

# JUNO 模拟与分析实验报告

Team: PMTsmasher

Members: 沈若寒 刘明昊 赵海萌

小组主要分工:

- 沈若寒: 光学过程
- 刘明昊: 顶点模拟与光子生成
- 赵海萌: 绘图与波形生成

## 摘要

本项目以 JUNO 中微子探测装置为背景, 对顶点模拟、光子生成、光学过程、PMT 波形生成进行了建模与算法实现。通过创新性的算法设计与架构优化, 我们在保证算法高精度的前提下, 将算法运行速度大大提升, 实现了在笔记本上以 2 分钟左右的时间完成除波形外的所有任务, 10 分钟左右的时间完成全部任务。同时, 根据模拟数据绘制出的图像很好地反映了算法的可靠性。高效而可靠的数值模拟, 使我们在 JUNO 尚未建造完成时, 就可以对其中可能发生的物理过程有所了解。

## 目录

### JUNO 模拟与分析实验报告

摘要

目录

整体思路

0. 文件结构与执行方式

    0.1. 文件结构

    0.2. 执行方式

1. 顶点模拟与光子生成

    1.1. 思路

    1.2. 主要实现方式

        1.2.1. 顶点坐标生成

        1.2.2. 光子生成

2. 光学过程

    2.1. 思路

    2.2. 主要实现方式

        2.2.1. 光子的编码

        2.2.2. 液闪边界过程

        2.2.3. 打击 PMT

        2.2.4. 写入 PETruth

    2.3. 仍然存在的问题

3. 绘图

    3.1. 思路

    3.2. 主要实现方式

        3.2.1. 顶点体密度分布图

        3.2.2. 光电子接收时间直方图

        3.2.3. Data-driven 的 Probe 函数热力图

        3.2.4. Sim-driven 的 Probe 函数热力图

3.3.4.1. double\_search 算法

3.3.4.2. 粗测算法

3.3.4.3. 细测算法

#### 4. 波形生成

4.1. 思路

4.2. 主要实现方式

4.2.1. 波形函数

4.2.2. 噪声函数

4.2.3. 波形叠加

4.2.4. 性能优化

#### 5. 优化经验总结

5.1. 大体思路

5.2. 架构与算法

5.3. Multiprocessing

5.4. Numba

5.5. 细节

5.6. 分析工具

#### 6. 加分项目: Bonus3 进阶光学

6.1. 概述

6.2. 条件分支

6.3. 算法实现

6.4. 数据验证

## 整体思路

本项目由四个部分组成：顶点位置与光子生成，光学过程，波形生成与采样，以及绘图。

- **顶点位置与光子生成：** 顶点位置先由球坐标生成， $r$ 的概率分布函数是平方正比， $\theta$ 和 $\phi$ 均为均匀分布，然后换成笛卡尔坐标。光子的生成由非齐次泊松采样给出。只考虑顶点产生后500ns内产生的光子。先通过 `scipy.integration.quad` 构造非齐次泊松分布的期望 $\lambda(t)$ ，事先算好归一化系数，然后每隔  $1/\text{PRECISION}$  采样一个点，在使用到时按照线性插值。先给出 $\lambda(t)$ 的最大值 $\lambda^*$ ，按照 $\lambda^*$ 的齐次泊松过程进行取样，然后再以 $\lambda(t)/\lambda^*$ 的概率保留，得到光子的生成时间。经过优化可以在笔记本上于 1min 内完成计算。
- **光学过程：** 模拟光子的具体传播过程。由于内存限制，将总的 4000 个事件分 10 次处理。先随机生成光子的传播方向 $(\theta, \phi)$ ，然后跟踪光子，计算入射角，按照菲涅尔公式计算反射、折射概率。因为只考虑一次反射，因此只要出现反射，就不考虑之后的反射。在考虑光子打到哪个 PMT 上时，我们在 PMT 可能与光子碰撞的区域内插入点，使用时间复杂度为  $O(\log n)$  的 `kdtree` 算法来判断这些点距离哪个 PMT 最近，及其距离。找出第一个出现距离小于 PMT 半径的点，就找到了光子具体打到了哪个 PMT。经过优化可以在笔记本上以 1min 左右的时间内完成处理。
- **波形生成与采样：** 我们唯象地采取双指数函数作为波形，实现了两种不同的噪声：正弦噪声和 Gauss 噪声。对于相同 Event 相同 Channel 的波形，对其波形进行叠加。为了节省内存、高效处理，我们实现了多线程的文件分块写入。为了方便不同 Event 的实验比较，我们还实现了噪声的控制变量功能，开启时可以在保证 Channel-wise 噪声随机的前提下，使 Event-wise 噪声精确相同。经过优化可以在笔记本上以 7min 左右的时间完成处理与文件写入。
- **绘图：** 为了检验算法的正确性，我们绘制了三幅图：顶点体密度随半径的分布图、光子击中 PMT 的时间分布图以及 Probe 函数图，分别用于检验顶点生成、光子传播时间计算以及光学过程。我们设计出了易于阅读的图表形式，同时通过插值生成了高清晰度的 Probe 函数图，并用两种方法（Data-driven 与 Sim-driven）绘

制，可以进行交叉验证。

## 0. 文件结构与执行方式

### 0.1. 文件结构

本项目的文件结构如下：

```
|-- project-1-junosap-pmtsmasher
|   |-- requirements.txt
|   |-- geo.h5
|   |-- Makefile
|   |-- draw.py
|   |-- simulate.py
|   |-- scripts
|       |-- __init__.py
|       |-- drawProbe.py
|       |-- event.py
|       |-- genPETruth.py
|       |-- genWaveform.py
|       |-- getProbTime.py
|       |-- utils.py
|   |-- report.md
|   |-- report.pdf
|   |-- docs
|   |-- figs
```

其中 `requirements.txt` 罗列了本项目的依赖包版本，`geo.h5` 为 JUNO 的 PMT 位置数据，`Makefile` 文件定义了文件处理 Pipeline，`simulate.py` 和 `draw.py` 分别完成模拟与绘图的功能，`scripts` 文件夹下的各文件完成各个子功能，`report.md` 和 `figs` 文件夹为本实验报告及其所用到的样图，`docs` 文件夹下存储了本项目的要求文档。

### 0.2. 执行方式

在执行前请确保依赖包都已安装并符合版本要求，执行

```
pip install -r requirements.txt
```

以安装依赖包。

在项目目录下用 `shell` 执行代码

```
make
```

可以完整地执行整个项目的流程，生成模拟数据文件 `data.h5` 并根据该数据绘制图像 `figures.pdf`。

执行代码

```
make data.h5  
make figures.pdf  
make probe.pdf
```

可分别生成模拟数据 `data.h5`、绘图 `figures.pdf` 以及Sim-driven的Probe函数热力图 `probe.pdf`。

执行代码

```
make clean
```

可以清理生成的 `data.h5`、`figures.pdf` 和 `probe.pdf` 文件。

若要单独测试 `simulate.py` 和 `draw.py`，可以执行

```
python3 simulate.py -n <num_of_events> -g geo.h5 -o <output_file> [-p <num_of_pmts>]  
python3 draw.py <data_file> -g geo.h5 -o <output_file>
```

例如：

```
python3 simulate.py -n 4000 -g geo.h5 -o data.h5  
python3 draw.py data.h5 -g geo.h5 -o figures.pdf
```

## 1. 顶点模拟与光子生成

### 1.1. 思路

题目要求顶点的位置在球中均匀，使用笛卡尔坐标系不容易保证这一点，但由于球具有的对称性，球坐标生成顶点位置是更方便的。因此，我们先生成球坐标位置 $(r, \theta, \phi)$ ，再改成 $(x, y, z)$ 。

非齐次泊松过程的采样需要先计算期望 $\lambda(t)$ ，这由卷积给出，无法得到很好的解析表达式。`scipy.integration.quad` 运行速度虽然已经很快，但这里需要计算的期望数可能有几亿次，耗费时间太久。因此，我们采用了线性插值的方法。

非齐次泊松过程采样并不容易处理，而齐次泊松过程采样实现起来较为方便。因此我们使用了 `Acceptance-Rejection Method`，先使用齐次泊松过程采样，然后使用期望值来 `accept` 或 `reject`。

