari yang komputer mampu lakukan.
- Di bagian selanjutnya, kita akan mendiskusikan metode-metode yang dapat digunakan untuk meminimumkan bilangan ini.

5.3 Teknik Reduksi Ragam

Teknik Reduksi Ragam

- Pengintegralan CMC merupakan metode yang sederhana, tetapi terkadang ukuran contoh/sampel yang dibutuhkan terlalu besar. ✓

  ◦) $\sigma^2 \nearrow$ $n \nearrow$ ◦) $E \searrow$ $n \nearrow$

- Berdasarkan rumus $\boxed{n = \frac{c^2\sigma^2}{E^2}}$, kita dapat memperkecil ukuran contoh/sampel (n) dengan cara memperkecil ragam (σ^2).

  $\sigma^2 \searrow$ $n \searrow$

- Metode-metode yang memperkecil ragam (σ^2) ini disebut dengan teknik-teknik reduksi ragam.
- Untuk dapat menghasilkan nilai dugaan dengan tingkat keakuratan yang sama dengan pengintegralan CMC, teknik-teknik reduksi ragam ini membutuhkan ukuran contoh/sampel yang lebih kecil.

Peubah Acak Antitesis (1)

- Ingat kembali: Jika X dan Y adalah dua peubah acak, maka

$$Var(X+Y) = \underbrace{Var(X)}_{\geq 0} + \underbrace{Var(Y)}_{\geq 0} + \underbrace{2Cov(X,Y)}_{\in \mathbb{R}}.$$

< 0

- $Var(X+Y)$ dapat diperkecil dengan memilih X dan Y yang berkorelasi negatif.
- Pilih $X \sim S(0,1)$ dan $\underbrace{Y = 1 - X}_{\sim S(0,1)}$, maka koragamnya pasti negatif seperti berikut:

$$Cov(X,Y) = Cov(X,1-X) = -Cov(X,X) = -\underbrace{Var(X)}_{X \sim S(0,1)} = -\frac{1}{12}.$$

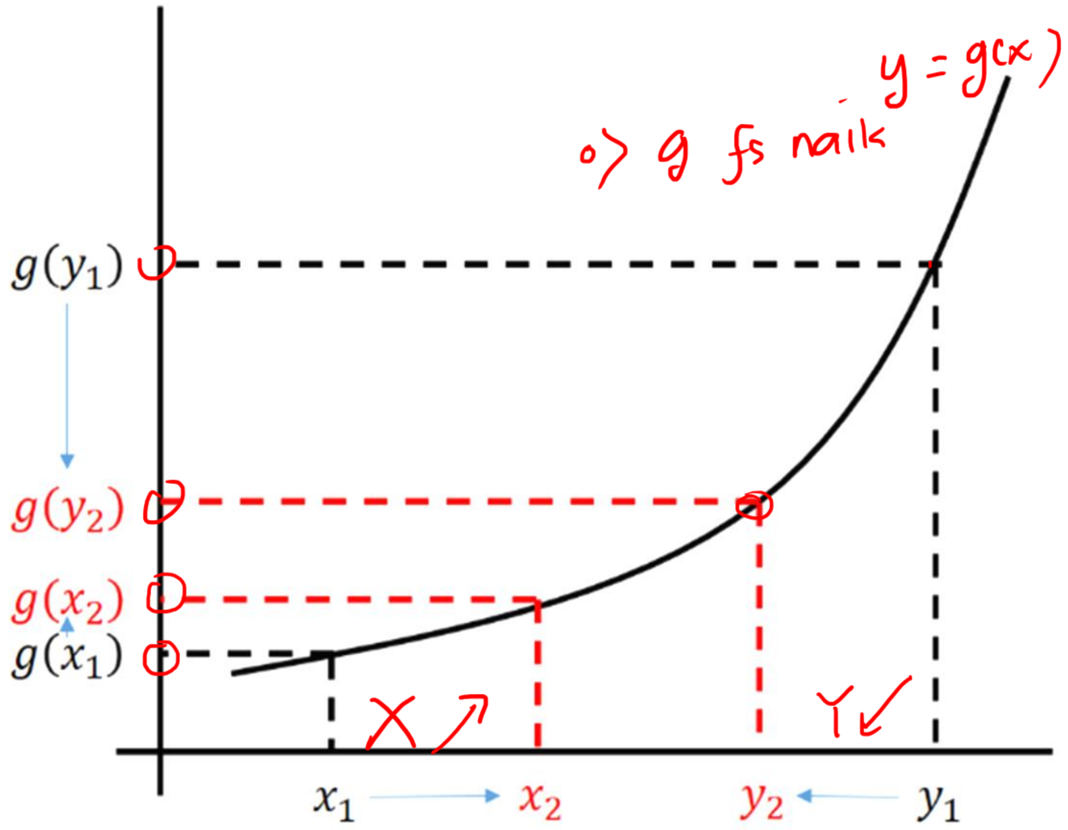
- Lebih lanjut, Y juga menyebar $S(0,1)$.

