Bài 5. Cực trị

I. Cực trị tự do

1. Định nghĩa

Cho hàm $z = f(x, y)$ xác định trong một lân cận $U(x_0; y_0)$ của điểm (x_0, y_0).

- Nếu $f(x, y) \le f(x_0, y_0), \forall (x, y) \in U(x_0; y_0)$ thì (x_0, y_0) là điểm cực đại và $z_{CD} = f(x_0, y_0)$
- Nếu $f(x, y) \ge f(x_0, y_0), \forall (x, y) \in U(x_0, y_0)$ thì (x_0, y_0) là điểm cực tiểu và $z_{CT} = f(x_0, y_0)$
- Các điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là các điểm cực trị của hàm số.

2. Điều kiện cần cực trị hàm hai biến

Giả sử $z = f(x, y)$ đạt cực trị tại (x_0, y_0).

- Cố định $y = y_0 \Rightarrow z = f(x, y_0)$ là hàm của x.

  Hàm $z = f(x, y)$ đạt cực trị tại (x_0, y_0)

$$\Rightarrow z = f(x, y_0) \text{ đạt cực trị tại } x_0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = 0.$$

• Cố định $x = x_0 \Rightarrow z = f(x_0, y)$ là hàm của y.

Hàm $z = f(x,y)$ đạt cực trị tại (x_0, y_0)

$\Rightarrow z = f(x_0, y)$ đạt cực trị tại $y_0 \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$

Định nghĩa: Nếu $\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$ thì ta nói (x_0, y_0) là điểm tới hạn của hàm số $f(x,y)$.

Định lý: Nếu hàm $z = f(x,y)$ đạt cực trị tại (x_0, y_0) thì (x_0, y_0) là điểm tới hạn của hàm số.

VD1. Tìm điểm tới hạn của hàm số sau:

$$f(x,y) = x^3 - y^3 + 3xy$$

3. Điều kiện đủ cực trị hàm hai biến

Định lý: Giả sử $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục trong một lân cận của điểm tới hạn (x_0, y_0) và biệt số

$$D = f_{xx}(x_0, y_0).f_{yy}(x_0, y_0) - \left[f_{xy}(x_0, y_0) \right]^2$$

Khi đó (x_0, y_0) là:

+ Điểm cực đại nếu $D > 0$ và $f_{xx}(x_0, y_0) < 0.$

+ Điểm cực tiểu nếu $D > 0$ và $f_{xx}(x_0, y_0) > 0.$

+ Điểm yên ngựa (0 là điểm cực trị) nếu $D < 0.$

VD2. Tìm cực trị của các hàm số sau:

1. $f(x, y) = xy + \frac{8}{y} + \frac{8}{x}$

2. $z = xy + 2x - 2\ln x - \ln y$

II. Cực trị có điều kiện

1. Bài toán: Tìm cực trị của hàm $f(x, y)$

thỏa mãn điều kiện ràng buộc $g(x, y) = 0.$

2. Phương pháp giải

Cách 1. Từ điều kiện ràng buộc $g(x, y) = 0$ giải x theo y hoặc y theo x rồi thế vào $f(x, y)$

Khi đó bài toán trở thành tìm cực trị hàm 1 biến.

VD3. Tìm cực trị của $f(x, y) = \frac{4}{3}x^3 - 3xy + y^2$

thỏa mãn điều kiện $x + y = 1.$

Cách 2. **Phương pháp nhân tử Lagrange**

a. Ý tưởng

- Vẽ đồ thị của $g(x,y)=0$ cùng một số đường mức $f(x,y)=c$ của hàm $f(x,y)$.
- Tìm cực trị của $f(x,y)$ thỏa mãn $g(x,y)=0$ là đi tìm c lớn nhất hoặc nhỏ nhất để $f(x,y)=c$ cắt $g(x,y)=0$.
- Nếu (x_0,y_0) là điểm cực trị thì tại (x_0,y_0) hai đường $f(x,y)=c$ và $g(x,y)=0$ có chung tiếp tuyến.
- $\text{grad} f = f_x\vec{i} + f_y\vec{j}$; $\text{grad} g = g_x\vec{i} + g_y\vec{j}$ tại (x_0,y_0) cùng phương.
- Do đó $\text{grad} f = \lambda \text{grad} g$. Hằng số λ được gọi là nhân tử Lagrange.
- (x_0,y_0) là nghiệm của hệ: $\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g(x,y)=0 \end{cases}$
- Các nghiệm (x_0,y_0) là những điểm mà $f(x,y)$ với ràng buộc $g(x,y)=0$ có thể đạt cực trị.