### 1.2. 主要实现方式

#### 1.2.1. 顶点坐标生成

通过简单的数学计算，可以得到，球坐标下如果位置分布均匀， $r$ 的概率密度函数应该是平方正比。由对称性， $\theta$ 和 $\phi$ 是均匀分布的。使用 `numpy.random.Generator.power`，将参数 $a$ 设置为 3，便可以生成范围在 $[0, 1]$ 的，概率密度平方正比的随机数。然后再乘液闪的半径，得到事件的 $r$ 坐标。 $\theta, \phi$ 由 `numpy.random.Generator.random` 生成，前者需要乘 $\pi$ ，后者需要乘 $2\pi$ 。

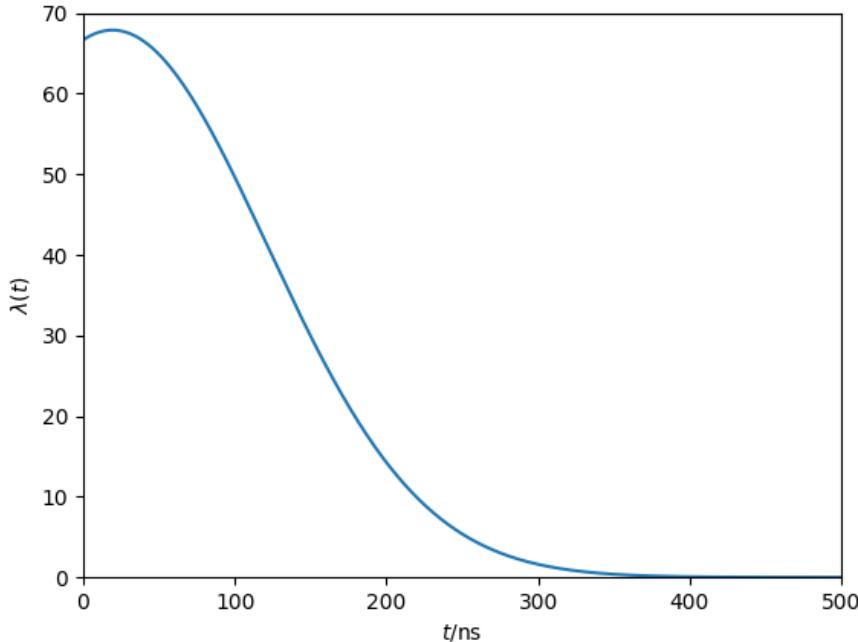
生成后，转成 $(x, y, z)$ 即可。此算法的正确性证明见 3.2.1 节。

## 1.2.2. 光子生成

本题中的期望函数为指数衰减与高斯分布的卷积，可以表达为以下形式：

$$\lambda(t) = k \int_0^{+\infty} e^{-x-(t/\tau-x)/2\sigma^2} dx$$

其中  $k$  为归一化系数。本题中， $\tau = 20\text{ns}$ ,  $\sigma = 5$ 。由于题目要求， $\lambda(t)$  在  $[0, +\infty)$  上的积分应为 10000。数值计算得到  $k = 69.1504473757916$ 。 $\lambda(t)$  的图像如下图所示：



泊松过程采样有两种思路：第一种是确定事件的个数，采样时间；第二种是确定总时间，模拟事件在一段时间内的发生。考虑到实际情况，每个顶点不可能正好产生 10000 个光子，且后一个光子的产生时间会依赖于前一个光子，不适合于计算机大规模计算，因此我们不采用第一种方式，而是使用固定总时间的方式。

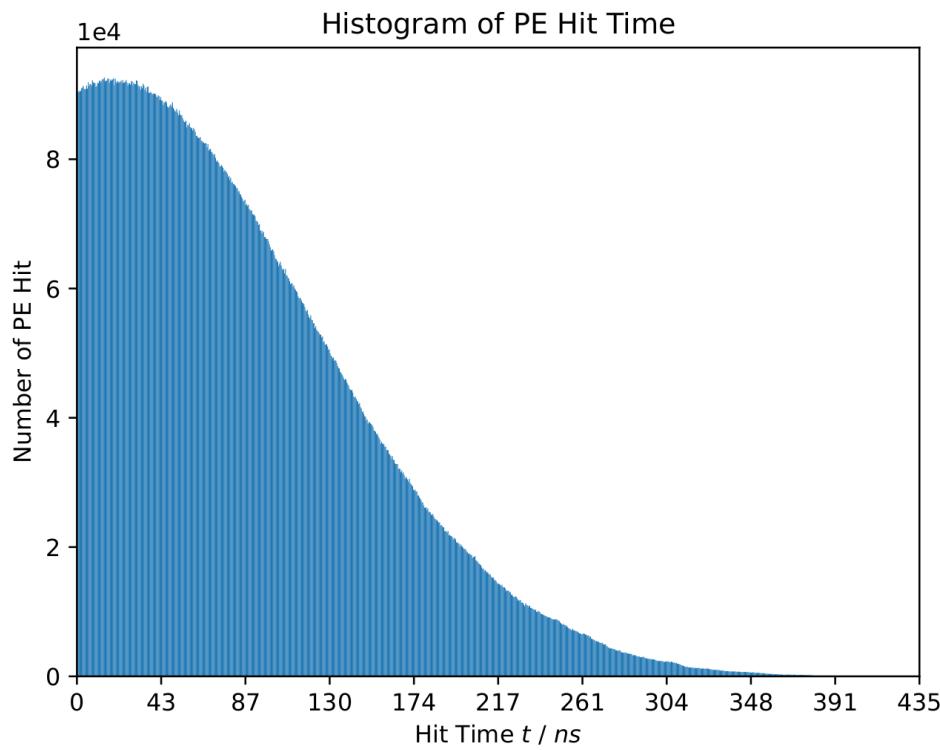
我们采用的总时间为  $T = 500\text{ns}$ 。这时候的  $\lambda(t) = 0.001615$ ，而最大值  $\lambda_{\max} = 67.874$ ，因此可以忽略在此之后产生的光子。

我们先按照  $\lambda(t) = \lambda^*$  的齐次泊松分布，模拟  $T$  时间内的事件。采用的方法是，先使用 `np.random.Generator.poisson` 采一次样，给出  $T$  时间内发生的事件数  $n$ ；然后在  $[0, T]$  区间内按照均匀分布，随机生成  $n$  个随机数，使用 `np.sort` 来排序。排序后，每个随机数代表一个事件发生的事件。

在齐次泊松过程取样后，对每一个事件，按照  $\lambda(t)/\lambda^*$  的概率保留，就得到了最后保留的光子生成时间。这一取样过程中，两个光子生成时间不存在依赖，因此能够很好地并行化。

由于使用了齐次泊松过程取样，第一阶段产生的事件数期望值为  $\lambda_{\max}T$ ，约为 34000 次。如果要模拟 4000 个事件，就要计算 **1.36 亿** 次  $\lambda(t)$ 。然而， $\lambda(t)$  由积分得到，每次积分需要耗费  $10\mu\text{s}$  数量级的时间，这个时间花费是不能够接受的。考虑到我们不需要得到很精确的  $\lambda(t)$  值，我们采用了线性插值的方法，每隔  $1/\text{PRECISION}$  取一个点，一般  $\text{PRECISION}$  取 1000。

在程序中，将光学过程中使用的光速  $c$  改成  $3 \times 10^8 \text{m/ns}$ ，就可以忽略传播时间的影响，**PETime** 给出原始的泊松采样得到的生成时间。（别问我为什么改成这个值，都是单位惹的祸）改动后，`figures.pdf` 的第二张图如下，可见与  $\lambda(t)$  的图像一致，说明此算法的正确性。



## 2. 光学过程

### 2.1. 思路

实验中产生的光子总数约为 4000w，且没有相互之间的依赖作用，这是最适合计算机并行操作的任务。因此，我们决定并行地模拟每个光子的光学过程，最终给出 PETruth。

### 2.2. 主要实现方式

#### 2.2.1 光子的编码

一个光子由如下的信息所确定：坐标矢量，速度矢量，从产生至今的时间，由哪个事件生成，以及“一次反射”假设带来的能够反射历史记录。为了并行化处理光子，我们将 n 个光子的信息存放在一起。它们具体的实现方式如下：

