

**THÈSE**  
PRÉSENTÉE À  
**L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX**  
ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET  
D'INFORMATIQUE  
Par **Florent Le Gac**  
POUR OBTENIR LE GRADE DE  
**DOCTEUR**  
SPÉCIALITÉ : Informatique

---

**Quelques problèmes d'énumération autour des matrices à  
signes alternants**

---

**Soutenue le : 06 Juillet 2011**

**Après avis des rapporteurs :**

Frédérique Bassino .....	Professeur
Gilles Schaeffer .....	Directeur de recherche

**Devant la commission d'examen composée de :**

Xavier Viennot .....	Président
Frédérique Bassino .....	Rapporteur
Dominique Gouyou-Beauchamps	Examineur
Gábor Hetyei .....	Examineur
Robert Cori .....	Directeur de thèse
Philippe Duchon .....	Directeur de thèse

- 2011 -



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Présentation des objets étudiés</b>	<b>9</b>
2.1	Matrices à signes alternants . . . . .	9
2.2	Triangles Gog . . . . .	12
2.3	Configurations de boucles compactes . . . . .	13
2.4	Diagrammes de cordes . . . . .	15
<b>3</b>	<b>MSAs à nombre fixé d'entrées négatives</b>	<b>19</b>
3.1	Connexité et mélanges de MSAs . . . . .	20
3.1.1	Connexité et degré d'une entrée non nulle de MSA . . . . .	21
3.1.2	Mélange de MSAs . . . . .	22
3.1.3	Formule de comptage des mélanges . . . . .	25
3.2	Contraction de MSAs . . . . .	27
3.2.1	Encadrement des tailles de MSAs contractées . . . . .	28
3.2.2	Nombre de MSAs associées à une contraction . . . . .	31
3.2.3	Formule de comptage des MSAs selon leurs entrées négatives . . . . .	33
3.2.4	Comportement asymptotique de $A_{n,k}$ . . . . .	34
3.3	Comptage de MSAs contractées . . . . .	34
3.3.1	Squelettes de MSAs . . . . .	35
3.3.2	Multiplicité d'un squelette . . . . .	36
3.3.3	Matrices de multiplicités . . . . .	40
3.3.4	Calcul du nombre de MSAs contractées . . . . .	44
3.4	Formules obtenues . . . . .	47
3.4.1	Formule explicite de $ A_{n,k \leq 7} $ . . . . .	47
3.4.2	Formules explicites de $ C_{3k-a,k} $ . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Comptage de triangles monotones sans sauts</b>	<b>55</b>
4.1	Triangles sans sauts et triangles binaires . . . . .	55
4.1.1	Construction de triangles binaires sans sauts . . . . .	57
4.2	Méthode de minoration du nombre de triangles sans sauts . . . . .	59
4.2.1	$k$ -portions de triangle binaire . . . . .	60
4.3	Rectangles binaires sans sauts . . . . .	61

4.3.1	Construction itérative des rectangles binaires . . . . .	62
4.4	Premiers pas d'une preuve totalement bijective . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Motifs dans les diagrammes de cordes</b>	<b>67</b>
5.1	Motifs de diagrammes de cordes . . . . .	67
5.2	Représentation des composées de transitions . . . . .	68
5.2.1	Règle d'application à un diagramme de cordes . . . . .	70
5.2.2	Règle de composition des graphes de transitions . . . . .	71
5.3	Graphe de transition . . . . .	71
5.4	Marche aléatoire sur le graphe des diagrammes de cordes . . . . .	73
5.5	Langage sur les transitions . . . . .	74
5.6	Génération aléatoire et couplage par le passé . . . . .	74
5.6.1	Principe général du Couplage par le passé . . . . .	75
5.6.2	CFTP appliqué aux diagrammes de cordes . . . . .	75
5.6.3	Marche aléatoire sur les composées de transitions . . . . .	76
5.7	Probabilités d'apparition d'un motif dans un diagramme . . . . .	76
5.7.1	Obtention de $P_{m,n}$ . . . . .	77
5.7.2	Encadrement de $P_{m,n}$ . . . . .	79
5.8	Résultats d'encadrement . . . . .	82
5.8.1	Motif $()$ . . . . .	82
5.8.2	Motif $(...)$ . . . . .	83
5.8.3	Motif $()()$ . . . . .	83
5.8.4	Motif $(( ))$ . . . . .	83
5.8.5	Motif $(( ))()$ . . . . .	83
5.8.6	Motif $(( ( )) )$ . . . . .	84
5.8.7	Motif $(( ( ( )) ) )$ . . . . .	84

# Chapitre 1

## Introduction

La conjecture de Razumov et Stroganov [50], récemment démontrée par Cantini et Sportiello [8], établit une relation forte entre les configurations de boucles compactes (en bijection avec les matrices à signes alternants) et les diagrammes de cordes (en bijection avec les mots de Dyck). Il existe une distribution  $\pi_n$ , que nous définissons par la suite, sur l'ensemble  $D_n$  des diagrammes de cordes, et une injection  $\phi$  allant des configurations de boucles compactes (FPLs) de taille  $n$  vers les diagrammes de cordes de taille  $n$ , qui associe à tout FPL  $F$  un unique diagramme de cordes  $\phi(F)$ . Si on note  $F_n$  l'ensemble des FPLs de taille  $n$ , le théorème de Cantini et Sportiello s'énonce ainsi :

**Théorème 1** (Cantini, Sportiello). *Etant donné une taille  $n$  et un diagramme de cordes  $c \in D_n$ , la probabilité  $\pi_n(c)$  est donné par :*

$$\pi_n(c) = \frac{|\{F \in F_n, \phi(F) = c\}|}{|F_n|}$$

Des exemples de configuration de boucles compactes et de diagrammes de cordes se trouvent sur les figures 2.3 et 2.4.

Pendant la dizaine d'années séparant l'énoncé de la conjecture de Razumov et Stroganov et sa preuve en 2010, l'étude des diagrammes de cordes associés aux FPLs a donné de nombreux résultats basés sur la présence de “motifs” dans les diagrammes de cordes. Par exemple, Zinn-Justin [63] donne une preuve de la conjecture pour certains cas particuliers de diagrammes de cordes formés d'arches imbriquées en établissant une correspondance avec des partitions planes. Caselli, Krattenthaler, Lass and Nadeau [10] donnent également des résultats énumératifs concernant certains motifs de diagrammes de cordes en étudiant leurs FPLs associés. De nombreux autres résultats ont été obtenus, voir par exemple [65], [9], [16].

La relation prouvée par Cantini et Sportiello permet donc de relier des résultats prouvés sur les diagrammes de cordes issus de FPLs à d'autres résultats obtenus directement en étudiant les diagrammes de cordes et la définition de leur distribution

$\pi_n$ . En particulier, une partie de nos résultats consiste à étudier une chaîne de Markov définie sur les diagrammes de cordes et dont la distribution stationnaire est  $\pi_n$ . Nous donnons une construction permettant de calculer, pour n'importe quel "motif"  $m$ , un encadrement de la probabilité qu'un diagramme tiré selon  $\pi_n$  contienne le motif  $m$ . Ces encadrements s'inscrivent dans le cadre de travaux tels que [20], [9]. Le temps de calcul de cet encadrement, comme sa précision, dépend d'un paramètre entier  $N$ . De plus, l'encadrement que nous calculons est valable pour toute taille  $n$  strictement supérieure à  $N$ .

Les FPLs sont également en bijection avec de nombreuses familles d'objets, en particulier les matrices à signes alternants (MSA), qui sont une généralisation des matrices de permutations. Nous donnons certaines de ces bijections dans le chapitre suivant, ainsi que la définition de certaines de ces familles. Les matrices à signes alternants sont des matrices carrées dont les entrées valent 0, 1 ou  $-1$ . De plus, les entrées non nulles doivent alterner en signe sur chaque ligne et chaque colonne. Nous étudions les MSAs en fonction de leur nombre de  $-1$  et leur taille. Nous définissons le mélange d'un ensemble de MSA, permettant de compter certaines familles de MSA. Cela nous permet d'obtenir une formule générale de comptage des MSAs en fonction de leurs tailles et de leur nombre de  $-1$ , dépendant d'un nombre fini (linéaire selon le nombre de  $-1$ ) de coefficients. L'interprétation de ces coefficients nous permet d'obtenir l'asymptotique, pour un nombre de  $-1$  fixé, lorsque la taille tends vers l'infini. Nous développons également des outils permettant de compter des familles de MSAs dites contractées, permettant des algorithmes efficaces de comptage et d'énumération de MSAs selon divers paramètres. Il est à noter que cette étude concerne des MSA dont le nombre de  $-1$  est petit par rapport au nombre maximal de  $-1$  qu'une MSA de taille fixée peut contenir. Notre travail vient donc compléter des travaux tels que [28],[27], [15].

Nous étudions également une nouvelle famille de MSA dite "à motifs exclus" introduite par Ayer, Cori et Gouyou-Beauchamps [5]. Cette notion vient généraliser la notion de permutation à motifs exclus et se définit de manière très simple sur les triangles Gog, en bijection avec les MSA. Les MSA "à motifs exclus" sont exactement les triangles Gog sans sauts (deux valeurs consécutives d'une même colonne du triangle Gog doivent différer d'au plus 1).

Nous répondons à une question de Ayer consistant à minorer le nombre de triangles sans sauts. Dans ce but, nous montrons une décomposition des triangles sans sauts impliquant une relation entre le nombre de triangles sans sauts de taille  $n$  et le nombre de triangles sans sauts de taille  $n - k$ , où  $k$  est un paramètre entier positif. Afin d'exploiter cette relation nous définissons les rectangles sans-sauts, qui sont des tableaux rectangulaires vérifiant les mêmes conditions de croissance sur leurs lignes et colonnes que les triangles sans-sauts et nous conjecturons une formule permettant de les compter. Ce travail aboutit à des formules de minoration du nombre de triangles sans-sauts.

**Plan :**

Dans un premier chapitre, nous commençons par définir les objets que nous étudions ainsi que les nombreuses relations entre ces objets.

Le deuxième chapitre concerne l'étude des MSA selon leur nombre de  $-1$ . Nous y donnons une méthode de décomposition des MSA par composante connexe ainsi qu'un algorithme de mélange de MSA par bloc, permettant de dénombrer certaines familles de MSAs obtenues par mélange de MSA plus petite. Ces techniques permettent d'obtenir une formule de comptage du nombre de MSA selon leur taille et leur nombre de  $-1$  ainsi que l'asymptotique du nombre de MSA ayant un nombre de  $-1$  fixé lorsque la taille tends vers l'infini. Nous définissons également les squelettes de MSA qui permettent de mettre en oeuvre des algorithmes efficaces de comptage de MSA selon leur nombre de  $-1$ . On obtient alors des formules explicites donnant le nombre de MSA de taille quelconque, mais ayant au plus 7 entrées négatives.

Le troisième chapitre traite du nombre de MSA "à motifs exclus", basé sur l'étude des triangles sans sauts associés. Nous donnons une décomposition des triangles sans sauts aboutissant à des formules de minoration récursives du nombre de MSA "à motifs exclus".

Dans un dernier chapitre, nous traitons de problèmes liés au comptage du nombre de FPL présentant un motif donné sur son diagramme de corde associé. Une technique basée sur l'étude du couplage par le passé (voir [44], [59], [43]) nous permet d'obtenir des encadrements de la probabilité de rencontrer un motif donné dans un diagramme de cordes lu sur un FPL aléatoire.





# Chapitre 2

## Présentation des objets étudiés

### 2.1 Matrices à signes alternants

Les matrices à signes alternants (MSAs) ont été introduites par Mills, Robbins et Rumsey [34]. Les MSAs sont en bijection avec de nombreuses familles d'objets combinatoires telles que les configurations de boucles compactes ou les orientations eulériennes de grilles carrées. Ces objets sont notamment présentés dans un article de Propp [42], nous rappelons ici quelques unes des bijections existantes avec les MSAs.

**Définition 1** (Matrice à signes alternants). *Une MSA de taille  $n$  est une matrice carrée  $n \times n$  à valeur dans  $\{-1, 0, 1\}$  satisfaisant les conditions suivantes :*

1. *La somme des valeurs d'une ligne ou d'une colonne vaut 1.*
2. *Les entrées non nulles d'une ligne ou d'une colonne alternent en signe.*

**Exemple 1.** *La Figure 2.1 montre une MSA de taille 8 avec 3 entrées négatives (les 1 et  $-1$  ont été remplacés respectivement par des  $+$  et des  $-$ , tandis que les zéros de la matrices sont représentés par un point).*

.	.	+	.	.	.	.	.
+	.	-	.	+	.	.	.
.	.	.	+	.	.	.	.
.	.	+	.	-	.	.	+
.	+	-	.	.	.	+	.
.	.	+	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	+	.	.
.	.	.	.	+	.	.	.

FIG. 2.1 – Une MSA de taille 8

La Figure 2.2 montre 6 matrices à signes alternants de taille 10 choisies de manière uniforme parmi les MSAs de taille 10. Sur ces dessins, les 1 sont représentés par un cercle noir et les  $-1$  par un cercle blanc.

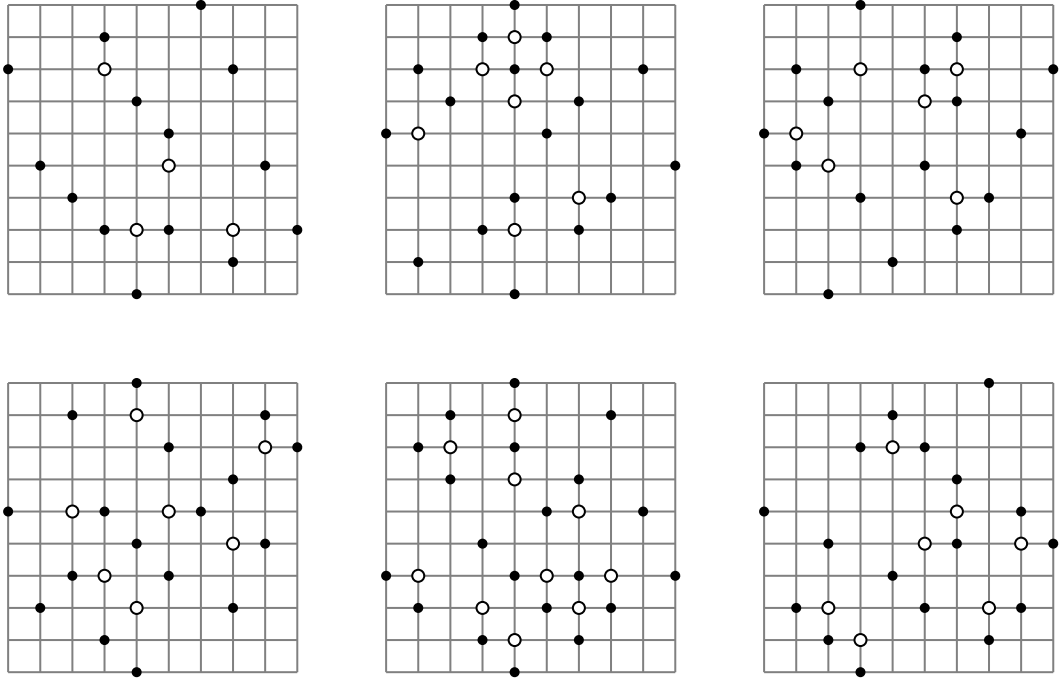


FIG. 2.2 – Matrices à signes alternants de taille 10

Mills, Robbins et Rumsey proposèrent une formule de comptage des matrices à signe alternant démontrée plus de 10 ans plus tard, d'abord par Zeilberger [61], puis par Kuperberg [29], dans la même année et de manière totalement indépendante.

**Théorème 2** (Zeilberger). *Le nombre de MSAs de taille  $n$ , noté  $|A_n|$ , est donné par*

$$|A_n| = \prod_{0 \leq i < n} \frac{(3i+1)!}{(n+i)!}. \quad (2.1)$$

Il était déjà connu que cette formule compte une famille d'objets : les partitions planes auto-complémentaires totalement symétriques.

Bien que de nombreux combinatoristes aient cherché une bijection entre les deux familles, aucune n'a été trouvée à ce jour.

Toutefois, il existe un assez vaste ensemble d'objets combinatoires pour lesquels une bijection explicite avec les matrices à signes alternants est connue. Ces autres familles nous donnent autant d'angles d'attaque pour tenter de résoudre le vaste ensemble de questions et conjectures portant sur les matrices à signes alternants.

Pour finir cette présentation, nous donnons deux codages similaires (l'un portant sur une lecture ligne par ligne et l'autre sur une lecture colonne par colonne) des matrices à signes alternants par des mots.

**Définition 2** (Codage d'une MSA par un mot). *Soit  $M$  une MSA de taille  $n$ .*

*On associe à  $M$  deux mots de longueurs  $n$  sur l'alphabet  $A$  suivant, dont chaque lettre est constituée d'une suite croissante d'entiers entre 1 et  $n$  :*

$$A = \{(a_1, \dots, a_{2k+1}) : 2k+1 \leq n, \forall i, a_i \in [n], \forall i \neq j, a_i < a_j\}$$

*On appelle codage ligne le mot  $L(M) = l_1 \dots l_n$  tel que  $l_i$  est la lettre formée de la suite des indices de colonnes des entrées non nulles de la ligne  $i$  de  $M$ .*

*De même, on appelle codage colonne le mot  $C(M) = c_1 \dots c_n$  tel que  $c_i$  est la lettre formée de la suite des indices de lignes des entrées non nulles de la colonne  $i$  de  $M$ .*

**Exemple 2.** *La matrice  $M$  ci-dessous admet les codages lignes et colonnes suivants :*

$$L(M) = (2), (1, 2, 4), (2), (3, 4, 5), (4, 5, 6), (5)$$

$$C(M) = (2), (1, 2, 3), (4), (2, 4, 5), (4, 5, 6), (5)$$

$$\begin{array}{cccccc} & . & + & . & . & . & . \\ + & - & . & + & . & . & . \\ & . & + & . & . & . & . \\ & . & . & + & - & + & . \\ . & . & . & + & - & + & . \\ & . & . & . & . & + & . \end{array}$$

*La quatrième lettre de  $L(M)$ , par exemple, est le triplet  $(3, 4, 5)$ , déduit du fait que les seules entrées non nulles de la quatrième ligne de  $M$  se trouvent dans les colonnes 3, 4 et 5.*

Une première remarque sur ces deux codages est qu'ils sont symétriques. En effet, pour toute MSA  $M$ , de transposée  $t(M)$ , on a  $L(M) = C(t(M))$ .

De plus, un codage de MSA ne contient que des lettres ( $k$ -uplets) de taille impaire, car une ligne (ou colonne) de MSA contient toujours un nombre impaire de valeurs non nulles.

Un mot  $x_1 x_2 \dots x_n$  est un codage d'une MSA  $M$ , si et seulement si chaque entier  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , apparait dans un nombre impaire de lettres alternativement en position impaire et en position paire.

Etant donné un codage de MSA, on retrouve directement les positions des valeurs non nulles de la matrice, mais pour discerner les 1 des  $-1$ , il suffit d'utiliser la propriété d'alternance de signe des MSA, en commençant par un 1 sur chaque ligne (ou colonne).

## 2.2 Triangles Gog

Nous suivons ici la terminologie de Zeilberger qui considère des tableaux triangulaires associés aux matrices à signes alternants. Ces triangles sont aussi appelés triangles monotones.

**Définition 3** (Triangle Gog). *Un triangle Gog de taille  $n$  est un tableau triangulaire  $\pi = (a_{i,j})$  défini pour  $n \geq i \geq j \geq 1$  et s'écrit comme*

$$\begin{array}{cccc} a_{1,1} & & & \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{array}$$

où,

1.  $a_{n,j} = j$  pour tout  $j \leq n$ .
2.  $a_{i,j} < a_{i,j+1}$  et  $a_{i,j} \leq a_{i-1,j}$  chaque fois que les deux côtés de l'inégalité sont définis.
3. enfin,  $a_{i,j} \leq a_{i+1,j+1}$  chaque fois que l'inégalité est bien définie.

**Exemple 3.** *Voici un triangle Gog de taille 8. Les lignes sont strictement croissantes, les colonnes sont décroissantes, au sens large, et les diagonales sont croissantes.*

$$\begin{array}{cccccccc} 3 & & & & & & & \\ 1 & 5 & & & & & & \\ 1 & 4 & 5 & & & & & \\ 1 & 3 & 4 & 8 & & & & \\ 1 & 2 & 4 & 7 & 8 & & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 8 & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 8 & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}$$

Il existe une bijection simple entre les triangles Gog et les MSAs de même taille.

La construction suivante associe de façon bijective un triangle Gog  $T$  à toute MSA  $M$ .

On note  $T_i$  l'ensemble des valeurs de la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $T$ , et  $w = L(M) = w_1 \cdots w_n$  le codage ligne de  $M$ .

- $T_1$  est l'ensemble des valeurs dans  $w_1$ .
- Pour  $i$  allant de 2 à  $n$  :
  - On note  $w_i^+$  (resp.  $w_i^-$ ) l'ensemble des indices dans  $w_i$  correspondant à des entrées positives (resp. négatives) de  $M$ , c'est à dire les positions impaires (resp. paires), on a alors  $T_i = (T_{i-1} \cup w_i^+) - w_i^-$
  - $T_i = T_{i-1} + w_i^+ - w_i^-$

En somme, dans cette construction, pour passer de la  $i^{eme}$  ligne de  $T$  à la  $(i + 1)^{eme}$ , on ajoute aux valeurs de  $T$  les indices de colonnes de  $M$  correspondant à des 1 et l'on supprime ceux des colonnes correspondant à un  $-1$ .

La construction inverse est donné par l'algorithme suivant :

- $w_1 = T_1$ .
- Pour  $i$  allant de 2 à  $n$  :
  - $w_i^+$  est l'ensemble des valeurs présentes dans  $T_i$  et absentes de  $T_{i-1}$ ,
  - $w_i^-$  est l'ensemble des valeurs présentes dans  $T_{i-1}$  et absentes de  $T_i$ ,
  - Avec  $\epsilon \in \{1, -1\}$ , pour chaque valeur  $c$  dans  $w_i\epsilon$ ,  $M_{c,i} = \epsilon$ .

**Remarque 1.** *Nous avons choisi d'utiliser le codage ligne des MSAs. L'utilisation du codage colonne aurait donné une autre bijection. De même, il est possible d'inverser l'ordre de lecture des lignes (colonnes) de la matrice pour remplir le triangle Gog associé. Toutes les variantes de ce type correspondent à effectuer des symétries sur les matrices à signes alternants.*

## 2.3 Configurations de boucles compactes

Les configurations de boucles compactes apparaissent au centre de la conjecture de Razumov et Stroganov [50], récemment démontrée par Cantini et Sportiello [8].

**Définition 4** (Configuration de boucles compactes (FPL)). *Soit  $G_n$  la grille carrée de taille  $n \times n$ .*

*Une configuration de boucles compactes de taille  $n$  est un sous graphe  $g$  de  $G_{n+2}$  tel que :*

- *chaque sommet de degré 2 dans  $G_{n+2}$  - les coins de la grille - a degré 0 dans  $g$ ,*
- *les  $4n$  sommets de degré 3 de  $G_{n+2}$  - les bords de la grille, pris dans l'ordre circulaire, sont alternativement de degrés 1 et 0 dans  $g$  en commençant par le sommet  $(0, 1)$ .*
- *chaque sommet de degré 4 dans  $G_{n+2}$  - les sommets internes de la grille - a degré 2 dans  $g$ .*

**Exemple 4.** *La Figure 2.3 montre des configurations de boucles compactes de taille 10 choisies de manière uniforme parmi l'ensemble des FPLs de taille 10.*

De même que les triangles Gog, il existe une construction bijective reliant les FPLs aux MSAs. Les FPLs dessinés sur la Figure 2.3 sont d'ailleurs obtenus à partir des MSAs de la Figure 2.2 par cette construction.

A tout FPL  $F$  on associe de manière bijective une unique MSA  $M$  en faisant correspondre la case  $(i, j)$  de  $M$  au sommet  $(i + 1, j + 1)$  de  $F$  - soit l'ensemble des sommets internes de la grille où a été construit  $F$ .

Partant de  $F$ , pour chaque sommet interne de la grille, si ses deux arêtes forment un angle droit, la case correspondante de  $M$  vaut 0, sinon elle vaut soit 1 soit  $-1$ . Le

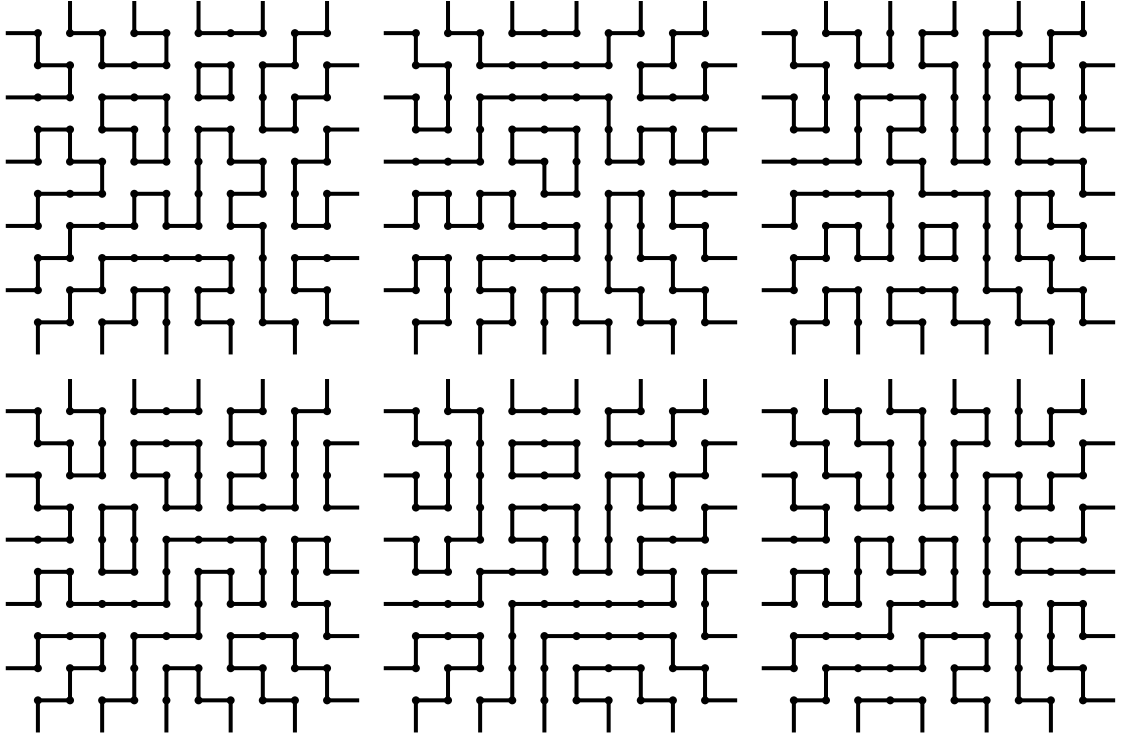


FIG. 2.3 – Configurations de boucles compactes de taille 10

choix de la valeur exacte de ces cases se déduit ligne par ligne grâce à la condition d'alternance de signe des MSAs.

La construction inverse se fait en deux étapes. La première pour construire les arêtes horizontales du FPL, et la deuxième pour construire les arêtes verticales. Ces deux constructions sont bien sur très similaires.

Etant donné une MSA  $M$  de taille  $n$ , on construit les arêtes de l'unique FPL  $F$  associé à  $M$  par l'algorithme suivant :

- pour  $j$  allant de 1 à  $n$  faire :
  - sens = 1 ;
  - pour  $i$  allant de 0 à  $n$  faire :
    - si  $i \geq 1$  et  $M(i-1, j-1) \neq 0$  alors
      - sens = (sens+1) mod 2
    - si sens ==  $(i+j)$  mod 2 alors
      - $v1 = F_{i,j}$
      - $v2 = F_{i+1,j}$
      - $\text{lier}(v1, v2)$
  - pour  $i$  allant de 1 à  $n$  faire :
    - sens = 0 ;
    - pour  $j$  allant de 0 à  $n$  faire :

- si  $i \geq 1$  et  $M(i-1, j-1) \neq 0$  alors
  - $\text{sens} = (\text{sens}+1) \bmod 2$
- si  $\text{sens} = (i+j) \bmod 2$  alors
  - $v1 = F_{i,j}$
  - $v2 = F_{i,j+1}$
  - $\text{lier}(v1, v2)$

Le graphe d'un FPL définit un ensemble de chemins (chaque sommet interne est de degré 2) couvrant la totalité des sommets et reliant deux sommets du bord de la grille.

