כיוון נוסף הוא לבנות אלגוריתמים שלא רגישים לידיעת מידת השינוי בבעיה, או שמסוגלים לזהות אוטומטית את מידת השינוי.

המשקולות בוצעה ע"י הטלתו על קבוצה חסומה [Herbster and Warmuth, 2001], כיווץ באופן כפלי [Kivinen et al., 2001, Cavallanti et al., 2007], או חיסור של דוגמאות קודמות [Cavallanti et al., 2007]. גישה נוספת, שבה השתמשו באלגוריתמים מסדר שני, מבוססת על אתחול מטריצת הקווריאנס, ובצורה זו שוכחים את ההיסטוריה. אלגוריתם ה CR-RLS תוכנן לסינון מסתגל והוא מבצע אתחול של מטריצת הקווריאנס כל מספר קבוע של איטרציות. אלגוריתם דומה ל CR-RLS הוא אלגוריתם ARCOR [Vaits and Crammer, 2011], אבל אלגוריתם זה מבצע אתחול של מטריצת הקווריאנס כל פעם שהערך העצמי של מטריצת הקווריאנס מגיע לסף מסויים, ולא כל מספר קבוע של איטרציות. לכן, אלגוריתם ARCOR מבצע אתחולים בהתבסס על התכונות האמיתיות של הנתונים: הספקטרום של מטריצת הקווריאנס. בנוסף, אלגוריתם ARCOR מבצע הטלה של וקטור המשקולות לקבוצה סגורה כדי למנוע ממנו לגדול יותר מידי בכיוונים מסוימים.

בעבודה זו אנו הולכים בכיוון אחר ומפתחים אלגוריתם לבעיה עם שינוי בהתבסס על עקרון המינימום-מקסימום של Forster [1999]. האלגוריתם שלנו הוא אופטימלי במובן מינימום-מקסימום כאשר יש שינוי. בניגוד לפיתוח של חזאי מינימום-מקסימום עבור מתחרה קבוע ויחיד, בעית האופטימיזציה שמתקבלת במקרה זה אינה פשוטה לפתרון. אנו מפתחים פתרון רקורסיבי לבעיה זו, שמאפשר לחשב את החזאי האופטימלי במובן מינימום-מקסימום. אנו מנתחים את האלגוריתם במסגרת של regret במקרה הגרוע ביותר ומראים, שכל עוד כמות השינוי הממוצע הוא תת-לינארי, השגיאה הממוצעת של האלגוריתם שלנו תתכנס לשגיאה הממוצעת של סדרת הפונקציות הטובה ביותר. בנוסף, כאשר אין שינוי, לאלגוריתם שלנו יש regret לוגריתמי, כמו לאלגוריתם של Forster [1999]. האלגוריתם שלנו הוא פשוט יותר מאלגוריתמים קודמים מכיוון שאינו מבצע אתחולים מפורשים של מטריצת הקווריאנס אלא מבצע "מיצוע" שלה עם מטריצה סקלרית בכל איטרציה.

לסיום, סימולציות סינטטיות מראות את היתרונות של אלגוריתם המינימום-מקסימום שלנו על אלגוריתמים קודמים במקרה הגרוע של שינוי קבוע.

לעבודה זו מספר כיוונים להרחבה אפשרית. כיוון אחד הוא להרחיב את האלגוריתמים לפונקציות שגיאה כלליות ולא רק שגיאה ריבועית. כיוון נוסף להרחבה הוא לבעיות של סיווג במקום רגרסיה או מצב של selective sampling. כמו כן, כדי לממש את האלגוריתמים שלנו יש צורך לבצע היפוך מטריצות; כיוון נוסף להרחבה הוא לבנות גירסה יותר יעילה חישובית של האלגוריתמים.

