Giới thiệu về xác suất

Đức Hồ, Đào Vũ Quang

Mục lục

1 Biến cố ngẫu nhiên

Định nghĩa 1.1. Một quá trình ngẫu nhiên là một thí nghiệm với các kết quả ngẫu nhiên, hoặc nói cách khác là không được định sẵn. Ta định nghĩa một sự kiện là một kết quả cụ thể hoặc một tập hợp các kết quả cụ thể trong thí nghiệm trên và định nghĩa không gian mẫu Ω là tập hợp của tất cả các kết quả có thể xảy ra.

Định nghĩa 1.2. Một biến cố ngẫu nhiên là một biểu thức thể hiện kết quả của một thí nghiệm nào đó.

Ví dụ 1.3. Xét một thí nghiệm khi ta tung đồng xu cân đối 2 lần và ghi lại kết quả của mỗi lần, với kết quả là ngửa (H) hoặc sấp (T). Khi đó, không gian mẫu của chúng ta sẽ là {HT,TH,TT,HH}. Ta có thể gọi A sự kiện mà sau 2 lần tung ta được HT. Ta cũng có thể gọi X là một biến cố ngẫu nhiên chỉ số lần H xuất hiện trong các lần tung.

Định nghĩa 1.4. Một biến cố ngẫu nhiên được gọi là rời rạc nếu nó chỉ có thể bằng một số giá trị hữu hạn, và được gọi là liên tục nếu số giá trị mà nó có thể lấy là vô hạn.

Trong ví dụ 1.3, X là một ví dụ của một biến cố ngẫu nhiên rời rạc. Một ví dụ cho biến cố ngẫu nhiên liên tục là kết quả của việc chọn một số ngẫu nhiên trong khoảng từ 0 đến 1.

Định nghĩa 1.5. Nếu X là một biến cố ngẫu nhiên rời rạc, hàm phân bố của X là một hàm $w : \Omega \to [0, 1]$ thỏa mãn điều kiện sau: nếu $\{u_1, .., u_n\}$ là tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra thì ta có

$$\sum_{i=1}^{n} w(u_i) = 1$$

Xác suất của một sự kiện E sẽ được định nghĩa như sau

$$P(E) = \sum_{u \in E} w(u)$$

Xác suất trên thể hiện số lần E sẽ xảy ra nếu ta thực hiện phép thử nhiều lần trong thí nghiệm đã chọn.

Ví dụ 1.6. Trong ví dụ 1.3, hàm phân bố của biến cố là $w : \{HH, TT, TH, HT\} \to [0, 1]$ với $w(HH) = w(TT) = w(HT) = w(TH) = \dfrac{1}{4}$. Nếu B là sự kiện mà sau 2 lần tung đồng xu, đồng xu thứ nhất là H thì $P(B) = w(HH) + w(HT) = \dfrac{1}{2}$

Định nghĩa 1.7. Nếu X là một biến cố ngẫu nhiên liên tục và nhận giá trị thực, hàm mật độ xác suất X là một hàm số $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ thỏa mãn

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx,\ \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Ví dụ 1.8. Quay lại ví dụ chọn một số thực bất kì trong khoảng $[0, 1]$ như trên. Nếu mỗi số đều có khả năng được lựa chọn như nhau, xác suất để một số cụ thể được chọn sẽ là 0.

Nếu ta gọi X là biến cố chỉ số được chọn (dễ thấy X là một biến cố ngẫu nhiên) thì xác suất mà số được chọn sẽ trong khoảng $[a, b]$ phải là $b - a$. Điều này nghĩa là X sẽ có hàm mật độ xác suất $f(x) = 1,\ x \in [0, 1]$.

Ví dụ:

$$P\left(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4}\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} 1\ dx = \frac{1}{2}$$

Thông thường, một biến cố ngẫu nhiên liên tục sẽ được xác định bởi hàm mật dộ xác suất của nó.

2 Xác suất có điều kiện

Với 2 biến ngẫu nhiên X và Y, ta gọi $P(X = x|Y = y)$ là xác suất X đạt giá trị x với điều kiện Y đạt giá trị y.

Ví dụ 2.1. Xét trường hợp tung xúc xắc 6 mặt với các số trên mặt từ 1 đến 6, xác suất mỗi mặt xuất hiện đều như nhau.Gọi X là biến cố với giá trị là kết quả của lần tung xúc xắc, và Y là biến cố xác định $X > 4$ hay không ($Y = 1$ nếu 5 hoặc 6 xuất hiện và $Y = 0$ trong các trường hợp còn lại).