## 2.4 Diagrammes de cordes

Les diagrammes de cordes n'apparaissent pas directement dans la combinatoire des matrices à signe alternant, mais plus clairement dans celle des configurations de boucles compactes.

La relation de Razumov-Stroganov (anciennement conjecture de Razumov-Stroganov), démontrée par Cantini et Sportiello [8], relie de façon étonnante les diagrammes de cordes aux configurations de boucles compactes.

**Définition 5** (Diagramme de cordes). *Un diagramme de cordes de taille  $n$  est un couplage parfait à  $2n$  sommets, numérotés de 1 à  $2n$ , et tel que, pour tout couple d'arêtes  $(a, b)$  et  $(c, d)$ , avec pour convention  $a < b, a < c, c < d$ , on a soit  $b < c$ , soit  $b > d$ .*

*L'ensemble des diagrammes de cordes de taille  $n$  est noté  $D_n$ .*

Une représentation de ces diagrammes consiste à placer les  $2n$  sommets sur un cercle en tournant dans le sens trigonométrique et à relier les sommets, pour chaque arête du diagramme, par une courbe contrainte à rester dans le cercle. La deuxième condition de la définition est alors équivalente à interdire le croisement de ces courbes. Plus simplement, on peut remplacer les courbes par des segments reliant les sommets, c'est à dire des cordes dans le cercle.

La Figure 2.4 utilise cette représentation pour décrire un diagramme de cordes de taille 8. Le diagramme en question est formé des arêtes  $(1, 4)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(5, 12)$ ,  $(6, 9)$ ,  $(7, 8)$ ,  $(10, 11)$ ,  $(13, 14)$  et  $(15, 16)$ .

Par la suite, nous utiliserons les quelques conventions suivantes concernant les diagrammes de cordes, leurs sommets et leurs arêtes :

- les sommets d'un diagramme de taille  $n$  sont considérés modulo  $2n$ , à valeurs dans  $\{1, \dots, 2n\}$ .
- pour tout couple  $(a, b)$  représentant une arête de diagramme de corde on fixe que  $a < b$ .

Il existe plusieurs bijections simples portant sur les diagrammes de cordes. La première relie  $D_n$  aux mots de Dyck de taille  $2n$ .

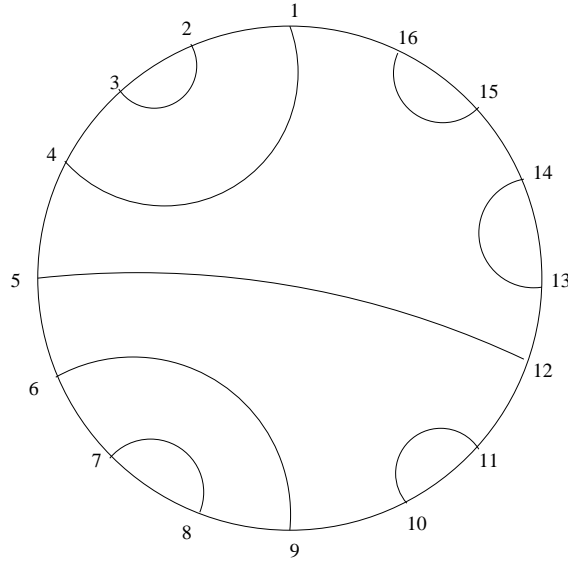


FIG. 2.4 – Un diagramme de cordes de taille 8

Un mot de Dyck de taille  $2n$  est un mot de longueur  $2n$  sur l'alphabet  $\{0, 1\}$  contenant autant de 0 que de 1 et dont tous les facteurs gauches contiennent au moins autant de 0 que de 1. On appelle aussi ces mots des mots de parenthèses, les 0 peuvent alors être remplacés par des '(' et les 1 par des ')'.  
 On associe à chaque diagramme de cordes  $D \in D_n$  un mot de Dyck  $u = u_1 \cdots u_{2n}$  de la manière suivante : pour chaque arête  $(a, b) \in D$ ,  $u_a = 0$  et  $u_b = 1$ .

Par exemple, le mot de Dyck associé au diagramme de la Figure 2.4 est 0011000110110101 qui s'écrit avec des parenthèses '(()((()))())()'.

Le nombre de diagrammes de cordes de taille  $n$  est donc donné par les nombres de Catalan.

**Théorème 3.**

$$|D_n| = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

De plus, on peut associer à tout FPL  $f$  de taille  $n$ , un unique diagramme de cordes noté  $c_f$  de taille  $n$ . Il suffit de numéroter de 1 à  $2n$  les sommets de degré 1 de  $f$  en suivant le bord de sa grille, le diagramme  $c_f$  est alors constitué des  $n$  couples de sommets de degré 1 de  $f$  reliés par un chemin dans  $f$ .

Une transformation naturelle des diagrammes de cordes consiste à ajouter une même valeur à tous ses sommets. Cette transformation envoie  $D_n$  sur lui-même.

**Définition 6** (Rotation d'un diagramme). *Pour tout entier  $k$  on définit l'opérateur de rotation  $r_k$ .*



Pour tout entier  $n > 0$  et tout diagramme  $D \in D_n$ ,  $r_i(d)$  est le diagramme obtenu en ajoutant  $k$  à chaque sommets de  $D$ , de telle sorte que pour tout couple  $(i, j) \in D$ , le couple  $(i + k, j + k) \in r_k(D)$ .

Par exemple, pour le diagramme

$$D = \{(1, 2)(3, 6)(4, 5)(7, 8)\}$$

de taille 4, l'opérateur  $r_{10}$  (équivalent dans ce cas à  $r_2$ ) appliqué à  $D$  donne le diagramme  $r_{10}(D) = \{(3, 4)(5, 8)(6, 7)(1, 2)\}$ .

**Remarque 2.** Pour toute arête  $(i, j)$  d'un diagramme de cordes,  $i$  et  $j$  sont de parités différentes. En effet, si ce n'était pas le cas, les sommets  $\{i + 1, \dots, j - 1\}$  seraient en nombre impair et ne pourraient pas être reliés deux par deux.

Il existe une algèbre appelée algèbre de Temperley-Lieb [56] agissant sur les diagrammes de cordes de taille  $n$  par le biais de  $n$  opérateurs.

**Définition 7** (Opérateur sur les diagrammes de cordes). Pour tout entiers  $i > 0$  l'opérateur  $e_i$  est défini par

$$e_i : \begin{cases} D_{n \geq i} & \longrightarrow & D_{n \geq i} \\ d & \longmapsto & (d - \{(i, j), (i + 1, k)\}) \cup \{(i, i + 1), (j, k)\} \end{cases}$$

lorsque  $(i, i + 1) \notin d$  et  $e_i(d) = d$  sinon.

Les opérateurs  $e_i$  vérifient les propriétés de l'algèbre de Temperley-Lieb suivante :

**Propriété 1.** Pour tout  $i$  :

$$e_i \circ e_i = e_i$$

$$e_i \circ e_{i \pm 1} \circ e_i = e_i$$

Pour tout  $i, j$  tels que  $|i - j| < 1$ ,  $e_i \circ e_j = e_j \circ e_i$

On appelle ces opérateurs  $e_i$  des transitions et on note  $T_n = \{e_1, \dots, e_{2n}\}$  l'ensemble des  $2n$  transitions agissant sur les diagrammes dans  $D_n$ .

Nous montrerons par la suite que l'on peut décrire l'action des opérateurs de  $T_n$  sur  $D_n$  par une chaîne de Markov admettant une distribution limite que l'on note  $\pi_n$ .

Le Théorème suivant relie alors les diagrammes de cordes aux FPLs.

**Théorème 4** (Cantini-Sportiello). Etant donné un FPL  $f$  choisi de manière uniforme parmi tous les FPLs de taille  $n$ , son diagramme de cordes associé  $c_f$  suit la loi  $\pi_n$ .



## Chapitre 3

# MSAs à nombre fixé d'entrées négatives

Dans ce chapitre, nous étudierons les matrices à signes alternants et tenterons de dénombrer ces objets selon deux paramètres : leur taille et leur nombre d'entrées négatives. Notre étude porte en particulier sur le cas où les matrices ne comptent que peu de  $-1$ .

Le cas le plus simple est celui des MSAs de taille  $n$  n'ayant aucune entrée négative, qui n'est autre que l'ensemble des permutations de taille  $n$ .

Les matrices de permutation forment une partie asymptotiquement négligeable des MSAs (il y a de l'ordre de  $c^{n^2}$ , avec  $c > 1$ , MSAs de taille  $n$ ) et expérimentalement, il semble que les MSAs de taille  $n$  comptent en moyenne  $\Theta(n^2)$  entrées négatives. En ce qui concerne leur répartition et le problème du “cercle arctique”, voir par exemple [15]. Au cours d'une discussion, A.Sportiello m'a indiqué qu'il lui semble également possible de calculer la constante multiplicative de l'asymptotique du nombre d'entrées négatives, par des méthodes analytiques.

Mais ici nous nous intéressons aux MSAs ayant un petit nombre d'entrées négatives. En comparaison à l'étude des MSAs aléatoires, qui ont tendance à contenir un grand nombre de  $-1$ , il n'y a que peu de résultats portant sur les MSAs avec peu de  $-1$ . J.C. Aval [4] a donné une formule pour le nombre de MSAs avec une ou deux entrées négatives, les cas que nous traitons dans ce chapitre pour 3,4,5,6 et 7 entrées négatives sont nouveaux.

Notre résultat principal montre que, pour un  $k$  fixé, le nombre de MSAs avec exactement  $k$  entrées négatives est seulement polynomialement plus grand que  $n!$ . On note  $A_{n,k}$  l'ensemble des MSAs de taille  $n$  avec exactement  $k$  entrées négatives.

**Théorème 5.** *Pour tout entiers  $n, k$ , le nombre de MSAs de taille  $n$  avec  $k$  entrées négatives est donné par*

$$|A_{n,k}| = n! \sum_{j=0}^{3k} c_{j,k} \frac{(n)_j}{(j!)^2}$$

où les  $c_{j,k}$  sont des entiers positifs (dont nous donnerons une interprétation combinatoire) et  $(n)_j = n(n-1)\cdots(n-j+1)$ .

Dans ce chapitre, nous présentons une forme de mélange pour les MSAs, basée sur les interdépendances des valeurs non nulles de la matrice. Les mélanges permettent de compter des classes de MSAs à nombre fixé d'entrées négatives à partir d'une étude de cas, rendue raisonnable par le petit nombre de  $-1$ .

Nous donnons en particulier un théorème de comptage des mélanges distincts, permettant de calculer le nombre de MSAs engendrées par le mélange de plusieurs MSAs plus petites.

Ensuite, nous définissons l'ensemble des MSAs contractées, dont le principal intérêt par rapport aux MSAs générales est de compter un nombre fini d'éléments, lorsque le nombre de  $-1$  est fixé et qui servent de “briques de base” pour le mélange.

Cette propriété, ainsi que le théorème de comptage des mélanges, nous permettent de donner une formule close pour  $|A_{n,k}|$  ( $n$  représente la taille des MSAs et  $k$  représente le nombre de  $-1$ ). Cette formule nécessite cependant le calcul du nombre de MSAs contractées ayant  $k$  entrées négatives.

A partir de cette formule, nous montrerons comment obtenir l'asymptotique de  $|A_{n,k}|$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. En particulier nous montrerons que les MSAs ayant  $k$  entrées négatives ne sont asymptotiquement que polynomialement plus nombreuses que les permutations.

Nous poursuivons en donnant plusieurs formules permettant de calculer le nombre de MSAs contractées dans certains cas particulier.

Ces formules n'étant pas suffisantes pour calculer tous les coefficients, nous présentons aussi une approche algorithmique efficace pour calculer ces coefficients.

Nous donnons alors les formules explicites de  $|A_{n,k\leq 7}|$ , obtenues en partie grâce à un programme basé sur l'algorithme précédent.

### 3.1 Connexité et mélanges de MSAs

Dans cette section, nous présentons une forme de décomposition des matrices à signes alternants. Les notions de matrices connexes et de mélanges de matrices seront alors définies et nous donnerons un théorème permettant de calculer le nombre de matrices pouvant être générées par le mélange d'un ensemble  $E$  de matrices.

Ce théorème nous permettra de résoudre presque directement tous les problèmes de comptage que nous rencontrerons par la suite, ainsi que la mise en évidence d'une formule générale pour  $|A_{n,k}|$ , basée sur le calcul d'un nombre fini de coefficients, chacun de ces coefficients correspondant à une classe de MSAs particulières.

### 3.1.1 Connexité et degré d'une entrée non nulle de MSA

La propriété essentielle d'une matrice à signes alternants est de voir ses entrées non nulles alterner en signe sur chaque ligne et chaque colonne. Les entrées non nulles occupent alors une place privilégiée. On ne perd d'ailleurs pas d'information en oubliant la position des zéros d'une matrice à signes alternants, comme le montre le codage par ligne des MSAs.

D'une certaine manière, on peut donc dire que deux entrées non nulles d'une MSA sont dépendantes, ou connectées, lorsque celles-ci se trouvent sur la même ligne (ou colonne) et qu'aucune autre entrée non-nulle ne les sépare.

**Définition 8** (Graphe d'une MSA). *Etant donné une matrice  $M \in A_n$ , on note  $G(M)$  le graphe dont l'ensemble des sommets est exactement l'ensemble des entrées non nulles de  $M$  et tel que deux sommets  $v_1$  et  $v_2$  sont reliés si et seulement si :*

1.  $v_1$  et  $v_2$  se trouvent sur une même ligne ou même colonne,
2. il n'existe aucune entrée non nulle située entre  $v_1$  et  $v_2$ .

*Chaque sommet étant une entrée de  $M$ , il peut être considéré comme étant étiqueté par un couple  $(i, j)$  correspondant à une case de  $M$  et par une valeur dans  $\{0, 1, -1\}$ .*

Par construction, ces graphes sont bi-coloriables : il suffit de colorier en blanc les sommets provenant d'un  $-1$  et en noir ceux provenant d'un  $1$ . Les sommets blancs sont alors tous de degré 4.

**Définition 9** (MSA connexe). *Une MSA  $M \in A_n$  est dite connexe si et seulement si son graphe  $G(M)$  est connexe.*

Etant donnée une matrice  $M$  et son graphe  $G(M)$ , à chaque composante connexe  $g$  de  $G(M)$ , on associe la sous-matrice  $M_g$  obtenue en prenant l'intersection des lignes  $l_g$  et des colonnes  $c_g$  de  $M$ , où  $l_g$  et  $c_g$  sont respectivement les ensembles des lignes et de colonnes contenant tous les sommets (c'est-à-dire les entrées non nulles) de la composante connexe  $g$ . On dit alors que  $M_g$  est une *composante connexe* de la matrice  $M$ .

**Exemple 5.** *La figure 3.1 montre deux MSAs. Celle de gauche est connexe tandis que celle de droite ne l'est pas. En effet, dans celle de droite, les entrées non nulles situées dans l'intersection des lignes  $\{1, 2, 4, 6, 7\}$  et des colonnes  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  sont totalement déconnectées des entrées non nulles situées dans l'intersection des lignes  $\{3, 5, 8, 9, 10\}$  et des colonnes  $\{6, 7, 8, 9, 10\}$ .*

Le graphe d'une MSA associe également un degré à chaque entrée non nulle. Nous verrons par la suite comment les propriétés des degrés des entrées d'une MSA peuvent être utilisées.



Le mélange obtenu à partir de  $E$ ,  $C$  et  $L$ , notons le  $m(E, C, L)$ , est la matrice obtenue en plaçant

- $M_1$  sur l'intersection des lignes dans  $l_1$  et des colonnes dans  $c_1$ ,
  - $M_2$  sur l'intersection des lignes dans  $l_2$  et des colonnes dans  $l_2$ ,
- comme sur la Figure 3.3.

0	+	0	0			0	+	0	0	0
+	–	+	0			0	0	0	+	0
0	+	–	+			+	–	+	–	+
0	0	+	0			0	+	0	0	0
						0	0	0	+	0

FIG. 3.2 – Deux MSAs connexes

		2		4	5	6			
1	.	0	.	+	0	0	.	.	.
	0	.	+	.	.	.	0	0	0
	0	.	0	.	.	.	0	+	0
4	.	+	.	–	+	0	.	.	.
5	.	0	.	+	–	+	.	.	.
6	.	0	.	0	+	0	.	.	.
	+	.	–	.	.	.	+	–	+
	0	.	+	.	.	.	0	0	0
	0	.	0	.	.	.	0	+	0

FIG. 3.3 – L'un des mélanges des deux MSAs de la Figure 3.2

Dans cet exemple, le nombre de façons de mélanger ces deux MSAs est donné par le nombre de choix des couples  $(C, L)$  représentant les lignes et les colonnes où placer  $M_1$  et  $M_2$ .

Le carré du binomial  $\binom{|M_1| + |M_2|}{|M_1|, |M_2|}$  compte ces mélanges. Dans ce cas, les mélanges obtenus sont tous distincts pour deux couples  $(C, L)$  et  $(C', L')$  différents.

Parfois, le comptage du nombre de MSAs obtenues par mélange est plus délicat car plusieurs mélanges peuvent donner la même MSA. Cela peut se produire lorsque deux MSAs ont une composante connexe en commun, comme dans l'exemple suivant.

**Exemple 7.** Prenons  $E = \{M_1, M_2, M_3\}$ , où  $M_1, M_2, M_3$  sont données par les 3 MSAs du haut de la Figure 3.4. En particulier,  $M_1 = M_2$ .

Les matrices distinctes obtenues par mélange des matrices de  $E$  sont donc comptées par  $\frac{1}{2!} \binom{10}{3,3,4}^2 = 8820000$ .

[illegible]

Notons  $T$  la somme des tailles des matrices de  $E$  :



$$T = \sum_{i=1}^k m_i |M_i|$$

Soit  $C = \{c_{i,j}\}$  et  $L = \{l_{i,j}\}$ , avec  $c_{i,j}$  (resp.  $l_{i,j}$ ) définis pour tout  $(i,j)$  tels que  $i \in \{1, \dots, k\}$  et tout  $j \in \{1, \dots, n_i\}$  et vérifiant que

- $c_{i,j}$  (resp.  $l_{i,j}$ ) est une partie de  $[T]$  de taille  $|M_i|$ ,
- $C$  (resp.  $L$ ) partitionne l'ensemble  $[T]$ .

Le mélange  $m(E, C, L)$  des matrices de  $E$  selon la partition de lignes  $L$  et la partition de colonnes  $C$  est l'unique MSA  $M$  de taille  $T$  telle que :

1. pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ , et tout  $j \in \{1, \dots, m_i\}$ , la sous matrice de  $M$  réduite aux lignes  $l_{i,j}$  et aux colonnes  $c_{i,j}$  est égale à  $M_i$ ,
2. toutes les autres entrées de  $M$  sont nulles.

On note  $m(E)$  l'ensemble des couples  $(C, L)$  dont le mélange  $m(E, C, L)$  est bien défini et  $M(E)$  l'ensemble des MSAs distinctes obtenues par mélange à partir de n'importe quel couple  $(C, L) \in m(E)$ .

Par construction, le mélange de matrices  $m(E, C, L)$  tel que défini ci-dessus préserve les graphes des matrices dans  $E$ . Autrement dit, le graphe de la matrice  $m(E, C, L)$  est l'union disjointe des graphes des matrices de  $E$ .

De plus, cette construction préserve les entrées des matrices de  $E$  dans le sens où  $m(E, C, L)$  contient autant de 1 et de  $-1$  que l'ensemble des matrices de  $E$ .

### 3.1.3 Formule de comptage des mélanges

Le comptage des mélanges en eux-même est facile, mais déterminer le nombre de matrices *distinctes* obtenues par tous les mélanges d'un multi-ensemble de matrices  $E$  n'est pas toujours évident. Nous donnerons ici un théorème permettant de résoudre ce problème dans certains cas de figure.

Pour commencer, le Lemme 1 établit, pour tout ensemble de matrices  $E$ , le nombre de mélanges  $m(E)$ .

**Lemme 1.** Soit  $E = \{M_1^{n_1}, \dots, M_k^{n_k}\}$  un multi-ensemble de MSAs. On note  $T$  la somme des tailles des matrices dans  $E$ , c'est à dire la somme, pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ , des  $n_i |M_i|$ .

$$|m(E)| = \frac{T!T!}{\prod_{i=1}^k |M_i|^{2n_i}}$$

Un premier cas presque trivial de comptage des matrices dans  $M(E)$  est obtenu pour les mélanges d'un ensemble  $E$  dont les matrices sont toutes distinctes (on a  $m_1 = \dots = m_k = 1$ ) et connexes.

Nous avons alors le résultat suivant :

**Lemme 2.** Soit  $E = \{M_1, \dots, M_k\}$  un ensemble de  $k$  MSAs dont les composantes connexes sont toutes distinctes.

Alors les mélanges de  $E$  sont tous distincts ; autrement dit, le nombre de mélanges distincts est donné par la formule du Lemme 1.

*Démonstration.* Nous allons montrer que pour tout  $(C, L) \in m(E)$  et  $(C', L') \in m(E)$ , si  $(C, L) \neq (C', L')$  alors  $m(E, C, L) \neq m(E, C', L')$ .

Il suffit de montrer que  $m(E, C, L)$  et  $m(E, C', L')$  diffèrent en au moins une case.

Comme  $(C, L) \neq (C', L')$ , nous nous trouvons dans l'un des trois cas suivants :

1. soit  $C \neq C'$  et  $L = L'$ ,
2. soit  $C = C'$  et  $L \neq L'$ ,
3. soit  $C \neq C'$  et  $L \neq L'$ .

Dans le premier cas, il existe au moins une matrice  $M_i \in E$  dont la partition de colonnes  $c_{i,1}$  dans  $C$  diffère de  $c'_{i,1}$  dans  $C'$ . On note  $c = c_{i,1} \cup c'_{i,1}$  l'intersection des colonnes de  $c_{i,1}$  et  $c'_{i,1}$ .

Par construction, la sous-matrice de  $m(E, C, L)$  réduite aux colonnes  $c_{i,1} - c$  et aux lignes  $l_{i,1}$  est remplie de 0, ce qui n'est pas le cas de  $m(E, C', L')$ .

Nous pouvons utiliser le même argument pour le second cas en raisonnant sur les lignes au lieu des colonnes.

Dans le dernier cas, il existe une matrice  $M_i$  telle que :

1. soit  $c_{i,1} \neq c'_{i,1}$  et  $l_{i,1} = l'_{i,1}$ , auquel cas on retombe dans le cas précédent,
2. soit  $c_{i,1} = c'_{i,1}$  et  $l_{i,1} \neq l'_{i,1}$ , ce qui revient à appliquer le même argument en considérant les lignes plutôt que les colonnes,
3. soit  $c_{i,1} \neq c'_{i,1}$  et  $l_{i,1} \neq l'_{i,1}$ .

Dans ce dernier cas, soit il existe un  $j$  tel que  $c_{i,1} = c'_{j,1}$  et  $l_{i,1} = l'_{j,1}$  et comme  $M_i \neq M_j$ , les matrices  $m(E, C, L)$  et  $m(E, C', L')$  sont différentes, soit il n'en existe pas, et on peut trouver une matrice  $M_j$  telle que  $c_{i,1} \cup c'_{j,1} \neq \emptyset$  et les deux matrices  $m(E, C, L)$  et  $m(E, C', L')$  diffèrent encore sur l'intersection de  $c_{i,1} - c_{i,1} \cup c'_{j,1}$  avec  $l_{i,1}$ .

Nous avons donc montré que dans tous les cas il existe un ensemble non vide de cases où  $m(E, C, L)$  est différente de  $m(E, C', L')$ .  $\square$

Dans certains cas non triviaux nous savons aussi dénombrer  $M(E)$  en appliquant une correction au nombre  $|m(E)|$  sous la forme d'un coefficient.

Ceci est possible lorsque chaque matrice de  $M(E)$  est obtenue le même nombre de fois par les mélanges de  $m(E)$ .

**Lemme 3.** Soit  $E = \{M_1^{m_1}, \dots, M_k^{m_k}\}$  un multi-ensemble de MSAs toutes connexes. Pour tout  $(C, L) \in m(E)$  il existe

$$(m_1! \cdots m_k!)$$

couples  $(C', L') \in m(E)$  tels que  $m(E, C', L') = m(E, C, L)$ .

Toute matrice dans  $M(E)$  est obtenue exactement  $(m_1! \cdots m_k!)$  fois par tous les mélanges dans  $m(E)$ .

*Démonstration.* Soit  $(C, L) \in m(E)$ .

Notons  $P_i$  la  $i^{\text{eme}}$  occurrence de  $M_1$  dans  $E$  et  $(c_i, l_i) \in (C, L)$  ses lignes et colonnes associées.

Permuter la matrice  $P_i$  avec la matrice  $P_j$  est l'opération consistant à échanger leurs couples  $(c_i, l_i)$  et  $(c_j, l_j)$  dans  $(C, L)$ .

Les deux matrices étant égales, il est clair que le mélange selon le nouveau couple  $(C, L)$  reste identique.

Il existe  $m_1!$  permutations différentes des  $m_1$  matrices entre elles.

Tout autre changement du couple  $(C, L)$  donne une matrice différente de  $m(E, C, L)$  car  $M_1$  est connexe.

□

En combinant les deux Lemmes 1 et 3 on obtient :

**Théorème 6.** Soit  $E = \{M_1^{n_1}, \dots, M_k^{n_k}\}$  un multi-ensemble de MSAs connexes.

Le nombre de MSAs distinctes obtenues par mélange de  $E$  est donné par

$$|M(E)| = \frac{T!^2}{n_1! |M_1|^{2n_1} \cdots n_k! |M_k|^{2n_k}}$$

Dans les sections suivantes, nous verrons comment le Théorème 6 permet de calculer le cardinal de certaines classes de MSAs, définies essentiellement par le degré de leurs entrées. De plus, la décomposition des MSAs selon leurs composantes connexes permet de réduire considérablement la palette d'objets étudiés.

## 3.2 Contraction de MSAs

Nous allons définir une nouvelle classe de MSAs, que nous appelons MSAs contractées, dont le comptage selon le nombre d'entrées négatives induit celui des MSAs générales. Les MSAs contractées ont le mérite d'être en nombre fini pour un nombre de  $-1$  fixé, contrairement aux MSAs classiques.

L'idée intuitive pour construire une MSA contractée est de prendre une quelconque MSA et de lui retirer certaines lignes et colonnes correspondant à certaines entrées de la matrice.

Le nombre de MSAs de taille  $n$  se contractant en une MSA contractée fixée se recalcule alors assez facilement et la construction des MSAs contractées conserve le nombre d'entrées négatives de sa famille de MSAs.

Nous définissons premièrement la notion d'entrée isolée dans une matrice.

**Définition 11** (Entrée isolée). Une entrée de MSA est dite isolée si et seulement si son degré vaut zero.

Autrement dit, pour qu'une entrée de MSA soit isolée, il faut et il suffit que toutes autre entrée de sa ligne et de sa colonne soit nulle.

Il est facile de remarquer que seules les entrées positives d'une MSA peuvent être isolées étant donné que chaque entrée négative est nécessairement précédée et suivie d'une entrée positive dans sa ligne et sa colonne. Les entrées isolées sont aussi les seules composantes connexes de taille 1 d'une matrice.

**Définition 12** (Matrice contractée). *Une matrice contractée est une matrice à signes alternants ne contenant aucune entrée isolée.*

On notera  $C_k$  l'ensemble des matrices contractées ayant  $k$  entrées négatives et  $C_{n,k}$  celui des matrices contractées de taille  $n$  ayant  $k$  entrées négatives.