`coordinates, velocities`：(3, n)型 ndarray，其中(i, j)元素表示第 j 个光子的第 i 个坐标/速度分量（每个 velocities 矢量(:, j)都是归一化的，方便后续计算）

`times, events`：均为(n,)型 ndarray，其中(j)元素表示第 j 个光子的时间/产生于哪个事件

`can_reflect`：(n,)型 ndarray，其中(j)元素表示第 j 个光子接下来能否进行反射

#### 2.2.2. 液闪边界过程

所有产生的光子最初都在液闪内，而必须到达液闪边界进而决定下一步的行为。光子在边界上的行为可能有：折射，反射。首先应当考虑的是全反射，当入射角小于  $\arcsin(n_{\text{water}}/n_{\text{LS}})$  时发生，此时光子完全反射，没有任何透射的可能。考虑到波动光学，波动性的光有透射系数与反射系数，表示光线的强度。在我们的光子模型中，每个光子的强度都是一样的，数量也是守恒的，不能凭空增加，因此透射系数与反射系数在此处解释为单个光子发生透射与反射的概率。由于我们模拟的光线是完全随机无偏振的，因此单光子的偏振效应为两种线偏振的平均。

在具体实现中，大部分操作都通过矢量计算而完成，因为矢量计算的速度远快于三角函数。下述计算都基于假设各个方向矢量是归一化的，而我们的速度矢量约定就是为了满足这个条件。假设入射光为 $i$ ，出射光为 $t$ ，反射光为 $r$ ，法向矢量为 $n$ 指向入射光一侧，那么通过简单的空间几何知识就可以计算出：

$$t = \frac{n_i}{n_t} i - \left( \frac{n_i}{n_t} (i \cdot n) + \sqrt{1 - \left( \frac{n_i}{n_t} \right)^2 (1 - (i \cdot n)^2)} \right) n$$
$$r = i - 2(i \cdot n)n$$

而对于透射/折射系数，并没有简单的矢量方法，而只能计算出角度再计算。角度计算牵涉到 `arccos` 函数，存在有限长的定义域。虽然理论上我们的角度余弦都是合理的数值，但是由于浮点数计算的误差可能会使得结果超出定义域，因此需要 `np.clip` 函数来保证运行。

### 2.2.3. 打击 PMT

一次计算的光线在  $10^4 \sim 10^5$  的数量级，而 PMT 数量为 17612。我们的目的是求出每个光子最终能击中哪个 PMT，而这个问题可以简化为：光子在  $R = 19.5\text{m}$  的球面上对应的点，距离哪个 PMT 的中心最近。如果暴力计算每根光线与每个 PMT 的距离，那么复杂度是  $O(n)$ ，对于 4000w 光子是不可接受的。因此，我们采用了 KDTree 算法，将复杂度简化为  $O(\log(n))$ 。

上面的简化有点过度，在实际操作中我们使用了更加精细化的处理来判断究竟击中哪个 PMT，这部分在 Bonus 中有更详细的介绍。

对于这些能够击中 PMT 的光子，我们才因为有必要计算它们具体击中的时间。然后交给 `write` 函数写入 `PETruth` 表。

### 2.2.4. 写入 PETruth

每次击中 PMT 就需要立刻写入 PETruth。这种需要长度经常变化的容器，我们选择了 `list` 而非 `ndarray`，因为后者每次 `append` 时都需要重新分配内存，浪费大量资源。

## 2.3. 仍然存在的问题

对于对称性特别好的光子，比如从  $(0, 0, 0)$  点出射的光子，它的入射角是 0（或者极小）。通过极限的知识我们能够算出它的透反射系数，但是 `numpy` 无法处理 0 入射角因而会报错。幸好模拟出的光子在中心的概率极小，我们尚未遇到因此而报错的情况。

## 3. 绘图

### 3.1. 思路

绘图是相对较为独立的一项功能，且具有与其余代码交叉验证的功能，因此我们在项目初期建立了 `Git Branch draw` 完成了该功能的初步实现。在使用 `GhostHunter 2021` 的数据集简单检验了代码的正确性后，我们将其 `Merge` 入 `master`，并应用于辅助验证及调试项目其余功能的实现情况。在顶点模拟与光学过程的功能完成后，我们利用完整生成的 `data.h5` 对绘图功能进行了进一步地调整和优化：重构了代码结构，调整了图表外观，利用插值增加了图标的分辨率，使其更易阅读。

具体来说，绘图功能在文件 `draw.py` 中实现，主要包括三个部分：

1. 函数 `draw_vertices_density`：绘制顶点体密度随半径分布的图像，用于验证所生成的顶点是否符合均匀体密度分布的要求；

2. 函数 `draw_pe_hit_time` : 绘制光电子接收时间的直方图, 用于展示电子在液闪中激发的光子传播到 PMT 上所产生的光电子在时间上的分布情况;
3. 函数 `draw_probe` : 绘制每个 PMT 对探测器内任意一点处顶点激发所产生的光子中, 被该 PMT 接收到的光子产生的 PE 的电荷数期望 (以后简称 *Probe* 函数) 的极坐标热力图, 用于展示光学过程对光子接受概率分布的影响。

原则上 *Probe* 函数有两种绘制方式: 独立于模拟、只利用 **PETruth** 表绘制 (以后简称为**Data-driven** 的 **Probe** 图) 和正向模拟光子来绘制 (以后简称为**Sim-driven** 的 **Probe** 图)。我们分别实现了两种绘制方式, 并相互交叉验证, 为我们程序的可靠性提供了进一步的支持。

## 3.2. 主要实现方式

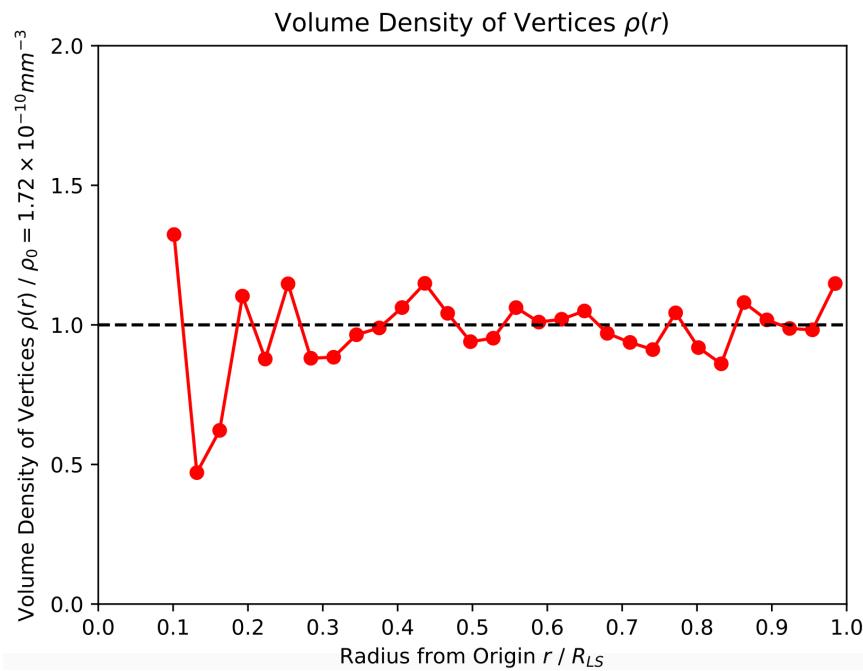
下面分别对这三个功能的具体实现方式和结果做一个介绍。完整图像可通过执行 `make` 生成。

### 3.2.1. 顶点体密度分布图

顶点体分布图的绘制较为简单: 从 **ParticleTruth** 表中读出各顶点的直角坐标  $(x, y, z)$ , 计算得到其与原点的距离  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , 再利用绘制直方图的函数 `plt.hist` 得到顶点数随半径的分布, 最后根据