b. Định lý

Giả sử $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$, (x_0, y_0)

là nghiệm của hệ: $\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$

và $d^2L = L_{xx}dx^2 + 2L_{xy}dxdy + L_{yy}dy^2$, trong đó

$$g_x(x_0, y_0)dx + g_y(x_0, y_0)dy = 0.$$

+ Nếu $d^2L(x_0, y_0) \geq 0$ thì hàm $z = f(x,y)$ đạt cực tiểu có điều kiện tại (x_0, y_0)

+ Nếu $d^2L(x_0, y_0) \leq 0$ thì hàm $z = f(x,y)$ đạt cực đại có điều kiện tại (x_0, y_0).

VD4. Tìm cực trị của hàm $z = 2x + 2\sqrt{3}y + 1$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

Bài 6. Tích phân bội hai

I. Biểu diễn miền phẳng

Mọi miền phẳng $D \subset 0xy$ đều biểu diễn được dưới dạng hợp của các tập hợp sau:

$$D = \left\{ (x, y) \in R^2 \middle| a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x) \right\}$$

$$D = \left\{ (x, y) \in R^2 \middle| c \le y \le d, x_1(y) \le x \le x_2(y) \right\}$$

VD. Biểu diễn dưới dạng tập hợp các miền bị chặn bởi các đường sau:

a. $y = x^2,\ y = x$ b. $x = y^2,\ x - y = 2$

Tích phân lặp

1. Đặt vấn đề

- Giả sử R là miền đóng, bị chặn, có biên D nằm trong $(0xy)$.
- Hàm $z = f(x, y)$ liên tục, không âm trên R.
- Tính thể tích hình trụ giới hạn bởi miền R, mặt $z = f(x, y)$, có các đường sinh tựa trên D và song song với 0z.

2. Ý tưởng giải quyết

- Cắt khối trụ bởi mặt phẳng vuông góc với $0x$ tại điểm có hoành độ x.
- Gọi $\mathrm{A}(x)$ là diện tích của tiết diện và dx là độ dày của lát cắt.
- Vi phân thể tích của lát cắt là: $\mathrm{dV} = \mathrm{A}(x)dx$.
- Nếu khối trụ giới hạn giữa hai mặt phẳng $x = a$ và $x = b$ thì thể tích của nó:

$$\mathrm{V} = \int_a^b A(x)dx$$

- Với x bất kỳ cố định giữa a và b, biến y thay đổi từ $y_1(x)$ đến $y_2(x)$. Diện tích của tiết diện

$$A(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

- Thể tích của khối trụ sẽ là tích phân lặp:

$$V = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right] dx = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dydx$$

- $R = \{(x,y) : a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$ được gọi là miền lấy tích phân.

- Tương tự nếu cắt khối trụ bởi mặt phẳng vuông góc với 0y thì miền lấy tích phân là:

$$R=\{(x,y): c\le y\le d, x_1(y)\le x\le x_2(y)\}$$

Và thể tích khối trụ sẽ là tích phân lặp:

$$V=\int_c^d\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dxdy$$

VD. Sử dụng tích phân lặp để tìm thể tích của tứ diện bị chặn bởi các mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng $x+y+z=1$.

VD. Cho tích phân lặp: $\mathrm{I}=\int_0^1\int_{x^2}^{x} 2y\,dydx$.

a. Vẽ miền lấy tích phân.
b. Viết tích phân lặp tương đương khi đổi thứ tự lấy tích phân và tính cả hai tích phân đó.

VD. Tính tích phân lặp sau: $I=\int_0^1\int_{2y}^{2} 4e^{x^2}\,dxdy$

II. Tích phân bội hai

1. Bài toán

Tính thể tích của khối trụ bị chặn phía trên bởi mặt $z = f\left(x, y\right)$, phía dưới bởi miền $D \subset 0xy$, các đường sinh song song trục 0z.

2. Khái niệm

- Chia hình trụ thành n khối nhỏ bởi các mặt phẳng vuông góc với các trục $0x, 0y$
- Gọi $\Delta \mathrm{A}_k$ là diện tích hcn thứ k trong miền R.
- Trong hình chữ nhật thứ k lấy điểm $\left(x_k, y_k\right)$.
- Lập tổng $\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k, y_k\right)\Delta \mathrm{A}_k$
- Giới hạn hữu hạn

  $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k, y_k\right)\Delta \mathrm{A}_k = \iint_R f\left(x, y\right)\mathrm{dA} = \iint_R f\left(x, y\right)dxdy$$

  đgl tích phân bội hai của $f\left(x, y\right)$ trên miền R.