**Exemple 8.** *La Figure 3.5 montre deux MSAs. La première contient deux entrées isolées et la seconde aucune : la deuxième MSA est donc contractée.*

$$\begin{array}{cccccccc}
 . & . & + & . & . & . & . & . \\
 + & . & - & . & + & . & . & . \\
 . & . & . & I & . & . & . & . \\
 . & . & + & . & - & . & . & + \\
 . & + & - & . & . & . & + & . \\
 . & . & + & . & . & . & . & . \\
 . & . & . & . & . & I & . & . \\
 . & . & . & . & + & . & . & .
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{cccccccc}
 . & . & + & . & . & . & . & . \\
 + & . & - & + & . & . & . & . \\
 . & . & + & - & . & . & + & . \\
 . & + & - & . & + & . & . & . \\
 . & . & + & . & . & . & . & . \\
 . & . & . & + & . & . & . & .
 \end{array}$$

FIG. 3.5 – Une MSA avec 2 entrées isolées (notées  $I$ ) et une MSA contractée

**Définition 13** (Contraction d'une matrice à signes alternants). *La contraction  $C(A)$  d'une matrice à signes alternants  $A$  est l'unique matrice contractée obtenue en retirant, pour chaque entrée isolée de  $A$ , la ligne et la colonne qui la contient. On dit que  $A$  se contracte en  $C(A)$ .*

On remarque qu'au cours de cette construction, on ne crée jamais de nouvelle entrée isolée (en particulier lors du retrait des lignes et des colonnes). De plus l'ordre dans lequel on traite les entrées isolées n'a aucune importance sur le résultat.

De plus, cette construction garantit que  $A$  et  $C(A)$  aient le même nombre d'entrées négatives.

Par convention, l'unique MSA de taille 0 est contractée et correspond à la contraction de toute matrice de permutation.

### 3.2.1 Encadrement des tailles de MSAs contractées

De manière générale, les MSAs ayant  $k$  entrées négatives peuvent être de tailles arbitrairement grandes, en particulier on peut toujours faire grandir la taille d'une

MSA en lui ajoutant une entrée isolée, et ce sans changer le nombre d'entrées négatives.

Sur les MSAs contractées cette opération d'ajout d'entrée isolée n'est plus possible, et cela suffit à borner la taille des MSAs contractées en fonction de leur nombre d'entrées négatives.

**Lemme 4.** *La taille maximale d'une MSA dans  $C_k$  est  $3k$ .*

*Démonstration.* On observe que :

- La taille d'une MSA est donnée par la différence entre son nombre d'entrées positives et son nombre d'entrées négatives (en effet, la somme des valeurs d'une ligne vaut toujours 1 et la taille est égale au nombre de lignes).
- Chaque entrée négative d'une MSA est voisine de 4 entrées négatives.
- Chaque entrée positive d'une MSA *contractée* est voisine d'au moins 1 entrée négative.

Par conséquent une MSA *contractée* avec  $k$  entrées négatives a au plus  $4k$  entrées positives et sa taille est au plus  $4k - k = 3k$ .

Cette borne est atteinte en prenant le mélange de  $k$  copies de la matrice suivante :

$$\begin{array}{ccc} 0 & + & 0 \\ + & - & + \\ 0 & + & 0 \end{array}$$

Le résultat est une MSA contractée, de taille  $3k$  et avec  $k$  entrées négatives, ce qui conclut la preuve. □

Pour la taille minimale d'une MSA dans  $C_k$ , la question est plus délicate et nous devons distinguer quelques cas particuliers.

On se propose de prouver que pour  $k$  entrées négatives la taille des plus petites MSAs contractées est de l'ordre de  $2\lfloor\sqrt{k}\rfloor$ . On note  $L_k$  la taille minimale d'une matrice de  $C_k$ .

Pour commencer, on remarque que toute MSA dans  $A_{L_k,k}$  est une MSA contractée.

**Lemme 5.** *Toute MSA de taille  $L_k$  ayant  $k$  entrées négatives est une MSA contractée.*

*Démonstration.* Soit  $n$  la taille minimale d'une MSA ayant  $k$  entrées négatives et prenons une quelconque MSA dans  $A_{n,k}$ .

Si  $A$  n'est pas une MSA contractée alors sa contraction  $C$  est de taille strictement inférieure à  $n$  et comporte pourtant  $k$  entrées négatives, ce qui est contradictoire avec le fait que  $n$  était la plus petite taille de MSAs contenant  $k$  entrées négatives. □

Nous allons maintenant calculer  $L_k$  pour certains cas particuliers. Nous montrons que  $L_{m(m-1)} = 2m$  et  $L_{m^2} = 2m + 1$ .

Nous procédons ensuite en étudiant la fonction inverse de  $L$ . On se fixe une taille (paire ou impaire), puis nous calculons le nombre de  $-1$  maximal dans une MSA de cette taille.

**Lemme 6.** *Le nombre d'entrées négatives d'une MSA de taille  $2m$  (resp.  $2m + 1$ ) est majoré par  $m(m - 1)$  (resp.  $m^2$ ).*

*Démonstration.* Les propriétés d'alternance de signe sur les lignes et les colonnes des MSAs impliquent entre autre que la  $i^{eme}$  ligne d'une MSA de taille  $n$  contienne au plus  $\min(i - 1, n - i)$  entrées négatives.

En sommant sur chaque ligne il résulte qu'une MSA de taille  $2m$  (resp.  $2m + 1$ ) compte au plus  $(m - 1)m$  (resp.  $m^2$ ) entrées négatives.

□

Nous allons maintenant montrer que cette borne supérieure pour le nombre d'entrées négatives dans une MSA de taille fixée peut-être atteinte.

**Lemme 7.** *Pour tout  $k$  tel que  $m(m - 1) < k \leq m^2$ , il existe une MSA contractée de taille  $2m + 1$  contenant  $k$  entrées négatives.*

*Pour tout  $k$  tel que  $(m - 1)^2 < k \leq m(m - 1)$ , il existe une MSA contractée de taille  $2m$  contenant  $k$  entrées négatives.*

*Démonstration.* Cette limite est atteinte en plaçant les entrées négatives dans une configuration en losange, comme illustré sur la Figure 3.6.

0	0	+	0	0		0	0	+	0	0	0
0	+	-	+	0		0	+	-	+	0	0
+	-	+	-	+		+	-	+	-	+	0
0	+	-	+	0		0	+	-	+	-	+
0	0	+	0	0		0	0	+	-	+	0
						0	0	0	+	0	0

FIG. 3.6 – La seule MSA de taille 5 et l'une des deux MSAs de taille 6 ayant un nombre maximal d'entrées négatives.

Plus formellement, pour une MSA de taille  $2n + 1$ , les cases dont la distance de Manhattan par rapport au coin le plus proche sont inférieures ou égales à  $n$  sont les entrées nulles de la matrice. Toute autre case  $(i, j)$  vaut 1 si  $i + j$  est pair et  $-1$  si  $i + j$  est impair.

Pour une MSA de taille  $2n$ , on distingue les deux coins de la matrice  $(2n, 1)$  et  $(1, 2n)$ . Les zeros de la matrices se trouvent exactement sur les cases dont la distance de manhatan par rapport aux plus proche coin de la matrice est inférieure ou égale

à  $n$  si c'est un coin distingué et  $n - 1$  sinon. La règle pour les entrées non nulles reste la même que pour les tailles impaires.

Il existe une autre construction possible pour les tailles paires. Celle-ci consiste à distinguer les deux autres coins de la matrice et à inverser les conditions de parité pour les entrées non nulles.  $\square$

La taille minimale des MSAs contractées dans  $C_k$  est donnée par le lemme suivant :

**Lemme 8.** *Etant donné un entier positif  $k$ , on note  $L_k$  la taille de la plus petite MSA contenant  $k$  entrées négatives.*

*Soit  $i = \lceil \sqrt{k} \rceil$ .*

*$L_k$  est donné par :*

$$L_k = \begin{cases} 2i & \text{si } k \leq (i-1)i, \\ 2i+1 & \text{si } k > (i-1)i. \end{cases}$$

*Démonstration.* Les lemmes 6 et 7 prouvent que pour tout  $m$  on a  $L_{m(m-1)} = 2m$  et  $L_{m^2} = 2m+1$ .

Nous poursuivons en montrant que  $L_k$  reste égal à  $2m$  pour tout  $k \in \{m(m-1)+1, \dots, m^2-1\}$ .

Pour tout  $k \in \{m(m-1)+1, \dots, m^2-1\}$ , on note  $\delta$  la différence  $m^2 - k$ , on a donc  $0 < \delta < m$ .

Nous allons construire, pour tout  $m$  et tout  $\delta \in \{1, \dots, m-1\}$  une MSA contractée  $A_\delta$  dans  $C_{2m+1, m^2-\delta}$ .

- Pour commencer, on appelle  $A_m$  l'unique MSA (contractée) de taille  $2m+1$  ayant  $m^2$  entrées négatives.
- Pour tout  $j$  dans  $\{1, \dots, \delta\}$ , on remplace par un zero les entrées en positions  $(m+j, j)$  et  $(m+j, j+1)$  - valant respectivement 1 et  $-1$ . En particulier, cela laisse la première ligne remplie de zeros.
- On échange les valeurs des cases  $(m+\delta+1, \delta+1)$  et  $(m+\delta+1, 1)$ , ce qui rajoute une entrée positive sur la première ligne de la matrice.

Cette construction est illustrée sur la Figure 3.7 pour  $m = 4$  et  $a = 3$ , les valeurs modifiées sont marquées entre crochets.

Le résultat est toujours une MSA contractée, de même taille et dont le nombre d'entrées négatives a été réduit de  $\delta$ . Autrement dit,  $L_k \leq 2m+1$  lorsque  $k \in \{m(m-1)+1, \dots, m^2\}$ . Mais comme d'autre part, pour toute taille inférieure à  $2m+1$  il existe une MSA avec  $k$  entrées négatives, on a effectivement  $L_k = 2m+1$ .  $\square$

### 3.2.2 Nombre de MSAs associées à une contraction

Nous avons montré que toute MSA se contractait en une unique MSA contractée. On a alors défini une partition de  $A_{n,k}$  pour laquelle chaque classe est représentée par une unique MSA contractée dans  $C_k$ .

0	0	0	0	[+]	0	0	[0]	0	0	0	0	[0]	0	0	[+]	0
0	0	0	+	[-]	[+]	0	0	0	0	0	+	[0]	[0]	0	0	0
0	0	+	-	+	[-]	[+]	0	0	0	0	+	+	[0]	[0]	0	0
0	+	-	+	-	+	[-]	[+]	0	0	+	-	+	+	[0]	[0]	0
+	-	+	-	+	-	+	-	+	+	+	-	+	-	+	-	+
0	+	-	+	-	+	-	+	0	0	0	+	-	+	-	+	0
0	0	+	-	+	-	+	0	0	0	0	+	-	+	-	+	0
0	0	0	+	-	+	0	0	0	0	0	0	+	-	+	0	0
0	0	0	0	+	0	0	0	0	0	0	0	0	+	0	0	0

FIG. 3.7 – Construction d'une MSA minimale de taille 9 ayant 14 ( $= 4^2 - 2$ ) entrées négatives.

De plus, toute MSA  $M$  se contractant en  $M_c$  est obtenues par le mélange de  $M_c$  avec un certain nombre d'occurences de l'unique MSA de taille 1. Ce nombre d'occurences est exactement la différence entre la taille de  $M$  et la taille de  $M_c$ .

En utilisant le Théorème 6 nous obtenons le nombre de matrices se contractant en une MSA contractée  $M_c$  fixée. Une propriété importante de ce comptage est qu'il ne dépend que de la taille de  $M_c$  et non de ses valeurs.

**Théorème 7.** *Soit  $M_c$  une matrice contractée de taille  $j$ . Notons  $f_{n,j}$  l'ensemble des matrices de taille  $n$  se contractant en  $M_c$ .*

*On a alors :*

$$f_{n,j} = (n-j)! \binom{n}{j}^2 = n! \frac{(n)_j}{j!j!}$$

où  $(n)_j = n(n-1) \cdots (n-j+1)$  est la factorielle descendante.

*Démonstration.* Par définition, la contraction d'une matrice est obtenue en retirant toutes ses entrées isolées.

La construction inverse, qui consiste à ajouter des entrées isolées à une matrice  $M$  est le mélange de cette matrice  $M$  avec des occurences de l'unique MSA de taille 1, notée  $I_1$  (une unique case valant 1).

Ainsi, l'ensemble des matrices de taille  $n$  se contractant en une matrice  $M_c$  de taille  $j$  est obtenu par mélange de  $M_c$  avec  $n-j$  occurences de  $I_1$ .

On applique alors le Théorème 6 pour obtenir la formule :

$$\frac{n!n!}{(n-j)!j!j!}$$

□



### 3.2.3 Formule de comptage des MSAs selon leurs entrées négatives

Oltre le fait de donner une formule pour le nombre de MSAs se contractant en une contractée donnée, le Théorème 7 implique aussi que ce nombre est le même pour toutes les contractées de même taille.

Ainsi, pour compter les MSAs de taille  $n$  avec  $k$  entrées négatives, objectif de ce chapitre, il suffit de compter, pour chaque taille  $j$ , le nombre de matrices contractées dans  $C_k$ , c'est à dire l'ensemble des matrices dans  $C_{j,k}$ .

Le Théorème 7 établit alors qu'il y a  $|C_{j,k}| \frac{n!n!}{(n-j)!j!j!}$  MSAs de taille  $n$  se contractant en une matrice de taille  $j$ .

La formule de comptage des MSAs dans  $A_{n,k}$  est alors donnée par le Théorème 8.

**Théorème 8.** *Le nombre de matrices de taille  $n$  ayant  $k$  entrées négatives est donné par*

$$|A_{n,k}| = n! \sum_{j=L_k}^{3k} |C_{j,k}| \frac{n!}{(n-j)!j!j!}$$

Cette formule se déduit donc directement du vecteur de valeurs  $|C_{j,k}|$  pour  $j \in \{L_k, \dots, 3k\}$ . Ces valeurs ne dépendent pas de la taille  $n$  des matrices comptées et sont *a priori* plus facile à compter et de toute façon moins nombreuses.

La formule du Théorème 8 étant établie, notre objectif devient alors de calculer les valeurs  $|C_{j,k}|$ . Ceci peut-être fait par des formules explicites (nous donnerons les formules pour  $|C_{3k,k}|, |C_{3k-1,k}|, |C_{3k-2,k}|$ ) ou par énumération exhaustive.

Pour  $k \in \{1, 2\}$  les formules étaient un résultat d'Aval [4], présentées sous une forme légèrement différente.

**Théorème 9 (Aval).**

$$\begin{aligned} |A_{n,1}| &= n!f_{n,3} \\ |A_{n,2}| &= n!(2.f_{n,4} + 44.f_{n,5} + 200.f_{n,6}) \end{aligned}$$

Dans un premier temps, nous avons utilisé un programme d'énumération classique. Il s'agit, pour chaque taille  $t \in \{1, \dots, 3k\}$ , de passer en revue chaque matrice dans  $|A(t)|$  et effectuer un test pour ne compter que les matrices dans  $C_{t,k}$ .

On se heurte alors très vite à une explosion combinatoire et la taille 10 semble être une extrême limite si on se fixe un temps raisonnable.

Cette technique permet de calculer tous les coefficients de  $|A_{n,3}|$  (nécessitant une énumération jusqu'à la taille 9).

Pour arriver à obtenir les formules pour de plus grands nombres d'entrées négatives, deux stratégies sont possibles :

- trouver une formule explicite pour les coefficients  $|C_{t,k}|$ , en particulier pour ceux où  $t$  est proche de  $3k$ .

- arriver à optimiser suffisamment l'algorithme d'énumération pour trouver tous les coefficients.

Nous parlerons de la première solution dans une prochaine section, et nous donnerons en particulier des formules explicites calculant  $|C_{3k-a,k}|$  pour  $a \in \{0, 1, 2\}$ .

### 3.2.4 Comportement asymptotique de $A_{n,k}$

L'équation du théorème 5, conjuguée au comptage des  $C_{3k,k}$ , nous permet d'obtenir l'asymptotique du nombre de MSAs ayant un nombre d'entrée négatives arbitraire.

En exprimant cette équation de la manière suivante :

$$|A_{n,k}| = n! \sum_{j=L_k}^{3k} \frac{|C_{j,k}|}{j!^2} (n)_j$$

on remarque que la somme dans la formule est un polynôme en  $n$  de degré maximum  $3k$ . Et le coefficient dominant est alors  $\frac{|C_{3k,k}|}{(3k)!^2}$ . Nous avons donc :

$$|A_{n,k}| = \frac{|C_{3k,k}|}{(3k)!^2} n! n^{3k} (1 + O(1/n))$$

Dans la section suivante nous montrons que

$$|C_{3k,k}| = \frac{(3k)!(3k)!}{k!36^k}$$

et nous obtenons :

**Théorème 10.**

$$|A_{n,k}| = n! \frac{n^{3k}}{k!36^k} (1 + O(1/n))$$

## 3.3 Comptage de MSAs contractées

Dans la section précédente, nous avons montré comment décomposer l'ensemble infini des MSAs ayant un nombre fixé d'entrées négatives en un nombre fini de matrices contractées.

Nous voudrions maintenant déterminer le nombre de MSAs contractées ayant un nombre de  $-1$  fixé et une taille fixée, afin de rendre explicite la formule de comptage des  $|A_{n,k}|$ .

Dans cette optique, nous avons d'une part trouvé des formules comptant les coefficients  $|C_{t,k}|$  lorsque la taille  $t$  est proche de  $3k$ , la taille maximale d'une MSA contractée avec  $k$  entrées négatives, et d'autre part, nous avons mis au point des techniques permettant de calculer par programme et de façon efficace les coefficients  $|C_{t,k}|$  non donnés par nos formules.

Que ce soit pour prouver et trouver des formules de comptage ou pour calculer par programme les coefficients  $|C_{t,k}|$ , de nouveaux objets, que nous appelons squelettes de MSA, se sont montrés très efficace une fois associés à un algorithme permettant de déterminer le nombre de MSA contractées ayant un squelette donné.

Dans les sections précédentes, nous avons montré comment “factoriser” un grand nombre de MSA en oubliant la position de leurs entrées isolées. Les matrices ainsi factorisées forment des matrices contractées et nous savons calculer le nombre de matrices qui leurs sont associées. Afin d’y arriver, nous avons utilisé le Théorème 6 portant sur le mélange de MSAs.

Nous allons maintenant essayer de réduire encore le nombre d’objets à étudier, en construisant des *squelettes* de MSAs contractées. Nous les appelons squelettes, car même s’ils présentent un grand nombre de similitudes avec les MSAs, ils n’en sont pas.

Cette approche, bien que plus technique que celle visant à utiliser les MSAs contractées, permet de réduire drastiquement les calculs et les études de cas. Pour cela, nous devons néanmoins savoir associer à chaque squelette son ensemble de MSAs contractées. C’est cette étape qui est moins satisfaisante que notre Théorème de mélange. Là où nous avons une formule explicite, nous n’avons plus qu’un algorithme dont la complexité est exponentielle en la taille du squelette.

Bien que la complexité de cet algorithme semble rédhibitoire, nous verrons qu’il a certains avantages sur les techniques plus classiques d’énumération de MSA, en particulier grâce au nombre très faible de squelettes possibles comparé au nombre de MSAs dont ils sont issus.

### 3.3.1 Squelettes de MSAs

De même que nous avons retiré les entrées isolées des MSAs pour obtenir les MSAs contractées, nous allons retirer les entrées dites *pseudo-isolée* pour obtenir le squelette d’une MSA contractée.

**Définition 14** (Entrée pseudo-isolée). *Nous appelons entrée pseudo-isolée toute entrée positive de matrice ayant pour degré 1.*

Les squelettes se définissent alors similairement aux contractions de MSA, à ceci près que ce sont des matrices rectangulaires.

**Définition 15** (Squelettes de MSA). *Soit deux entiers positifs non nuls  $w$  et  $h$ . Un squelette de largeur  $w$  et de hauteur  $h$  est une matrice  $M$  de taille  $w \times h$  et telle que :*

- chaque entrée de  $M$  vaut 0, 1 ou  $-1$ ,
- les entrées non nulles alternent en signe le long de chaque ligne et chaque colonne,
- la matrice ne contient aucune entrée isolée ou pseudo-isolée.

On note  $S_k$  l'ensemble des squelettes ayant  $k$  entrées négatives.

Il faut remarquer que les squelettes ne sont *jamaïs* des MSAs, contrairement aux MSAs contractées, même lorsqu'ils sont de forme carrée.

**Exemple 9.** Nous avons dessiné sur la Figure 3.8 tous les squelettes, modulo les symétries du plan, ayant 2 entrées négatives. Les 4 squelettes dessinés en représentent donc 10 au total. Il est intéressant de comparer cette valeur au nombre de MSAs contractées dans  $C_2$ , c'est à dire ayant 2 entrées négatives. En effet, ces 10 squelettes suffisent pour représenter les 246 MSAs contractées dans  $C_2$ .

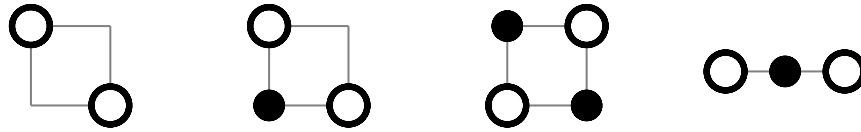


FIG. 3.8 – Les 10 squelettes de  $S_2$  (seuls 4 sont représentés, les autres étant obtenus par symétrie)

Pour 3 entrées négatives, le gain des squelettes sur les MSAs contractées devient encore plus flagrant puisque de 624768 MSAs nous passons à 260 squelettes (notre programme optimisé pour tenir compte de certaines symétries n'en construit que 124). Nous avons dessiné chacun de ces squelettes modulo leurs symétries sur la Figure 3.9, ce qui donne 83 squelettes.

Une importante propriété des squelettes est qu'à toute MSA on peut associer un unique squelette, ce qui permet de partitionner l'ensemble des MSAs selon leurs squelettes, de même que nous les partitionnions selon les MSAs contractées.

**Définition 16** (Squelette associé à une MSA ). Soit  $M$  une MSA.

On note  $sq(M)$  le squelette obtenu, partant de  $M$  en retirant la ligne et la colonne de chaque entrée isolée, ainsi que les lignes et colonnes ne contenant qu'une entrée pseudo-isolée pour seule entrée non nulle.

On dit alors que  $M$  se réduit en  $sq(M)$  ou encore que  $sq(M)$  engendre  $M$ .

On note  $C(S)$  l'ensemble des MSAs contractées engendrées par  $S$ .

Il est clair, par construction, que la matrice obtenue est un squelette, puisque nous avons retiré toutes les entrées positives dont le degré était inférieur ou égal à 1. De plus, l'ordre dans lequel on retire les lignes et colonnes n'a pas d'influence sur le résultat.

### 3.3.2 Multiplicité d'un squelette

Nous nous intéressons maintenant à retrouver le nombre de MSA contractées se réduisant en un squelette donné, que nous appellerons la multiplicité d'un squelette.

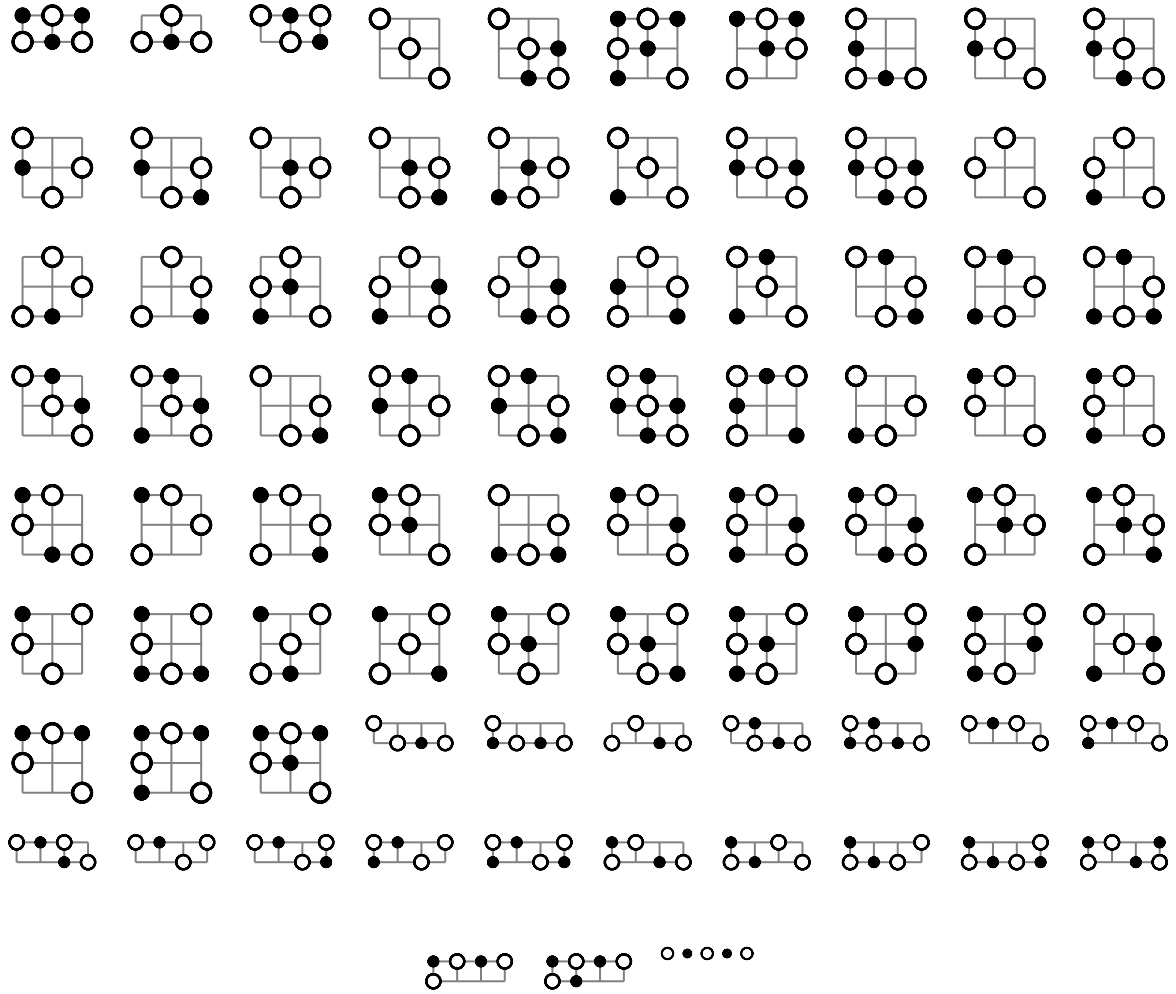


FIG. 3.9 – Les 260 squelettes de  $S_3$  (seuls 83 sont représentés, les autres étant obtenus par symétrie)

**Définition 17** (Multiplicité d'un squelette). *Etant donné un squelette  $S \in S_k$ , on note  $m(S)$  le cardinal de l'ensemble des matrices appartenant à  $C_k$  et admettant  $S$  pour squelette.*

*Le nombre  $m(S)$  est appelé multiplicité du squelette  $S$ .*

Afin de se faire une idée des mécanismes en jeu, nous allons étudier le cas simple des squelettes dans  $S_2$ . La Figure 3.8 montre les 4 squelettes qu'il suffit d'étudier, les autres pouvant être obtenus par symétrie. Nous les noterons  $s_1, s_2, s_3, s_4$ , dans l'ordre de lecture de la Figure 3.8 de gauche à droite.

Le but du jeu va être de reconstituer des MSAs contractées en rajoutant des lignes et des colonnes à un squelette, de telle sorte que chaque ligne et colonne ajoutée ne contienne qu'une valeur non nulle et aucun  $-1$ .

Pour le squelette  $s_3$ , la multiplicité est évidente, en effet, il n'existe qu'une seule façon de compléter ce squelette pour obtenir une MSA contractée. Cela se fait en plaçant un 1 à gauche et en dessous du  $-1$  du coin bas-gauche ainsi qu'à droite et au dessus du  $-1$  du coin haut-droit, de manière à ce que chaque ligne et colonne commence et finisse par un 1. On crée ainsi une matrice de taille 4. On a donc  $m(s_3) = 1$ , ce qui, avec son symétrique, donne 2 matrices contractées de taille 4.

Pour  $s_4$ , il est clair que nous devons commencer par placer un 1 à gauche et à droite de l'unique ligne du squelette, afin que cette ligne de la matrice finale commence et termine par un 1. De plus, chacune des 2 entrées négatives doit avoir un 1 au dessus et en dessous d'elle-même. Il faut encore choisir l'ordre vertical des deux entrées ajoutées au dessus ainsi que l'ordre des deux entrées ajoutées en dessous. On obtient donc 4 combinaisons et les matrices ainsi formées sont de taille 5. Avec son symétrique, le squelette  $s_3$  donne donc 8 MSAs contractées de taille 5.

Pour  $s_2$ , il est facile de remplir les contraintes à gauche et sous le squelette. On place donc un 1 à gauche du  $-1$  du coin haut-gauche et en dessous du  $-1$  du coin bas-droit. Pour terminer la construction, nous devons d'une part placer un 1 au dessus de chaque  $-1$  de la matrice, et d'autre part, chaque  $-1$  doit également avoir un 1 à sa droite.