הגרוע) ביחס לפונקציות לינאריות. Takimoto and Warmuth [2000] השתמשו ברעיון זה לבעית שערוך צפיפות פילוג מקוונת. בעית האופטימיזציה ש Forster [1999] קיבל היתה קמורה גם בבחירת האלגוריתם וגם בבחירת המתחרה, מה שהוביל לבעית אופטימיזציה לא חסומה. Forster [1999] עקף בעיה זו ע"י הנחה של חסם Y על בחירות המתחרה, שצריך להיות ידוע לאלגוריתם. אולם, הניתוח שלו הוא עבור גרסה ללא חסם, שהוביל לregret של $O(\log T)$.

אנו מציעים אלגוריתם מינימום-מקסימום שונה, עם משקולות על דוגמאות, שמבוקרות בצורה כזו כך שהבעיה תהיה קעורה בבחירות המתחרה וקמורה בבחירות האלגוריתם. אנו מנתחים את האלגוריתם ומראים regret לוגריתמי שיכול להיות עם מקדם כפלי טוב יותר מהניתוח של Forster [1999] ושל אלגוריתמים אחרים. אנו מציעים חסם נוסף שהוא לוגריתמי בשגיאה של פונקציית הייחוס, ולא במספר האיטרציות T. התנהגות זו ניתנה לאחרונה ע"י Orabona et al. [2012] עבור אלגוריתם Online Newton Step [Hazan et al., 2006]. אולם, לחסם שלהם יש מקדם כפלי דומה לזה של Forster [1999], ואילו לחסם שלנו יש פוטנציאל למקדם כפלי טוב יותר ויש לו אותה תלות בפונקציית הייחוס כמו של Orabona et al. [2012]. בנוסף, האלגוריתם והניתוח שלנו חופשיים מהנחה של החסם Y או ידיעת ערכו.

תחרות עם הפונקציה הטובה ביותר שהיא יחידה וקבועה זה לא מספיק לכמה בעיות. בהרבה ישומים מעשיים, פונקציית המטרה הנכונה אינה קבועה, אלא נסחפת באופן איטי עם הזמן. למשל נחשוב על פונקציה שמתוכננת לדרג סרטים במערכת המלצה, בהנתן תכונות מסוימות. עם הזמן, הדירוג של סרט יכול להשתנות, מכיוון שיותר ויותר סרטים יוצאים או העונה משתנה.

סיבה זו הובילה לפיתוח של אלגוריתמים למצב של שינוי (Auer and Warmuth [2000], Herbster and Warmuth [2001], Kivinen et al. [2001], Cavallanti et al. [2007]). מטרת האלגוריתם במצב זה היא לשמור על שגיאה ממוצעת קרובה ככל הניתן לזו של סדרת פונקציות הכי טובה שמשתנה לאט, ולא להתחרות היטב עם פונקציה קבועה יחידה. אנו מתמקדים בבעיות שבהן סדרה זו מורכבת רק מפונקציות לינאריות. באופן טיפוסי, סדרה כזו היא נסחפת, כאשר כל פונקציה דומה לקודמתה, או "מוזזת", כאשר עקרונית הסדרה יכולה להתחלק למספר סגמנטים, כך שעבור כל סגמנט ישנה פונקציה אחת בודדת בעלת ביצועים טובים על כל הדוגמאות באותו סגמנט.

גישה אחת שבה השתמשו באלגוריתמים קודמים לסביבת עבודה זו מבוססת על gradient-descent עם בקרה נוספת על הנורמה של וקטור המשקולות שמשמש לחיזוי. חסימת וקטור

תקציר

אנו מתייחסים לבעיה של למידה מקוונת לרגרסיה, שבה האלגוריתם הלומד מנסה לחזות מספרים ממשיים בהנתן קלט מסוים, בסדרה של איטרציות. דוגמאות לישומים מעשיים לבעיה זו הם חיזוי של מזג אויר או מניות. מטרת האלגוריתם היא לשמור על הפרש קטן בין החיזוי שלו לתוצאה האמיתית, שיכולה להבחר ע"י מתחרה. הפרש זה נמדד ע"י פונקציית שגיאה, כגון שגיאה ריבועית. מקובל להעריך אלגוריתמים ע"י גודל שנקרא regret, שהוא ההפרש בין השגיאה המצטברת של האלגוריתם לבין השגיאה המצטברת של פונקציה כלשהי ממחלקה כלשהי.