Peubah Acak Antitesis (2)

Misalkan g adalah suatu fungsi naik atau turun dan $Cov(X,Y) < 0$, *maka* $Cov(g(X), g(Y)) < 0$.

$g(Y) \searrow$

$g(X) \nearrow$



∘) X, Y

$Cov(X,Y) < 0$.

$X \nearrow \rightarrow Y \searrow$

$X \searrow \rightarrow Y \nearrow$

$g(X)$

Peubah Acak Antitesis (3)

Prosedur Peubah Acak Antitesis

Diberikan $\theta = \int_0^1 g(x)\, dx$ dengan g merupakan fungsi naik atau turun.

1. Bangkitkan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dari sebaran $S(0,1)$.
2. Tetapkan $y_i = 1 - x_i$, untuk semua $i = 1, 2, \ldots, n$.

   $g(1-x_i)$

3. Hasilkan $\widehat{\theta}_{ANTI} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} [g(x_i) + g(y_i)]}{2n}$.

$2n$

Peubah Acak Antitesis (4)

- Parameternya adalah

$$\theta = E\left(g\left(X\right)\right) = \int_0^1 g\left(x\right)\, dx.$$

- Dugaannya adalah

bilangan $$\widehat{\theta}_{ANTI} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[g\left(x_i\right) + g\left(y_i\right)\right]}{2n}.$$

- Penduganya adalah

$Y_i = 1 - X_i$

peubah acak $$\widetilde{\theta}_{ANTI} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[g\left(X_i\right) + g\left(Y_i\right)\right]}{2n}.$$

Peubah Acak Antitesis (5)

- Dapat dengan mudah ditunjukkan bahwa penduganya takbias

$$
\begin{aligned}
E\left(\tilde{\theta}_{ANTI}\right) &= E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left[g\left(X_i\right)+g\left(Y_i\right)\right]}{2n}\right) \\
&= \frac{1}{2n}E\left(\sum_{i=1}^{n}\left[g\left(X_i\right)+g\left(Y_i\right)\right]\right) \\
&= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\left[E\left(g\left(X_i\right)\right)+E\left(g\left(Y_i\right)\right)\right] \\
&= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\left(\theta+\theta\right) \\
&= \frac{n\left(2\theta\right)}{2n} \\
&= \theta.
\end{aligned}
$$

$X \sim S(0,1)$ $Y \sim S(0,1)$

$E[\tilde{\theta}_{ANTI}] = \theta$

$\tilde{\theta}_{ANTI}$: penduga tak bias

- Ragam penduganya adalah sebegai berikut:

$$
\begin{aligned}
Var\left(\tilde{\theta}_{ANTI}\right) &= Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left[g\left(X_i\right)+g\left(Y_i\right)\right]}{2n}\right) \\
&= \frac{1}{4n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n}\left[g\left(X_i\right)+g\left(Y_i\right)\right]\right) \\
&= \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^{n} Var\left(g\left(X_i\right)+g\left(Y_i\right)\right)
\end{aligned}
$$

  karena $X_i \perp X_j$ dan $Y_i \perp Y_j$, $\forall i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

-

$$
Var\left(\tilde{\theta}_{ANTI}\right) = \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^{n}\left[Var\left(g\left(X_i\right)\right)+Var\left(g\left(Y_i\right)\right)+2Cov\left(g\left(X_i\right),g\left(Y_i\right)\right)\right].
$$

$X \sim S(0,1)$ $Y \sim S(0,1)$

- Karena X_i dan Y_i memiliki sebaran yang sama, kita misalkan $Var\left(g\left(X_i\right)\right) = Var\left(g\left(Y_i\right)\right) = \sigma_g^2$.

- Misalkan $Cov\left(g\left(X_i\right), g\left(Y_i\right)\right) = c$, maka

$2\sigma_g^2$

$$Var\left(\widetilde{\theta}_{ANTI}\right) = \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma_g^2 + \sigma_g^2 + 2c\right) = \frac{n\left(2\sigma_g^2 + 2c\right)}{4n^2} = \frac{\sigma_g^2 + c}{2n}.$$

- Untuk membandingkannya dengan ragam penduga CMC, ragam ini harus dikalikan dengan 2 karena di sini kita menggunakan 2 kali lebih banyak nilai contoh/sampel.
- Karena $c < 0$ (yang merupakan akibat dari g fungsi naik atau turun), jelas bahwa ragam penduga antitesis $\left(\frac{\sigma_g^2 + c}{n}\right)$ <0 lebih kecil dari ragam penduga CMC $\left(\frac{\sigma_g^2}{n}\right)$.
- Agar ragam penduga antitesis dapat dibandingkan dengan ragam penduga CMC, kita juga bisa membangkitkan realisasi dari peubah acak seragam baku sebanyak setengah kali dari banyaknya realisasi yang dibangkitkan pada pengintegralan CMC. Dengan cara ini, ragam penduga antitesis jangan dikalikan dengan 2.

