BÀI GIẢNG TOÁN 2

Nội dung gồm:

Bài 1. Mặt cong trong không gian

Bài 2. Đạo hàm riêng – Vi phân

Bài 3. Đạo hàm theo hướng

Bài 4. Đạo hàm hàm hợp và hàm ẩn

Bài 5. Cực trị

Bài 6. Tích phân bội hai

Bài 7.Tích phân bội ba

Bài 8.Tích phân đường

Bài 9.Tích phân mặt

Bài 1. Mặt cong trong không gian

1. Một số đường trong mặt phẳng 0xy

a. Đường thẳng: $ax + by + c = 0.$

b. Ellip: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

c. Hyperbol: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1.$

d. Parabol: $y = ax^2 + bx + c$ hay $x = ay^2 + by + c$

e. Đường tròn: $\left(x - a\right)^2 + \left(y - b\right)^2 = R^2.$

2. Mặt trụ

a. Định nghĩa

- Cho đường cong phẳng C và đường thẳng L cắt mặt phẳng chứa C.
- Mặt sinh ra bởi một đường thẳng dịch chuyển song song với L và tựa trên C đgl mặt trụ.
- Đường thẳng dịch chuyển đó đgl đường sinh của mặt trụ. Đường cong C đgl đường chuẩn.

b. Phương trình mặt trụ

- G/S đường chuẩn C trong $0xy$ là: $\mathrm{F}(x, y) = 0$ và đường sinh song song với trục 0z.
- Phương trình $\mathrm{F}(x, y) = 0$ trong 0xyz cũng là phương trình mặt trụ.
- Pt trong 0xyz khuyết 1biến biểu diễn mặt trụ có đường sinh song với trục ứng với biến bị khuyết.

c. Cách gọi tên

- Đường chuẩn C là ellip, parabol, hyperbol thì mặt trụ tương ứng là mặt trụ elliptic, mặt trụ parabolic và mặt trụ hyperbolic.
- Đường chuẩn C là đường thẳng thì mặt trụ là mặt phẳng.
- Đường chuẩn C là đường tròn thì mặt trụ là mặt trụ tròn xoay.

d. Cách vẽ mặt trụ

- Vẽ đường chuẩn C trong mp tọa độ ứng với các biến xuất hiện trong phương trình.
- Trên nửa không gian với bờ là mp chứa đường chuẩn, dựng 1 số đoạn thẳng bằng nhau, song song với L và tựa trên C.

- Nối các điểm thuộc đầu các đoạn thẳng này ta thu được một đường cong giống hệt C.

VD1. Vẽ các mặt trụ sau và gọi tên:

1. $9x^2 + 16y^2 = 144$ 2. $z = x^2$

3. Mặt tròn xoay

a. Định nghĩa

- Cho đường cong C và đường thẳng L cùng nằm trong một mặt phẳng.
- Quay đường cong C quanh L ta thu được mặt tròn xoay với trục L.
- Đường C đgl đường sinh của mặt tròn xoay.

b. Phương trình mặt tròn xoay

- G/s đường cong C trong $0yz$ là: $f(y,z) = 0$.
- Quay C quanh trục $0z$ thì mặt tròn xoay thu được có phương trình: $f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z\right) = 0$.
- Quay C quanh trục $0y$ thì mặt tròn xoay thu được có phương trình: $f\left(y, \pm\sqrt{x^2+z^2}\right) = 0$.

VD2. Viết và vẽ phương trình mặt tròn xoay tạo ra khi quay đường thẳng $z = 3y$ quanh trục $0z$.

VD3. Viết phương trình mặt tròn xoay tạo ra khi quay đường cong $y = e^{x^2}$ quanh trục $0x$.

4. Sáu mặt bậc hai thường gặp

- **Ellipsoid**: $\dfrac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{a}^2} + \dfrac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{b}^2} + \dfrac{\mathbf{z}^2}{\mathbf{c}^2} = \mathbf{1}$

  Giao với $0xy,\ 0yz,\ 0xz$ lần lượt là các ellip:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

NX: Khi $a = b = c$ thì ellipsoid là một mặt cầu.

