Bài 4. Đạo hàm hàm hợp và hàm ẩn

I. Đạo hàm hàm hợp

1. Hàm hợp của một biến độc lập qua nhiều biến trung gian

- Nếu $z = f(x, y)$ với $x = x(t), y = y(t)$ thì hàm hợp $z = f[x(t), y(t)]$ là hàm của biến độc lập t và

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$$

- Đặc biệt nếu $z = f(x, y)$ với $y = y(x)$ thì hàm hợp $z = f[x, y(x)]$ là hàm của biến độc lập x và

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dx}$$

- $z = f(x_1, x_2, ..., x_n); x_1 = x_1(t), ..., x_n = x_n(t)$ thì

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x_1}.\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x_2}.\frac{dx_2}{dt} + ... + \frac{\partial z}{\partial x_n}.\frac{dx_n}{dt}$$

VD1. Cho $w = 3x^2 + 2xy - y^2$, trong đó $x = \cos t$, $y = \sin t$. Tìm $\frac{dw}{dt}$.

2. Hàm hợp của nhiều biến độc lập qua một biến trung gian

Nếu $z = f(u)$, với $u = u(x,y)$ thì hàm hợp $z = f[u(x,y)]$ là hàm của hai biến độc lập x, y và

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du}.\frac{\partial u}{\partial x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du}.\frac{\partial u}{\partial y}$$

VD2. Cho $\mathrm{w} = f(ax+by)$. Tính giá trị biểu thức:

$$A = b.\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x} - a\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y}$$

3. Hàm hợp của nhiều biến độc lập qua nhiều biến trung gian

Nếu $z = f(x,y)$, với $x = x(t,s), y = y(t,s)$ thì hàm hợp $z = f[x(t,s), y(t,s)]$ là hàm của hai biến độc lập t và s. Khi đó:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t}; \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial s}$$

VD3. Cho $\mathrm{w} = f(x^2 - y^2, y^2 - x^2)$. Chứng minh:

$$y\frac{\partial w}{\partial x}+x\frac{\partial w}{\partial y}=0$$

VD4. Chứng minh $w = f\left(\frac{y-x}{xy},\frac{z-y}{yz}\right)$ là nghiệm của phương trình:

$$x^2\frac{\partial w}{\partial x}+y^2\frac{\partial w}{\partial y}+z^2\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

II. Đạo hàm hàm ẩn

1. Hàm ẩn với một biến độc lập

a. Định nghĩa

Nếu với mỗi $x\in D$ thay vào $F(x,y)=c$ giải được duy nhất một giá trị y thì ta nói $F(x,y)=c$ xác định hàm ẩn với một biến độc lập $y=y(x)$.

b. Định lý

Nếu phương trình $F(x,y)=c$ xác đinh một hàm ẩn $y=y(x)$ thì: $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$, $F_y\neq 0$.

VD5. Tính $\frac{dy}{dx}$ biết hàm $y=y(x)$ xác định bởi:

$$x^2y^5 - 2xy + 1 = 0$$

2. Hàm ẩn với hai biến độc lập

a. Định nghĩa

Nếu với mỗi cặp giá trị $(x, y) \in D$ khi thay vào $F(x, y, z) = c$ giải được duy nhất một giá trị z thì ta nói phương trình: $F(x, y, z) = c$ xác định hàm ẩn với hai biến độc lập $z = z(x, y)$.

b. Định lý

Nếu phương trình $F(x, y, z) = c$ xác định hàm ẩn $z = f(x, y)$ thì: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} \quad , F_z \neq 0.$

VD6. Tính các đạo hàm riêng $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ tại $P(1; 2; -1)$ của hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định từ phương trình:

$$x^2z + yz^5 + 2xy^3 = 13$$

Bài 5. Cực trị

I. Cực trị tự do

1. Định nghĩa

Cho hàm $z = f\left(x, y\right)$ xác định trong một lân cận $U\left(x_0; y_0\right)$ của điểm $\left(x_0, y_0\right)$.

- Nếu $f\left(x, y\right) \le f\left(x_0, y_0\right), \forall \left(x, y\right) \in U\left(x_0; y_0\right)$ thì $\left(x_0, y_0\right)$ là điểm cực đại và $z_{CD} = f\left(x_0, y_0\right)$
- Nếu $f\left(x, y\right) \ge f\left(x_0, y_0\right), \forall \left(x, y\right) \in U\left(x_0, y_0\right)$ thì $\left(x_0, y_0\right)$ là điểm cực tiểu và $z_{CT} = f\left(x_0, y_0\right)$
- Các điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là các điểm cực trị của hàm số.