Membandingkan Ragam (1)

- Ada dua cara untuk membandingkan dua buah bilangan.
- Kita dapat menghitung selisihnya atau rasionya.
- Dalam hal ini, kita bandingkan dua ragam dengan menghitung rasionya.

Membandingkan Ragam (2)

Misalkan $\widetilde{\theta}_A$ dan $\widetilde{\theta}_B$ adalah penduga-penduga takbias bagi sebuah parameter θ. Misalkan teknik A dan B menggunakan ukuran contoh/sampel yang sama, maka efisiensinya didefinisikan sebagai berikut:

$$\text{Efisiensi} = \frac{Var\left(\widetilde{\theta}_A\right)}{Var\left(\widetilde{\theta}_B\right)}. > 1 \Rightarrow Var(\widetilde{\theta}_B) < Var(\widetilde{\theta}_A)$$

Met B lebih efis drpd Met A

Jika bilangan ini lebih besar dari 1 maka $Var\left(\widetilde{\theta}_A\right)$ lebih besar dari $Var\left(\widetilde{\theta}_B\right)$. Artinya, teknik B lebih efisien karena penduga pada teknik B memiliki ragam yang lebih kecil. Karena ragam berbanding lurus dengan ukuran contoh, kita juga bisa mengatakan bahwa teknik B memerlukan ukuran contoh yang lebih kecil untuk mendapatkan tingkat keakuratan yang sama dengan teknik A.

Membandingkan Ragam Peubah Acak Antitesis

- Untuk membandingkan pengintegralan CMC dengan peubah acak antitesis, kita hitung rasio ragam penduganya seperti berikut:

Var_{ANTI} $\quad < 0$

$$\textit{Efisiensi} = \frac{\frac{\sigma_g^2 + c}{n}}{\frac{\sigma_g^2}{n}} = 1 + \frac{c}{\sigma_g^2} < 1$$

Var_{CMC}

karena $c < 0$ (yang merupakan akibat dari g fungsi naik atau turun).

- Jadi, ragam penduga antitesis lebih kecil dari ragam penduga CMC.

Contoh

Gunakan pengintegralan CMC dan peubah acak antitesis untuk menduga nilai integral tentu berikut:

$$\theta = E\left(g\left(X\right)\right) = \int_0^1 \sin\left(x\right)\, dx.$$

Kita mulai dengan penduga CMC

```
> set.seed(1)
> x <- runif(1000)
> g <- sin(x)
> mean(g)
[1] 0.4593651
> VarCMC <- var(g)/1000 # Ragam dari penduga CMC
> VarCMC
[1] 6.086992e-05
```

Kemudian kita lanjutkan dengan penduga antitesis

```
> set.seed(1)
> x <- runif(1000)
> y <- 1 - x
> g <- (sin(x) + sin(y))/2
> mean(g)
[1] 0.4597581
> VarANTI <- var(g)/1000 # Catat bahwa kita sebenarnya
sudah membaginya dengan 2000 karena terdapat konstanta 2 di
atas
> VarANTI
[1] 3.124975e-07
```

- Terakhir, kita bandingkan ragam penduga antitesis dan ragam penduga CMC seperti berikut:

```
> Efisiensi <- VarCMC / (2 * VarANTI) # Catat bahwa
kita butuh mengalikan ragam penduga antitesis dengan 2
untuk agar dapat dibandingkan dengan ragam penduga CMC
> Efisiensi
[1] 97.39263
```

- Hal ini berarti bahwa peubah acak antitesis sekitar 97 kali lebih efisien dibandingkan dengan pengintegralan CMC.
- Dengan mengatakan demikian, kita sebetulnya sedang mengatakan dua hal sekaligus.
- Pertama, kita sedang mengatakan bahwa ragam penduga antitesis lebih kecil dari ragam penduga CMC.
- Pada saat yang bersamaan kita juga sedang berargumen bahwa karena ragam berbanding lurus dengan ukuran contoh, untuk mendapatkan tingkat keakuratan yang sama, peubah acak antitesis membutuhkan nilai contoh/sampel 97 kali lebih sedikit dibandingkan pengintegralan CMC.