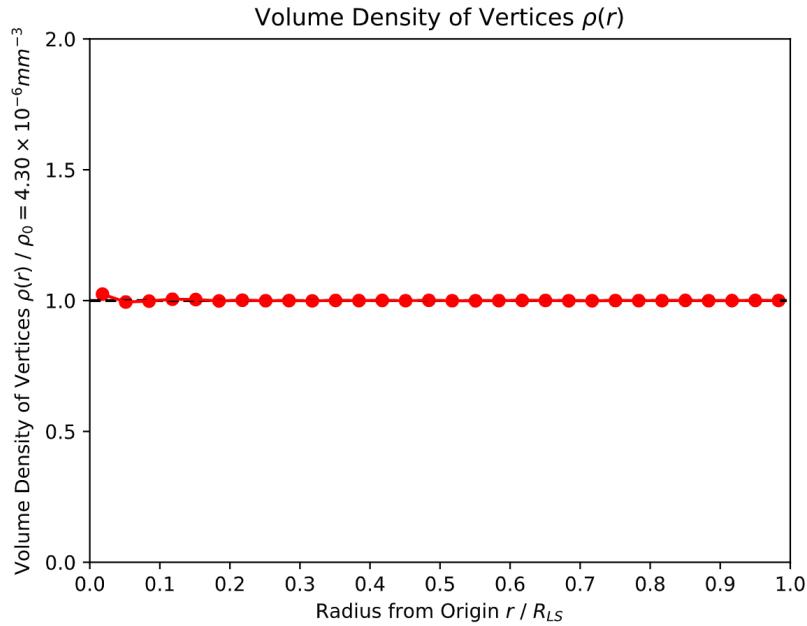
$$\rho(r) = \frac{dN}{dV} = \frac{dN}{\frac{4\pi}{3} d(r^3)}$$

进行体密度修正, 计算得到顶点体密度随半径的分布, 并绘制成为图。在绘图过程中, 为了美观, 我们将纵坐标体密度的单位设置成预期的均匀体密度  $\rho_0 = \frac{N}{V} \approx 1.72 \times 10^{-10} \text{ mm}^{-3}$ , 将横坐标半径的单位设置成液闪球的半径  $R_{LS} = 17.71 \text{ m}$ , 并在  $\rho / \rho_0 = 1$  处绘制了参考线, 使该图更易阅读, 最终得到的样图如下图所示, 可以看到生成的顶点在随机误涨落范围内大致复合均匀分布的要求。



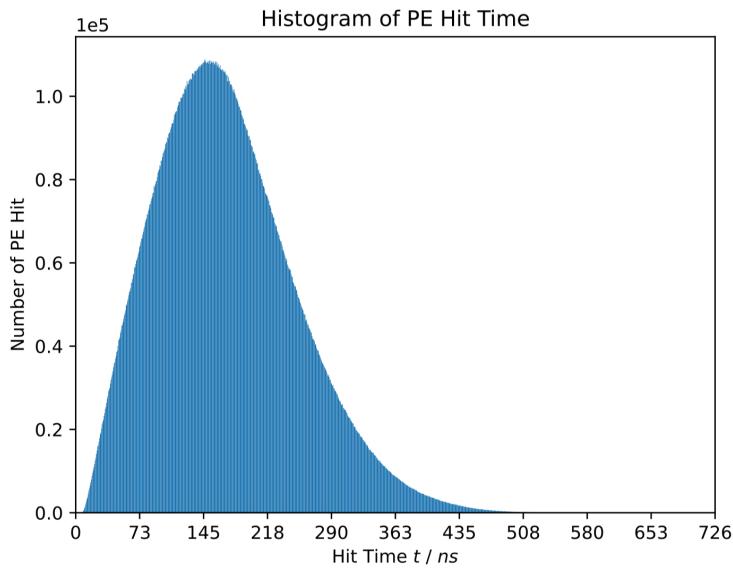
注意! 在进行体密度修正时, 不要使用  $dV = 4\pi r^2 dr$  的近似, 否则会导致在顶点数较少的地方出现与真实体密度相差甚远的偏差, 使用  $\Delta V = V_2 - V_1 = \frac{4\pi}{3} r_2^3 - \frac{4\pi}{3} r_1^3$ , 并将 `plt.hist` 返回的半径 `bins` 取平均后作为横坐标, 可以有效避免这一问题。

我们注意到，根据大数定律，顶点数密度的涨落会随着顶点数的增加而趋于消失。为了验证我们程序的正确性，我们使用同样的程序在顶点数为  $10^8$  时进行了模拟，得到的顶点数分布如下图所示。可以看到顶点的体密度分布非常均匀！只是在原点附近仍有较小偏差，这是因为原点附近生成顶点的概率较小，样本较少，故涨落较大，符合我们的预期。



### 3.2.2. 光电子接收时间直方图

光电子接收时间直方图的绘制更为简单：只需读入 **PETruth** 表，并根据接收时间 *PETime* 利用函数 `plt.hist` 绘制直方图即可。图的纵坐标为相应时间段内接收到的光子个数，横坐标接收时间的单位设置为 ns，最终产生的样图如下图所示。



### 3.2.3. Data-driven 的 Probe 函数热力图

Data-driven 的 Probe 函数图像是绘图功能最困难的部分，主要是因为其涉及到了大量数据的双键值索引，即对 **PETruth** 表的 *EventID* 与 *ChannelID* 两个键值同时进行索引，并将各组 PE 数求和。实现这一功能最直接的方法是 `pandas.DataFrame.groupby` 但是其效率过低。

为了解决这一难题，我们可以利用各 PMT 全同的假设，将 **PETruth** 表的 *EventID* 替换为对应的坐标  $(x, y, z)$ ，将 *ChannelID* 替换为对应的角坐标  $(\theta, \phi)$ ，然后计算得到它们的相对投影极坐标，最后根据这一投影极坐标调用 `plt.hist2d` 计算二维直方图。在几何上，这等价于将所有的 Event 绕 PMT 所在轴旋转到同一个平面内，再将所有 PMT 绕垂直于该平面的过原点的轴旋转至同一方向，最后将对应位置的 PE 数求和。需要注意的是，这一算法依赖于数据的三个性质：

1. 各 PMT 可视作全同；
2. 体系统 PMT 旋转对称；
3. 顶点体密度均匀。

预处理步骤的具体算法实现如下：

```
# divide events & channels
Events, Events_i = np.unique(
    self.petruth['EventID'], return_inverse=True)
Channels, Channels_i = np.unique(
    self.petruth['ChannelID'], return_inverse=True)

print('Replacing Event & Channel with xyz & geo')

# replace ChannelID with corresponding geo
geo_Channels_i = np.array(
    [np.where(self.geo['ChannelID']==a)[0][0] for a in Channels])
pet_geo_i = geo_Channels_i[Channels_i]
pet_geo = np.stack([
    self.geo['theta'][pet_geo_i] / 180 * np.pi,
    self.geo['phi'][pet_geo_i] / 180 * np.pi ], -1)

# replace EventID with corresponding xyz
xyz_Event_i = np.array(
    [np.where(self.simtruth['EventID']==a)[0][0] for a in Events])
pet_xyz_i = xyz_Event_i[Events_i]
pet_xyz = np.stack([
    self.simtruth['x'][pet_xyz_i],
    self.simtruth['y'][pet_xyz_i],
    self.simtruth['z'][pet_xyz_i]], -1)

# replace xyz, geo with polar coordinates
pet_polar = np.stack(
    polar_from_xyz(Ro,
        pet_geo[:, 0],
        pet_geo[:, 1],
        pet_xyz[:, 0],
        pet_xyz[:, 1],
        pet_xyz[:, 2]),
    -1)
```

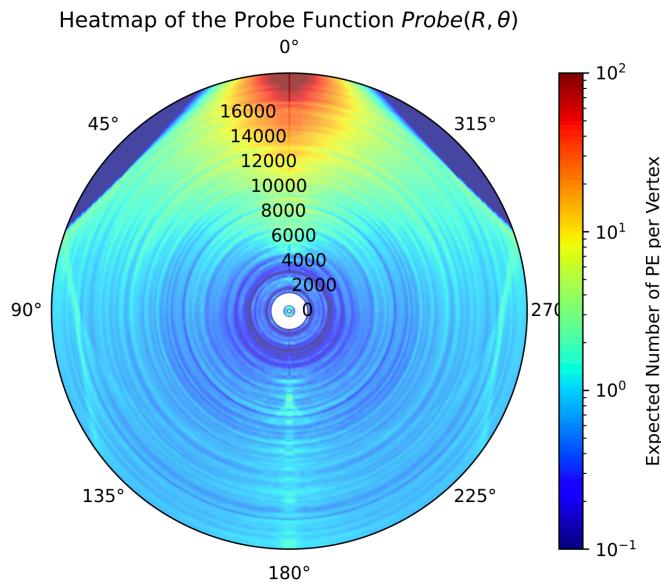
预处理完成后，我们得到了 PE 数在极坐标上每个  $(dr, d\theta)$  小格上的分布，而我们想要绘制的是每个顶点产生的 PE 数期望。由于顶点体密度均匀，故其在极坐标上的分布并非均匀，因此需要根据公式

$$\text{Probe}(r, \theta) = \frac{dN_{PE}}{dN} = \frac{dN_{PE}}{dV} \frac{dV}{dN} = \frac{dN_{PE}}{2\pi r \sin \theta \rho_0 dr d\theta}$$