2. Điều kiện cần cực trị hàm hai biến

Giả sử $z = f\left(x, y\right)$ đạt cực trị tại $\left(x_0, y_0\right)$.

- Cố định $y = y_0 \Rightarrow z = f\left(x, y_0\right)$ là hàm của x. Hàm $z = f\left(x, y\right)$ đạt cực trị tại $\left(x_0, y_0\right)$

$\Rightarrow z = f\left(x, y_0\right)$ đạt cực trị tại $x_0 \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x}\left(x_0, y_0\right) = 0.$

• Cố định $x = x_0 \Rightarrow z = f(x_0, y)$ là hàm của y.

Hàm $z = f(x,y)$ đạt cực trị tại (x_0, y_0)

$\Rightarrow z = f(x_0, y)$ đạt cực trị tại $y_0 \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$

Định nghĩa: Nếu $\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$ thì ta nói (x_0, y_0) là điểm tới hạn của hàm số $f(x,y)$.

Định lý: Nếu hàm $z = f(x,y)$ đạt cực trị tại (x_0, y_0) thì (x_0, y_0) là điểm tới hạn của hàm số.

VD1. Tìm điểm tới hạn của hàm số sau:

$$f(x,y) = x^3 - y^3 + 3xy$$

3. Điều kiện đủ cực trị hàm hai biến

Định lý: Giả sử $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục trong một lân cận của điểm tới hạn (x_0, y_0) và biệt số

$$D = f_{xx}(x_0, y_0).f_{yy}(x_0, y_0) - \left[f_{xy}(x_0, y_0)\right]^2$$

Khi đó (x_0, y_0) là:

+ Điểm cực đại nếu $D>0$ và $f_{xx}(x_0,y_0)<0$.

+ Điểm cực tiểu nếu $D>0$ và $f_{xx}(x_0,y_0)>0$.

+ Điểm yên ngựa (0 là điểm cực trị) nếu $D<0$.

VD2. Tìm cực trị của các hàm số sau:

1. $f(x,y)=xy+\frac{8}{y}+\frac{8}{x}$

2. $z=xy+2x-2\ln x-\ln y$

II.Cực trị có điều kiện

1. Bài toán: Tìm cực trị của hàm $f(x,y)$

thỏa mãn điều kiện ràng buộc $g(x,y)=0$.

2. Phương pháp giải

Cách 1. Từ điều kiện ràng buộc $g(x,y)=0$ giải x theo y hoặc y theo x rồi thế vào $f(x,y)$

Khi đó bài toán trở thành tìm cực trị hàm 1 biến.

VD3. Tìm cực trị của $f(x,y)=\frac{4}{3}x^3-3xy+y^2$

thỏa mãn điều kiện $x+y=1$.

Cách 2. **Phương pháp nhân tử Lagrange**

a. Ý tưởng

- Vẽ đồ thị của $g(x,y)=0$ cùng một số đường mức $f(x,y)=c$ của hàm $f(x,y)$.
- Tìm cực trị của $f(x,y)$ thỏa mãn $g(x,y)=0$ là đi tìm c lớn nhất hoặc nhỏ nhất để $f(x,y)=c$ cắt $g(x,y)=0$.
- Nếu (x_0,y_0) là điểm cực trị thì tại (x_0,y_0) hai đường $f(x,y)=c$ và $g(x,y)=0$ có chung tiếp tuyến.
- $\text{grad} f = f_x\vec{i} + f_y\vec{j}$; $\quad \text{grad} g = g_x\vec{i} + g_y\vec{j}$ tại (x_0,y_0) cùng phương.
- Do đó $\text{grad} f = \lambda \,\text{grad} g$. Hằng số λ được gọi là nhân tử Lagrange.
- (x_0,y_0) là nghiệm của hệ: $\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g(x,y)=0 \end{cases}$
- Các nghiệm (x_0,y_0) là những điểm mà $f(x,y)$ với ràng buộc $g(x,y)=0$ có thể đạt cực trị.

b. Định lý

Giả sử $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$, (x_0, y_0)

là nghiệm của hệ: $\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$

và $d^2L = L_{xx}dx^2 + 2L_{xy}dxdy + L_{yy}dy^2$, trong đó

$$g_x(x_0, y_0)dx + g_y(x_0, y_0)dy = 0.$$

+ Nếu $d^2L(x_0, y_0) \geq 0$ thì hàm $z = f(x,y)$ đạt cực tiểu có điều kiện tại (x_0, y_0)

+ Nếu $d^2L(x_0, y_0) \leq 0$ thì hàm $z = f(x,y)$ đạt cực đại có điều kiện tại (x_0, y_0).