Ici le problème devient plus compliqué. Premièrement, il faut remarquer que l'on peut résoudre les contraintes verticales et horizontales de manière indépendante. En effet, il n'est pas possible de placer un 1 qui soit à la fois dans une nouvelle ligne et une nouvelle colonne, sinon il serait isolé. De plus, un nouveau 1 ne peut se trouver à l'intersection d'une ligne et d'une colonne du squelette, sinon il appartiendrait au squelette.

Le problème revient donc à compter le nombre de façons d'ordonner deux 1 placés à droite du squelette (le problème des 1 à placer au dessus étant dans ce cas symétrique). Nous pouvons placer le premier 1, celui situé à droite de la ligne du haut, d'une part entre les deux colonnes de  $s_2$  et d'autre part à droite du squelette. Tandis que le second 1 se trouve nécessairement à droite du squelette. On arrive à 3 possibilités. Il y a donc 9 façons de compléter  $s_2$  pour obtenir une MSA contractée, et toutes les MSAs ainsi obtenues sont de taille 5. Cella donne, avec les symétries, 36 MSAs contractées de taille 5.

En ce qui concerne  $s_1$ , c'est le squelette à la fois le plus complexe à compléter et en même temps le plus simple car nous pouvons utiliser notre Théorème de mélange. En effet, les deux  $-1$  de  $s_1$  appartiennent à des composantes connexes distinctes. En effet, il est impossible lors de la complétion de  $s_1$  pour obtenir une MSA contractée de placer un 1 qui rendrait connexes les deux  $-1$  d'origine. En somme, nous devons mélanger deux instances de l'unique MSA dans  $C_{3,1}$ . La formule du Théorème 6 nous donne donc la multiplicité de  $s_1$ , celle-ci vaut 100. Au total, avec son unique squelette symétrique,  $s_1$  représente 200 MSAs contractées.

Ainsi, à partir de 3 matrices de taille  $2 \times 2$  et une matrice de taille  $3 \times 1$ , nous représentons pas moins de 200 MSAs de taille 6, 44 MSAs de taille 5 et 2 MSAs de

taille 4.

Si nous voulions obtenir les nombres de MSAs contractées ayant 3 entrées négatives, nous devrions faire une étude similaire des 83 squelettes présentés sur la Figure 3.9. Cela reste faisable à la main, à condition de savoir calculer les multiplicités de manière efficace.

De plus, nous avons vu que des squelettes de même largeur et de même hauteur peuvent engendrer des MSAs de tailles différentes. Et vice-versa, deux squelettes de largeur ou de hauteur différente peuvent engendrer des MSAs de même taille. Mais ce qui est toujours vrai, c'est que la taille des matrices engendrées par un même squelette est constante et ne dépend que de la taille du squelette et de son nombre de 1 et de  $-1$ .

Etant donné un squelette  $S$  de taille  $w \times h$ , si on note  $l$  (resp.  $r$ ) le nombre de lignes de  $S$  dont la première (resp. dernière) entrée non nulle vaut  $-1$ , alors la taille de toute MSA contractée admettant  $S$  pour squelette est donnée par  $w + l + r$ .

En effet, chaque colonne de  $S$  (il y en a  $w$ ) sera présente dans n'importe quelle MSA de  $C(S)$ . De plus, pour chaque  $-1$  commençant une ligne, nous ajoutons une colonne à la matrice et nous faisons pareil pour les  $-1$  terminant une ligne. Ainsi, il y a  $w + l + r$  colonnes dans toute MSA contractée engendrée par  $S$ .

De même, en notant  $t$  et  $b$  le nombre de colonnes commençant et se terminant par un  $-1$ , la taille des MSAs contractées dans  $C(S)$  est donné par  $h + t + b$ .

Ces quelques considérations nous permettent de montrer le résultat suivant :

**Lemme 9.** *Soit  $S$  un squelette quelconque de largeur  $w$  et de hauteur  $h$ .*

*Etant donné  $\sigma(S)$ , la somme des entrées de  $S$ , la taille de toute MSA contractée dans  $C(S)$  est donnée par  $w + h - \sigma(S)$ .*

*Démonstration.* Notons  $N$  la taille commune à toutes les MSAs contractées de  $C(S)$ .

Nous savons déjà que  $N = w + l + r$ .

Maintenant, on remarque que :

- toute ligne de  $S$  dont la somme des entrées vaut 1 ne compte pas ni dans  $l$  ni dans  $r$ ,
- toute ligne de  $S$  dont la somme des entrées vaut 0 compte pour 1, soit dans  $l$ , soit dans  $r$ ,
- enfin, si la somme des entrées d'une ligne vaut  $-1$ , alors celle-ci compte pour 1 à la fois dans  $l$  et dans  $r$ .

En fin de compte, une ligne  $l$  dont la somme des entrées vaut  $\sigma_l$  compte pour  $1 - \sigma_l$  dans la somme  $l + r$ .

Comme la somme  $\sigma(S)$  des entrées du squelette est égale à la somme des entrées de chaque ligne du squelette, on a

$$h - \sigma(S) = l + r$$

et il résulte que

$$N = w + h - \sigma(S)$$

□

Cette propriété établit donc qu'un squelette engendre toujours des matrices de tailles identiques, mais aussi que seule la somme des entrées du squelette est prépondérante pour connaître la taille des matrices engendrées. En effet, étant donné un squelette  $S$ , il est inutile de connaître la position exacte de ses entrées non nulles pour calculer la taille des matrices dans  $C(S)$ .

**Définition 18** (Envergure d'un squelette). *Etant donné un squelette  $S$ , son envergure, notée  $env(S)$ , est la taille de toute matrice engendrée par  $S$ .*

A ce stade, nous pouvons réécrire la formule donnant  $|A_{n,k}|$  à partir du nombre de MSAs contractées en factorisant toutes les MSAs contractées obtenues par un même squelette.

$$|A_{n,k}| = n! \sum_{S \in S_k} m(S) f_{n,env(S)}$$

Afin d'obtenir une formule explicite pour un nombre d'entrées négatives fixé, nous devons désormais résoudre deux problèmes. Le premier consiste à énumérer tous les squelettes dans  $S_k$  et le deuxième à calculer la multiplicité de n'importe quel squelette.

### 3.3.3 Matrices de multiplicités

Dans la section précédente, nous avons étudié les squelettes dans  $S_2$  afin de calculer leurs multiplicités. Nous allons maintenant résoudre le problème du calcul de la multiplicité d'un squelette dans le cas général.

Comme nous l'avons déjà vu, afin de compléter un squelette  $S$  pour obtenir une matrice dans  $C(S)$ , nous devons rajouter des lignes et des colonnes ne contenant qu'un seul 1 pour unique valeur non nulle. En particulier, le squelette forme une sous matrice (la restriction à un ensemble de lignes et de colonnes) de toutes matrices dans  $C(S)$ .

Il en résulte que rajouter des lignes et des colonnes à un squelette pour obtenir une MSA contractée sont deux problèmes pouvant être traités de manière indépendante.

La multiplicité d'un squelette  $S$  se présente toujours comme le produit du nombre de façon de compléter  $S$  horizontalement (pour satisfaire les contraintes de MSA sur chaque ligne) avec le nombre de façon de compléter  $S$  verticalement. De plus, ces deux opérations sont clairement symétriques.



**Définition 19** (Multiplicité ligne d'un squelette). *Etant donné un squelette  $S$ , on note  $m_l(S)$  le nombre de façons de compléter  $S$  en rajoutant des colonnes de telle sorte que chaque ligne de  $S$  satisfasse les contraintes d'une MSA.*

*La valeur  $m_l(S)$  est appelée multiplicité ligne de  $S$ .*

De même, on définit la *multiplicité colonne*  $m_c(S)$  d'un squelette  $S$  comme la *multiplicité ligne* de la transposée de  $S$ . La multiplicité  $m(S)$  du squelette  $S$  est donc égale au produit de  $m_l(S)$  par  $m_c(S)$ .

Notre méthode pour calculer la *multiplicité ligne* d'un squelette  $S$  consiste à construire une matrice  $M(S)$  à valeurs dans  $\{0, 1\}$  de telle sorte que :

- chaque inter-colonne de  $S$  (c'est à dire chaque emplacement entre deux colonnes de  $S$ ) et chacun des deux bords du squelette soit représentée par une colonne de  $M(S)$ ,
- chaque “demi-ligne” de  $S$  dont la première valeur non nulle est un  $-1$  soit représentée par une ligne de  $M(S)$ . Une demi-ligne de  $S$  correspond à une ligne de  $S$  considérée soit en commençant à gauche et en lisant de gauche à droite, soit en commençant à droite et en lisant de droite à gauche. Le nombre de demi-lignes d'un squelette est donné par la somme des valeurs  $l$  et  $r$  utilisées dans la preuve du Lemme 9.

**Définition 20** (Matrice de multiplicité). *On appelle matrice de multiplicité toute matrice à valeurs dans  $\{0, 1\}$  et telle que chaque ligne et chaque colonne de la matrice contient au moins un 1.*

Nous donnons maintenant une construction permettant d'associer à tout squelette  $S$  une unique matrice de multiplicité  $M(S)$ . Nous verrons que  $M(S)$  permet de calculer de manière récursive la multiplicité de  $S$ .

**Définition 21** (Matrice de multiplicité  $M(S)$  d'un squelette). *Soit  $S$  un squelette de largeur  $w$  et de hauteur  $h$ .*

*On note  $k$  (resp.  $k'$ ) le nombre de lignes de  $S$  dont la première (resp. dernière) entrée non nulle vaut  $-1$ . On note alors  $l_i$  (resp.  $r_i$ ) la  $i^{\text{ème}}$  de ces lignes et  $L_i$  (resp.  $R_i$ ) le nombre de 0 au début (resp. à la fin) de la ligne  $l_i$  (resp.  $r_i$ ).*

*On associe à  $S$  une unique matrice de multiplicité, notée  $M(S)$ , de largeur  $w + 1$  et de hauteur  $k + k'$ .*

*Pour chaque  $l_i$  (resp.  $r_i$ ) on remplit les  $L_i + 1$  premières (resp.  $R_i + 1$  dernières) entrées de la ligne  $i$  de  $M(S)$  (resp. de la ligne  $h - \sigma(S) + 1 - i$ ) par des 1. Les autres entrées de  $M(S)$  valent 0.*

La largeur de la matrice de multiplicité d'un squelette  $S$  est également donnée par  $h - \sigma(S)$ . Ceci est une conséquence des propriétés des squelettes énoncées lors de la démonstration du Lemme 9. De même, la largeur de  $M(S)$  est également égale à  $\text{env}(S) - w$ , c'est à dire la taille des matrices dans  $C(S)$  retrachée de la largeur de  $S$ .

**Exemple 10.** Nous allons construire la matrice de multiplicité du squelette  $S$  suivant :

$$\begin{array}{cccccccc} \cdot & - & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & - & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ - & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & - & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & - & + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & - \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & - & + \end{array}$$

La première étape de la construction consiste à calculer pour chaque ligne de  $S$  le nombre de 0 consécutifs suivis d'un  $-1$  en début et fin de ligne. Pour les début de ligne nous obtenons les valeurs 1, 0, 4, 3, 6, 5 et pour les fins de lignes nous avons 5, 6, 2, 0.

Ensuite, nous calculons la largeur de  $M(S)$ , qui vaut un de plus que la largeur de  $S$ .

Nous obtenons alors la matrice suivante :

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{array}$$

Par construction, la matrice de multiplicité d'un squelette ne peut compter plus de deux fois le nombre de lignes du squelette. De plus, il est facile de montrer que pour tout squelette  $S$ ,  $M(S)$  compte au moins deux lignes.

Nous allons maintenant montrer comment calculer la multiplicité ligne d'un squelette à partir de sa matrice de multiplicité.

Avant tout, nous définissons l'ensemble des *configurations* d'une matrice de multiplicité. Intuitivement, à partir d'un squelette  $S$ , si nous voulons construire une matrice dans  $C(S)$ , il nous faudra placer de nouvelles colonnes à gauche, à droite, et entre certaines colonnes de  $S$ . Une *configuration* de  $M(S)$  représente un de ces choix de positions, ce qui revient à choisir pour chaque ligne de  $M(S)$  une entrée parmi les 1 de la ligne.

**Définition 22** (Configuration de matrice de multiplicité). *Etant donné une matrice de multiplicité  $M$  de largeur  $w$  et de hauteur  $h$ , on appelle configuration de  $M$  tout choix de  $h$  entrées de  $M$  vérifiant que :*

- chaque entrée choisie vaut 1,
- chaque ligne contient exactement une entrée choisie.

Les configurations d'une matrice de multiplicité  $M$  sont faciles à compter : leur nombre est donné par le produit du nombre de 1 sur chaque ligne de  $M$ .

Malheureusement, étant donné un squelette  $S$ , il n'existe pas de bijection entre les MSAs dans  $C(S)$  et l'ensemble des configurations de  $M(S)$ . Mais peu s'en faut comme nous le montrerons dans le Théorème 11. En effet, il suffit de donner un certain poids à chaque configuration pour obtenir  $|C(S)|$ .

**Lemme 10.** *Soit  $S$  un squelette. On note  $M_1$  sa matrice de multiplicité et  $M_2$  la matrice de multiplicité de la transposée de  $S$ .*

*A tout couple  $(c_1, c_2)$ , où  $c_1$  est une configuration de  $M_1$  et  $c_2$  est une configuration de  $M_2$ , on associe un ensemble  $E(c_1, c_2)$  de MSAs distinctes dans  $C(S)$ .*

$$|E(c_1, c_2)| = \prod_{j \in \text{col}(M_1)} \phi(c_1, j)! \prod_{j \in \text{col}(M_2)} \phi(c_2, j)!$$

où  $\text{col}(M)$  représente l'ensemble des colonnes de  $M$  et la fonction  $\phi$  associe, pour une configuration  $c$  donnée, le nombre d'entrées choisies dans  $c$  dans la colonne  $j$ .

**Preuve .** Par construction,  $M_1$  contient autant de colonnes qu'il y a d'inter-colonnes dans  $S$ . Autrement dit, chaque position dans  $S$  où une colonne est susceptible d'être intercalée est représentée par une colonne de  $M_1$ .

De plus, pour chaque ligne de  $S$  contenant un  $-1$  nécessitant un 1 à gauche (ou à droite), une ligne de  $M_1$  code les positions dans  $S$  où ce 1 manquant peut être placé. En effet, les 1 de  $M_1$  dans la ligne en question se trouvent exactement dans les colonnes représentant les positions dans  $S$  susceptibles d'accueillir le 1 manquant.

De fait, lorsque nous avons choisi un 1 sur chaque ligne de  $M_1$ , nous avons complété les contraintes de MSA non respectées par  $S$  au niveau de ses lignes, à ceci près que nous devons ordonner les 1 choisis dans des positions identiques. Pour chaque colonne  $j$  de  $M_c$ , si  $c_1$  a choisi  $\phi(c_1, j)$  1 dans  $j$ , alors il existe  $\phi(c, j)$  façons différentes de les ordonner.

Le même raisonnement tient pour  $c_2$  et donne le résultat.

**Théorème 11.** *Soit  $S$  un squelette. On note  $M_1$  sa matrice de multiplicité et  $M_2$  la matrice de multiplicité de la transposée de  $S$ .*

*La multiplicité  $m(S)$  de  $S$  est donnée par :*

$$m(S) = \sum_{(c_1, c_2) \in M_1 \times M_2} |E(c_1, c_2)|$$

**Preuve .** Il suffit de remarquer que si deux couples  $(c_1, c_2)$  et  $(c'_1, c'_2)$  de  $M_1 \times M_2$  sont distincts, alors leurs ensembles  $E(c_1, c_2)$  et  $E(c'_1, c'_2)$  ont une intersection vide.

Le Lemme 10 donne alors le résultat.

### 3.3.4 Calcul du nombre de MSAs contractées

Les techniques consistant à utiliser les squelettes et les matrices de multiplicités ont permis de réduire grandement le nombre d'objets à considérer pour compter les MSAs contractées.

Pour les premières valeurs, le nombre de squelettes dans  $S_k$  est très inférieur au nombre de MSAs contractées dans  $C_k$ . Le tableau suivant donne les valeurs de  $S_k$  et  $C_k$  pour  $k \leq 7$ .

$k$	1	2	3	4	5	6	7
$S_k$	1	10	260	13392	1174051	159355004	31369480204
$C_k$	1	246	624768	$7.8 \times 10^9$	$> 3.3 \times 10^{14}$	$> 3.7 \times 10^{19}$	$> 9.5 \times 10^{24}$

Malheureusement, nous n'avons pas grand espoir de trouver une formule explicite générale donnant les  $|C_{t,k}|$  pour tout  $t$  et tout  $k$ . Les seules formules que nous ayons trouvées sont valables pour des couples  $(t, k)$  où  $t$  est de la forme  $3k - a$  quand  $a$  reste proche de 0. Nous avons par exemple les formules explicites de  $|C_{3k-1,k}|$  et  $|C_{3k-2,k}|$ . De plus, nous avons remarqué de grands nombres premiers facteurs de certains  $|C_{t,k}|$ . Le coefficient  $|C_{7,5}|$ , valant 11273, est même un nombre premier ! Ce qui rend l'existence d'une formule multiplicative semblable à celle de Zeilberger peu probable.

Nous devons donc nous rabattre sur des calculs assistés par ordinateurs afin de déterminer les coefficients  $|C_{t,k}|$  de la formule  $|A_{n,k}|$ .

Nous présentons dans cette section les techniques permettant d'énumérer les squelettes de MSA selon certains critères tels que leur nombre de  $-1$ , leur nombre de 1 ou leur envergure. Il ne reste alors plus qu'à utiliser les matrices de multiplicités et le Théorème 11 pour obtenir le nombre de MSAs contractées.

Les squelettes, bien que n'étant pas des MSAs, partagent avec celles-ci de nombreux points communs tels que l'alternance de signe sur les lignes et les colonnes. Les bijections connues entre les MSAs et d'autres familles d'objets peuvent généralement être adaptées aux squelettes.

En l'occurrence, nous utilisons une variante du codage ligne des MSAs, qui consiste à coder une ligne  $l$  de squelette par les indices de colonne de chaque entrée non nulle de  $l$ . Le codage est donc identique à celui des MSAs, il nécessite simplement de se souvenir de la largeur et de la hauteur du squelette au lieu de la seule taille pour une MSA.

On peut également faire le lien avec les configurations eulériennes de la grille. Lorsque ces configurations ont des conditions aux bords bien précises, elles sont en bijection avec les MSAs. Dans le cas des squelettes, les conditions aux bords sont arbitraires et de plus la grille n'est pas forcément carrée. En revanche, l'influence des contraintes interdisant la présence d'entrées isolées et pseudo-isolées n'est pas très claire du point de vue des configurations eulériennes.

Les algorithmes d'énumération des squelettes ressemblent donc beaucoup à ceux d'énumération des MSAs. En pratique, nous codons chaque ligne par une liste d'entiers codant les indices de colonnes des entrées non nulles, lues de gauche à droite, couplée à un booléen signifiant si la première valeur non nulle est un 1 ou un  $-1$ .

Il s'agit alors de générer les lignes des matrices énumérées une par une, de la première à la dernière, en testant à chaque étape toutes les lignes possibles. Ce faisant, on construit un grand nombre de matrices qui ne nous intéressent pas. Certaines optimisations plus ou moins faciles sont alors possibles.

La première permet de ne construire que des MSAs (ou squelettes), sans se soucier des autres contraintes que nous nous sommes fixées (nombre de  $-1$ , envergure des squelettes,...). Pour cela, il suffit de se souvenir de la dernière entrée non nulle que l'on a placée dans une colonne. On vérifie alors pour chaque entrée de la ligne à ajouter que celle-ci est compatible avec la dernière entrée ajoutée dans sa colonne.

**Remarque 3.** *Le fait de se souvenir de la dernière entrée d'une colonne est très étroitement lié à la représentation sous forme de configuration eulérienne de la grille du squelette ou de la MSA en cours de construction. En effet, les colonnes de la matrice et de la configuration sont corrélées et le sens de l'orientation de la configuration eulérienne change à chaque fois que l'on rencontre une entrée non nulle dans la matrice. La connaissance de l'orientation d'une arête verticale de la configuration eulérienne permet donc de connaître la valeur de la dernière entrée non nulle de la matrice.*

*Les configurations eulériennes sont donc très utiles lors de la génération exhaustive de squelettes ou de MSAs. En effet, il n'est pas nécessaire de stocker toute la matrice, mais seulement la dernière ligne de la configuration eulérienne pour savoir si on peut ajouter un 1 ou un  $-1$  dans une colonne.*

Ensuite, étant donné que nous nous intéressons à des matrices avec un nombre fixé d'entrées négatives, il est intéressant de garder le compte des  $-1$  déjà présent dans la matrice en cours de construction et de s'en servir pour éviter de générer des matrices avec trop de  $-1$ . Même à ce stade, nous générons des matrices superflues, mais la génération des seuls squelettes reste complexe et nous obtenons déjà des résultats satisfaisants avec ces techniques.

La prochaine étape d'optimisation, afin de réduire encore le nombre de matrices ou squelettes générés consiste à tenir compte des symétries. Les symétries facilement exploitables sont :

- la symétrie selon l'axe vertical,
- la symétrie diagonale pour les squelettes non carrés.

Pour chaque première ligne de la matrice, nous testons si la ligne est symétrique. Cela dépend de la longueur de la ligne, de la largeur de la matrice en cours de construction et dans le cas des squelettes, du signe de la première entrée non nulle de la ligne. En se souvenant de la symétrie (ou non) de cette première ligne nous

pouvons effectuer l'optimisation suivante : si la ligne est symétrique, toute matrice générée à partir de celle-ci sera comptée une fois, sinon, en se basant sur un quelconque ordre lexicographique, nous éliminons la moitié des premières lignes et comptons deux fois toutes les autres matrices générées. Nous ne poussons pas plus loin cette optimisation (en l'appliquant aux autres lignes générées) car la grande majorité des disymétries apparaissent sur la première ligne et le test de symétrie est de complexité linéaire en la largeur de la matrice générée.

Dans le cas des squelettes dont la largeur est différente de la hauteur, il suffit de ne générer que les squelette dont la hauteur est inférieure à la largeur. On compte alors ces squelette avec un poids deux fois plus grand. Ce poids est bien sur cumulatif avec celui de la symétrie verticale.

Ces deux optimisations faciles à implémenter permettent chacune de doubler la vitesse du programme. Bien qu'il soit plus agréable de faire un calcul en 15 minutes au lieu d'une heure, ce gain reste toutefois anecdotique comparé à l'explosion combinatoire du nombre de MSAs et de squelettes.

Dans le cas des MSAs, une importante optimisation consiste à stopper la génération dès que le nombre de  $-1$  attendu est atteint. On peut alors déterminer si la matrice peut être complétée (si toutes les colonnes contiennent déjà au moins une entrée non nulle) et si oui, de combien de manières possibles. En effet, chaque nouvelle ligne ne contient qu'un unique 1 pour seule entrée non nulle, situé dans une colonne dont la dernière entrée non nulle est un  $-1$ . La matrice peut donc être complétée de  $r!$  manières où  $r$  est le nombre de lignes restant. Cette optimisation donne un réel gain comparé à celles portant sur les symétries, mais il est difficile d'évaluer ce gain en terme de complexité. Expérimentalement, nous avons réduit des calculs prenant plus de 10 heures à une dizaine de minutes avec cette technique.

Une autre optimisation permettant de réduire de manière (très) importante le nombre de matrices générées (mais sans doute plus difficile encore à quantifier) consiste à être plus précis lorsque l'on teste si une entrée peut être ajoutée dans une colonne. Pour les squelette, nous pouvons par exemple interdire de placer un 1 dans une colonne ne contenant encore aucune entrée non nulle si celui-ci n'est pas "épaulé" dans sa ligne par au moins un  $-1$ . En effet, si tel n'est pas le cas, alors son degré ne pourra jamais dépasser 1, ce qui est interdit dans un squelette. Du côté des MSAs, un test très similaire consiste à interdire de placer un  $-1$  dans une colonne ne contenant aucune entrée non nulle.

Afin de nous rendre compte de l'efficacité de ces algorithmes, dans le cas de la génération de MSAs, nous avons compté le nombre de cases construites lors des énumérations effectuées et calculé le ratio de ce nombre total de cases par le nombre de cases d'une MSA complète. Cela donne une estimation du nombre de matrices effectivement construites. Il apparaît alors que nous construisons l'équivalent de 10% des matrices comptées.

### 3.4 Formules obtenues

L'introduction des squelettes et des matrices de multiplicité nous a permis d'avancer dans les deux voies que nous avons envisagées, c'est à dire d'une part trouver des formules permettant de calculer les coefficients  $|C_{t,k}|$ , et d'autre part, lorsque les précédentes formules ne suffisent pas, arriver à énumérer de manière suffisamment efficace les coefficients  $|C_{t,k}|$  manquants pour obtenir la formule explicite de  $|A_{n,k}|$ .

Cette technique nous a permis d'obtenir les formules complète de  $|A_{n,k}|$  pour  $k$  inférieur ou égal à 7. Nous savons également calculer de certains coefficients  $|C_{t,k}|$  supplémentaires, mais il en manque pour obtenir la formule explicite de  $|A_{n,8}|$ .

#### 3.4.1 Formule explicite de $|A_{n,k \leq 7}|$

Comme nous l'avons vu, la formule pour  $|A_{n,k}|$  devient explicite dès lors que l'on donne les coefficients  $|C_{j,k}|$  pour  $j \in \{0, \dots, 3k\}$ .

**Théorème 12.** *Pour  $k \leq 7$ ,  $|A_{n,k}|$  est donné par*

$$|A_{n,k}| = n! \sum_{j=1}^{3k} |C_{j,k}| \frac{n!}{(n-j)!j!j!}$$

où les  $|C_{j,k}|$  non nuls sont donnés par :

$$\begin{aligned} \{|C_{j=3,k=1}|\} &= \{1\} \\ \{|C_{4 \leq j \leq 6,k=2}|\} &= \{2, 44, 200\} \\ \{|C_{5 \leq j \leq 9,k=3}|\} &= \{14, 780, 15590, 137984, 470400\} \\ \{|C_{5 \leq j \leq 12,k=4}|\} &= \{1, 274, 24082, 964376, 21149856, 268327872, 1878307200, \\ &5691840000\} \\ \{|C_{6 \leq j \leq 15,k=5}|\} &= \{36, 11273, 1326528, 82421136, 3118234464, 76755874680, \\ &1253122928640, 13247669690112, 82956063590400, 235670635200000\} \\ \{|C_{6 \leq j \leq 18,k=6}|\} &= \{2, 2562, 818880, 120503224, 10295207568, 573021435024, \\ &22106133978192, 609591025508256, 12109784876709312, 170788568557711104, 1635058780516761600, \\ &9589720951050240000, 26153784411955200000\} \\ \{|C_{7 \leq j \leq 21,k=7}|\} &= \{328, 290576, 96379320, 16901510736, 1849188136440, 138470192776960, \\ &7496612158088592, 303003056395931424, 9293206617756205872, 216982897129118883840, \\ &3818844001952116101120, 49338056868962174337024, 443734689293340744499200, \\ &2492560269596978380800000, 6609061320901079040000000\} \end{aligned}$$

Ces valeurs nous permettent également d'obtenir la suite des nombres de MSAs contractées par nombre d'entrées négatives :

$$\{|C_k|, 1 \leq k \leq 7\} = \{1, 242, 624768, 7860613661, 333207449277269, 37562094777554075724, 9598739767406064263941432\}$$

De plus, nous pouvons calculer les premières valeurs de la suite des nombres de MSAs contractées de taille fixé. Il suffit de calculer quelques coefficients  $C_{t,k}$  supplémentaires et nous obtenons :

$\{0, 0, 1, 2, 59, 1292, 53862, 3615208\}$

La suite A003827 de l'OEIS (On-line Encyclopedia of Integer Sequences) compte les "Core ASMs" dont la définition est la suivante : "ASMs that are not 'blown up' from a smaller matrix by inserting row  $i$ , column  $j$  with  $a_{ij} = 1$  and all other entries in that row and column equal to 0".

Cette définition semble identique à celle des MSAs contractées, mais nos deux suites de valeurs divergent pour les tailles 6 et 7.