做出修正，最后利用 `plt.pcolormesh` 绘制出热力图即可。

**注意！** 调用 `np.meshgrid` 和 `plt.pcolormesh` 进行绘图时，需要注意  $r$  方向与  $\theta$  方向在传入函数时的顺序，否则容易得不到正确的图像。由于修正公式中分母出现了  $r, \sin \theta$ ，在执行 `plt.hist2d` 计算直方图数据时，需要避开  $r = 0, \theta = 0, \pi, 2\pi$  附近的点。

为了提升图像的分辨率，我们利用 `scipy.interpolate.interp2d` 进行了插值。同时为了更方便与同行比较，我们采取了对数着色，并选用了 `cmap Jet`。最终的样图如下图所示。完整高清大图（30M）请见 [PDF: Data-driven Probe](#)。



注意到，该图左右上角位置 Probe 很小，代表着 全反射 区域；同时 Probe 函数随着距离 PMT 的位置增长而衰减（ $0^\circ$  附近的红黄渐变区域），对应着光子传播过程中 平方反比 的衰减；而图像下半部分的蓝色亮线，则代表着 一次反射与折射 等光学过程。

另外，我们注意到图像呈现出关于半径的圆环图样，同时接近原点处出现空白，这是由于生成的 Event 数量较少（4000 个），在随机涨落的影响下，Event 数量较少的半径处会变暗，这也是 Data-driven 的 Probe 函数热力图的缺点，它受制于数据的随机性会产生涨落，而下一节所述的 Sim-driven 的 Probe 函数热力图则可以产生平滑的图像，很好地避免这一问题。

### 3.3.4. Sim-driven 的 Probe 函数热力图

与 Data-driven 的 Probe 函数图不同，我们也可以通过模拟顶点均匀发出光子来计算该点光子能到达 PMT 的概率。这部分的光学设计与前面的光学设计不同的是：

1. 光子是不确定的，只有发出光子的位置是确定的
2. PMT 的数量只有一个，无需考虑 17612 个

因此，光学模拟的难点也随之改变。

### 3.3.4.1. double\_search 算法

考虑一个最简单的情况，顶点位于中心，PMT 位于  $(0, 0, 19.5)$  处。不考虑折射（如果有的话，入射角趋近于 0，透射率也有 0.997），那么能击中 PMT 的概率则约等于 PMT 在顶点看来的立体角，这个立体角的大小约为  $4.2 \times 10^{-5}$ 。如果我们只模拟 10000 条光线，那么最小的粒度为  $10^{-4}$  远大于真实的概率，因此最后的状态只有  $10^{-4}$  或 0 两种——这是不能接受的。这个问题的根本在于，我们发出的试探光线大部分都是无用的。

因此，这部分的难点在于：如何选取发射的光线，以提高命中率；同时又保证发出光线的随机性？为此，我们设计了**double\_search** 算法。

这个算法 double 在于：对于一个顶点，会发射两次光线，第一次粗侧，在所有方向上随机发出光子，确定大概能射中 PMT 的范围，这部分范围占总立体角的比例为  $\text{ratio}_1$ ；第二次细测，在第一次选定的范围内均匀发出高命中率的大量光线，命中的光线占发出光线的比例为  $\text{ratio}_2$ ；最终，总的概率就等于  $\text{ratio}_1 \times \text{ratio}_2$ 。这样做能够大大增加精度。

对于用光线模拟光子的行为，由于计算的是期望值，我们认为光线的强度可以代表光子做这一行为的概率。每次初始发射的光线都是等强度的。

### 3.3.4.2. 粗测算法

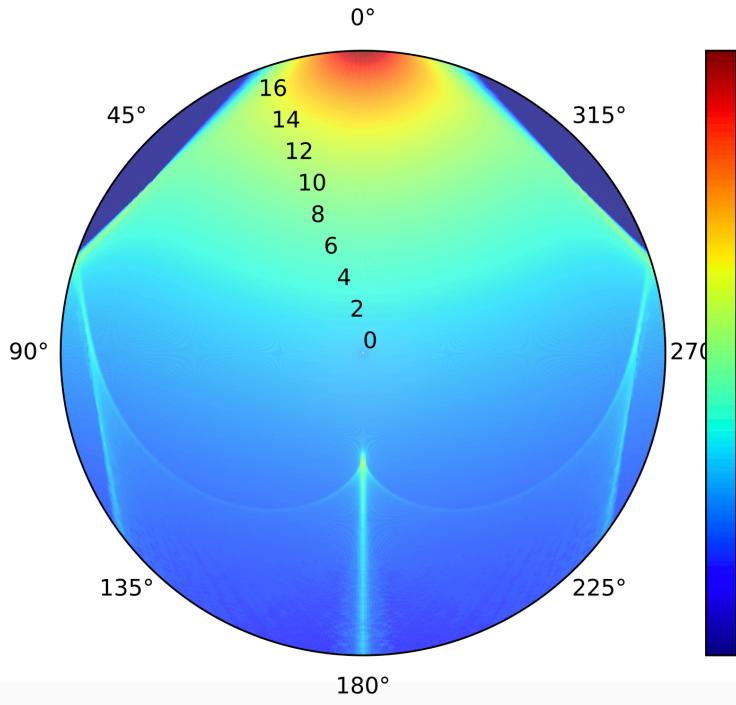
粗测算法的目的，是给出距离 PMT 很近的光线。此处的距离定义为：PMT 中心到光线射线的距离，如果光线朝反方向传播到达不了最近点，则给出负值。我们需要设定一个上限，然后选取距离小于这个上限的光线。对于不同的顶点位置，可能接近的光线会有数量级的差异，因此我们需要自动化调整这个上限，使得接近的光线处于一个合理的范围：既大到能够包含 PMT，又不至于太大而降低命中率。对于调大上限至一定水平仍无法获得足够光线的顶点，可以认为它无法击中 PMT，直接返回概率 0。实际算法中我们调节  $d_{max}$  使得允许的光线数大于 **least\_allow\_num**，后者是一个经验参数，与发出的试探光线数有关。

选取完光线之后，我们还需要对光线进行编码。这里所使用的是常见的球极坐标，并使用了预转动来让光线可能的区域落入坐标合适的地方（取消  $\phi$  的多值性）。

### 3.3.4.3. 细测算法

细测算法的核心在于，如何在有限区域内均匀发射光线。这里采用的方法是等概率密度法，对于  $\theta$  先均匀生成再取  $\arccos$  即可保证概率密度与球面完全随机相同。在仔细选择 **least\_allow\_num** 后，高概率区的命中率可以达到 10% 以上。

最后我们得到了如下 Sim-driven 的 Probe 函数热力图，高清大图请见[PDF: Sim-driven Probe](#)。



从上图中可以看出，Sim-driven 的 Probe 函数图非常细腻，完美地展现了各种光学过程，同时也避免了因为顶点模拟产生的圆环状图样。打开高清大图还可看见以上顶点为圆心的平方反比纹路，即使在较远的蓝色区也可观察到。两种完全独立的 Probe 函数图绘制方法高度一致的结果再次印证了本项目的可靠性。

## 4. 波形生成

### 4.1. 思路

波形生成任务主要包括根据 **PETruth** 表中每个 PE 的 *PETime* 绘制出相应的波形，并对具有相同 *EventID* 相同 *ChannelID* 的波形进行叠加。具体说来，包括三个部分：

1. 波形函数：根据 *PETime* 生成对应时间的波形；
2. 噪声函数：模拟电子学噪声；
3. 波形叠加：将 *EventID* 相同 *ChannelID* 相同的波形叠加；