VD4. Tìm cực trị của hàm $z = 2x + 2\sqrt{3}y + 1$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

III. Giá trị lớn nhất – Giá trị nhỏ nhất

1. Định nghĩa

Cho hàm $f(x,y)$ có MXĐ là D và $(x_0, y_0) \in$ D.

- Nếu $f(x,y) \leq f(x_0, y_0)$, $\forall (x,y) \in$ D thì ta nói

$$\underset{(x,y)\in D}{\text{Max}} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

- Nếu $f(x,y) \geq f(x_0, y_0),\ \forall (x,y) \in D$ thì ta nói

$$\underset{(x,y)\in D}{\text{Min}} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

2. Các bài toán tìm GTLN - GTNN

a. Tìm GTLN – GTNN trên miền mở

Định lý: Giả sử $f(x,y)$ liên tục trên miền mở D và trên D hàm có duy nhất điểm cực trị (x_0, y_0)

+ Nếu (x_0, y_0) là điểm cực đại thì $f(x,y)$ cũng đạt GTLN tại (x_0, y_0).

+ Nếu (x_0, y_0) là điểm cực tiểu thì $f(x,y)$ cũng đạt GTNN tại (x_0, y_0).

VD5. Tìm GTLN – GTNN (nếu có) của hàm số

$$z = xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y} \text{ với } x, y > 0.$$

b. Tìm GTLN – GTNN của hàm $f(x,y)$ trên đường cong $g(x,y) = 0$

Định lý 1: Giả sử hàm $f(x,y)$ với điều kiện $g(x,y)=0$ đạt duy nhất một cực trị tại (x_0,y_0).

+ Nếu (x_0,y_0) là điểm cực tiểu thì $f(x,y)$ với điều kiện $g(x,y)=0$ cũng đạt GTNN tại (x_0,y_0).

+ Nếu (x_0,y_0) là điểm cực đại thì $f(x,y)$ với điều kiện $g(x,y)=0$ cũng đạt GTLN tại (x_0,y_0).

Định lý 2: G/s $f(x,y)$ với điều kiện $g(x,y)=0$ có thể đạt cực trị tại các điểm $(x_1,y_1);...;(x_n;y_n)$.

$$\text{Max}f(x,y)=\max_{1\le i\le n}\left\{f(x_i,y_i)\right\}$$

$$\text{Min}f(x,y)=\min_{1\le i\le n}\left\{f(x_i,y_i)\right\}$$

VD6. Tìm độ dài các cạnh của hình chữ nhật có diện tích lớn nhất nội tiếp nửa trên đường tròn tâm $(0,0)$, bán kính a.

c. Tìm GTLN – GTNN trên miền đóng, bị chặn

Định lý: Giả sử $f(x,y)$ liên tục trên miền đóng và bị chặn $D=\left\{(x,y)\in R^2 \,\middle|\, g(x,y)\le 0\right\}$. Khi đó hàm số luôn đạt GTLN và GTNN trên D.

Phương pháp tìm GTLN – GTNN của hàm $f(x,y)$ trên miền D $=\{(x,y)\in R^2 \mid g(x,y)\le 0\}$

- B1. Tìm các điểm tới hạn của hàm $f(x,y)$ thuộc miền $\{(x,y)\in R^2 \mid g(x,y)<0\}$.
- B2. Tìm các điểm mà tại đó hàm $f(x,y)$ với ràng buộc $g(x,y)=0$ có thể đạt cực trị.
- B3. Tính giá trị của hàm $f(x,y)$ tại các điểm tìm được ở B1 và B2.
- B4. Kết luận
  + GTLN của hàm trên miền D là GTLN ở B3
  + GTNN của hàm trên miền D là GTNN ở B3.

VD7. Tìm GTLN – GTNN của $f(x,y)=x^2-y^2$ trên miền hình tròn $x^2+y^2\le 4$.

VD8. Tìm GTLN – GTNN của $z=x(4-x-y)$ trong miền giới hạn bởi: $x=0,\ y=0,\ x+y=6$.

VD9. Tìm GTLN – GTNN của hàm số $f(x,y)=x^2-2xy+y^2$ trong miền hình chữ nhật

$$D=\{(x,y)\in R^2 \mid 0\le x\le 3, 0\le y\le 2\}$$