בחצי המאה האחרונה הרבה אלגוריתמים הוצעו לבעיה זו. חלק מהאלגוריתמים מסוגלים להשיג שגיאה ממוצעת קרובה כרצונינו לשגיאה של הפונקציה הכי טובה בדיעבד. בנוסף, הבטחות אלה תקפות גם כאשר זוג הקלט והפלט נבחר ע"י יריב ללא הנחות על פילוגים. אלגוריתמים שמבוססים על Gradient-descent נותחו ע"י Cesa-Bianchi et al. [1993], והם הראו שניתן לקבל regret של $O\left(\sqrt{T}\right)$ כאשר T הוא מספר האיטרציות. Kivinen and Warmuth [1997] הציעו אלגוריתם דומה אבל שמעדכן את וקטור המשקולות בצורה כפלית. אלגוריתם זה משיג גם regret של $O\left(\sqrt{T}\right)$ אבל יש לו שגיאה קטנה יותר אם רק חלק מרכיבי וקטור הכניסה הם רלוונטיים לחיזוי. בהקשר של תכנות קמור מקוון התקבל regret דומה [Zinkevich, 2003].

בעבודה זו אנו מתמקדים באלגוריתמים מסדר שני. אלגוריתמים אלה מחזיקים וקטור משקולות שמשמש לחיזוי ובנוסף מטריצת קווריאנס שמתפקדת כמו קצב לימוד מסתגל. אלגוריתם ה-RLS [Hayes, 1996], אלגוריתם ridge-regression [Foster, 1991] ואלגוריתם ה-AAR [Vovk, 1997, 2001] הם דוגמאות של אלגוריתמים מסדר שני, כולם משיגים regret של $O(\log T)$, אולם עם מקדמים כפליים שונים של הלוגריתם. אלגוריתם דומה עם regret דומה (AROWR) הוצע ע"י Vaits and Crammer [2011] ונותח ע"י Crammer et al. [2012]. לאחרונה, Orabona et al. [2012] הראה שניתן להשיג regret תת-לוגריתמי כאשר השגיאה המצטברת של המודל האופטימלי היא תת-לינארית במספר האיטרציות T.

Forster [1999] הציע את אלגוריתם המינימום-מקסימום לרגרסיה מקוונת אשר מבצע חיזוי בהנחה שזו הדוגמה האחרונה, והמטרה של האלגוריתם היא למזער את ה-regret המקסימלי (במקרה

פרסומים

חלקים מעבודה זו פורסמו במאמרים

Weighted Last-Step Min-Max Algorithm with Improved Sub-Logarithmic Regret.
Edward Moroshko and Koby Crammer. 2012. In ALT.

A Last-Step Regression Algorithm for Non-Stationary Online Learning.
Edward Moroshko and Koby Crammer. 2013. In AISTATS.

המחקר נעשה בהנחיית פרופ' קובי קרמר בפקולטה להנדסת חשמל.

אני מודה לקובי על ההדרכה והליווי לאורך כל הדרך. בנוסף אני מודה לקובי על המימון של הנסיעות שלי לכנסים ALT 2012 ו AISTATS 2013.
תודה למשפחתי על התמיכה.
תודה מיוחדת לארוסתי אפרת על אהבתה, תמיכתה וסבלנותה הרבה לאורך כל הדרך.

אלגוריתמי מינימום-מקסימום ואנליזה חדשים לרגרסיה מקוונת

חיבור על מחקר

לשם מילוי חלקי של הדרישות לקבלת התואר
מגיסטר למדעים בהנדסת חשמל

אדוארד מורושקו

הוגש לסנט הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
תמוז תשע"ג חיפה יוני 2013

אלגוריתמי מינימום-מקסימום ואנליזה חדשים לרגרסיה מקוונת

אדוארד מורושקו