而在实现过程中，由于生成得到的总 **Waveform** 表非常大，保存成 `data.h5` 文件时大约要占据 **40G** 的空间（4000 顶点），这也导致内存不足以支撑对整个 **Waveform** 表的一次性处理，因此还面临第四个难题：

4. 性能优化：多进程处理与文件写入。

### 4.2. 主要实现方式

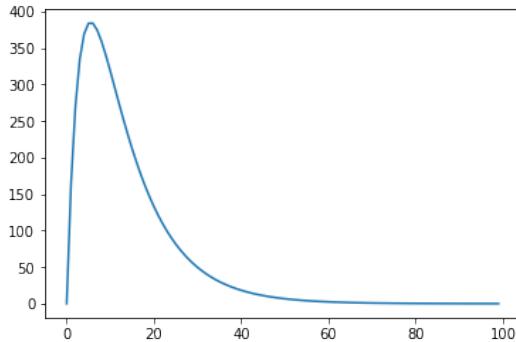
波形部分的功能在文件 `scripts/genWaveform.py` 中实现。

#### 4.2.1. 波形函数

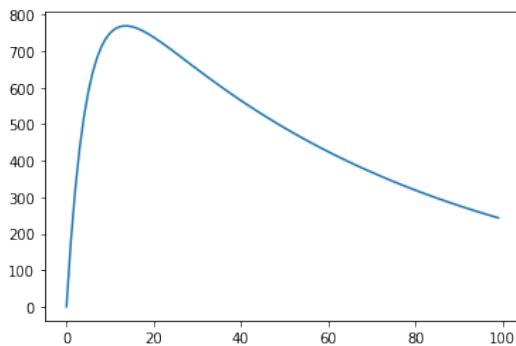
对于模型函数，我们唯象地用一个双指数函数来建模，对于一个 0 时刻激发的波形，有

$$\text{Waveform}(t) = \begin{cases} A \exp\left(-\frac{t}{\tau_d}\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_r}\right)\right), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

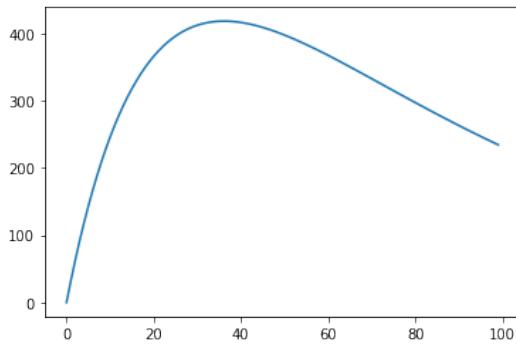
这个波形的大致图像为（取  $A = 1000, \tau_d = 10\text{ns}, \tau_r = 5\text{ns}$ ）



通过公式分析以及尝试，我们发现参数  $\tau_d$  主要决定了整体波形的宽度和衰减速率，如增大  $\tau_d$ （取  $A = 1000, \tau_d = 70\text{ns}, \tau_r = 5\text{ns}$ ）可以得到一个更宽、衰减更慢的波形：



而参数  $\tau_r$  则主要决定了峰值的位置，如相比上图增大  $\tau_r$ （取  $A = 1000, \tau_d = 70\text{ns}, \tau_r = 30\text{ns}$ ）可以得到一个更偏右的峰值：



在实验中我们选取了  $\tau_d = 10\text{ns}, \tau_r = 5\text{ns}$ ，函数的设计允许不同参数的选取，可以修改生成相应的数据。

另外为了优化加速，我们采用了 `numexpr` 包进行加速，具体实现如下：

```
def double_exp_model(t, ampli=1000, td=10, tr=5):
    ...
    双指数模型 f(t; ampli, td, tr)

    输入：t, 时间；

    参数：
    ampli=1000, 波形高度；
    td=10ns, 控制整体衰减时间；
    tr=5ns, 控制峰值位置；

    返回：
```

```

f(t) = ampli*exp(-t/td)*(1-exp(-t/tr)), t > 0
      0,                                     t <= 0
...
return ne.evaluate(
    '(t > 0) * ampli * exp(- t / td) * (1 - exp(- t / tr))')

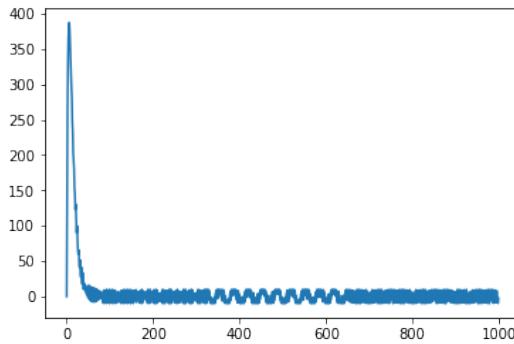
```

在同时计算  $10^4$  个波形时，`numexpr` 比纯 `numpy` 快 6 倍左右（使用 `%timeit` 测得 `numexpr` 用时  $(38.9 \pm 0.5)$ ms, `numpy` 用时  $(251 \pm 4)$ ms）。

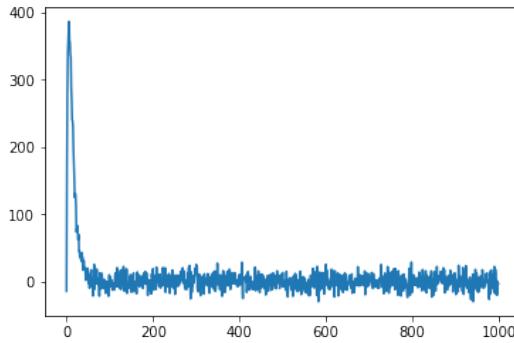
## 4.2.2. 噪声函数

我们实现了两种不同的噪声函数：**正弦噪声** 和 **Gauss 噪声**。综合考虑了计算速度和模拟效果，我们最终选择了后者作为默认的设置。

**正弦噪声** 采用周期无理的正弦函数的采样，保证了噪声函数在很大的区域内积分趋于零，通过调整周期参数，我们最终选取了周期  $T = \pi \times 10^{-30}$  的正弦函数，而其振幅  $A_{\sin}$  由额外参数  $\text{ratio} = \frac{A_{\sin}}{A}$  控制。其图像大致如下（ $\text{ratio} = 0.01$ ）：



**Gauss 噪声** 由于正弦噪声受其周期性的制约，并不能很好地模拟随机的电子学噪声，故我们默认采用了利用 `numpy.random.normal` 按 Gauss 分布随机抽样的噪声。为了保证其长时间积分趋于零，我们取其均值为零，并用额外参数  $\text{ratio} = \frac{\sigma}{A}$  控制其标准差  $\sigma$ 。其图像大致如下（ $\text{ratio} = 0.01$ ）：



可以看到其模拟效果比正弦噪声好得多。

**噪声控制** 为了实验的控制变量，我们设计了噪声控制开关 `controlnoise: Bool`：开关打开时，我们将不同 Event 对应 Channel 上的噪声设置为完全相同，而同一 Event 内部不同 Channel 之间的噪声则保持随机；开关关闭时，我们生成所有波形的噪声都是随机的。使用噪声控制不仅可以给不同 Event 设置相同的噪声环境以控制变量，更可以提升波形处理的速度（15min 到 7min），因为不再需要每个波形随机生成噪声了。

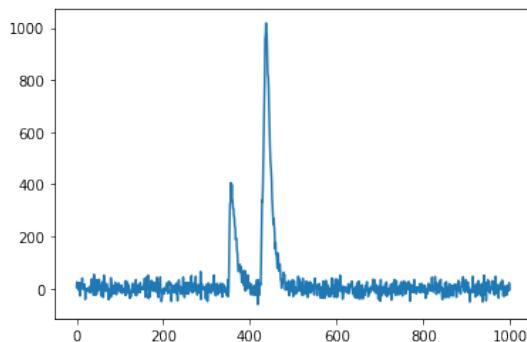
### 4.2.3. 波形叠加

波形叠加需要将同 Event 同 Channel 的波形筛选出来，并进行叠加，实现这一功能最直接的做法是使用 `pandas.DataFrame.groupby`。然而，面对极大的数据量(40G)，转化为 `pandas` 的做法对内存消耗过大且效率低下，而简单的 `for` 循环则效率更低。因此，我们面临着实现纯 `numpy` GroupBy 功能的需求。