Une autre suite de l'OEIS, la suite A051055, semble donner le nombre de MSAs connexes de taille  $n$  (nos résultats le vérifient pour les tailles plus petites ou égales à 6). De plus, la suite A051055 est un minorant de la suite A003827, mais cela n'est pas vérifié pour la taille 7, ce qui semble montrer que A003827 est fausse. Notre suite donne des résultats cohérents avec la suite A051055, ce qui conforte notre confiance en nos résultats.

De plus, nous avons utilisé pas moins de 7 stratégies de comptage des  $C_{t,k}$  (dont 3 n'utilisant pas les squelettes), en vérifiant que chacun des programmes donnait les mêmes valeurs sur l'ensemble des termes calculés.

Comme le montrent nos résultats sur l'asymptotique de  $|A_{n,k}|$  pour  $k$  fixé, le coefficient dominant est  $|C_{3k,k}|$  et les coefficients de la forme  $|C_{3k-a,k}|$ , avec  $a \geq 0$  sont d'autant plus prépondérant sur le comportement asymptotique de  $|A_{n,k}|$  que  $a$  est petit.

### 3.4.2 Formules explicites de $|C_{3k-a,k}|$

En se basant sur le Théorème 6 portant sur le comptage des mélanges de MSAs et l'utilisation des squelettes de MSA, nous arrivons à déterminer, au prix d'une étude de cas de plus en plus difficile les formules de la forme  $|C_{3k-a,k}|$ .

Notre méthode consiste à déterminer le nombre de 1 dans une matrice de  $C_{3k-a,k}$ , qui dépend seulement de  $k$  et de  $a$  comme nous le verrons, et en déduire les différents graphes de MSAs possibles, à partir du degré des entrées positives. En effet, la somme des degrés des entrées positives est toujours égale à la somme des degrés des entrées négatives, c'est à dire  $4k$  lorsque  $k$  est le nombre de  $-1$ .

Les contraintes ainsi obtenues sur le degré des entrées positives nous permettent de déterminer l'ensemble des squelettes possibles pour une matrice dans  $C_{3k-a,k}$ . Afin de gagner en temps de calcul, nous ne générons que des squelettes connexes. L'utilisation du Théorème 6 combiné au calcul des multiplicités permet de trouver le nombre total de matrices dans  $C_{3k-a,k}$ .

**Lemme 11.** *Si  $M$  est dans  $C_{3k-a,k}$ , alors :*

- $M$  contient exactement  $4k - a$  entrées positives.
- La somme des degrés des entrées positives de  $M$  vaut  $3k - a$ .

*Démonstration.* Etant donné une MSA  $M$  de taille  $n$ , notons  $p(M)$  son nombre d'entrées positives et  $q(M)$  son nombre d'entrées négatives. Nous avons alors l'égalité



suivante :

$$n = p(M) - q(M)$$

En effet, la somme des entrées de chaque ligne vaut 1 et il y a  $n$  lignes dans  $M$ .

Supposons maintenant que  $M$  appartienne à  $C_{3k-a,k}$ . Alors  $M$  est de taille  $3k - a$  et compte exactement  $k$  entrées négatives. Le nombre d'entrées positives de  $M$  est donc donné par

$$p(M) = 4k - a$$

De plus, si on note  $d_+(M)$  (resp.  $d_-(M)$ ) la somme des degrés des entrées positives (resp. négatives) de  $M$ , on a

$$d_+(M) = d_-(M)$$

D'autre part, comme le degré d'une entrée négative de MSA vaut toujours 4, toute matrice  $M$  dans  $C_{3k-a,k}$  vérifie

$$d_-(M) = 4k$$

ce qui donne également le résultat pour  $d_-(M)$ .

□

Nous pouvons maintenant donner le schéma de preuve commun à toutes nos formules de comptage des  $|C_{3k-a,k}|$  dont voici le résumé.

**Théorème 13.**

$$|C_{3k,k}| = \frac{(3k)!(3k)!}{k!36^k}$$

$$|C_{3k-1,k}| = \frac{11(3k-1)!(3k-1)!}{100(k-2)!36^{k-2}}$$

$$|C_{3k-2,k}| = \frac{2(3k-2)!(3k-2)!}{4!4!(k-2)!36^{k-2}} + \frac{13140(3k-2)!(3k-2)!}{7!7!(k-3)!36^{k-3}} + \frac{968(3k-2)!(3k-2)!}{5!5!5!5!(k-4)!36^{k-4}}$$

*Démonstration.* Afin d'obtenir toutes les matrices dans  $|C_{3k-a,k}|$ , il suffit d'obtenir toutes les MSAs contractées contenant exactement  $4k - a$  entrées positives et dont la somme des degrés des entrées positives vaut  $4k$ .

Or chaque entrée positive a un degré valant au moins 1 et au plus 4, ce qui fait déjà une somme de degré valant  $4k - a$ . Il ne reste plus qu'à lister toutes les façons d'augmenter le degré des entrées positives pour que la somme des degré augmente de  $a$ .

Ceci revient à parcourir toutes les partitions de l'entier  $a$  en bornant la taille des parts à 3. Chaque part correspond alors à l'augmentation de degré de l'une des entrées positives.

Par exemple, pour  $a = 4$  on a les partitions suivantes :

- $(3, 1)$  qui correspond aux matrices contenant un 1 de degré 4, un 1 de degré 2 et les  $4k - a - 2$  autres sont de degré 1,
- $(2, 1, 1)$  qui correspond aux matrices contenant un 1 de degré 3, deux 1 de degré 2 et les  $4k - a - 2$  autres sont de degré 1,
- $(1, 1, 1, 1)$  qui correspond aux matrices contenant quatre 1 de degré 2 et les  $4k - a - 4$  autres sont de degré 1.

Nous déterminons ensuite, pour chaque partition  $p$  de  $a$ , tous les squelettes compatibles (c'est à dire contenant  $k$  entrées négatives et autant d'entrées positives que de parts dans  $p$ , avec des degrés correspondant aux tailles - augmentées de 1 - des parts de  $p$ ). Cette opération peut-être faite à la main ou, lorsque le nombre de cas explose, avec un programme.

Enfin, on utilise le Théorème 6 pour obtenir le nombre de mélanges distincts de chaque squelette avec le nombre nécessaire d'instances de l'unique matrice dans  $C_{3,1}$ .

□

Cette preuve est valable pour tout  $a$ , mais la partie vraiment problématique est la détermination des différents cas pour une partition de  $a$  donnée. Nous donnons maintenant l'étude détaillée de ces cas pour chacune des formules énoncées dans le Théorème 13.

Nous commençons par le cas  $a = 0$  qui est de loin le plus simple :

$$|C_{3k,k}| = \frac{(3k)!(3k)!}{k!36^k}$$

*Démonstration.* Le lemme 11 montre que toute matrice dans  $C_{3k,k}$  contient  $4k$  entrées positives, chacun ayant pour degré 1.

Donc toute MSA dans  $C_{3k,k}$  est le résultat du mélange de  $k$  instances de la matrice suivante :

$$\begin{array}{ccc} 0 & + & 0 \\ + & - & + \\ 0 & + & 0 \end{array}$$

On applique alors le Lemme 3 pour obtenir :

$$|C_{3k,k}| = \frac{(3k)!(3k)!}{k!36^k}$$

□

Le cas où  $a = 0$  est un peu particulier et les squelettes n'ont pas une grande utilité pour trouver la formule comptant  $|C_{3k,k}|$ . Nous allons voir que ce n'est plus le cas lorsque  $a \neq 0$  et que le nombre de cas à considérer devient difficile à traiter sans l'assistance d'un ordinateur.

Nous allons maintenant montrer la formule pour  $a = 1$ .

$$|C_{3k-1,k}| = \frac{11(3k-1)!(3k-1)!}{100(k-2)!36^{k-2}}$$

*Démonstration.* Le Lemme 11 implique que toute matrice dans  $C_{3k-1,k}$  contient  $4k-1$  entrées positives, dont la somme des degrés vaut  $4k$ .

Il y a donc une entrée positive de degré 2 et  $4k-2$  entrées positives de degré 1.

Il existe 6 squelettes ne contenant qu'une entrée positive de degré 2. Ces 6 squelettes peuvent tous être obtenus par symétrie à partir du second et du quatrième squelette de la Figure 3.8.

De plus, il se trouve que ces 6 squelettes engendrent exactement  $C_{5,2}$ , comptant 44 matrices.

Les matrices ci-dessous représentent trois matrices de  $C_{5,2}$  dont les squelettes sont distincts. On a marqué l'unique entrée de degré 2 par le symbole  $\oplus$ .

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus & - & 0 & + & 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ + & - & \oplus & - & + & + & - & 0 & + & 0 & + & 0 & 0 & - & + \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 & 0 & + & - & \oplus & 0 \\ 0 & + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0 \end{array}$$

Or toute matrice dans  $C_{5,2}$  compte exactement 6 entrées positives de degré 1. Par conséquent, les  $4k-2$  entrées positives de degré 1 se décomposent en 6 entrées faisant partie de la composante associée à une matrice de  $C_{5,2}$  et  $4k-8$  entrées positives devant se relier à  $k-2$  entrées négatives.

La seule façon de relier ces  $4k-8$  entrées positives à  $k-2$  entrées négatives consiste à former  $k-2$  occurrences de l'unique MSA dans  $C_{3,1}$ .

En résumé, toute MSA dans  $C_{3k-1,k}$  est le résultat du mélange de l'une des 44 MSAs de  $C_{5,2}$  avec  $k-2$  occurrences de l'unique matrice dans  $C_{3,1}$ .

L'application du Théorème 6 nous donne la formule suivante

$$|C_{3k-1,k}| = |C_{5,2}| \frac{(3k-1)!(3k-1)!}{(k-2)!5!5!36^{k-2}}$$

qui, après simplification, donne le résultat.

□

La formule suivante est plus complexe puisqu'elle fait intervenir plusieurs mélanges différents, contrairement aux deux précédentes où toutes les MSAs de la classe étaient issues du mélange d'un même multi-ensemble de matrices connexes.

$$|C_{3k-2,k}| = \frac{2(3k-2)!(3k-2)!}{4!4!(k-2)!36^{k-2}} + \frac{13140(3k-2)!(3k-2)!}{7!7!(k-3)!36^{k-3}} + \frac{968(3k-2)!(3k-2)!}{5!5!5!5!(k-4)!36^{k-4}}$$

*Démonstration.* Le Lemme 11 implique ici que toute matrice  $M$  dans  $C_{3k-2,k}$  contient  $4k - 2$  entrées positives, dont la somme des degrés fait  $4k$ .

Il est possible de partitionner les degrés des entrées positives de toute les façons suivantes :

- une entrée positive est de degré 3 et  $4k - 3$  sont de degré 1,
- deux entrées positives sont de degré 2 et  $4k - 4$  sont de degré 1.

Dans le premier cas, l'unique entrée positive de degré 3 doit être reliée à 3 entrées négatives, ce qui correspond à l'une des symétries du deuxième squelette de la première ligne de la Figure 3.9, rappelé ici :

$$\begin{array}{ccc} - & + & - \\ 0 & - & 0 \end{array}$$

La multiplicité de ce squelette vaut 216 et voici l'une des matrices contractées engendrées par celui-ci.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ + & 0 & - & + & - & + & 0 \\ 0 & + & 0 & - & 0 & 0 & + \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Chacune de ces 216 matrices contient 3 entrées négatives et 9 entrées positives de degré 1, ce qui laisse  $4k - 12$  entrées positives de degré 1 à relier à  $k - 3$  entrées négatives.

Ceci correspond à faire le mélange de l'une des 216 matrices contractées décrites ci-dessus avec  $k - 3$  occurrences de l'unique MSA dans  $C_{3,1}$ .

Le deuxième cas est plus complexe à traiter, en effet, si l'on a 2 entrées positives de degré 2, notées  $p_1$  et  $p_2$ , alors deux sous-cas sont possibles :

- soit  $p_1$  et  $p_2$  sont dans la même composante connexe,
- soit elles sont dans deux composantes connexes différentes.

Si  $p_1$  et  $p_2$  sont dans une même composante, alors il existe encore plusieurs cas possibles :

- soit  $p_1$  et  $p_2$  sont reliées aux deux même entrées négatives et l'on obtient 2 MSAs contractées engendrées par les deux squelettes suivants :

$$\begin{array}{cc} - & + \\ + & - \end{array} \quad \begin{array}{cc} + & - \\ - & + \end{array}$$

Ces deux squelettes engendrent donc toutes les matrices de  $C_{4,2}$  et nous sommes dans le cas du mélange d'une des 2 matrices de  $C_{4,2}$  avec  $k - 2$  occurrences de l'unique matrice de  $C_{3,1}$ .

Le Théorème 6 nous donne alors le terme suivant de la formule comptant les  $C_{3k-1,k}$  :

$$|C_{4,2}| \frac{(3k-2)!(3k-2)!}{(k-2)!4!4!6^{2k-4}}$$

- soit  $p_1$  et  $p_2$  partagent une unique entrée négative, engendrant des MSAs dont le graphe est une chaîne formée de 3 entrées négatives et 2 entrées positives. Les squelettes correspondants sont obtenus par symétrie à partir des squelettes de la Figure 3.9 suivants, numérotés par leur position dans chaque ligne de la Figure :

- ligne 1 : 8, 10,
- ligne 2 : 2, 5, 7,
- ligne 3 : 3, 5, 7, 8,
- ligne 4 : 1, 4, 10,
- ligne 5 : 1, 3, 5, 9,
- ligne 6 : 3, 5, 10,
- ligne 7 : 1, 5, 7, 10,
- ligne 8 : 1, 3, 4, 6, 7, 8,
- ligne 9 : 1, 3,

Comme on le voit, il y a beaucoup de squelettes et nous avons utilisé un programme afin d'obtenir le nombre de MSAs contractées engendrées par ces squelettes. Dans ce cas particulier, les MSAs contractées comptées sont exactement les MSAs dans  $C_{7,2}$ .

Nous avons alors affaire au mélange de l'une des matrices de  $C_{7,2}$  avec  $k-1$  occurrences de l'unique matrice de  $C_{3,1}$  et le Théorème 6 nous donne le terme suivant :

$$|C_{7,2}| \frac{(3k-2)!(3k-2)!}{(k-1)!6^{2k-2}}$$

Enfin, si  $p_1$  et  $p_2$  sont dans deux composantes connexes différentes alors on a affaire au mélange de

- deux matrices prises dans  $C_{5,2}$ ,
- avec  $k-4$  occurrences de l'unique matrice de  $C_{3,1}$ .

Il faut alors distinguer le cas où les deux matrices de  $C_{5,2}$  sont égales de celui où celles-ci sont différentes et on obtient les deux derniers termes de la formule comptant  $C_{3k-2,k}$  :

$$|C_{5,2}| \frac{(3k-2)!(3k-2)!}{2!5!5!5!36^{k-4}} + \binom{|C_{5,2}|}{2} \frac{(3k-2)!(3k-2)!}{5!5!5!5!36^{k-4}}$$

□

La preuve de la formule pour  $C_{3k-2,k}$  montre à quel point l'étude de cas se complexifie lorsque le paramètre  $a$  de la formule  $C_{3k-a,k}$  augmente.

Pourtant, grâce à nos programmes d'énumération des MSAs contractées basés sur les squelettes, nous pouvons grandement simplifier cette étude en laissant faire le tri parmi les squelettes par un ordinateur. Il suffit de trier les squelettes selon la partition des degrés de leurs entrées non nulles (en distinguant les entrées positives des entrées négatives).

De plus, on voit apparaître une structure dans la formule comptant les  $C_{3k-a,k}$  et on peut montrer qu'il existe pour tout  $a$  des coefficients  $X_i$  tels que :

$$|C_{3k-a,k}| = \frac{(3k-a)!(3k-a)!}{36^k} \sum_{i=a}^{\min(k,2a)} X_i \frac{36^i}{(k-i)!}$$

L'obtention des valeurs particulières de  $|C_{3k-a,k}|$  pour les petits  $k$  permet alors de calculer de proche en proche les valeurs des  $X_i$  puisque :

$$X_j = \frac{|C_{3j-a,j}|36^j}{(3j-1)!} - \sum_{i=a}^{j-1} \frac{X_i 36^i}{(k-i)!}$$

On se heurte à nouveau au problème de calculer les  $C_{3k-a,k}$ , en particulier car nos programmes n'arrivent pas à tous les calculer dès que  $k \geq 8$ .

## Chapitre 4

# Comptage de triangles monotones sans sauts

Les triangles monotones (appelés triangles Gogs par D.Zeilberger) sont en correspondance avec les matrices à signes alternants. Cette correspondance fut utilisée par Zeilberger [61] pour prouver la formule de comptage des matrices à signes alternants. Il montra qu'il existait autant de triangles monotones que de triangles Magogs, dont la formule était déjà connue. Cette preuve reste pourtant très complexe et n'est pas bijective.

Un travail récent de Ayzer, Cori et Gouyou-Beauchamps propose une bijection entre une sous famille des triangles Gogs d'une part et une sous famille des triangles Magogs d'autre part.

Nous présentons ici des résultats visant à compter le nombre d'éléments de cette sous-famille des triangles monotones.

### 4.1 Triangles sans sauts et triangles binaires

Les résultats que nous donnons sur les triangles Gogs se situent dans le cadre de l'article de Ayzer, Cori et Gouyou-Beauchamps [], actuellement en cours d'écriture, et traitant d'une bijection entre une sous-famille des triangles Gogs et une sous-famille des triangles Magogs (les triangles Magogs sont en bijection avec les partitions planes auto-complémentaire et entièrement symétriques).

Dans la famille des triangles Gogs considérés les sauts sont interdits entre deux cases verticales du triangle, où un saut est une différence strictement supérieure à 1 entre deux cases verticales.

**Définition 23** (Triangle sans saut). *Un triangle Gog contient un saut en position  $(i, j)$  si  $a_{i,j} - a_{i+1,j} > 1$ . Un triangle sans sauts est un triangle Gog qui ne contient aucun saut.*

**Exemple 11.** *Par exemple, le triangle monotone suivant contient deux sauts, l'un en position  $(1, 1)$ , l'autre en position  $(2, 2)$ .*

$$\begin{array}{cccc}
(4) & & & \\
2 & (4) & & \\
1 & 2 & 4 & \\
1 & 2 & 3 & 4
\end{array}$$

On note  $T_n$  l'ensemble des triangles sans sauts de taille  $n$ .

Lorsque l'on considère les triangles sans sauts, on remarque que la différence entre deux cases adjacentes d'une même colonne vaut toujours 0 ou 1. Un codage naturel des triangles sans sauts consiste à ne garder que les différences entre les cases d'une ligne avec les cases de la ligne suivante.

Ainsi, à tout triangle sans sauts de taille  $n$ , on associe un triangle binaire qui est un tableau  $(b_{i,j})$  de taille  $n-1$  à valeur dans  $\{0, 1\}$  et défini par  $b_{i,j} = a_{i,j} - a_{i+1,j}$ , pour  $1 \leq j \leq i < n$ .

**Exemple 12.** *Le tableau suivant montre un triangle sans sauts et le triangle binaire qui lui est associé.*

$$\begin{array}{cccc}
2 & & & \\
2 & 3 & & \\
2 & 3 & 4 & \\
1 & 2 & 3 & 4 \\
\\ 
0 & & & \\
0 & 0 & & \\
1 & 1 & 1 & 
\end{array}$$

On remarque que tous les triangles à valeur dans  $\{0, 1\}$  ne sont pas nécessairement des codages de triangles sans sauts. Mais il est possible de les caractériser en comparant les sommes partielles de deux colonnes consécutives.

A chaque triangle binaire  $(b_{i,j})$  de taille  $n-1$  on associe  $n-1$  mots sur l'alphabet  $\{0, 1\}$ , notés  $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n-1)}$ , représentant ses colonnes. Plus précisément le mot  $f^{(j)}$  est de longueur  $j$  et donné par :

$$f^{(j)} = b_{n-1,n-j} \cdots b_{n-j,n-j}$$

.

**Lemme 12** (Caractérisation des triangles binaires). *Deux mots  $g$  et  $h$  sur l'alphabet  $\{0, 1\}$  correspondent à deux colonnes consécutives d'un triangle binaire associé à un triangle sans sauts si et seulement si leurs longueurs  $|g|$  et  $|h|$  vérifient  $|h| - |g| = 1$  et pour tout  $i \leq |g|$  on a :*

$$\sum_{k=1}^i g_k \geq \sum_{k=1}^i h_k$$



De plus, une séquence de mots  $f^{(1)}, \dots, f^{(n-1)}$  représente un triangle binaire associé à un triangle sans sauts si et seulement si pour tout  $k < n$  les mots  $f^{(k)}$  et  $f^{(k+1)}$  satisfont la condition donnée au dessus pour  $g$  et  $h$ .

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que les  $a_{i,j}$  du triangle sans sauts correspondant sont obtenus à partir des  $f^{(i)}$  par la relation

$$a_{i,j} = j + \sum_{k=1}^{n-i} f_k^{(n-j)}$$

et la caractérisation implique alors la relation  $a_{i,j} < a_{i,j+1}$ . □

Par la suite, un *triangle binaire sans sauts* sera un triangle binaire dont les colonnes vérifient les propriétés du Lemme 12.

#### 4.1.1 Construction de triangles binaires sans sauts

Une façon naturelle de construire les triangles binaires sans sauts est de donner successivement les mots  $f^{(1)}, \dots, f^{(n)}$ . En effet, une fois les  $i$  premiers mots choisis, le choix du  $(i+1)^{eme}$  mot ne dépend que de  $f^{(i)}$ .

Cette remarque nous permet d'obtenir un algorithme qui donne le nombre de triangles binaires sans sauts de taille  $n$ . Pour cela on se propose de déterminer pour chaque mot  $f = a_1 a_2 \dots a_n$  de longueur  $n$  le nombre  $\lambda(f)$  de tels triangles dont la dernière colonne est codée par le mot  $f$ .

Pour un mot  $f$  donné, on note  $Suiv(f)$  l'ensemble des mots  $g$  tels que  $g$  peut suivre  $f$  dans un tel triangle binaire. Ces mots sont caractérisés par le Lemme 12.

**Remarque 4.** Pour tout mot  $h$  tel que  $h0 \in Suiv(f)$  on a  $h1 \in Suiv(f)$  et réciproquement. Par conséquent  $Suiv(f)$  contient un nombre pair de mots.

Etant donné deux mots  $u$  et  $f$ , on note  $uSuiv(f)$  l'ensemble  $\{ug : g \in Suiv(f)\}$ .

On remarque alors que  $Suiv(0f) = 0Suiv(f)$ .

**Exemple 13.** Pour  $f = 010$  on a :

$$Suiv(f) = \{0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101\}$$

On obtient ainsi une récurrence permettant de calculer les valeurs  $\lambda(f)$  de proche en proche.

**Propriété 2.** Pour tout mot  $f_n$  de longueur  $n$  sur  $\{0, 1\}$ , le nombre  $\lambda(f_n)$  est donné par la formule suivante :

$$\lambda(f_n) = \sum_{f_n \in Suiv(f)} \lambda(f)$$

L'algorithme de calcul des  $\lambda(f)$  pour tous les mots de longueur  $n$  procède alors de la façon suivante

– Initialisation :

$$\lambda(0) = \lambda(1) = 1.$$

– Pour  $k$  entre 1 et  $n - 1$  faire :

- Initialiser à 0 les valeurs de  $\lambda(f)$  pour tous les mots  $f$  de longueur  $k + 1$
- Pour tout mot  $g$  de longueur  $k$  calculer tous les mots  $f$  dans  $Suiv(g)$  pour chacun d'eux remplacer la valeur de  $\lambda(f)$  par  $\lambda(f) + \lambda(g)$ .

En sommant les valeurs des  $\lambda(f)$  pour tous les mots  $f$  de longueur  $n$  on obtient le nombre  $|T_n|$  de triangles sans saut de taille  $n$ .

Cet algorithme nécessite le calcul de  $Suiv(f)$  pour tous les mots  $f$ .

Un algorithme naturel pour obtenir  $Suiv(f)$  consiste à lire le mot  $f$  de gauche à droite et d'écrire les  $g$  de  $Suiv(f)$  au fur et à mesure.

Par exemple si  $f = 0, a_2, \dots, a_n$  tous les mots de  $Suiv(f)$  commencent aussi par 0 et il suffit de calculer  $Suiv(a_2, \dots, a_n)$ .

D'autre part si  $f$  commence par un 1 on peut pour  $g$  commencer par un 0 ou un 1, cela donne donc deux mots à compléter.

En construisant les mots  $g$ , il faut aussi conserver l'information sur la différence entre le nombre de 1 que l'on a lu dans  $f$  et le nombre de 1 que l'on a écrit dans le  $g$  en construction.

Ceci peut se faire en introduisant une variable supplémentaire  $k$  qui prend en compte cette différence. Ainsi on définit  $Suiv(f', k)$  comme l'ensemble des mots que l'on peut écrire pour  $g'$  sachant que l'on a une différence de  $k$  entre le nombre de 1 de la partie du mot  $f$  déjà lue et celle du mot de  $g$  déjà écrite.

Les formules suivantes permettent d'obtenir récursivement tous les mots de  $Suiv(f)$ , où on note  $\varepsilon$  le mot vide.

Pour  $k > 0$  :

$$\begin{aligned} Suiv(\varepsilon, k) &= \{0, 1\} \\ Suiv(0f, k) &= 0Suiv(f, k) \cup 1Suiv(f, k - 1) \\ Suiv(1f, k) &= 1Suiv(f, k) \cup 0Suiv(f, k + 1) \end{aligned}$$

Pour  $k = 0$  :

$$\begin{aligned} Suiv(\varepsilon, k) &= \{0, 1\} \\ Suiv(0f, k) &= 0Suiv(f, k) \\ Suiv(1f, k) &= 1Suiv(f, k) \cup 0Suiv(f, k + 1) \end{aligned}$$

Ainsi on obtient sur l'exemple plus haut :

$$\begin{aligned}
Suiv(010, 0) &= 0Suiv(10, 0) \\
&= 00Suiv(0, 1) \cup 01Suiv(0, 0) \\
&= 000Suiv(\varepsilon, 1) \cup 001Suiv(\varepsilon, 0) \cup 010Suiv(\varepsilon, 0) \\
&= 000\{0, 1\} \cup 001\{0, 1\} \cup 010\{0, 1\} \\
&= \{0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101\}
\end{aligned}$$

L'algorithme de calcul des  $\lambda(f)$  pour tous les mots  $f$  de chaque longueur donne ainsi les valeurs suivantes lorsque l'on fait la somme de toutes les valeurs obtenues :

Taille	Nombre de tableaux sans saut
1	1
2	2
3	6
4	26
5	162
6	1450
7	18626
8	343210
9	9069306
10	343611106
11	18662952122
12	1453016097506
13	162144482866166
14	25932885879826066
15	5944235428043079134

## 4.2 Méthode de minoration du nombre de triangles sans sauts

Nous présentons maintenant une méthode pour minorer le nombre de triangles sans sauts. Cette méthode s'appuie sur la représentation sous forme de triangles binaires sans sauts et une décomposition de ceux-ci en deux ensembles de lignes adjacentes.

L'ensemble supérieur (les premières lignes du triangle binaire) forme clairement un triangle binaire de taille plus petite, tandis que les lignes restantes constituent une forme trapezoidale, dont les cases sont sujetes aux mêmes conditions que celles d'un triangle binaire sans sauts. Cette décomposition est schématisée sur la Figure 4.1, le triangle supérieur noté  $T1$  est un triangle binaire à part entière tandis que la zone constituée du rectangle  $R$  et du triangle  $T2$  constitue le trapèze dont on voudrait compter le nombre de remplissages possibles.

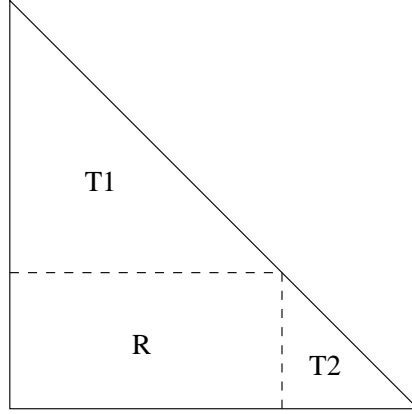


FIG. 4.1 – Décomposition d'un triangle binaire

### 4.2.1 $k$ -portions de triangle binaire

**Définition 24** (Portion de triangle binaire). Soit  $n$  et  $k$  deux entiers positifs tels que  $k < n$ .

Une  $k$ -portion de taille  $n$  est un ensemble de  $k$  lignes telles que

- la  $i^{\text{ème}}$  ligne contient  $(n - k + i - 1)$  cases,
- les cases sont soumises aux mêmes conditions que celles d'un triangle binaire sans sauts.