Khi đó, $P(X = 6|Y = 1) = \frac{1}{2}$ do ta biết rằng kết quả của lần tung chỉ có thể là 5 hoặc 6. Tương tự như vậy, $P(X = 6|Y = 0) = 0$.

Mệnh đề 2.2. *Với 2 biến cố ngẫu nhiên X và Y:*

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}$$

Hoặc với 2 sự kiện A và B:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Nhận xét 2.3. Trong ví dụ 2.1, ta nhận thấy $P(Y = 1) = \frac{1}{3}$ và $P(X = 6, Y = 1) = P(X = 6) = \frac{1}{6}$.

Theo mệnh đề trên,

$$P(X = 6|Y = 1) = \frac{P(X = 6, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{1}{2}$$

Định lý 2.4 (Định lý Bayes)**.** *Cho 2 sự kiện A, B với $P(B) \neq 0$. Khi đó*

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

3 Biến cố ngẫu nhiên độc lập

Định nghĩa 3.1. Với 2 biến cố ngẫu nhiên X và Y, ta nói rằng X và Y là độc lập (với nhau) nếu $\forall\, x \in X, \forall\, y \in Y$,

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$$

2 sự kiện A và B được gọi là độc lập nếu

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Ví dụ 3.2. Trong ví dụ 1.3, gọi A là sự kiện lần tung thứ nhất sẽ ra H và B là sự kiện lần tung thứ hai sẽ ra T.

Khi đó, $P(A \cap B)$ là xác suất có được HT sau 2 lần tung, và dễ thấy $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Mặt khác, $P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Từ định nghĩa trên, A và B là 2 sự kiện độc lập.

Gọi C là sự kiện mà ta có được HH sau 2 lần tung. Khi đó, $P(A \cap C) = P(C) = \frac{1}{4}$. Tuy nhiên, $P(A)P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$, nên 2 sự kiện A và C không độc lập.

Định nghĩa 3.3. Ta nói rằng n sự kiện $A_1, A_2, ..., A_n$ là độc lập lẫn nhau nếu

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(A_n)$$

Ta nói rằng n sự kiện $A_1, A_2, ..., A_n$ là độc lập theo từng cặp nếu

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j) \; \forall 1 \leq i, j \leq n, i \neq j$$

Bài tập 3.4. Tìm các ví dụ để chỉ ra độc lập theo từng cặp không thể suy ra độc lập lẫn nhau, cũng như độc lập lẫn nhau không thể suy ra độc lập theo từng cặp.

4 Giá trị kì vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của biến cố ngẫu nhiên

4.1 Biến cố ngẫu nhiên rời rạc

Ta có thể hiểu giá trị kì vọng của một biến cố ngẫu nhiên là giá trị trung bình mà ta kì vọng sẽ có được sau nhiều phép thử với biến cố đó. Với cách hiểu trên, phương sai và độ lệch chuẩn sẽ là thước đo cho việc kết quả của các lần thử nằm gần hay xa so với giá trị kì vọng.

Định nghĩa 4.1. Cho một biến cố ngẫu nhiên X với hàm phân bố w.

Giá trị kì vọng của X là:

$$E(X) = \sum_{u \in X} u w(u)$$

Nếu ta kí hiệu $E(X) = \mu$, phương sai của X là:

$$V(X) = E((X - \mu)^2)$$

Độ lệch chuẩn X là:

$$D(X) = \sqrt{V(X)}$$

Ví dụ 4.2. Xét trường hợp tung một xúc sắc đều 6 mặt với các số từ 1 đến 6, xác suất các mặt xuất hiện đều như nhau. Nếu ta gọi X là biến cố chỉ kết quả của lần tung xúc sắc thì X có hàm phân bố $w(u) = \frac{1}{6}$ với mọi $1 \leq u \leq 6$. Khi đó, giá trị kì vọng của X là:

$$E(X) = \frac{1}{6}.(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{7}{2}$$

Phương sai của X là:

$$V(X) = E\left(\left(X - \frac{7}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{6}.\left(\sum_{i=1}^{6}\left(i - \frac{7}{2}\right)^2\right) = \frac{35}{12}$$

Độ lệch chuẩn X là:

$$D(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{35}{12}}$$

4.2 Biến cố độc lập liên tục

Tương tự như trên, nếu X là một biến cố ngẫu nhiên với hàm mật độ xác suất $f(x)$ thì ta có các định nghĩa sau

Định nghĩa 4.3. Giá trị kì vọng của X là:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\, dx$$

Với $E(X) = \mu$, phương sai của X là:

$$V(X) = E((X - \mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, dx = \frac{1}{12}$$

Độ lệch chuẩn của X là:

$$D(X) = \sqrt{V(X)}$$

Ví dụ 4.4. Quay lại ví dụ 1.8, giá trị kì vọng của X là:

$$E(X) = \int_{0}^{1} x\, dx = \frac{1}{2}$$

Ở trên, do X chỉ lấy giá trị trong khoảng $[0, 1]$ nên $f(x) = 0$ ngoài khoảng này, và vì vậy nên ta chỉ cần khảo sát tích phân từ 0 đến 1.