- **Hyperboloid một tầng**: $\dfrac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{a}^2} + \dfrac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{b}^2} - \dfrac{\mathbf{z}^2}{\mathbf{c}^2} = \mathbf{1}$

  + Giao với $0yz, 0xz$ lần lượt là các hyperbol:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

  + Giao với mặt phẳng $z = k$ là ellip:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$$

- **Hyperboloid hai tầng**: $-\dfrac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{a}^2} - \dfrac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{b}^2} + \dfrac{\mathbf{z}^2}{\mathbf{c}^2} = \mathbf{1}$

+ Giao với mặt phẳng $(0yz),(0xz)$ lần lượt là các hyperbol có phương trình:

$$-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;\quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

+ Giao với mặt phẳng $z=k$ là ellip:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2}-1;|k|>c.$$

- **Mặt nón elliptic**: $\mathbf{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}}$

+ Giao với $(0yz),(0xz)$ lần lượt là các đường thẳng có pt: $z=\pm\frac{c}{b}y;\ z=\pm\frac{c}{a}x$

+ Giao với mặt phẳng $z=k$ là ellip:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2},\ k\neq 0.$$

- **Paraboloid elliptic**: $\mathbf{z=ax^2+by^2,(a,b>0)}$

+ Giao với $(0yz),(0xz)$ lần lượt là các parabol có phương trình: $z=by^2;\ z=ax^2$

+ Giao với mp $z=k$ là ellip: $ax^2+by^2=k$

- **Paraboloid hyperbolic** $\mathbf{z=by^2-ax^2\,(a,b>0)}$

+ Giao với $\left(0yz\right),\left(0xz\right)$ lần lượt là các parabol:

$$z = by^2;\ z = -ax^2$$

+ Giao với mp $z = k$ là hyperbol: $by^2 - ax^2 = k$

I. Hệ tọa độ trụ - Hệ tọa độ cầu

1. Hệ tọa độ trụ

a. Khái niệm

- Trong $(0xyz)$ cho điểm $P(x;y;z)$. Gọi P' là hình chiếu vuông góc của P trên $(0xy)$.
- Hệ tọa độ trụ là hệ tọa độ trong không gian mà vị trí 1 điểm được xác định bởi 3 yếu tố:
    - Khoảng cách r: $r = 0P'$
    - Góc θ là góc quét từ tia 0x đến tia 0P'

    $\theta > 0$ nếu quét theo chiều ngược kim đồng hồ

    $\theta < 0$ nếu quét theo chiều kim đồng hồ.

    - z: Cao độ của P.
- Bộ ba (r,θ,z) cũng xác định vị trí điểm P và ta nói điểm P có tọa độ trụ là (r,θ,z).

b. Liên hệ giữa tọa độ trụ và tọa độ vuông góc

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

VD4. Tìm tọa độ trụ của các điểm sau biết tọa độ vuông góc của chúng:

1. $P_1(2;2;-1)$ 2. $P_2\left(-3;\sqrt{3};2\right)$.

VD5. Tìm phương trình trong hệ tọa độ trụ của các phương trình sau:

1. $x^2+y^2+z^2=4$ 2. $z=x^2-y^2$

2. Hệ tọa độ cầu

a. Khái niệm

- Trong $(0xyz)$ cho điểm $P(x;y;z)$. Gọi P' là hình chiếu vuông góc của P trên $(0xy)$.
- Hệ tọa độ cầu là hệ tọa độ trong không gian mà vị trí 1 điểm được xác định bởi 3 yếu tố:

+ Khoảng cách ρ: $\rho=0P$.

+ Góc ϕ: góc quét từ tia 0z đến tia 0P, $0\le\phi\le\pi$.

+ Góc θ: xác định như góc θ trong tọa độ trụ.

- Bộ ba (ρ,ϕ,θ) xác định vị trí điểm P và ta nói điểm P có tọa độ trụ là (ρ,ϕ,θ).

b. Liên hệ giữa tọa độ trụ và tọa độ vuông góc

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ \tan\phi = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

VD6. Tìm tọa độ cầu của các điểm sau biết tọa độ vuông góc của chúng:

1. $P_1\left(1;1;\sqrt{6}\right)$ 2. $P_2\left(1;-1;\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$

VD7. Tìm phương trình trong hệ tọa độ cầu của phương trình sau:

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 2. $z = x^2 - y^2$

Bài 2. Đạo hàm riêng – Vi phân

I. Hàm số nhiều biến

1. Khái niệm

- Cho điểm $(x, y) \in D$. Quy tắc f cho t.ư mỗi cặp $(x, y) \in D$, phần tử duy nhất $z \in R$ đgl hàm của hai biến x và y, ký hiệu $z = f(x, y)$
- Miền D gọi là miền xác định của hàm số.
- Tương tự ta cũng có khái niệm hàm n biến.