On note  $P_{n,k}$  l'ensemble des  $k$ -portions de taille  $n$ .

**Exemple 14.** Le tableau suivant montre une 3-portion de taille 5.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Etant donné une  $k$ -portion de taille  $n$ , on peut choisir n'importe quel triangle binaire sans sauts de taille  $n - k$  pour construire un triangle binaire sans sauts de taille  $n$ . Mais la réciproque est fausse et il existe des triangles binaires sans sauts de taille  $n$  que l'on ne construit pas à partir d'une  $k$ -portion.

Cette remarque permet néanmoins de calculer des minorants grâce à une relation de récurrence faisant intervenir des  $k$ -portions, que l'on sait par ailleurs compter.

**Lemme 13.** Soit  $k$  et  $n$  deux entiers positifs tels que  $k < n$ .  $|T_n|$  étant le nombre de triangles sans sauts (et donc de triangles binaires sans sauts), on a l'inégalité suivante

$$|T_n| \geq |P_{n,k}| |T_{n-k}|$$

*Démonstration.* Etant donné une  $k$ -portion  $P$  de taille  $n$  et un triangle binaire sans sauts  $B$  de taille  $n - k$  nous allons construire un triangle binaire  $T$  de taille  $n$ .

Les  $k$  premières lignes de  $T$  sont celles de  $P$ . Les  $n - k$  dernières sont celles de  $B$ .

Par construction, on obtient bien un triangle binaire de taille  $n$ . Et pour deux couples  $(P, B)$  et  $(P', B')$  différents il est trivial de vérifier que la construction donne deux triangles binaires différents.  $\square$

Cette propriété de décomposition des triangles binaires ramène le problème de leur minoration à celui de la minoration (ou éventuellement du comptage) des  $k$ -portions.

Par exemple, il est facile de déterminer le nombre de  $k$ -portions de taille  $n$  et l'on obtient alors que

$$P_1(n) = n + 1$$

c'est à dire que

$$|T_n| \geq n|T_{n-1}|$$

Autrement dit, le nombre de triangles binaires de taille  $n$  est supérieur au nombre de permutations de taille  $n$ . Ce résultat est loin de la réalité, mais l'application systématique de cette technique donne de meilleurs résultats asymptotique chaque fois que l'on fait grandir  $k$ .

### 4.3 Rectangles binaires sans sauts

Si nous fixons les  $n - k$  dernières colonnes d'une  $k$ -portion de taille  $n$  (sur la Figure 4.1 cela correspond au triangle  $T_2$ ) à être remplies de 1, la partie non fixée est de forme rectangulaire (noté  $R$  sur la Figure 4.1).

**Définition 25** (Rectangle binaire). *Un rectangle binaire de hauteur  $k$  et de longueur  $m$  est un ensemble de  $k$  lignes de longueurs  $m$  dont les cases vérifient les mêmes conditions que celles d'un triangle binaire sans sauts.*

*On note  $R_{m,k}$  l'ensemble des rectangles binaires sans sauts de longueur  $m$  et de hauteur  $k$ .*

Il est clair qu'un rectangle binaire sans sauts dans  $R_{m,k}$  peut toujours être complété par un triangle rectangle isocèle rempli de 1 pour donner une  $k$ -portion de taille  $m + k$ .

**Exemple 15.** *Voici un rectangle binaire dans  $R_{7,4}$*

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

*et sa 4-portion de taille 11 correspondante*

1	1	0	0	1	0	0	1			
1	0	1	0	1	0	1	1	1		
0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Celle-ci est obtenue à partir du rectangle en lui ajoutant sur son bord droit un triangle rempli de 1.

Le nombre de  $k$ -portions dans  $P_{n,k}$  est donc minoré par le nombre de rectangles binaires dans  $R_{n-k,k}$ .

### 4.3.1 Construction itérative des rectangles binaires

Il existe une construction itérative selon les lignes des rectangles binaires. Celle-ci consiste à choisir une position  $i_1$  dans  $\{0, \dots, n\}$ , où  $m$  est la longueur des lignes du rectangle, puis remplir de 0 les  $i_1$  premières cases de la dernière ligne et les  $m - i_1$  dernières cases par des 1.

Pour l'avant dernière ligne, on choisit deux positions  $j_1, j_2$  dans  $\{0, \dots, m\}$  telles que  $j_1 \leq i_1 \leq j_2$ . Ces trois positions définissent une partition de  $[m]$  en 4 parts, éventuellement vides, à savoir  $\{1, \dots, j_1\}, \{j_1 + 1, \dots, i_1\}, \{i_1 + 1, \dots, j_2\}, \{j_2 + 1, \dots, m\}$ .

Les positions correspondant aux parts  $\{1, \dots, j_1\}$  et  $\{i_1 + 1, \dots, j_2\}$  doivent être remplis par des 0 et le reste de la ligne par des 1.

De manière générale, on construit la  $k^{\text{eme}}$  dernière ligne, étant donné les  $k - 1$  valeurs croissantes  $i_1, \dots, i_{k-1}$  de la  $(k - 1)^{\text{eme}}$  dernière ligne, en choisissant  $k$  valeurs  $j_1, \dots, j_k$  dans  $\{0, \dots, n\}$  de telle sorte que  $0 \leq j_1 \leq i_1 \leq j_2 \leq i_2 \leq \dots \leq j_{k-1} \leq i_{k-1} \leq j_k \leq m$ . On remplit alors les cases correspondant aux  $k$  parts  $\{1, \dots, j_1\}, \{i_1 + 1, \dots, j_2\}, \dots, \{i_{k-1} + 1, \dots, j_k\}$  par des 0 et les autres cases par des 1.

**Exemple 16.** Par exemple, pour construire un rectangle binaire dans  $R_{12,4}$  nous pouvons faire les choix suivants :

- La première ligne est coupée en position 6  
(car  $0 \leq 6 \leq 12$ ),
- La deuxième en positions 3 et 8  
(car  $0 \leq 3 \leq 6 \leq 8 \leq 12$ ),
- La troisième en positions 3, 7, 10  
(car  $0 \leq 3 \leq 3 \leq 7 \leq 8 < 10 \leq 12$ ),
- La quatrième en positions 2, 6, 7, 11  
(car  $0 \leq 2 \leq 3 \leq 6 \leq 7 \leq 7 \leq 10 < 11$ ).

Et le rectangle ainsi obtenu est le suivant :

$$\begin{array}{cccccccccccc}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

**Remarque 5.** *Il existe une bijection entre les rectangles binaires dans  $R_{m,k}$  et les triangles de taille  $k$  à valeurs dans  $\{0, \dots, m\}$  dont la forme est donnée par*

$$\begin{array}{cccc}
c_{1,1} & & & \\
c_{2,1} & c_{2,2} & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \\
c_{m,1} & c_{m,2} & \cdots & c_{m,m}
\end{array}$$

et vérifiant pour  $i \in \{1, \dots, k\}$  que  $c_{i+1,j} \leq c_{i,j} \leq c_{i+1,j+1}$ .

Notons que ces triangles vérifient une partie des propriétés des triangles Magogs de Zeilberger, en effet, la seule condition supplémentaire demandée aux triangles Magogs est de vérifier que  $c_{i,j} \geq i$ .

Avec cette notation, la valeur  $c_{1,1}$  correspond à la position choisie dans la dernière ligne du rectangle binaire correspondant, les valeurs  $c_{2,1}$  et  $c_{2,2}$  aux deux positions choisies dans l'avant-dernière ligne et de manière générale, les valeurs  $c_{l,1}, \dots, c_{l,l}$  correspondent aux  $l$  valeurs choisies dans la  $l^{eme}$  ligne en partant de la fin du rectangle binaire correspondant.

Le rectangle binaire de l'exemple précédent est donc en correspondance avec le triangle suivant :

$$\begin{array}{cccc}
6 & & & \\
3 & 8 & & \\
3 & 7 & 10 & \\
2 & 6 & 7 & 11
\end{array}$$

Cette correspondance permet de donner une expression du nombre de rectangles binaires dans  $R_{m,k}$  lorsque  $k$  est fixé.

Pour les rectangles binaires contenant 2 lignes, on a par exemple

$$|R_{m,2}| = \sum_{i_1=0}^m \left( \sum_{j_1=0}^{i_1} \sum_{j_2=i_1}^m 1 \right)$$

et en notant  $l_i^j$  le  $i^{eme}$  indice de la ligne  $m - j + 1$  on a alors :

$$|R_{m,k}| = \sum_{l_1^1=0}^m \sum_{l_2^1=0}^{l_1^1} \sum_{l_2^2=l_1^1}^m \left( \cdots \left( \sum_{l_k^1=0}^{l_{k-1}^1} \sum_{l_k^2=l_{k-1}^1}^{l_{k-1}^2} \sum_{l_k^3=l_{k-1}^2}^{l_{k-1}^3} \cdots \sum_{l_k^k=0}^m 1 \right) \cdots \right) \quad (4.1)$$

Cette formule peut paraître assez complexe, toutefois, avec le programme Maple, nous obtenons une expression explicite valable pour tout  $m$ , et tout  $k \leq 8$ . Nous conjecturons alors la formule suivante déterminant  $|R_{m,k}|$  :

$$|R_{m,k}| = \prod_{i=1}^k \frac{\binom{m+2i-1}{i}}{\binom{2i-1}{i}} \quad (4.2)$$

que nous pouvons écrire de manière récursive

$$\binom{2k-1}{k} |R_{m,k}| = \binom{m+2k-1}{k} |R_{m,k-1}| \quad (4.3)$$

D'autre part, une formulation récursive équivalente s'écrit :

$$|R_{m,k}| = \sum_{0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq m} R_{m;a_1,a_2,\dots,a_k}$$

avec

$$R_{m;a_1,\dots,a_k} = \sum_{a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq \dots \leq b_{k-1} \leq a_k} R_{m;b_1,\dots,b_{k-1}}$$

Dans cette écriture,  $R_{m;a_1,\dots,a_k}$  est le nombre de triangles vérifiant les conditions de la remarque 5 et dont la dernière ligne est  $a_1, \dots, a_k$ .

## 4.4 Premiers pas d'une preuve totalement bijective

La résolution de la formulation de l'équation 4.1 nous a permis de prouver la formule conjecturée dans l'équation 4.2 pour  $k \leq 8$  (la limite  $k = 8$  est assez arbitraire et nous pourrions sans doute aller plus loin) et Ayyer, Cori et Gouyou-Beauchamps ont donné une preuve de cette conjecture en construisant une bijection avec une autre famille d'objet comptés par la même formule.

Nous donnons une bijection prouvant l'équation 4.3 pour  $k = 2$ , c'est-à-dire :

$$\binom{3}{2} |R_{m,2}| = \binom{m+3}{2} |R_{m,1}|$$

Nous allons montrer qu'il existe une bijection entre les couples formés de

- un triplet d'entiers  $(a_1, a_2, a_3)$ , tel que  $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq m$ , (ceux ci codent clairement une rectangle dans  $R_{m,2}$ ),
  - un mot  $u = u_1 u_2 u_3$  de longueur 3 sur  $\{0, 1\}$ , contenant exactement deux 1.
- et les couples formés de
- un entier  $p$  compris entre 0 et  $m$ ,



- un mot  $v = v_0v_1v_2 \cdots v_{m+2}$  de longueur  $m+3$  sur  $\{0, 1\}$ , contenant exactement deux 1.

*Démonstration.* Partant du triplet  $(a_1, a_2, a_3)$  et du mot  $u$  tel que décrits ci-dessus, on associe la lettre  $u_i$  à l'entier  $a_i$  pour  $i \leq 3$ .

On construit alors le couple formé de l'entier  $p$  et du mot  $v$  ainsi :

- $p$  prend la valeur de l'unique entier dans  $\{a_1, a_2, a_3\}$  associé à l'unique lettre 0 du mot  $u$ ,
- $v$  est construit de telle sorte que  $v_{a_1} = u_1, v_{a_2+1} = u_2, v_{a_3+2} = u_3$ , les autres lettres n'étant que des 0.

La construction inverse, partant d'un entier  $p \in \{0, \dots, m\}$  et d'un mot  $v$  tel que défini ci-dessus se fait ainsi :

Notons  $x_1$  et  $x_2$  les deux positions dans  $v$  telles que  $v_{x_1} = v_{x_2} = 1$ , avec  $x_1 < x_2$ .

- Si  $p \leq x_1 < x_2$  alors  $(a_1, a_2, a_3) = (p, x_1 - 1, x_2 - 2)$  et  $u = v_p v_{x_1} v_{x_2} = 011$
- Si  $x_1 \leq p \leq x_2 - 2$  alors  $(a_1, a_2, a_3) = (x_1, p, x_2 - 2)$  et  $u = v_{x_1} v_p v_{x_2} = 101$
- Si  $x_1 < x_2 - 1 \leq p$  alors  $(a_1, a_2, a_3) = (x_1, x_2 - 1, p)$  et  $u = v_{x_1} v_{x_2} v_p = 110$

Ce qui prouve l'Equation 4.3 pour  $k = 2$ .

□

La généralisation de cette preuve pour  $k > 2$  n'est pas évidente, néanmoins, nous donnons des pistes qui pourraient permettre de trouver une telle généralisation.

Nous avons montré dans la remarque 5 que les rectangles binaires de  $R_{m,k}$  sont en bijection avec une famille de triangles à valeurs dans  $\{0, \dots, m\}$ .

D'autre part, les binomiaux  $\binom{2k-1}{k}$  et  $\binom{m+2k-1}{k}$  apparaissant dans l'équation 4.3 comptent (par exemple) des mots sur un alphabet  $\{a, b\}$  comptant exactement  $k$  lettres  $a$  et de longueurs respectives  $2k - 1$  et  $m + 2k - 1$ .

Dans la bijection recherchée, il serait intéressant de mettre en correspondance un couple  $(T_1, u_1)$  formé d'un triangle  $T_1$  de taille  $k$  et d'un mot  $u_1$  sur  $\{a, b\}$  comptant  $k$  lettres  $b$  et  $k - 1$  lettres  $a$  avec un couple  $(T_2, u_2)$  formé d'un triangle  $T_2$  de taille  $k - 1$  et d'un mot sur  $\{a, b\}$  comptant  $k$  lettres  $b$  et  $m + k - 1$  lettres  $a$ .

Plusieurs remarques peuvent alors être faites :

1. le tableau  $T_1$  compte  $k$  entrées de plus que le tableau  $T_2$ ,
2. si on retire, pour chacune des  $k - 1$  valeurs  $i$  de la dernière ligne de  $T_2$ , la  $i^{\text{eme}}$  lettre  $a$  de  $u_2$ , on se retrouve avec un mot  $u'_2$  de longueur  $m + k$ , et on peut associer à chaque lettre  $b$  le nombre de lettres  $a$  à sa gauche (ou droite) dans  $u'_2$ . On obtient alors  $k$  valeurs susceptibles de compléter les valeurs de  $T_1$  pour remplir le tableau  $T_2$ .
3. De plus, si on ne garde, dans le mot  $u_2$ , que les  $b$  et les  $a$  dont les positions sont données par la dernière ligne de  $T_2$  (comme dans le point précédent), on obtient un mot de longueur  $2k - 1$  contenant  $k$  lettres  $b$ . Ce mot pourrait donc être le mot  $u_1$ .

4. Les deux dernières lignes de  $T_2$  comptent autant de cases qu'il y a de lettres dans  $u_1$ , dans le sens  $(T_1, u_1) \rightarrow (T_2, u_2)$ , on pourrait alors associer à chacune de ces  $2k - 1$  cases une lettre de  $u_1$  de manière canonique et les  $k - 1$  lettres  $a$  prises dans l'ordre du mot donneraient  $k - 1$  valeurs dans  $T_1$  que l'on pourrait utiliser pour remplir la dernière ligne de  $T_2$ . De plus, ces  $k - 1$  peuvent servir de guide pour insérer les  $m$  lettres  $a$  manquantes à  $u_1$  pour donner le mot  $u_2$ . L'opération inverse étant alors le point 2 de cette série de remarque.

A partir de ces remarques, nous avons mis au point plusieurs constructions permettant d'associer de manière bijective des sous-familles de couples  $(T_1, u_1)$  à des couples  $(T_2, u_2)$ , mais pour toutes ces constructions il existe des cas particulier ne fonctionnant pas (par exemple, un couple  $(T_1, u_1)$  va donner une couple  $(T_2, u_2)$  où  $T_2$  ne vérifiera pas les conditions décrites dans la remarque 5.

# Chapitre 5

## Motifs dans les diagrammes de cordes

Les configurations de boucles compactes peuvent être partitionnées selon le diagramme de cordes défini par la façon dont sont reliés les  $2n$  sommets de degré 1 du bord de la configuration.

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la probabilité qu'un motif, c'est-à-dire un ensemble d'arêtes, soit présent dans le diagramme de cordes associé à une configuration de boucles compactes aléatoire.

Etant donné un motif, on remarque expérimentalement que la probabilité de rencontrer ce motif tend vers une limite lorsque la taille des diagrammes de cordes augmente.

Par exemple, Mitra, Nienhuis, de Gier and Batchelor [38] et Zuber [65] conjecturent indépendamment que la probabilité de rencontrer le motif  $\{1, 2\}$  tends vers  $\frac{3}{8}$ . Autrement dit, chaque sommet d'un diagramme de cordes aurait 3 chances sur 4 d'être relié à l'un de ses deux voisins.

Nous nous plaçons dans ce cadre pour étudier les diagrammes de cordes et nous analysons l'algorithme de Propp et Wilson de couplage par le passé, appliqué aux diagrammes de cordes, afin de calculer des encadrements des probabilités de trouver un certain motif dans un diagramme de cordes de taille  $n$ , pour  $n$  supérieur ou égale à une constante.

### 5.1 Motifs de diagrammes de cordes

Le but de ce travail est de calculer la probabilité de repérer un *motif*, c'est à dire un ensemble d'arêtes, dans un diagramme tiré selon la distribution  $\pi_n$  reliant les FPLs et les diagrammes de cordes grâce au Théorème de Cantini-Sportiello [8].

Nous introduisons donc la notion de motif, ainsi que l'ensemble de diagrammes de cordes associé à un motif.

**Définition 26** (Motifs). *Un motif de taille  $k$  est un ensemble  $M = \{(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)\}$*

de  $k$  couples d'entiers tels que

- Pour tout  $i$ ,  $1 \leq a_i < b_i$ ,
- Pour tout  $i \neq j$ , les quatre valeurs  $a_i, b_i, a_j, b_j$  sont distinctes,
- Pour tout  $i$ ,  $a_i$  et  $b_i$  sont de parités différentes,
- Pour tout  $i \neq j$ , soit  $[a_i, b_i] \subset [a_j, b_j]$ , soit  $[a_j, b_j] \subset [a_i, b_i]$ , soit les deux intervalles sont disjoints.

On remarque que la définition des motifs ne fait nullement intervenir la taille des diagrammes de cordes sur lesquels nous testons leur existence. En effet, un même motif peut se retrouver dans des diagrammes de différentes tailles.

Etant donné un diagramme  $c$  de taille  $n$  (pris dans  $D_n$ ) et un motif  $m$  de taille  $k$ , on dit que  $c$  contient  $m$  si et seulement si, pour tout couple  $(a, b) \in m$ , l'arête  $(a, b)$  est dans  $c$ . On note alors  $m \subset c$ .

Pour toute taille  $n$  et tout motif  $m$ , on note  $D_n(m)$  l'ensemble des diagrammes dans  $D_n$  contenant le motif  $m$ .

**Exemple 17.** Soit  $m = \{(1, 2)\}$  un motif de taille 1 (la plus petite taille de motif).

L'ensemble  $D_n(m)$  est l'ensemble des diagrammes de taille  $n$  dont les sommets 1 et 2 sont reliés.

## 5.2 Représentation des composées de transitions

Nous avons présenté les diagrammes de cordes de taille  $n$  comme des ensembles de  $n$  arêtes reliant  $2n$  sommets deux à deux. Autrement dit, l'ensemble des diagrammes dans  $D_n$  est un sous ensemble des couplages parfaits du graphe complet  $K_{2n}$ .

Nous allons voir comment représenter les fonctions sur  $D_n$ , en particulier les transitions et composées de transitions, de telle sorte que le résultat de l'application d'une fonction  $f$  à un diagramme de corde  $c$  s'obtienne par une construction simple à partir du graphe de  $f$  et du graphe de  $c$ .

Afin de simplifier et rendre plus compacte la représentation des diagrammes de cordes, nous les dessinerons sous une forme “aplatie”, où les  $2n$  sommets sont placés de gauche à droite sur une ligne et les arêtes sont dessinées au dessus de cette ligne, sans croisement. La Figure 5.1 montre la représentation sous forme de cercle (en haut) et la représentation “aplatie” (en bas).

La représentation d'une fonction  $f$  de  $D_n \rightarrow D_n$  par un graphe consiste en deux ensembles  $H_n$  et  $B_n$  de  $2n$  sommets chacun :

- on identifie  $H_n$  aux  $2n$  sommets du diagramme de cordes  $c$  auquel on applique  $f$ ,
- et l'ensemble  $B_n$  aux  $2n$  sommets du diagramme  $f(c)$  résultant de l'application.

Le graphe résultant de la fusion des sommets de  $H_n$  avec ceux de  $c$  décrit (entre autre) des chemins entre les sommets de  $B_n$ , formant des couples de sommets. Le diagramme  $f(c)$  est obtenu à partir des  $2n$  couples de sommets ainsi formés (nous décrivons cette construction en détail après avoir défini les graphes de fonctions).

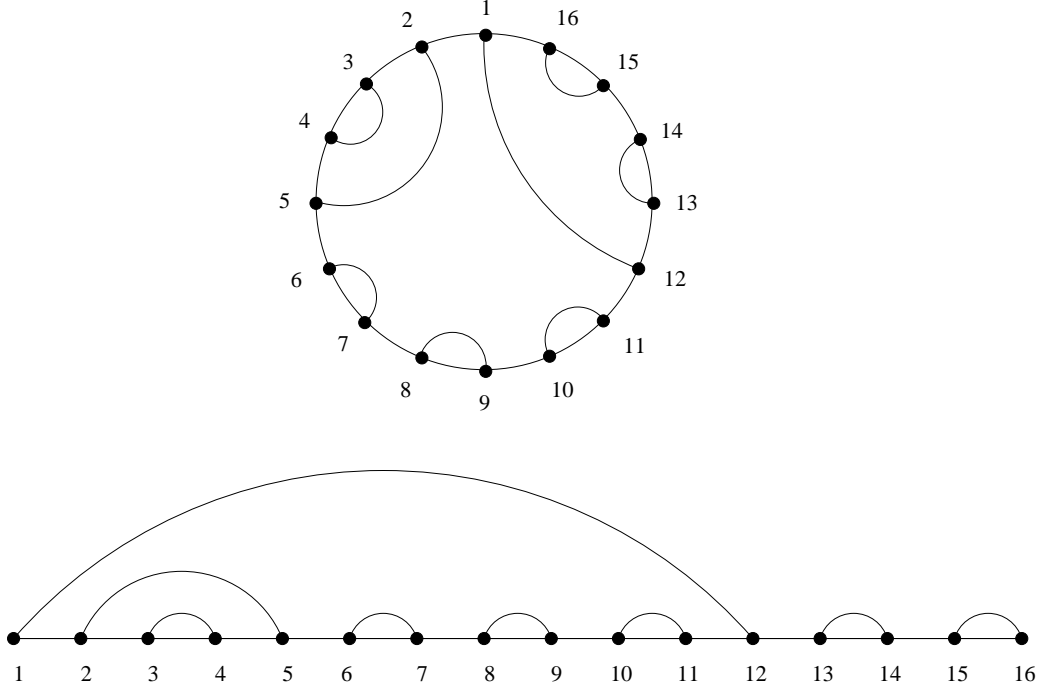


FIG. 5.1 – Représentation “plane” des diagrammes de cordes

La définition suivante décrit les conditions pour qu’un ensemble d’arête sur  $H_n \cup B_n$  décrive bien une fonction de  $D_n$  dans  $D_n$ . En particulier, ces arêtes ne doivent pas se croiser, afin de garantir que le diagramme lu après l’application soit lui-même sans croisement.

**Définition 27** (Graphe de fonction sur  $D_n$ ). Soit  $H_n = \{h_1, \dots, h_{2n}\}$  et  $B_n = \{b_1, \dots, b_{2n}\}$  deux ensembles de sommets.

On note  $F_n$  l’ensemble des graphes  $g$  tels que :

- l’ensemble des sommets de  $g$  est donné par  $H_n \cup B_n$ ,
- chaque sommet de  $g$  est de degré 1
- pour tout couple d’arêtes de  $g$  de la forme  $(b_i, b_j), (b_k, b_l)$ , avec pour convention  $i < j, k < l, i < k$ , on a soit  $b_j < b_k$ , soit  $b_k > b_l$ .
- pour tout couple d’arêtes de  $g$  de la forme  $(h_i, h_j), (h_k, h_l)$ , avec pour convention  $i < j, k < l, i < k$ , on a soit  $h_j < h_k$ , soit  $h_k > h_l$ .
- pour tout couple d’arêtes de  $g$  de la forme  $(b_i, h_j), (b_k, h_l)$ , on note  $E$  l’ensemble de sommets  $\{b_i, \dots, b_k\} \cup \{h_j, \dots, h_l\}$ . Alors tout sommet de  $E$  est nécessairement relié à un autre sommet de  $E$  et tout sommet de  $H_n \cup B_n - E$  est relié à un sommet de  $H_n \cup B_n - E$ .

Nous donnons maintenant la définition du graphe  $g_i$  associé à une transition  $e_i$  de  $T_n$ . Il est à noter que l’ensemble des graphes  $F_n$  est plus grand que l’ensemble des graphes associés à des composées de transitions.

**Définition 28** (Graphe  $g_i$  d'une transition  $e_i$ ). Soit  $e_i \in T_n$ . On note  $g_i$  le graphe de  $F_n$  contenant les arêtes suivantes :

- $(b_i, b_{i+1})$  et  $(h_i, h_{i+1})$ ,
- et, pour tout  $j$  différent de  $i$  et  $i + 1$ ,  $(b_j, h_j)$ .

Dans les sous-sections suivantes nous donnons les deux constructions permettant :

- étant donné une composée de transitions  $f$  et un diagramme de cordes  $c$  de calculer le graphe associé à  $f(c)$ ,
- étant donné deux composées de transitions  $f$  et  $f'$ , de calculer le graphe associé à  $f \circ f'$ .

### 5.2.1 Règle d'application à un diagramme de cordes

Voici la construction, étant donné un diagramme  $c \in D_n$  et un graphe  $g \in F_n$  associé à la fonction  $f$ , donnant le diagramme  $f(c)$ .

On commence par identifier chaque sommet  $i$  dans  $c$  au sommet  $h_i$  dans  $g$ . De ce fait, chaque sommet  $h_i$  est de degré 2 et chaque sommet  $b_i$  est de degré 1. Nous avons alors un ensemble de  $n$  chemins dont les extrémités sont dans  $B_n$  et passant par un unique sommet de  $H_n$ . Il est aussi possible d'obtenir des boucles ne passant que par des sommets de  $H_n$ .

Le diagramme  $f(c)$  est l'ensemble des  $n$  arêtes obtenues en prenant, pour chacun des  $n$  chemins  $(b_i, h_j, b_k)$ , l'arête  $(b_i, b_k)$ .

Sur la Figure 5.2, un diagramme de corde a été représenté (en haut) ainsi que le graphe de la transition  $e_9$  (en bas). Des traits en pointillé indiquent les sommets fusionnés durant la construction. On lit le résultat de l'application de  $e_9$  au diagramme de corde en suivant les chemins formés par les deux graphes et les pointillés.

