

§1.4 复球面与扩充复平面

一. 复球面

1. 复平面与球面的对应

在复平面上放一个与其相切的球面, 球面上最上方的点, 称为(北)极点, 记为 N . 平面上任一点 z 与 N 的连线线段与球面有唯一交点 P . 这样 z 上的点与球面上除 N 外任意点建立一一对应.

规定 N 点也对应一个点, 记为 ∞ . 于是球面与复平面含 ∞ 建立一一对应. 记复平面与 ∞ 的并集记为扩充复平面, 则扩充复平面 \Leftrightarrow 复球面

2. 关于 ∞ 的说明

(1) 几何意义: 在复平面上 ∞ 可看成一个点, 例如直线经过 ∞ , 半平面不含 ∞

$D: |z| > 1$ 含 ∞ , ∞ 被看作无界区域的边界点.

(2) ∞ 的运算性质: $a \pm \infty = \infty$, $a \cdot \infty = \infty$ ($a \neq 0$)

$$\frac{a}{\infty} = 0, \frac{a}{0} = \infty \ (a \neq 0), \infty \cdot \infty = \infty$$

Rem. (1) $\infty \pm \infty$ 无意义, $0 \cdot \infty$ 无意义 ($\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$)

(2) $|\infty| = +\infty$: 广义实数

(3) $z \rightarrow \infty \Leftrightarrow |z| \rightarrow +\infty$

(4) 若 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A$, 可记为 $f(\infty) = A$.