

Bài 4: BIẾN NGẪU NHIÊN HAI CHIỀU

Vũ Mạnh Tới

Bộ môn Toán-Trường Đại học Thủy lợi

Ngày 4 tháng 5 năm 2024

5.1. Biến ngẫu nhiên hai chiều

Định nghĩa:

- Cho 2 BNN một chiều X, Y . Cặp (X, Y) được gọi là BNN hai chiều.
- Biến ngẫu nhiên (X, Y) nhận giá trị (x, y) , tức là X nhận giá trị là x đồng thời Y nhận giá trị y .
- Nếu X và Y đều rời rạc thì (X, Y) được gọi là BNN hai chiều rời rạc;
- Nếu X và Y đều liên tục thì (X, Y) được gọi là BNN hai chiều liên tục.
- $(X = x, Y = y)$: là biến cố đồng thời X nhận giá trị x , Y nhận giá trị y .

5.2. Phân phối xác suất đồng thời của BNN hai chiều

5.2.1. Biến ngẫu nhiên 2 chiều rời rạc

a) Định nghĩa. Hàm xác suất đồng thời của BNN hai chiều rời rạc (X, Y) là $f(x, y)$ thỏa mãn:

① $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in (X, Y)$

② $\sum_x \sum_y f(x, y) = 1$

③ $P(X = x, Y = y) = f(x, y).$

Từ định nghĩa ta có: Với miền A tùy ý trong mặt phẳng Oxy , ta có

$$P((X, Y) \in A) = \sum_{(x,y) \in A} f(x, y)$$

Hàm $f(x, y)$ thường được cho bởi bảng, và gọi là bảng phân bố xác suất đồng thời.

Ví dụ 1: Chọn ngẫu nhiên hai chiếc ruột bút bi từ một hộp gồm 3 ruột bút xanh lơ, 2 ruột bút đỏ, 3 ruột bút xanh lá cây. Gọi X là số ruột bút xanh lơ, Y là số ruột bút đỏ được chọn. Tìm

- a) Phân phối xác suất đồng thời $f(x, y)$.
- b) $P(X + Y \leq 1)$

b) Phân phối biên duyên

Định nghĩa

Phân phối xác suất của từng BNN X và Y thu được từ phân phối xác suất đồng thời $f(x, y)$ của (X, Y) gọi là phân phối biên duyên.

Công thức tìm phân phối biên duyên:

Nếu (X, Y) là BNN có $f(x, y)$ là hàm xác suất đồng thời thì

- Phân phối biên duyên của X :

$$g(x) = \sum_y f(x, y)$$

- Phân phối biên duyên của Y

$$h(y) = \sum_x f(x, y)$$

Ví dụ 2: Tìm hàm phân phối biên duyên của X và Y trong **Ví dụ 1**.

c) Phân phối có điều kiện

Định nghĩa

Phân phối có điều kiện của BNN Y với điều kiện $X = x$ là

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}, g(x) > 0.$$

Phân phối có điều kiện của BNN X với điều kiện $Y = y$ là

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}, h(y) > 0.$$

Ví dụ 3: Tiếp theo Ví dụ 2, tìm phân phối có điều kiện của X với điều kiện $Y = 1$ và từ đó xác định $P(X = 0|Y = 1)$.

c) Độc lập của các BNN

Định nghĩa. Các BNN X và Y được gọi là độc lập

$$\Leftrightarrow f(x, y) = g(x)h(y) \quad \forall (x, y) \in (X, Y).$$

Ví dụ 4: Cho X và Y là hai BNN độc lập có hàm xác suất lần lượt là

X	2	3	5	6
$P(X=x)$	0.2	0.3	0.1	0.4

Bảng: Phân phối xác suất của X

Y	-1	2
$P(Y=y)$	0.6	0.4

Bảng: Phân phối xác suất của Y

Hãy tìm hàm phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) .

5.2.2 Biến ngẫu nhiên 2 chiều liên tục

a) Định nghĩa. Hàm $f(x, y)$ được gọi là hàm mật độ đồng thời của BNN liên tục (X, Y) nếu:

① $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in (X, Y)$

②
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

③ $P((X, Y) \in A) = \iint_A f(x, y) dx dy$, với A là miền trong (Oxy) .

Ví dụ 1: Giả sử BNN hai chiều (X, Y) có hàm mật độ đồng thời là:

$$f(x, y) = \begin{cases} k(2x + 3y), & 0 < x < 1; 0 < y < 1 \\ 0, & x \notin (0, 1) \times (0, 1) \end{cases}$$

a) Tìm k ?

b) Tìm $P((X, Y) \in A)$, với $A = \{(x, y) | 0 < x < \frac{1}{2}, \frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}\}$.

b) Phân phối biên duyên

Nếu (X, Y) là BNN liên tục có hàm mật độ đồng thời $f(x, y)$. Khi đó

- Hàm mật độ biên duyên của X :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

- Hàm mật độ biên duyên của Y :

$$h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

Ví dụ 2: Tìm các hàm mật độ biên duyên của X , của Y khi hàm mật độ đồng thời trong **Ví dụ 1**.

Nhận xét: Các phân phối biên duyên $g(x)$ và $h(y)$ thực sự là phân phối xác suất của các BNN X và Y tương ứng vì nó thỏa mãn tất cả các điều kiện trong Định nghĩa BNN 1 chiều.

c) Phân phối có điều kiện

Định nghĩa

Phân phối có điều kiện của BNN Y với điều kiện $X = x$ là

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{g(x)}, g(x) > 0.$$

Phân phối có điều kiện của BNN X với điều kiện $Y = y$ là

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{h(y)}, h(y) > 0.$$

Ví dụ 3: Cho BNN hai chiều (X, Y) có

$$f(x, y) = \begin{cases} 10xy^2, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & (x, y) \text{ còn lại.} \end{cases}$$

a) Tìm hàm mật độ biên duyên $g(x)$, $h(y)$ và hàm mật độ có điều kiện $f(y|x)$.

b) Tính $P(Y > \frac{1}{2} | X = 0,25)$.

d) Độc lập của các BNN

Các BNN X và Y được gọi là độc lập $\Leftrightarrow f(x, y) = g(x)h(y)$,
với $\forall (x, y) \in (X, Y)$

Ví dụ 4: Xét xem các BNN X và Y trong **Ví dụ 1** có độc lập không?

Ví dụ 5: Cho BNN 2 chiều có hàm mật độ đồng thời

$$f(x, y) = \begin{cases} k \cdot x^2(1 + y), & 0 < x < 1, 0 < y < 2 \\ 0, & (x, y) \notin (0, 2) \times (0, 1). \end{cases}$$

- a) Tìm k .
- b) Tìm các phân phối biên duyên. X và Y có độc lập không?
- c) Tính $P(X > 1/2)$.

3,4,5, 7, 11, 13,19, 22 (94-98)