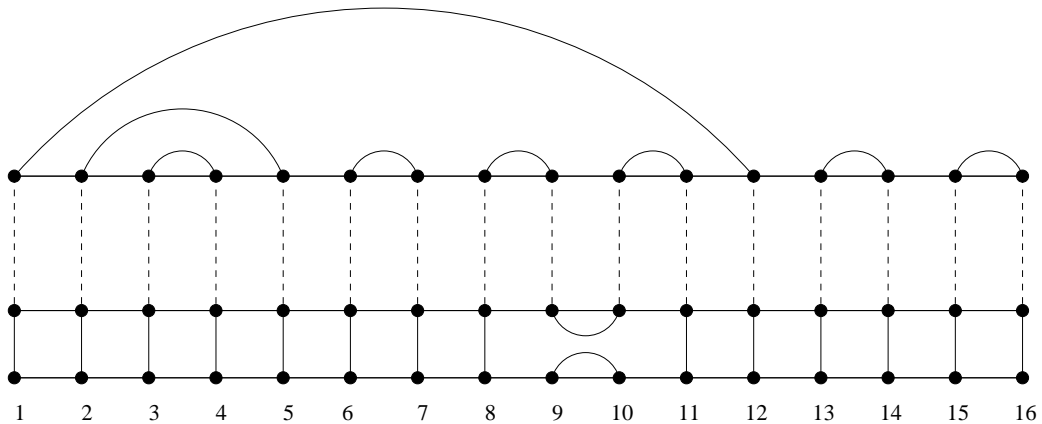


FIG. 5.2 – L'application du graphe de  $e_9$  à un diagramme de corde

### 5.2.2 Règle de composition des graphes de transitions

Etant donné deux graphes  $g_1$  et  $g_2$  de  $F_n$ , associés respectivement à deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$ , on construit le graphe  $g_3$  de la fonction  $f_1 \circ f_2$  de la manière suivante :

On identifie chaque sommet  $h_i$  de  $f_1$  au sommet  $b_i$  de  $f_2$ . Le graphe ainsi formé comporte les  $2n$  sommets  $b_i$  de  $f_1$ , les  $2n$  sommets  $h_i$  de  $f_2$  et les  $2n$  sommets fusionnés. Le graphe  $g_3$  est obtenu en retirant toutes les boucles de la construction ainsi qu'en remplaçant chaque chemin par une seule arête reliant ses deux extrémités.

Sur la Figure 5.3 on a représenté le graphe correspondant à la composition  $e_9 \circ e_8 \circ e_4$ . La partie du haut correspond au graphe, juste après avoir fusionné les sommets des graphes de chaque transitions, tandis que la partie du bas est le graphe final, après transformation des chemins en arêtes.

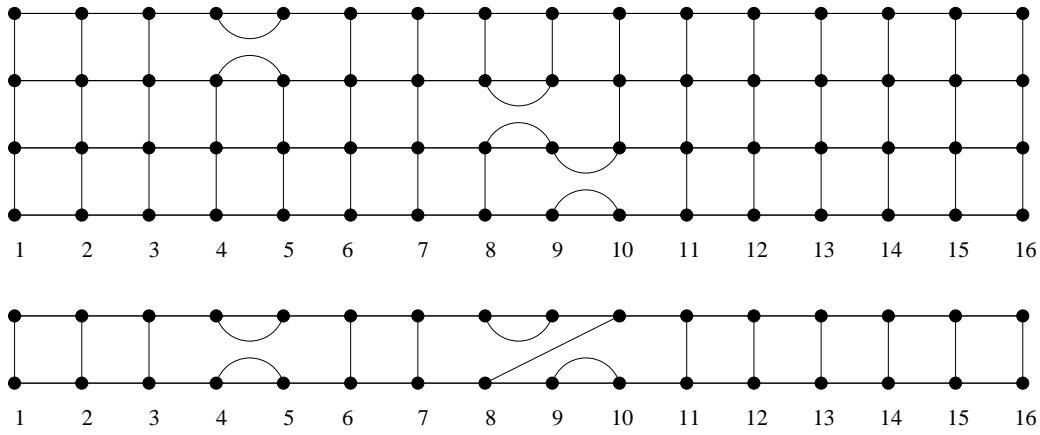


FIG. 5.3 – Les graphes des transitions  $e_4, e_8$  et  $e_9$  (en haut) et celui de  $e_9 \circ e_8 \circ e_4$  (en bas)

## 5.3 Graphe de transition

Dans l'introduction de cette thèse, nous avons présenté les diagrammes de cordes de taille  $n$  (notés  $D_n$ ) et les transitions ou opérateurs agissant sur ceux-ci (notés  $T_n$ ).

Il est alors naturel d'associer au couple  $(D_n, T_n)$  un graphe représentant l'effet des transitions de  $T_n$  sur  $D_n$ .

**Définition 29** (Graphe des diagrammes de cordes). *On note  $G_n$  le graphe orienté associé aux diagrammes de cordes de taille  $n$ .*

*L'ensemble des sommets de  $G_n$  est exactement  $D_n$ .*

*L'ensemble des arcs de  $G_n$  se construit à partir de  $(D_n, T_n)$  ainsi : pour tout sommet  $c \in D_n$  et toute transition  $e_i \in T_n$ , on place un arc indexé par  $e_i$  dans  $G_n$  allant de  $c$  vers  $e_i(c)$ .*

On peut remarquer que ce graphe contient des boucles, par exemple pour tout couplage  $c$  contenant l'arête  $(i, i + 1)$  on a  $e_i(c) = c$ . Il contient également des arcs multiples. En effet, tout diagramme de cordes contient au moins 2 arêtes de la forme  $(i, i + 1)$  donnant lieu à deux boucles et si un diagramme ne contient qu'une seule arête, alors les deux transitions  $e_0$  et  $e_1$  envoient le diagramme sur lui-même.

La “conjecture de Razumov-Stroganov” (théorème de Cantini et Sportiello) [8] porte sur la distribution limite de la chaîne de Markov définie par la marche aléatoire sur ce graphe orienté. L'existence de cette distribution limite découle directement de sa forte connexité et de la présence de boucles dans le graphe.

**Théorème 14.** *Le graphe  $G_n$  est fortement connexe.*

*Démonstration.* Nous devons montrer que pour tout couple de diagrammes  $c$  et  $c'$  dans  $D_n$ , il existe deux mots  $w$  et  $w'$  dans  $L(T_n)$  tels que  $f_w(c') = c$  et  $f_{w'}(c) = c'$ .

Nous allons montrer une propriété plus forte du graphe des diagrammes de cordes. Nous allons montrer qu'à tout diagramme  $c \in D_n$  on peut associer un mot  $w_c$  tel que, pour tout  $c' \in D_n$ ,  $f_{w_c}(c') = c$ . Autrement dit, nous montrons qu'il existe une suite de transitions qui appliquée à n'importe quel diagramme donne  $c$ .

Soit  $p_n$  le diagramme de cordes défini par :

$$p_n = \{(1, 2), (3, 4), \dots, (2n - 1, 2n)\}$$

Nous allons montrer que le mot  $w_p = e_1, e_3, \dots, e_{2i+1}, \dots, e_{2n-1}$  appliqué à n'importe quel diagramme dans  $D_n$  donne  $p_n$ .

Rappelons tout d'abord que la transition  $e_i$  appliquée à un diagramme va soit le laisser inchangé s'il contient l'arc  $(i, i + 1)$ , soit échanger ses deux arcs  $(i, a)$  et  $(i + 1, b)$  par les deux arcs  $(i, i + 1)$  et  $(a, b)$ . Dans les deux cas, l'arc  $(i, i + 1)$  sera présent après application de  $e_i$ .

Ensuite, les transitions intervenant dans  $w_p$  sont toutes commutatives (du fait des propriétés de l'algèbre de Temperley-Lieb).

Ceci signifie que l'application dans n'importe quel ordre de toutes ces transitions donne toujours le même diagramme de cordes.

Ces deux propriétés impliquent que, pour tout diagramme  $c \in D_n$ , les arcs  $(1, 2)$ ,  $(3, 4)$ ,  $\dots$ ,  $(2n - 1, 2n)$  sont tous présents dans  $f_{w_p}(c)$ . Autrement dit,  $f_{w_p}(c) = p_n$ .

Nous allons maintenant montrer comment construire, étant donné un diagramme  $c \in D_n$ , un mot  $w_c \in L(T_n)$  tel que  $f_{w_c}(p_n) = c$ .

Notons  $m_{a,b}$  le motif constitué des couples  $(a, a + 1), (a + 2, a + 3), \dots, (b - 1, b)$  et  $w_{a,b}$  le mot  $e_{a+1}, e_{a+3}, \dots, e_b$ .

On remarque la propriété suivante :

**Propriété 3.** *Pour tout diagramme  $c \in D_n$ , si  $m_{a,b} \in c$ , alors*  
– *d'une part l'arête  $(a, b)$  est dans  $f_{w_{a,b}}(c)$ ,*



– et d'autre part le motif  $m_{a+1,b-1}$  est aussi dans  $f_{w_{a,b}}(c)$ .

Prenons alors un diagramme  $c \in D_n$  quelconque. Il existe un ensemble de sommets  $a_1, a_2, \dots, a_k$  pris dans  $[n]$  et tels que les arêtes  $(1, a_1-1), (a_1, a_2-1), \dots, (a_{k-1}, a_k-1), (a_k, 2n)$  soient dans  $c$ . Ces arêtes délimitent en fait une “face” du diagramme de corde.

L'application successive des fonctions associées aux mots  $w_{1,a_1-1}, w_{a_1,a_2-1}, \dots, w_{a_k,2n}$  à  $p_n$  donne un diagramme  $c_1$  contenant les arêtes  $(1, a_1-1), \dots, (a_k, 2n)$  ainsi que les motifs  $m_{2,a_1-1}, \dots, m_{a_k+1,2n-1}$ .

Nous considérons alors le graphe dual du graphe de  $c$ . Ce graphe est en fait un arbre que nous enracinons dans le sommet dual de la face délimitée par les arêtes  $(1, a_1-1), \dots, (a_k, 2n)$  de  $c$ .

Le parcours en largeur de l'arbre dual de  $c$  permet de construire un ordre partiel sur les arcs de  $c$  : on dit que deux arêtes  $x$  et  $y$  de  $c$  vérifient  $x < y$  si et seulement si le plus court chemin allant de l'arête  $y$  à la racine passe par  $x$ .

Pour toute extension linéaire  $E$  de l'ordre précédent, le mot  $w_c$  obtenu en concaténant les mots  $w_{a_i, a_{i+1}-1}$  associés aux arêtes  $(a_i, a_{i+1}-1)$  prises dans l'ordre de  $E$ , vérifie que pour tout diagramme  $c' \in D_n$ , on a alors  $f_{w_c} \circ f_p(c') = c$ .

□

## 5.4 Marche aléatoire sur le graphe des diagrammes de cordes

L'ex-conjecture de Razumov-Stroganov identifie la distribution des diagrammes de cordes lus sur une configuration de boucles compactes choisie aléatoirement uniformément à la distribution limite de la marche aléatoire uniforme dans le graphe des diagrammes de cordes décrit dans la section précédente.

En effet, la forte connexité et la présence de boucles dans  $G_n$  suffit à l'existence et l'unicité d'une distribution limite.

**Définition 30** (Marche aléatoire uniforme sur  $G_n$ ). *On note  $(Y_i^{(n)})_{i \geq 0}$  la marche aléatoire uniforme sur le graphe  $G_n$  et  $\pi_n$  sa distribution limite.*

Etant donné un motif  $m$  quelconque, plusieurs questions relatives à la distribution limite  $\pi_n$  se posent.

- Quelle est la probabilité  $P_{m,n}$ , étant donné un diagramme aléatoire  $c$  tiré selon  $\pi_n$  que  $m \subset c$  ?
- Existe-t-il une limite lorsque  $n$  tend vers l'infini pour  $P_{m,n}$  ? Si oui, peut-on la calculer ?

Pour répondre à la première question, une méthode naïve consiste à construire un graphe dont les sommets sont les diagrammes de cordes de taille  $n$  et où il existe un arc allant de  $c_1$  à  $c_2$  si et seulement si il existe une transition  $e_i$  telle que  $e_i(c_1) = c_2$ .

On peut alors calculer  $\pi_n$  explicitement en calculant l'unique vecteur de norme 1 invariable par multiplication par la matrice de transition du graphe.

Plutôt que de répondre à la deuxième question, nous donnons une construction permettant de calculer un encadrement de  $P_{m,n}$  valable pour tout  $n$  plus grand qu'un paramètre entier  $N$ .

## 5.5 Langage sur les transitions

Dans ce chapitre nous nous intéressons à certaines composées de transitions dont l'application garantit des propriétés du diagramme résultant, et ce quelque soit le diagramme d'origine.

Par exemple, la composée  $f = e_1 \circ e_3 \circ e_5$  garantit que pour tout  $c \in D_n$ , le diagramme  $f(c)$  contient les arêtes  $(1, 2)$ ,  $(3, 4)$  et  $(5, 6)$ .

Une autre façon de voir l'application de la fonction  $f$  à un diagramme  $c$  consiste à la considérer comme un chemin dans le graphe  $G_n$  des diagrammes de cordes partant du sommet  $c$  et suivant les arêtes indexées par  $e_5, e_3, e_1$  dans cet ordre.

Nous introduisons ici une notion de langage de transitions permettant de coder ces chemins.

**Définition 31.** *Etant donné un mot  $u = t_0, \dots, t_k$  sur l'alphabet  $T_n$ , on associe la fonction  $f_u = t_k \circ \dots \circ t_1$ .*

En terme de langage, nous voulons connaître, étant donné un motif  $m$  les mots  $w \in T_n^*$  tels que, pour tout diagramme  $c \in D_n$ ,  $f_w(c) \in D_n(m)$ . Ces mots forment un langage  $L(T_n, m)$  codant des chemins dans le graphe  $G_n$  des diagrammes de cordes.

**Définition 32.** *Soit  $m$  un motif et  $T \subset T_n$  un ensemble de transitions. On note  $L(T, m)$  l'ensemble des mots  $w \in T^*$  tels que pour tout  $c \in D_n$ ,  $m \subset f_w(c)$ .*

Dans l'exemple précédent, la fonction  $f = e_1 \circ e_3 \circ e_5$  correspond au mot  $u = e_5, e_3, e_1$ . Le mot  $u$  appartient donc à  $L(T, \{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\})$  pour tout  $T$  contenant  $e_1, e_3, e_5$ .

**Propriété 4.** *Soit  $T$  un sous ensemble de  $T_n$  et  $m$  un motif.*

*Si un mot  $w$  appartient à  $L(T, m)$ , alors pour tout  $u \in T_n^*$ ,  $uw \in L(T_n, m)$ .*

*Démonstration.* Si  $w \in L(T, m)$  alors  $f_w$  vérifie que pour tout  $c \in D_n$ ,  $m \subset f_w(c)$ .

En particulier on a  $m \subset f_w(f_u(c))$  pour tout  $u \in T_n^*$  ce qui montre le résultat.  $\square$

## 5.6 Génération aléatoire et couplage par le passé

L'algorithme du couplage par le passé de Propp et Wilson [?] est une façon ingénieuse de générer des objets sur lesquels il existe une chaîne de Markov, selon la distribution limite de cette chaîne de Markov.

Le point important de cet algorithme est qu'il ne tire pas selon une approximation, mais bel et bien selon la distribution limite de la chaîne de Markov.

### 5.6.1 Principe général du Couplage par le passé

Le couplage par le passé (CFTP pour “Coupling from the Past”) est un algorithme de Propp et Wilson [?] permettant de tirer aléatoirement des objets selon la distribution stationnaire d’une chaîne de Markov.

Etant donné une chaîne de Markov, notons  $E$  son ensemble d’état. Et supposons qu’il existe un ensemble d’opérateurs  $T$  agissant de  $E$  vers  $E$ . Le CFTP consiste à tirer aléatoirement une suite (potentiellement infinie) d’opérateurs  $(t_i)_{i \leq 0}$  pris dans  $T$ .

Si de plus il existe une suite finie d’opérateurs dont la composée est constante (cf preuve de la forte connexité du graphe des diagrammes de cordes), alors avec probabilité 1, il existe un plus petit entier  $N$  tel que, pour tout  $n \geq N$ , la fonction  $f_n = t_0 \circ t_{-1} \circ \dots \circ t_{-N} \circ \dots \circ t_{-n}$  soit constante sur  $E$ . On dit alors qu’il y a coalescence.

A ce moment, l’unique élément dans l’image de  $f_N$  est obtenu avec la même probabilité que si l’on avait “tiré” une suite infinie de transitions dans  $T$ , c’est-à-dire selon la distribution limite de la chaîne.

L’algorithme du CFTP consiste donc à tirer une suite  $(t_i)_{i \leq 0}$  de transitions dans  $T$ , jusqu’à une  $N^{eme}$  itération vérifiant que  $t_0 \circ \dots \circ t_N$  soit constante sur  $E$ . Ici, le fait de prendre  $t_0 \circ \dots \circ t_{-N}$  au lieu de  $t_{-N} \circ \dots \circ t_0$  correspond précisément au “couplage arrière” de Propp et Wilson. Composer les transitions dans l’autre sens ne donne en général pas la distribution limite.

### 5.6.2 CFTP appliqué aux diagrammes de cordes

Nous allons maintenant décrire l’algorithme du couplage par le passé appliqué aux diagrammes de cordes.

Pour utiliser le CFTP, nous devons être capables :

- de tirer uniformément et composer une transition dans  $T_n$ ,
- de détecter si une composée de transitions est constante.

Le codage des transitions et fonctions par des graphes permet d’effectuer ces opérations efficacement.

En effet, une fonction est constante dès que son graphe ne contient aucune arête reliant un sommet dans  $H_n$  à un sommet dans  $B_n$ .

**Remarque 6.** Dans l’application classique du CFTP, le fait de devoir “précomposer” par une nouvelle transition ( $f_n = f_{n-1} \circ t$ , et pas  $f_n = t \circ f_{n-1}$ , qui correspondrait au couplage avant) est une difficulté pratique ; ici, le codage des composées par des graphes fait que c’est tout à fait élémentaire.

Nous pouvons alors écrire l’algorithme suivant :

La fonction **any** retourne un diagramme de corde quelconque parmi tous les diagrammes dans  $D_n$ , **Identité(n)** représente le graphe de la fonction identité sur

**Algorithm 1** CFTP( $n$ )**Entrées:** un entier  $n \geq 1$ **Sorties:**  $f(\text{any}(D_n))$ 

```

1:  $f = \text{Identité}(n)$ 
2: tantque ! $f.\text{estConstante}()$  faire
3:    $t = \text{transitionAleatoire}(T_n)$ 
4:    $f = f \circ t$ 
5: fin tantque

```

les diagrammes de cordes de taille  $n$  et **transitionAleatoire** retourne une transition tirée uniformément parmi  $T_n$ .

### 5.6.3 Marche aléatoire sur les composées de transitions

L'exécution du CFTP peut être représentée par une marche aléatoire dont les états sont les composées de transitions.

A partir de la représentation sous forme de graphe des composées de transitions, pour tout  $n$  on définit le graphe  $G(T_n)$  dont l'ensemble des sommets est égal à l'ensemble des composées de transitions sur  $T_n$  et il existe un arc dans  $G(T_n)$  allant d'un sommet  $u$  vers un sommet  $v$  si et seulement si il existe une transition  $t \in T_n$  telle que  $u \circ t = v$ .

L'ensemble des puits de  $G(T_n)$  est exactement l'ensemble des fonctions constantes sur  $D_n$ , autrement dit, l'ensemble des diagrammes de cordes  $D_n$ .

## 5.7 Probabilités d'apparition d'un motif dans un diagramme

Etant donné un entier  $n$  et un motif  $m$ , on note  $P_{m,n}$  la probabilité que le motif  $m$  soit présent dans un diagramme de corde tiré selon la distribution  $\pi_n$ .

Mitra, Nienhuis, de Gier et Batchelor [38] conjecturent que  $P_{\{(1,2)\},n}$  est donné par  $\frac{3n^2}{8(n^2-1)}$  quand  $n$  est pair et  $\frac{3(n^2-1)}{8n^2}$  quand  $n$  est impair. Cette conjecture montrerait qu'il existe une limite valant  $\frac{3}{8}$  pour  $P_{\{(1,2)\},n}$ .

**Remarque 7.** La distribution  $\pi_n$  attribue un même poids à tous les diagrammes de cordes obtenus par rotation d'un même diagramme  $c \in D_n$ . C'est-à-dire  $\pi_n(c) = \pi_n(r_i(c))$  pour tout entier  $i$ .

Ceci implique également que la probabilité  $P_{m,n}$  associée à un motif  $m$  est la même pour tous les motifs obtenus par rotation des sommets impliqués dans  $m$ .

Par exemple, le motif  $m = \{(4, 7), (5, 6), (9, 10)\}$  admet la même probabilité que le motif  $m' = \{(1, 4), (2, 3), (6, 7)\}$  d'être présent dans un diagramme tiré selon  $\pi_n$ , et ce pour tout  $n$ .

## 5.7. PROBABILITÉS D'APPARITION D'UN MOTIF DANS UN DIAGRAMME 77

Nous donnons ici une méthode d'encadrements de la probabilité  $P_{m,n}$ , dont le résultat, étant donné un entier  $N$ , est un couple  $(a_N, b_N)$  de rationnels vérifiant, pour tout  $n \geq N$ ,  $a_N \leq P_{m,n} \leq b_N$ .

Cette méthode est basée sur l'algorithme du CFTP. En effet, cet algorithme appliqué à la taille  $n$  permet de générer des diagrammes de cordes selon la probabilité  $\pi_n$ . On peut alors décrire l'exécution du CFTP par un automate  $A(n)$  dont l'ensemble d'état est l'ensemble des composées de transitions de  $T_n$ . Chaque état de  $A(n)$  possède  $2n$  transitions, indexées par les  $2n$  transitions de  $T_n$  et la transition  $t$  fait passer un état  $f$  à l'état  $t \circ f$ . La condition d'arrêt du CFTP se traduit par la présence de puits dans  $A(n)$ , correspondant exactement aux fonctions constantes sur  $D_n$ . Ces puits sont donc aussi les états terminaux de l'automate et la fonction identité est son unique état initial.

**Remarque 8.** *L'automate  $A(n)$  permet de calculer la distribution  $\pi_n$  sur  $D_n$ . Cependant, il serait plus efficace et direct d'utiliser le graphe  $G_n$ , qui ne compte que  $D_n$  sommets.*

*En effet, les états de l'automate  $A(n)$  sont codés par des "diagrammes de cordes annulaires" contenant  $4n$  sommets. Or, pour tout diagramme  $c$  dans  $D_{2n}$  il existe un graphe codant un état de  $A(n)$  obtenu en renommant les sommets  $1, \dots, 2n$  de  $c$  en  $b_1, \dots, b_{2n}$  et les sommets  $2n+1, \dots, 4n$  de  $c$  en  $h_1, \dots, h_{2n}$ , ce qui montre que  $D_{2n}$  est un minorant du nombre d'états de  $A(n)$ .*

*Cependant, nous montrons par la suite comment modifier  $A(N)$  pour en extraire des encadrements de  $P_{m,n}$  valables pour toute taille  $n \geq N$ .*

### 5.7.1 Obtention de $P_{m,n}$

A partir de la matrice de transition  $M_n$  de l'automate  $A(n)$ , on peut calculer  $\pi_n$  en cherchant un vecteur  $L_n$  vérifiant l'équation :

$$L_n \times M_n = L_n$$

L'existence et l'unicité de  $L_n$  sont des conséquences de l'existence de  $\pi_n$ .

**Remarque 9.** *On peut identifier chaque état puit  $f$  de  $A(n)$  (les états puits sont exactement les fonctions constantes) à l'unique diagramme image de  $f$ . On numérote alors de 1 à  $C_n$  les états puits de  $A(n)$  de telle sorte que l'état  $i$  corresponde au diagramme  $c_i$ .*

*La  $i^{\text{ème}}$  composante de  $L_n$  est alors donnée par :*

$$L_n(i) = \begin{cases} \pi_n(c_i) & \text{si } i \leq C_n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Etant donné un motif  $m$ , la probabilité  $P_{m,n}$  est alors donnée par la somme, pour tout  $i \leq C_n$ , des  $L_n(i)$  vérifiant  $m \subset c_i$ .*

La remarque précédente permet d'en faire une autre : lorsque l'on s'intéresse à un motif  $m$  en particulier, il est inutile de distinguer tous les états puits de  $A(n)$ , il suffit de les fusionner en deux états  $T_m$  et  $T_{\overline{m}}$  de telle sorte que chaque état puits dont l'image contient  $m$  devient  $T_m$  et chaque état puits ne contenant pas  $m$  devient  $T_{\overline{m}}$ . La probabilité  $P_{m,n}$  s'obtient alors en lisant directement la composante de  $L_n$  correspondant à l'état  $T_m$ . Cette simplification réduit de  $D_n - 2$  le nombre d'états de  $A(n)$ .

On peut aller encore plus loin : notons  $T(f)$  l'ensemble des états terminaux accessibles à partir d'un état  $f$  de  $A(n)$ . Trois cas de figure sont possibles :

1. soit  $T(f) = \{T_m\}$ ,
2. soit  $T(f) = \{T_{\overline{m}}\}$ ,
3. soit  $T(f) = \{T_m, T_{\overline{m}}\}$ .

Notons maintenant  $S_m$  (resp.  $S_{\overline{m}}$ ) l'ensemble des états  $f$  tels que  $T(f) = T_m$  (resp.  $T(f) = T_{\overline{m}}$ ).

On ne change pas les valeurs de  $L_n$  correspondant aux états  $T_m$  et  $T_{\overline{m}}$  en fusionnant tous les états de  $S_m$  à  $T_m$  et tous les états de  $S_{\overline{m}}$  à  $T_{\overline{m}}$ .

Il est intéressant de noter que notre représentation des fonctions sur  $D_n$  par des graphes permet de déterminer pour presque toutes les fonctions  $f$  et pour tout motif  $m$ , si  $T(f)$  vaut  $\{T_m\}$ ,  $\{T_{\overline{m}}\}$  ou  $\{T_m, T_{\overline{m}}\}$ .

**Lemme 14.** *Soit  $m$  un motif et  $f \in F_n$ .*

*L'ensemble  $T(f)$  des états puits accessibles à partir de  $f$  est :*

- $\{T_m\}$  si pour tout  $(i, j) \in m$ ,  $(b_i, b_j) \in f$ ,
- $\{T_{\overline{m}}\}$  si il existe  $(b_i, b_j) \in f$  et  $(i, j) \notin m$ ,
- soit  $\{T_m\}$ , soit  $\{T_{\overline{m}}\}$ , soit  $\{T_m, T_{\overline{m}}\}$  sinon.

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que pour tout  $i, j$ , si  $(b_i, b_j) \in f$ , alors quelque soit une transition  $t$ , le graphe de la fonction  $f \circ t$  contient lui aussi  $(b_i, b_j)$ . Par conséquent, n'importe quel état accessible à partir de  $f$  contient également  $(b_i, b_j)$ .  $\square$

En particulier, cette “décision” (partielle) reste vraie si on ne regarde que les sommets apparaissant dans le motif  $m$ , et ce pour toute taille  $N$  contenant les sommets de  $m$ .

Nous noterons  $A(m, n)$  la version de  $A(n)$  obtenue après les simplifications précédemment décrites. L'algorithme 2 permet de construire  $A(m, n)$  en prenant comme ensemble  $T$  de transitions l'ensemble  $T_n$ .

Dans la suite, nous montrons comment adapter cette construction pour obtenir des encadrements de  $P_{m,n}$  valables pour tout  $n \geq N$ , où  $N$  est un entier fixé.

**Algorithm 2**  $A(m,n,T)$ **Entrées:** un motif  $m$ **Entrées:** un entier  $n > 0$ **Entrées:** un ensemble de transitions  $T \subset T_n$ **Sorties:** l'ensemble  $E$  des états de  $A(m,n,T)$ .

```

1: Soit  $E$  l'ensemble de sommets de  $A(m,n,T)$ .
2: Soit  $T_m$  et  $T_{\overline{m}}$  les deux seuls états puits de  $A(m,n,T)$ .
3: Soit  $I = \text{Identité}(n)$  l'unique état initial de  $A(m,n,T)$ .
4:  $E = \{I + T_m + T_{\overline{m}}\}$ 
5:  $i = 0$ 
6:  $E_i = I$ 
7: tantque  $E_i \neq \emptyset$  faire
8:    $E_{i+1} = \emptyset$ 
9:   pour tout  $f \in E_i$  faire
10:    pour tout  $t \in T$  faire
11:       $f' = f \circ t$ 
12:      si  $T(f') = T_m$  alors
13:         $\text{successeur}(f) \leftarrow \text{successeur}(f) \cup T_m$ 
14:      sinon si  $T(f') = T_{\overline{m}}$  alors
15:         $\text{successeur}(f) \leftarrow \text{successeur}(f) \cup T_{\overline{m}}$ 
16:      sinon si  $f' \notin E$  alors
17:         $E_{i+1} \leftarrow E_{i+1} \cup f'$ 
18:         $E \leftarrow E \cup f'$ 
19:         $\text{successeur}(f) \leftarrow \text{successeur}(f) \cup f'$ 
20:      finsi
21:    fin pour
22:  fin pour
23:   $i = i + 1$ 
24: fin tantque

```

**5.7.2 Encadrement de  $P_{m,n}$** 

Précédemment, nous avons associé à tout mot  $u = t_1, \dots, t_k$  dans  $T_N^*$  la fonction  $f_u$  obtenue par composition des  $t_i$ . Nous avons également défini, pour tout entier  $n \geq N$ , le graphe  $g_n(f_u)$  permettant de calculer le résultat de l'application de  $f_u$  à des diagrammes de taille  $n$ .