2. Miền xác định

MXĐ của $z = f(x, y)$ là tập tất cả các điểm $P(x; y)$ trong $(0xy)$ để hàm có nghĩa.

VD1. Tìm và vẽ miền xác định các hàm số sau:

1. $\arcsin \frac{x}{2} + \ln y$
2. $z = \sqrt{y - x^2} - \sqrt{x - y}$
3. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$
4. $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$

3. Tính liên tục

a. Định nghĩa

Hàm số $f(x; y)$ đgl liên tục tại điểm (x_0, y_0) thuộc miền xác định của nó nếu:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y) = f(x_0;y_0)$$

VD2. Xét tính liên tục của hàm số sau tại $(0;0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2xy}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

b. Định lý: Các hàm số sơ cấp liên tục trên miền xác định của nó.

II. Đạo hàm riêng

1. Khái niệm

Cho hàm 2 biến $z = f(x;y)$.

- Giữ cố định y và cho x biến thiên thì tốc độ biến thiên của z theo x xác định bởi:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

Giới hạn này tồn tại hữu hạn đgl đạo hàm riêng cấp 1 của hàm z theo biến x, ký hiệu:

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ z_x,\ f_x,\ f_x(x,y).$$

- Tương tự, nếu cố định x và cho y biến thiên thì đạo hàm riêng của hàm z theo biến y là:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Các ký hiệu dùng để chỉ đạo hàm riêng của hàm $z = f(x;y)$ theo biến y:

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ z_y,\ f_y,\ f_y(x,y).$$

NX: Tính đạo hàm riêng của hàm nhiều biến theo 1 biến thực chất là tính đạo hàm của hàm 1 biến theo biến đó khi xem các biến còn lại là hằng số.

VD3. Tính đạo hàm riêng của các hàm số sau:

1. $z = \dfrac{2y^2}{x+y}$
2. $z = \arctan\dfrac{x}{y}$
3. $z = y.e^{\frac{x}{y}}$
4. $u = xyz + \dfrac{x}{yz}$

2. Đạo hàm riêng cấp cao

- Xét hàm $z = f(x;y)$. Đạo hàm riêng cấp hai là đạo hàm riêng của đạo hàm riêng cấp 1.

- Các đạo hàm riêng cấp hai theo biến x:

  - $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$
  - $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}$$

- Các đạo hàm riêng cấp hai theo biến y:

  - $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$
  - $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

VD5. Tính các đạo hàm riêng cấp hai các hàm số:

1. $f(x,y) = e^x \sin y + x^3$ 2. $z = \arctan\dfrac{x}{y}$

Định lý Schwarz: Nếu hàm $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp hai hỗn hợp liên tục trong lân cận của điểm (x, y) thì tại điểm đó $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

III. Vi phân

1. Vi phân toàn phần

a. Khái niệm

- Cho $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trong một lân cận của điểm $(x; y)$.
- Ta nói $z = f(x, y)$ khả vi tại $(x; y)$ và vi phân toàn phần hay vi phân cấp một của nó tại điểm $(x; y)$ xác định bởi:

$$dz = f_x(x; y)dx + f_y(x; y)dy$$

VD5. Tính vi phân toàn phần của các hàm số sau:

1. $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$ 2. $z = \arctan\dfrac{y}{x}$

b. Tính chất

1. $d(f + g) = df + dg$ 3. $d(fg) = fdg + gdf$

2. $d\left(\alpha f\right)=\alpha df$ 4. $d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{gdf-fdg}{g^2},\ g\neq 0$

2. Vi phân cấp cao

Xét hàm $z=f\left(x,y\right)$ có các đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục.

- Vi phân cấp hai của $z=f\left(x,y\right)$ là vi phân của vi phân cấp 1, ký hiệu d^2z và

$$d^2z=z_{xx}dx^2+2z_{xy}dxdy+z_{yy}dy^2$$

- Vi phân cấp n của hàm $z=f\left(x,y\right)$ là vi phân của vi phân cấp n – 1, nghĩa là: $d^nz=d\left(d^{n-1}z\right)$

VD6. Tính vi phân cấp hai của hàm số:

$z=x^3+y^3-3xy\left(x-y\right)$ tại điểm $A(1;1)$.