Phương sai của X sẽ là:

$$V(X) = \int_{0}^{1} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\, dx = \frac{1}{12}$$

5 Các tính chất của giá trị kì vọng và phương sai

5.1 Giá trị kì vọng

Định lý 5.1. *Nếu X, Y là biến cố độc lập với $E(X), E(Y)$ hữu hạn thì*

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(cX) = cE(X), c \in \mathbb{R}$$

Định lý 5.2. *Nếu X, Y là 2 biến cố độc lập với $E(X), E(Y)$ hữu hạn thì*

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$$

Bài tập 5.3. Tìm phản ví dụ cho định lý trên khi X, Y không độc lập với nhau. Chứng minh 2 định lý trong trường hợp biến cố liên tục cũng như rời rạc.

5.2 Phương sai

Định lý 5.4. *Nếu X là một biến cố ngẫu nhiên với $E(X)$ hữu hạn thì*

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Định lý 5.5. *Nếu X là một biến cố ngẫu nhiên với $E(X)$ hữu hạn và c là một hằng số bất kì thì*

$$V(cX) = c^2 V(X)$$

$$V(X + c) = V(X)$$

Định lý 5.6. *Nếu X, Y là 2 biến cố độc lập với $E(X), E(Y)$ hữu hạn thì*

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

Bài tập 5.7. Tìm một phản ví dụ cho định lý trên khi X, Y không độc lập với nhau.

Bài tập 5.8. Chứng minh cả 3 định lý trên trong trường hợp biến liên tục cũng như rời rạc.

6 Các bất đẳng thức xác suất

6.1 Bất đẳng thức Chebyshev

Mệnh đề 6.1. *Nếu X là một biến cố ngẫu nhiên với $E(X) = \mu$ thì với mọi $\epsilon > 0$*

$$P(|X - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}$$

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh mệnh đề trên trong trường hợp biến cố liên tục. Bạn đọc hãy chứng minh trường hợp biến cố rời rạc.

Gọi f_X là hàm mật độ xác suất của X. Từ giả thuyết $f_X(t) \geq 0$, ta có:

$$\begin{aligned}
V(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (t - \mu)^2 f_X(t)\, dt \\
&\geq \int_{-\infty}^{\mu-\epsilon} (t - \mu)^2 f_X(t)\, dt + \int_{\mu+\epsilon}^{\infty} (t - \mu)^2 f_X(t)\, dt \\
&\geq \epsilon^2 \int_{-\infty}^{\mu-\epsilon} f_X(t)\, dt + \epsilon^2 \int_{\mu+\epsilon}^{\infty} f_X(t)\, dt
\end{aligned}$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned}\epsilon^2 \int_{-\infty}^{\mu-\epsilon} f_X(t)\,dt + \epsilon^2 \int_{\mu+\epsilon}^{\infty} \epsilon^2 f_X(t)\,dt &= \epsilon^2 P(X \le \mu - \epsilon) + \epsilon^2 P(X \ge \mu + \epsilon) \\ &= \epsilon^2 P(|X - \mu| \ge \epsilon)\end{aligned}$$

Vậy bài toán đã được giải quyết. □

6.2 Bất đẳng thức Markov

Mệnh đề 6.2. *Cho X là một biến cố ngẫu nhiên **không âm** và $a > 0$. Chứng minh rằng:*

$$P(X \ge a) \le \frac{E(X)}{a}$$

Chứng minh. Cũng như trên, ta giả sử biến cố liên tục. Trường hợp biến cố rời rạc được giải quyết tương tự.

Giả sử X có hàm mật độ xác suất f_X. Ta có:

$$\begin{aligned}E(X) &= \int_0^{\infty} t f_X(t)\ dt \\ &\ge \int_a^{\infty} t f_X(t)\ dt \\ &\ge a \int_a^{\infty} f_X(t) dt \\ &= aP(X \ge a)\end{aligned}$$

chính là điều phải chứng minh. □