Chaque graphe  $g_n(f_u)$  compte  $4n$  sommets répartis en deux ensembles  $B_n$  et  $H_n$ . En particulier, tous ces graphes contiennent chacun  $B_N \cup H_N$ .

De plus, pour toute transition  $t \in T_N$ , tous les graphes  $g_n(f_u \circ t)$  ont le même sous-graphe induit sur  $B_N \cup H_N$ .

**Remarque 10.** *L'affirmation précédente n'est pas vraie lorsque  $n = N$ . En effet, dans ce cas  $b_1$  et  $b_{2N+1}$  sont identiques et les sous-graphe réduits à  $B_N \cup H_N$  de*

$g_N(f_u \circ e_{2N})$  et  $g_n(f_u \circ e_{2N})$  pour  $n > N$  peuvent être différents lorsque  $u$  contient  $e_{2N}$ .

Nous allons donc “factoriser” l’évolution des arêtes issues des sommets  $B_N$  et  $H_N$  de tous les états des automates  $A(m, n)$ , pour  $n > N$ .

Pour cela, nous allons construire l’automate  $A'(m, N + 1)$  obtenu à partir de l’algorithme 2 en fixant un ensemble de transitions  $T$  particulier.

Nous changeons également le codage de ses états (les graphes représentant des composées de transitions) et nous ajoutons deux opérateurs spéciaux destinés à remplacer les transitions  $e_0$  et  $e_{2N}$ . La transition  $e_{2N+1}$  sera retirée.

Intuitivement, le fait de retirer la transition  $e_{2N+1}$  revient à “casser” la topologie circulaire des diagrammes de cordes. De cette manière, pour que deux sommets  $b_i$  et  $b_j$  finissent par se relier lors d’un parcours de  $A'(m, N + 1)$ , il est nécessaire que les deux sommets aient toujours été reliés à un sommet de  $H_N$ .

D’autre part, le fait de redéfinir les transitions  $e_0$  et  $e_{2N+2}$  nous sert à détecter si un sommet  $b_i$  est susceptible d’être relié à un sommet en dehors de  $H_N \cup B_N$  dans une version de  $A(m, n)$  pour  $n > N$ .

**Définition 33** (Graphe et transitions réduites). *Soit  $N$  un entier strictement positif. On note  $K_N$  l’ensemble de sommets  $B_N \cup H_N \cup \{g, d\}$ .*

*On note  $T'_N$  l’ensemble des graphes  $\{e_g, e'_1, \dots, e'_{2N-1}, e_d\}$ .*

*Chaque graphe  $t \in T'_N$  est défini par son ensemble de sommets  $V(t) = K_N$  et son ensemble d’arêtes  $E(t)$  donné par :*

- $V(e_g) = \{(b_i, h_i); 1 \leq i \leq 2N\} \cup \{(b_1, g), (h_1, g)\}$ ,
- $V(e_d) = \{(b_i, h_i); 1 \leq i \leq 2N\} \cup \{(b_{2N}, d), (h_{2N}, d)\}$ ,
- $V(e'_j) = \{(b_i, h_i); i \neq j, i \neq j + 1\} \cup \{(b_j, b_{j+1}), (h_j, h_{j+1})\}$

La Figure 5.4 montre les graphes  $g'_3(e_g)$ ,  $g'_3(e_d)$  et  $g'_3(e_3)$ . Les sommets sont naturellement ordonnés de gauche à droite, les sommets noirs correspondent aux  $h_i$  et les blancs aux  $b_i$ .

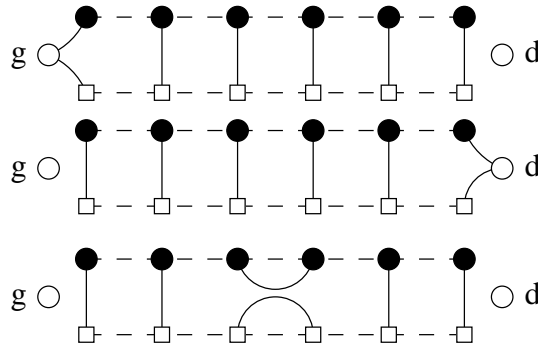


FIG. 5.4 – Les graphes de transitions  $g'_3(e_g)$  (en haut),  $g'_3(e_d)$  (au milieu) et  $g'_3(e_3)$  (en bas)



Etant donné deux graphes  $t_1, t_2 \in T'_N$ , le graphe  $t_1 \circ t_2$  est obtenu à partir de  $t_1$  et  $t_2$  en fusionnant, pour tout  $i < 2N$ , le sommet  $h_i$  de  $t_1$  avec le sommet  $b_i$  de  $t_2$ . On fusionne également, d'une part les sommets  $g$  de chaque graphe et d'autre part les sommets  $d$  de chaque graphe. Enfin, on remplace chaque chemin maximal (c'est-à-dire chaque chemin non prolongeable dans le graphe) par une arête reliant ses deux extrémités, sauf s'il passe par  $g$  ou  $d$ .

**Remarque 11.** La composition par  $e_g$  (resp.  $e_d$ ) correspond à effectuer, pour tout  $n > N$ , la composition par le graphe  $g_n(e_0)$  (resp.  $g_n(e_{2N})$ ).

Les sommets  $g$  et  $d$  permettent alors de se souvenir si à tout moment un sommet  $b_i$  aurait pu se retrouver relié à un sommet n'appartenant pas à  $B_N \cup H_N$  dans certains automates  $A(m, n)$ .

En effet, si un sommet  $b_i \in B_N$  est relié à  $g$  (resp.  $d$ ) dans un état  $E$  de  $A'(m, N+1)$ , alors pour toute transition  $t \in T'_N$ , le sommet  $b_i$  sera encore relié à  $g$  (resp.  $d$ ) dans l'état  $t \circ E$ .

En construisant l'automate  $A(m, N, T'_N)$  avec l'algorithme 2, nous simulons de manière approchée le CFTP pour tout  $n > N$ . Mais cette simulation, lorsqu'elle se termine, garantit que tout sommet  $b_i \in B_N$  non relié à  $g$  ou  $d$  est relié au même sommet dans toutes les exécutions possibles du CFTP pour tout  $n > N$ .

La probabilité d'atteindre le sommet  $T_m$  est alors un minorant de  $P_{m,n}$  pour tout  $n > N$ , mais pour obtenir un majorant, nous devons séparer l'état terminal  $T_m$  d'un nouvel état  $T_?$  atteint lorsqu'un sommet  $b_i \in B_N$  tel que  $i \in m$ , devient relié à  $g$  ou  $d$ .

L'ensemble  $T(s)$  des états terminaux accessibles depuis un état  $s$  de  $A(m, N, T'_N)$  est réduit à  $T_?$  dès qu'il existe un sommet  $b_i$  de  $s$  tel que  $(i, j) \in m$  et  $b_i$  est relié à  $d$  ou  $g$ , et dans ce cas, on fusionne  $s$  avec  $T_?$ .

Cet automate  $A'(m, N)$  est construit par l'algorithme 3.

Afin d'illustrer cette idée, nous donnons un exemple simple permettant de montrer que la probabilité d'obtenir le motif  $(0, 1)$  dans un diagramme tiré selon  $\pi_n$ , est supérieure à  $\frac{1}{3}$ .

**Exemple 18.** Soit le motif  $m = \{(1, 2)\}$  et  $N = 1$ .

L'ensemble de sommets  $K_1$  des graphes de  $T'_1$  est :  $\{g, d, b_1, b_2, h_1, h_2\}$ . De plus  $T'_1$  ne contient que trois transitions :  $e_g, e_d, e'_1$ .

La composition de l'identité avec  $e'_1$  fait directement passer à l'état  $T_m$ , tandis les transitions  $e_g$  et  $e_d$  font passer à l'état  $T_?$ . Il est donc clair que l'on atteint  $T_m$  avec probabilité  $\frac{1}{3}$  et  $T_?$  avec probabilité  $\frac{2}{3}$ .

On a donc

$$\forall n > 2, \frac{1}{3} \leq P_{m,n} \leq 1$$

Sur la Figure 5.5 nous donnons une version simplifiée (il faut ajouter une boucle à chaque sommet) de l'automate  $A'(\{(3, 4)\}, 2)$ . Cet automate permet d'obtenir que  $P_{(3,4), n \geq 3} \geq \frac{117}{323} \approx 0.36$  (l'objectif étant 0.375).

**Algorithm 3**  $A'(m, N)$ **Entrées:** un motif  $m$ **Entrées:** un entier  $N > 0$ **Sorties:** l'ensemble  $E$  des états de  $A'(m, N)$ .

```

1: Soit  $E$  l'ensemble de sommets de  $A'(m, N)$ .
2: Soit  $T_m$ ,  $T_{\overline{m}}$  et  $T_?$  les seuls états puits de  $A'(m, N)$ .
3: Soit  $I = \text{Identité}(N)$  l'unique état initial de  $A'(m, N)$ .
4:  $E = \{I + T_m + T_{\overline{m}} + T_?\}$ 
5:  $i = 0$ 
6:  $E_i = I$ 
7: tantque  $E_i \neq \emptyset$  faire
8:    $E_{i+1} = \emptyset$ 
9:   pour tout  $f \in E_i$  faire
10:    pour tout  $t \in T'_N$  faire
11:       $f' = f \circ t$ 
12:      si  $T(f') = T_?$  alors
13:         $\text{successeur}(f) \leftarrow \text{successeur}(f) \cup T_?$ 
14:      sinon si  $T(f') = T_m$  alors
15:         $\text{successeur}(f) \leftarrow \text{successeur}(f) \cup T_m$ 
16:      sinon si  $T(f') = T_{\overline{m}}$  alors
17:         $\text{successeur}(f) \leftarrow \text{successeur}(f) \cup T_{\overline{m}}$ 
18:      sinon si  $f' \notin E$  alors
19:         $E_{i+1} \leftarrow E_{i+1} \cup f'$ 
20:         $E \leftarrow E \cup f'$ 
21:         $\text{successeur}(f) \leftarrow \text{successeur}(f) \cup f'$ 
22:      fin si
23:    fin pour
24:  fin pour
25:   $i = i + 1$ 
26: fin tantque

```

## 5.8 Résultats d'encadrement

L'application de notre méthode d'encadrement nous a permis d'obtenir les minorants de  $P_{m,n}$  suivants (on note  $A_{m,N}$  le minorant obtenu à partir de l'algorithme 3 appliqué pour le motif  $m$  et le paramètre  $N$ ) :

### 5.8.1 Motif $()$

$$A_{(1,2),1} = \frac{1}{3} \approx 0.33 \quad (5.1)$$

$$A_{(1,2),2} = \frac{9}{26} \approx 0.3461538 \quad (5.2)$$

$$A_{(3,4),3} = \frac{117}{323} \approx 0.362229 \quad (5.3)$$

$$A_{(1,2),3} = \frac{225}{646} \approx 0.348297 \quad (5.4)$$

En sommant le résultat de l'équation (5.3) avec 2 fois la différence entre (5.4) et (5.2), on obtient un minorant plus précis.

$$A_{(i,i+1)} \geq \frac{81}{221} \approx 0.3665 \quad (5.5)$$

### 5.8.2 Motif (...)

$$A_{(1,6),3} = \frac{7}{646} \approx 0.0108359 \quad (5.6)$$

### 5.8.3 Motif (())

$$A_{\{(1,2),(3,4)\},2} = \frac{2}{13} \approx 0.153846 \quad (5.7)$$

$$A_{\{(1,2),(3,4)\},3} = \frac{53}{323} \approx 0.164086 \quad (5.8)$$

En faisant la différence entre 2 fois (5.8) et (5.7) on obtient :

$$A_{\{(1,2),(3,4)\}} \geq \frac{732}{4199} \approx 0.174327 \quad (5.9)$$

### 5.8.4 Motif (( ))

$$A_{\{(1,4),(2,3)\},2} = \frac{1}{26} \approx 0.0384615 \quad (5.10)$$

$$A_{\{(1,4),(2,3)\},3} = \frac{14}{323} \approx 0.04334365 \quad (5.11)$$

En faisant la différence entre 2 fois (5.11) et (5.10) on obtient :

$$A_{\{(1,4),(2,3)\}} \geq \frac{405}{8398} \approx 0.0482257 \quad (5.12)$$

### 5.8.5 Motif ((() ))

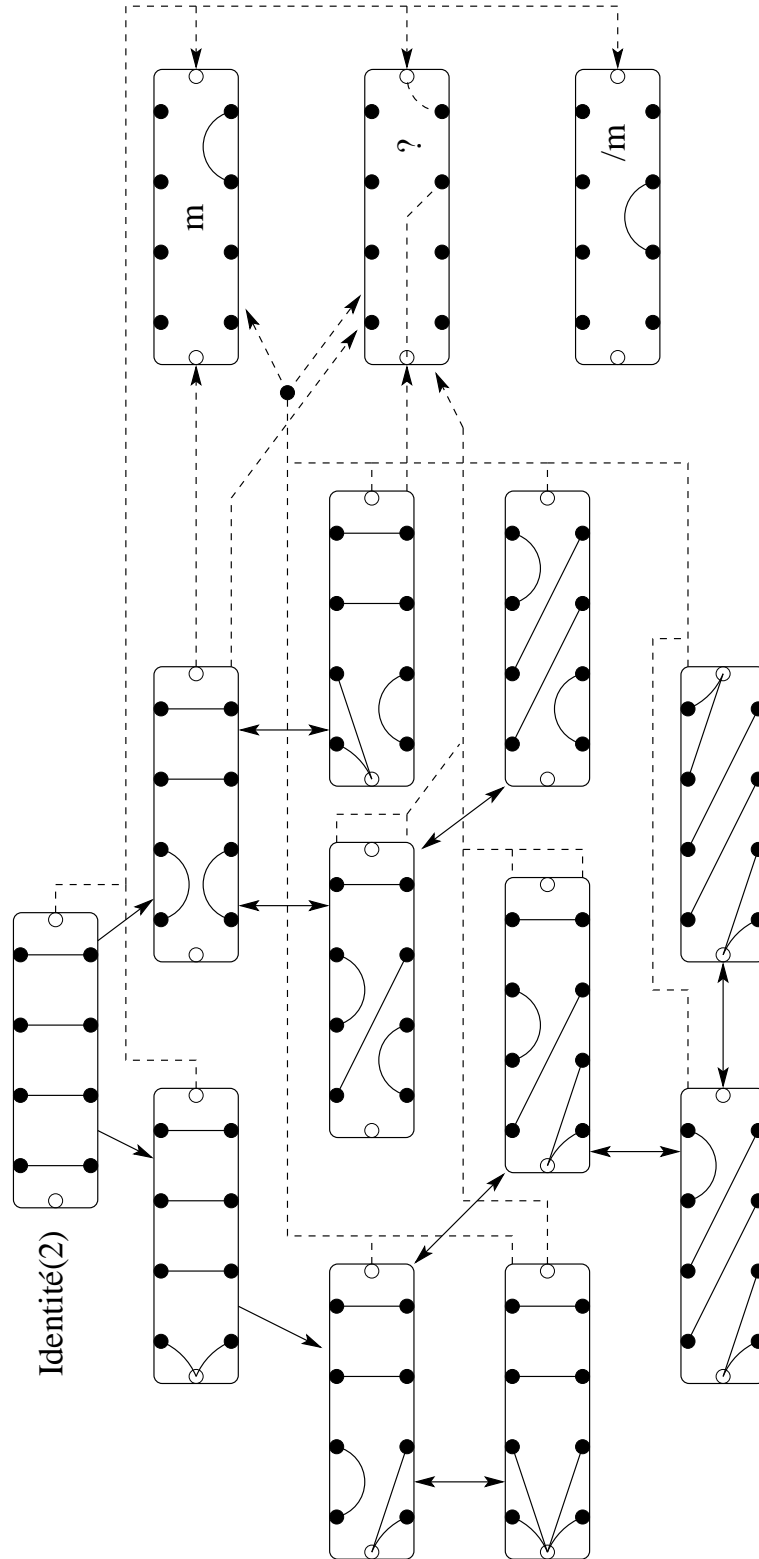
$$A_{\{(1,6),(2,3)(4,5)\},3} \geq \frac{3}{323} \approx 0.0092879 \quad (5.13)$$

**5.8.6 Motif (((()))**

$$A_{\{(1,6),(2,5)(3,4)\},3} \geq \frac{1}{646} \approx 0.001547987 \quad (5.14)$$

**5.8.7 Motif (((())))**

$$A_{\{(1,8),(2,7)(3,6)(4,5)\},3} \geq \frac{1}{45885} \quad (5.15)$$

FIG. 5.5 – L'automate  $A'(\{(3,4)\}, 2)$



# Bibliographie

- [1] G.E. Andrews. Plane partitions v : The tsscpc conjecture. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 66(1) :28–39, 1994.
- [2] George E. Andrews. Plane partitions. III. The weak Macdonald conjecture. *Invent. Math.*, 53(3) :193–225, 1979.
- [3] George E. Andrews. Plane partitions. V. The TSSCPP conjecture. *J. Combin. Theory Ser. A*, 66(1) :28–39, 1994.
- [4] J.C. Aval. Keys and alternating sign matrices. *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, 59 :B59f, 2008.
- [5] A. Ayyer, R. Cori, and D. Gouyou-Beauchamps. Monotone triangles and 312 pattern avoidance. *Arxiv preprint arXiv :1101.1666*, 2011.
- [6] M. T. Batchelor, J. de Gier, and B. Nienhuis. The quantum symmetric  $XXZ$  chain at  $\Delta = -\frac{1}{2}$ , alternating-sign matrices and plane partitions. *J. Phys. A*, 34(19) :L265–L270, 2001.
- [7] D.M. Bressoud and Mathematical Association of America. *Proofs and Confirmations : The story of the alternating sign matrix conjecture*. Mathematical Association of America, 1999.
- [8] L. Cantini and A. Sportiello. Proof of the razumov-stroganov conjecture. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 118(5) :1549–1574, 2011.
- [9] F. Caselli and C. Krattenthaler. Proof of two conjectures of Zuber on fully packed loop configurations. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 108(1) :123–146, 2004.
- [10] Fabrizio Caselli, Christian Krattenthaler, Bodo Lass, and Philippe Nadeau. On the number of fully packed loop configurations with a fixed associated matching. *Electron. J. Combin.*, 11(2) :Research paper R16, 43 pp., 2005.
- [11] Mihai Ciucu. Enumeration of perfect matchings in graphs with reflective symmetry. *J. Combin. Theory Ser. A*, 77(1) :67–97, 1997.
- [12] Mihai Ciucu. The equivalence between enumerating cyclically symmetric, self-complementary and totally symmetric, self-complementary plane partitions. *J. Combin. Theory Ser. A*, 86(2) :382–389, 1999.
- [13] Mihai Ciucu. Plane partitions I : A generalization of MacMahon’s formula. *Memoirs of Amer. Math. Soc.*, 178(839) :1–106, 2005.

- [14] Henry Cohn, Noam Elkies, and James Propp. Local statistics for random domino tilings of the Aztec diamond. *Duke Math. J.*, 85(1) :117–166, 1996.
- [15] F. Colomo and AG Pronko. The arctic curve of the domain-wall six-vertex model. *Journal of Statistical Physics*, 138(4) :662–700, 2010.
- [16] Jan de Gier. Loops, matchings and alternating-sign matrices. *Discrete Math.*, 298(1-3) :365–388, 2005.
- [17] P. Di Francesco. A refined Razumov-Stroganov conjecture. *J. Stat. Mech. Theory Exp.*, 2004(8) :009, 16 pp. (electronic), 2004.
- [18] P. Di Francesco. A refined Razumov-Stroganov conjecture. II. *J. Stat. Mech. Theory Exp.*, 2004(11) :004, 20 pp. (electronic), 2004.
- [19] P. Di Francesco, P. Zinn-Justin, and J.-B. Zuber. A bijection between classes of fully packed loops and plane partitions. *Electron. J. Combin.*, 11(1) :Research Paper 64, 11 pp. (electronic), 2004.
- [20] P. Di Francesco, P. Zinn-Justin, and JB Zuber. A bijection between classes of fully packed loops and plane partitions. *Electron. J. Combin.*, 11(1) :R64, 2004.
- [21] P. Di Francesco and J.-B. Zuber. On fully packed loop configurations with four sets of nested arches. *J. Stat. Mech. Theory Exp.*, pages P06005, 20 pp. (electronic), 2004.
- [22] Philippe Di Francesco and Paul Zinn-Justin. Around the Razumov-Stroganov conjecture : proof of a multi-parameter sum rule. *Electron. J. Combin.*, 12 :Research paper R6, 27 pp., 2005.
- [23] Philippe Di Francesco and Paul Zinn-Justin. Quantum Knizhnik-Zamolodchikov equation, totally symmetric plane partitions and alternating sign matrices. *Theoret. Math. Phys.*, 154 :331–348, 2008.
- [24] P. Duchon and F. Le Gac. Exact random generation of symmetric and quasi-symmetric alternating-sign matrices. 2008.
- [25] Noam Elkies, Greg Kuperberg, Michael Larsen, and James Propp. Alternating-sign matrices and domino tilings. I. *J. Algebraic Combin.*, 1(2) :111–132, 1992.
- [26] Noam Elkies, Greg Kuperberg, Michael Larsen, and James Propp. Alternating-sign matrices and domino tilings. II. *J. Algebraic Combin.*, 1(3) :219–234, 1992.
- [27] W. Jockusch, J. Propp, and P. Shor. Random domino tilings and the arctic circle theorem. *Arxiv preprint math/9801068*, 1998.
- [28] V. Korepin and P. Zinn-Justin. Thermodynamic limit of the six-vertex model with domain wall boundary conditions. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 33 :7053, 2000.
- [29] G. Kuperberg. Another proof of the alternating-sign matrix conjecture. *International Mathematics Research Notices*, page 139, 1996.
- [30] Greg Kuperberg. Symmetry classes of alternating-sign matrices under one roof. *Ann. of Math. (2)*, 156(3) :835–866, 2002.



- [31] F. Le Gac. Enumeration of alternating sign matrices with a fixed number of negative entries. 2010.
- [32] Florent Le Gac. Couplages plans. Master's thesis, Université de Bordeaux, 2007.
- [33] W. H. Mills, David P. Robbins, and Howard Rumsey, Jr. Proof of the Macdonald conjecture. *Invent. Math.*, 66(1) :73–87, 1982.
- [34] W. H. Mills, David P. Robbins, and Howard Rumsey, Jr. Alternating sign matrices and descending plane partitions. *J. Combin. Theory Ser. A*, 34(3) :340–359, 1983.
- [35] W. H. Mills, David P. Robbins, and Howard Rumsey, Jr. Enumeration of a symmetry class of plane partitions. *Discrete Math.*, 67(1) :43–55, 1987.
- [36] W. H. Mills, David P. Robbins, and Howard Rumsey, Jr. Enumeration of a symmetry class of plane partitions. *Discrete Math.*, 67(1) :43–55, 1987.
- [37] S. Mitra and B. Nienhuis. Exact conjectured expressions for correlations in the dense  $O(1)$  loop model on cylinders. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2004 :P10006, 2004.
- [38] S. Mitra, B. Nienhuis, J. de Gier, and MT Batchelor. Exact expressions for correlations in the ground state of the dense  $O(1)$  loop model. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2004 :P09010, 2004.
- [39] P. Nadeau. Fully packed loop configurations in a triangle and littlewood richardson coefficients. *DMTCS Proceedings*, (01) :425–436, 2010.
- [40] Robert A. Proctor. Shifted plane partitions of trapezoidal shape. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 89(3) :553–559, 1983.
- [41] Robert A. Proctor. A bideterminant proof of a product identity for plane partitions with symmetries. *J. Statist. Plann. Inference*, 34(2) :239–250, 1993.
- [42] J. Propp. The many faces of alternating-sign matrices. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 43 :58, 2001.
- [43] J. Propp and D. Wilson. Coupling from the past : a user's guide. In *Microsurveys in discrete probability : DIMACS workshop, June 2-6, 1997*. Amer Mathematical Society, 1997.
- [44] J.G. Propp and D.B. Wilson. Exact sampling with coupled Markov chains and applications to statistical mechanics. *Random structures and Algorithms*, 9(1-2) :223–252, 1996.
- [45] A. V. Razumov and Yu. G. Stroganov. Spin chains and combinatorics. *J. Phys. A*, 34(14) :3185–3190, 2001.
- [46] A. V. Razumov and Yu. G. Stroganov. Spin chains and combinatorics : twisted boundary conditions. *J. Phys. A*, 34(26) :5335–5340, 2001.
- [47] A. V. Razumov and Yu. G. Stroganov.  $o(1)$  loop model with different boundary conditions and symmetry classes of alternating-sign matrices. *Theoret. and Math. Phys.*, 142(2) :237–243, 2005.

- [48] A. V. Razumov and Yu. G. Stroganov. Enumeration of odd-order alternating-sign half-turn-symmetric matrices. *Theoret. and Math. Phys.*, 148(3) :1174–1198, 2006.
- [49] A. V. Razumov and Yu. G. Stroganov. Enumeration of quarter-turn-symmetric alternating-sign matrices of odd order. *Theoret. Math. Phys.*, 149(3) :1639–1650, 2006.
- [50] AV Razumov and Y.G. Stroganov. Combinatorial nature of the ground-state vector of the  $O(1)$  loop model. *Theoretical and Mathematical Physics*, 138(3) :333–337, 2004.
- [51] D.P. Robbins. Symmetry classes of alternating sign matrices. *Arxiv preprint math/0008045*, 2000.
- [52] N. J. A. Sloane. The on-line encyclopedia of integer sequences. Available online as <http://www.research.att.com/~njas/sequences/>.
- [53] Richard P. Stanley. A baker’s dozen of conjectures concerning plane partitions. In *Combinatoire énumérative (Montreal, Que., 1985/Quebec, Que., 1985)*, volume 1234 of *Lecture Notes in Math.*, pages 285–293. Springer, Berlin, 1986.
- [54] Richard P. Stanley. Symmetries of plane partitions. *J. Combin. Theory Ser. A*, 43(1) :103–113, 1986.
- [55] John R. Stembridge. The enumeration of totally symmetric plane partitions. *Adv. Math.*, 111(2) :227–243, 1995.
- [56] H.N.V. Temperley and E.H. Lieb. Relations between the ‘percolation’ and ‘colouring’ problem and other graph-theoretical problems associated with regular planar lattices : some exact results for the ‘percolation’ problem. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 322(1549) :251, 1971.
- [57] Johan Thapper. Refined counting of fully packed loop configurations. *Sém. Lothar. Combin.*, 56 :Art. B56e, 27 pp. (electronic), 2006/07.
- [58] Benjamin Wieland. A large dihedral symmetry of the set of alternating sign matrices. *Electron. J. Combin.*, 7 :Research Paper 37, 13 pp. (electronic), 2000.
- [59] D.B. Wilson. How to couple from the past using a read-once source of randomness. *Random Structures and Algorithms*, 16(1) :85–113, 2000.
- [60] D.B. Wilson. Mixing times of lozenge tiling and card shuffling Markov chains. *Annals of Applied Probability*, 14(1) :274–325, 2004.
- [61] D. Zeilberger. Proof of the alternating sign matrix conjecture. *Electron. J. Combin.*, 3(2), 1996.
- [62] Doron Zeilberger. Proof of the refined alternating sign matrix conjecture. *New York J. Math.*, 2 :59–68, electronic, 1996.
- [63] P. Zinn-Justin. Proof of the razumov–stroganov conjecture for some infinite families of link patterns. *Electronic J. Combin.*, 13 :R110, 2006.

- [64] P. Zinn-Justin. A conjectured formula for fully packed loop configurations in a triangle. *the electronic journal of combinatorics*, 17(R107) :1, 2010.
- [65] J.B. Zuber. On the counting of fully packed loop configurations : some new conjectures. *Electron. J. Combin*, 11(1) :R13, 2004.