参考[Stack Overflow](#)，我们用 `numpy` 实现了单键值的矢量化 GroupBy 叠加，主要实现如下（其中 `Eindex` 为 `np.unique` 对 EventID 的切割）：

```
# numpy groupby
# ref:
# https://stackoverflow.com/questions/58546957/sum-of-rows-based-on-index-with-numpy
Channels, idx = np.unique(
    PETruth[Eindex[i]:Eindex[i+1]]['ChannelID'],
    return_inverse=True)
order = np.argsort(idx)
breaks = np.flatnonzero(np.concatenate(([1],np.diff(idx[order]))))
# 同Channel波形相加
result = np.add.reduceat(Waveform[order], breaks, axis=0)
```

这一实现无论在效率还是内存占用上，都远优于 `pandas` 的实现（`pandas` 实现共需约 40min，而本实现只需约 7min）。波形叠加的效果如下图所示：



### 4.2.4. 性能优化

由于波形数据量很大 (40G)，对波形的处理以及文件操作的效率要求很高，其处理时长是整个项目效率的瓶颈所在。除了上一节中提到的纯 `numpy` GroupBy 外，我们还进行了以下优化，将文件处理耗时从约 40min 降低到了约 7min：

1. 以 EventID 分块处理。由于整体处理所需内存过大，必须分块处理，按 EventID 分块处理同时可以有效地方便 GroupBy 波形叠加的工作。
2. 拼接 Waveform 表时采用 `np.empty` 初始化后赋值。相比反复 `np.append`，这样做可以有效避免 `numpy` 反复调整内存地址，维持 `np.ndarray` 的连续内存优势，大大提升处理速度。而相比 `np.zeros` 初始化效率更高。
3. 前置时间采样与噪声生成工作。在对 Event 循环的过程中，可以再循环前完成时间采样与噪声生成的工作，这样不仅可以实现 噪声控制 的功能，还可以有效避免每次循环都重新采样生成噪声的问题，大大提升运行效率。

4. 多进程文件分块读写。由于波形数据量过大，无法全部存入内存中，考虑到 IO 效率、文件压缩效率与计算效率的匹配，必须恰当地分块处理、分块读写。为此，我们采用了 `h5py` 数据集的 `resize` 功能，动态调整数据集长度并写入数据。同时，为了多进程计算，我们需要构造计算进程与文件读写进程之间的通信机制。参考了[Stack Overflow](#)，我们采用了 `multiprocessing.queue` 实现了这一功能。代码架构如下：

```
# 分Event多进程生成Waveform
# ref:
# https://stackoverflow.com/questions/15704010/write-data-to-hdf-file-using-
multiprocessing

def getWF_mp(inqueue, output):
    """
    波形处理函数
    ...
    # ... 生成波形WF
    output.put([1, WF], block=False) # 放入output队列等待写入文件

def write_file(output):
    """
    文件写入函数
    ...
    # ... 打开文件
    while True:
        # ... 获取待写入WF
        if flag: # 判断是否已获得所有WF
            # 扩大Waveform表
            wfds.resize(wfds.shape[0] + len(WF), axis=0)
            # 写入WF
            wfds[-len(WF):] = WF
        else:
            # 写入完成
            if len(WF) > 0:
                wfds.resize(wfds.shape[0] + len(WF), axis=0)
                wfds[-len(WF):] = WF
            break
        # ... 关闭文件

    # 待写入文件队列
    output = mp.Queue()
    # 待执行任务队列
    inqueue = mp.Queue()
    # 进程表
    jobs = []
    # 写入文件进程
    proc = mp.Process(target=write_file, args=(output, ))
    proc.start()
    for i in range(num_processes):
        # 生成WF进程
        p = mp.Process(target=getWF_mp, args=(inqueue, output))
```

```

jobs.append(p)
p.start()
for i in range(len(Eindex)-1):
    # 分配任务
    inqueue.put(i)
for i in range(num_processes):
    # 结束任务
    inqueue.put(sentinel)
for p in jobs:
    p.join()
# 结束文件写入
output.put([0, None], block=False)
proc.join()
pbar_write.close()
pbar_getwf.close()

```

但是多进程实现的调度开销较大，经过优化虽然能够实现 100M/s 左右的 IO 速度，但调度上的耗时较大，最终在笔记本上的测试结果与单进程不相上下。

## 5. 优化经验总结

### 5.1. 大体思路

从最初的预估时间数十天，到现在在笔记本上能 10 分钟内跑完全程，我们团队为之付出了大量的努力。在无数次失败后，我们总结出了一些优化上的经验。优化不是乱调包，而需要遵循一定的规律逐步前进。当然最重要的，Premature optimization is evil of everything，先跑起来再谈优化。

### 5.2. 架构与算法

整个程序的架构是对性能影响最大的，远大于其它细节。一个好的架构不仅性能卓越，更是会拥有良好的扩展性。以这次 JUNO 大作业举例，我们最初打算先计算好 Probe 函数（以为能用简单的方法计算出来），再应用到每个 event 上（double\_search 算法就是在那时设计出来的，现在沦落为专用画图函数）。经过数次优化后，整个光学时间能控制在 5 分钟以内，3700w 光子打击 PMT 只需要 3s 计算时间更是令人大跌眼镜。但是这个架构的问题在于：

1. 所有的概率都是不精确的，要想提高精度必须以  $O(n^2)$  的复杂度增加精度
2. 由 1 导致一个光子打到所有 PMT 上的概率之和 > 1，甚至可能达到 1.2
3. Probe 函数只能给出光子与 1 个 PMT 的关系，无法完成 Bonus 中 PMT 反射到 PMT 的过程
4. 应用到 3700w 光子的 Probe 函数由插值得到，但真实计算 double\_search 要模拟的光线太多，其实已经远超 3700w
5. 以及，要判断每个究竟击中哪个 PMT 来生成 PETruth，这个步骤非常耗时间

上述的 2 与 3 点导致我们最终放弃这个架构，转而跟踪每个光子。跟踪光子的架构完美地解决了以上 5 个问题：

1. 只有折射与反射的过程有概率，其它过程没有任何试探或随机
2. 一个光子要么打中 PMT 要么没有，光子数不会增加
3. 跟踪光子可以同时考虑与 17612 个 PMT 的关系
4. 就算考虑那么多关系，要模拟的光线数还是远小于计算 Probe 函数
5. 跟踪完就可以写 PETruth，无需重新判断

确定了架构，接下来就是算法。追踪光子的难点在于要考虑一个光子究竟能射中 17612 个 PMT 中的哪一个，以及复杂的几何关系。如果像原来那样计算距离来判断能否击中，其开销是  $O(n)$  量级的，追踪 10000 光子就会占满我的内存。因此，我们在调研之后使用了 `scipy.spatial.KDTree` 算法，将复杂度降低至  $O(\log(n))$ ，一次能追踪 4000000 光子。当然 KDTree 不是万能的，具体的魔改请看 Bonus3 的介绍。总而言之，算法对于性能的改善是十分显著的，远大于对过程细节的优化。

快速的算法的宗旨，应该是“在一个指令内做更多的事”。因此即使 Numpy 有时用不满多核，速度也比多进程快。

## 5.3. Multiprocessing

当然，并非所有的算法都能完成 Numpy 化，比如我们的 `double_search`。在这种情况下，强行多进程，用满核心确实能显著提高性能，比如 2 ~ 3 倍，但远小于纯 Numpy 化带来的提升，可能有几百倍。而且多进程也存在它的问题：

1. 进程调度需要开销
2. 进程数目难以选择，`processes=cpu_count()` 很有可能造成堵塞，反而降低性能
3. 对 CPU 敏感，在我们的测试中 AMD 处理器能承载的 进程/核心数 比小于 Intel 处理器
4. 通信复杂，且容易报错，比如我们的 Waveform 生成就出现过队列爆满导致整个程序被 kill