3. Cách tính

Định lý Fubini

Cho $f\left(x, y\right)$ là hàm liên tục trên miền R.

- Nếu $R=\{(x,y): a\le x\le b,\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$

thì: $$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_a^b\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$$

- Nếu $R=\{(x,y): c\le y\le d,\ x_1(y)\le x\le x_2(y)\}$

thì : $$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_c^d\left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy$$

VD. Tính các tích phân bội hai sau:

a. $\mathrm{I}_1=\iint_R 2xy\mathrm{dA}$ theo hai cách, trong đó R là giới hạn bởi các đường $x=0,\ x=2, y=-x,\ y=x^2$.

b. $\mathrm{I}_2=\iint_R (1+2x)\,dxdy$ trong đó R là miền bị chặn bởi các đường $x=y^2,\ x=-1,\ y=0,\ y=1$.

4. Tính chất

Cho $f(x,y),\ g(x,y)$ là các hàm liên tục trên miền bị chặn R và hằng số α.

- $\iint_R (f+g)\,dA=\iint_R f\,dA+\iint_R g\,dA$

- $\iint\limits_R \alpha f dA = \alpha \iint\limits_R f dA$
- Nếu $R = R_1 \cup R_2$ thì $\iint\limits_R f dA = \iint\limits_{R_1} f dA + \iint\limits_{R_2} f dA$
- Diện tích miền R: $S_R = \iint\limits_R dA = \iint\limits_R dxdy$
- Thể tích khối trụ giới hạn phía trên bởi mặt $z = f(x, y)$, phía dưới bởi miền R$\subset (0xy)$, các đường sinh song song với 0z:

$$V = \iint\limits_R f(x, y) dA$$

VD. Dùng tích phân bội hai tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $y = x^2$ và $y = 4x - x^2$.

VD. Tính thể tích khối trụ được giới hạn bởi các mặt $z = x^2 + y^2$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

VD. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt:

$$y = 4 - x^2,\ y = 3x,\ z = x + 4,\ z = 0.$$

III. Đổi biến trong tích phân bội hai

1. Phép đổi biến tổng quát

a. Định thức Jacobi

- Cho các hàm số $x = x(u,v), y = y(u,v)$ có các đạo hàm riêng liên tục.
- Định thức Jacobi của hai hàm số này là một số xác định bởi:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} := \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

VD. Tìm định thức Jacobi của các cặp hàm sau:

1. $x = 2u - 3v,\ y = u.v$ 2. $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

b. Phép đổi biến tổng quát

Định lý: Giả sử $x = x(u,v), y = y(u,v)$ có đạo hàm riêng liên tục và J là định thức Jacobi của chúng. Khi đó:

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \iint_{R'} f\left[x(u,v), y(u,v)\right]\left|J\right| dudv$$

VD. Tính tích phân $I = \iint_R (x+y)^3 (x-y)^2 \, dxdy$,

trong đó R là miền bị chặn bởi các đường thẳng:

$x+y=1,\ x+y=3,\ x-y=-1,\ x-y=1$

2. Phép đổi biến sang tọa độ cực

- Xét tích phân: $\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_R f(x,y)\,dxdy$
- Phép đổi biến: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$
- Khi đó:

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \iint_{R'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

Với $R' = \{(r,\theta) : \alpha \le \theta \le \beta,\ r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)\}$

Nhận xét: $S_R = \iint_R dxdy = \iint_{R'} r\,dr\,d\theta$

Chú ý:

Phép đổi biến sang tọa độ cực thường dùng khi:

+ Hàm $f(x,y)$ chứa $x^2 + y^2$

+ Miền R giới hạn bởi các đường tròn.

VD. Tính tích phân $I = \iint\limits_R \sqrt{x^2 + y^2}dxdy$, trong đó R là miền bị chặn bởi:

1. $x^2 + y^2 = 4$ 2. $x^2 + y^2 = 2x$

3. $1 \le x^2 + y^2 \le 2x$ 4. $x^2 + y^2 \le 2x,\ x^2 + y^2 \le 2y$

VD. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt

$$z = 4 - x^2 - y^2 \text{ và } z = 0.$$

VD. Tính diện tích miền D là phần trong chung của hai đường tròn $r = 1,\ r = 2\cos\theta$.

VD. Tính thể tích của hình được giới hạn bởi:

$z = 4 - x^2 - y^2$ và $2z = 2 + x^2 + y^2$.