因此，multiprocessing 擅长处理的是难以 Numpy 化，且不太需要通信的任务，将其强行并行化。

## 5.4. Numba

再接下来需要考虑才是 Numba。Numba 能实现 jit，优化简单代码的速度，对部分代码还能使其并行计算；缺点在于要把代码改成能通过 Numba 的形式需要做大量的工作，而性能提升可能并不显著。比如我常用的 `np.einsum`, `np.clip` Numba 就不支持，所以只能把它们替换成其他函数。如果是本身就很快的代码，加上编译用时的总时间可能比无 Numba 版还慢。

我们唯一一次有效地使用 Numba 是在老架构中增速生成 PETruth 的 for 循环，增速了两倍。这个任务是纯赋值，但是难以并行，因此只能硬碰硬地加速每一个循环。但这个行为在更改架构后自动消失了，没有地方再有丑陋的 for 循环。

## 5.5. 细节

剩下的都是更细枝末节的工具，可能优化了半天也只能提速 10%。比如用 `np.einsum` 简化 `np.sum+np.prod`，用 `numexpr` 来处理复杂表达式，减少中间过程。绝对不应该在过早的时间将精力花在这种事情上，这只能锦上添花，不可能雪中送炭（指把一天跑不完的程序优化到 20 分钟内）。

## 5.6. 分析工具

最好用的工具是 `breakpoint()` 函数，能够在需要的地方停下，并查看任何需要的量。

当需要查看每个循环中的某个量时，简单的 `print(f'{value}')` 函数其实就很好用。

为了监测循环时的运行情况与时间消耗，使用 `tqdm` 包的进度条极为方便。而在多进程循环中，可以用 `tqdm.update()` 等函数手动更新进度条。

一个简单好用的工具是 `timeit`。当你确定了数据的大小，而不知道哪种方法更快时，可以迅速地在 ipython 中用 `timeit` 测量两种方法的速度，而无需用 `time.time` 加上 for 循环。

对于更加复杂的函数，可以用 `cProfile` 和 `line_profiler` 来分析每个函数、每一行的用时。我们的程序每个函数执行功能较多，用 `cProfile` 粒度太粗，但其实还是用它用得多，因为把最大头的几个函数优化了速度就已经非常快了（

## 6. 加分项目: Bonus3 进阶光学

### 6.1. 概述

在追踪光子的架构下，我们很容易就能实现 PMT 的反射效应。所需要做的只是多增加一些条件。

### 6.2. 条件分支

在不考虑 PMT 反射的情况下，可能到达 PMT 的光子只有两种情况：通过液闪边界一次折射后到达，或者一次反射+一次折射后到达。

而在考虑 PMT 反射的情况下，条件分支就变得复杂了起来。判断流程如下：

```
在液闪内传播，到达液闪边界
if 概率=透射：
    光子透射出去
    判断能否打到PMT
    if 概率=透射：
        光子进入PMT，写入PETruth
    else：
        考虑被PMT反射的光线
        if 到中心的距离>Ri:
            考虑全程在液闪内的传播
        else：
            模拟重新进入液闪
            当做从液闪内发出的光子，重新计算全程，且不能再反射
    else:
        光子反射，且不能再反射，如果可以下次必须透射
        当做从液闪内发出的光子，重新计算全程
```

可以发现，其中有许多“回溯”的过程，把新产生的光子放入老的规则中重新执行；但每次执行又有区别，比如有些可以反射而有些再也不能反射。我们将以上的内容浓缩为以下的函数，并在其中加入各种 flag 来传递控制信息：

```
transist(coordinates, velocities, times, events, can_reflect, must_transist=False)
```

输入在液闪中的光子，模拟其下一次到达边界的过程。`must_transist` 表示是否要在能透射的时候忽略反射。

```
hit_PMT(coordinates, velocities, times, events, can_reflect, fromPMT=False,
must_transist=False)
```

输入在水中的光子，模拟其在 PMT 表面的过程。`fromPMT` 表示它是否来自另一个 PMT 的反射，这与接下来的算法实现有关。`must_transist` 表示是否要在能透射的时候忽略反射。

```
find_hit_PMT(coordinates, velocities, fromPMT=False)
```

输入在水中的光子，返回能够打击到 PMT 的光子序号与其所对应的 PMT 序号。`fromPMT` 表示它是否来自另一个 PMT 的反射，这表示了不同的物理情况，对内部参数有非常大的影响。

```
go_inside(coordinates, velocities, times, events)
```

输入确定能重新返回液闪内的光子，模拟其进入液闪后的状态，将透射后的光子传递给 `transist` 重新模拟。

```
write(events, PMT_indexes, times, PETruth)
```

将给定的击中 PMT 事件写进 `PETruth`。

此架构完全有能力计算更多次的反射，只需要提高 `can_reflect` 的数值即可（上交的版本为了简便，只把它当做 `bool` 类型处理）。`must_transist` 是为了符合助教定义的“一次反射”而加入的，导致代码的臃肿。

## 6.3. 算法实现

上述函数中最重要的就是 `find_hit_PMT`，寻找给定光线究竟能击中哪个 PMT。将这个问题抽象化，可以发现难点如下：

1. 一条光线要如何与 17612 个 PMT 判断距离？
2. 如果一条光线能击中多个 PMT，如何选择真正击中的那第一个？

第一个问题的答案就是 KDTTree，但是单纯的 KDTTree 也有它的缺陷。在  $R = R_o = 19.5m$  球面上最近的 PMT 并不一定是该光子能打到的 PMT，而真正能打到的在球面上的距离可能又并不是最近的。

第二个问题在 KDTTree 下看起来无解，因为 KDTTree 只能表达点与点之间的距离。我们需要更多的判断手段，来表征光线的前进，光线上的点与点之间的先后顺序。

因此，基于我们算法的速度优势，我们选择如下的方法来模拟光线的前进：给定起点与终点，在其中均匀分割出点，计算每个点与最近 PMT 的距离，如果有第一个点到最近 PMT 的距离小于 `r_PMT`，那么这个 PMT 就是真正会打中的那个。

上述模拟中有一个参数是可变的，那就是均匀分割点的数量。对于不同的物理过程，这一数量会有明显的不同。下面详细叙述两种不同的物理过程：

### 1. 从液闪内出射

PMT 球可能存在的范围为  $R = R_o - r_{PMT}$  与  $R = R_o + r_{PMT}$  之间的球壳，从  $R = R_i$  球面上发出的光线最多划过这个球壳的长度为

$$l = \sqrt{(R_o + r_{PMT})^2 - R_i^2} - \sqrt{(R_o - r_{PMT})^2 - R_i^2} = 1.2166m$$

这个长度大约能包含  $l/r_{PMT} = 4.79$  个 PMT 的半径，我们将插值点数量扩大一倍，取 10 个，可以基本保证存在点落入 PMT 球体内。

### 2. 从另一 PMT 反射，且不可能进入液闪球

这样出射的光线可能在路途中遇到更多的 PMT，因为它的情况非常复杂，需要尽可能多的增加分割点以提高准确度；被 PMT 反射的光子数也非常少，我们可以不计代价地去加强精度。光线能走过的最长距离为

$$l = 2\sqrt{(R_o + r_{PMT})^2 - R_i^2} = 17.50m$$

这个长度大约能包含  $l/r_{PMT} = 68.9$  个 PMT 的半径，插值点可以取 1000，且不能包含光子的出发点，因为那个点到最近 PMT 的距离就是一个  $r_{PMT}$ 。

具体的实现使用了大量的 numpy 内置函数来加快速度，高维的运算想起来真的很烧脑（

## 6.4. 数据验证

为了清楚地表现 PMT 反射带来的效果，我们截取了计算过程中的几个特征量来体现算法的有效性。

```
can_transimit = 3767808
incidence_angles = 0.7590086056676458, var = 0.11343508336024014
emergence_angles = 0.6381675576033015, var = 0.06820045592458017
R_average = 0.024907409148468743
need_transmit = 3035641
need_reflect = 77437
go_into_LS = 56924
```

`can_transimit`: 本次计算接收到的总光子

`incidence_angles`: 平均入射 PMT 角度

`emergence_angles`: 平均折射 PMT 角度

`R_average`: 反射系数的平均值

`need_transmit`: 能够折射进入 PMT 的光线数

`need_reflect`: 被 PMT 反射的光线数

`go_into_LS`: 反射后会重新进入液闪的光线数

可以看到反射系数只有 $2\% \sim 3\%$ ，对光子的影响非常小，因此原来忽略 PMT 反射的近似是合理的。