Bài 3. Mặt phẳng tiếp xúc - Gradient – Đạo hàm theo hướng

I. Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong

1. Định nghĩa

- Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong (S) tại điểm P là mặt phẳng chứa tất cả các tiếp tuyến với mọi đường cong thuộc (S) tại điểm P.
- Pháp tuyến với mặt cong (S) tại điểm P là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại P.

2. Phương trình mặt phẳng tiếp xúc

Xét mặt (S): $z = f(x,y)$ và $P(x_0, y_0, z_0) \in (S)$.

- Mặt phẳng $y = y_0$ giao với mặt cong (S) theo đường cong $(C_1): z = f(x, y_0)$.
- Véc tơ chỉ phương của tiếp tuyến với đường cong (C_1) tại điểm P là:

$$\overrightarrow{u_1} = 1.\vec{i} + 0.\vec{j} + f_x(x_0, y_0)\vec{k}$$

- Mặt phẳng $x = x_0$ giao với mặt cong (S) theo đường cong $(C_2): z = f(x_0, y)$.
- Véc tơ chỉ phương của tiếp tuyến với đường cong (C_2) tại điểm P là:

$$\overrightarrow{u_2} = 0.\vec{i} + 1.\vec{j} + f_y(x_0, y_0)\vec{k}$$

- Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong (S) tại điểm P là:

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{u_2}; \overrightarrow{u_1}\right] = f_x(x_0, y_0)\vec{i} + f_y(x_0, y_0)\vec{j} - \vec{k}$$

- Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong $(S): z = f(x, y)$ tại điểm $P(x_0, y_0, z_0)$ là:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

VD1. Viết phương trình tiếp diện của mặt cong $z = f(x, y) = 2xy^3 - 5x^2$ tại điểm $(3;2;3)$.

Chú ý: Nếu mặt cong (S) có phương trình: $F(x, y, z) = c$ và điểm $P(x_0, y_0, z_0) \in (S)$.

- G/s $F(x, y, z) = c$ xác định hàm ẩn $z = f(x, y)$
- Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong (S) : $F(x, y, z) = c$ tại $P(x_0, y_0, z_0)$ là:

$$z - z_0 = -\frac{F_x(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}(x - x_0) - \frac{F_y(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}(y - y_0)$$

$$\Leftrightarrow F_x(P)(x - x_0) + F_y(P)(y - y_0) + F_z(P)(z - z_0) = 0$$

VD2. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong $z^2 + e^{xz}\sin y = 0$ tại điểm $P\left(0; \frac{3\pi}{2}; 1\right)$.

I. Mặt mức – Đường mức

1. Đường mức

- Một đường cong đgl một đường mức của hàm $z = f(x, y)$ nếu nó nằm trong MXĐ của hàm số và trên đó hàm nhận giá trị không đổi $f(x, y) = c$

- Tập hợp các đường mức đgl bản đồ trắc địa.

VD. Hàm số $z = x^2 + y^2$ có đường mức là các đường tròn đồng tâm $x^2 + y^2 = c$.

2. Mặt mức

Một mặt cong đgl một mặt mức của hàm số $\mathrm{w} = f(x, y, z)$ nếu nó nằm trong MXĐ của hàm và ở đó hàm nhận giá trị không đổi $f(x, y, z) = c$

VD. Hàm số $\mathrm{w} = x - 2y + 3z$ có mặt mức là các mặt phẳng song song $x - 2y + 3z = c$.

II. Đạo hàm theo hướng

1. Gradient

- Gradient của hàm $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ là 1 véc tơ, ký hiệu grad f hoặc ∇f được xác định bởi:

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2}; ...; \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

VD. Tìm gradient của hàm số sau tại $A(0;1;1)$

$$f(x, y, z) = xy^3 - z^2 \cos x + xyz$$

2. Đạo hàm theo hướng

2.1. Đặt vấn đề

- Tốc độ biến thiên của $f(x, y, z)$ theo hướng trục 0x, 0y, 0z xác định bởi: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$.
- Tốc độ biến thiên của $f(x, y, z)$ không theo hướng các trục tọa độ $\Rightarrow$ đạo hàm theo hướng.

2.2. Khái niệm

- Cho hàm $f(x,y,z)$, điểm $P(x_0,y_0,z_0)$, và một hướng xác định bởi véc tơ đơn vị $\vec{u}$.
- Di chuyển P theo hướng $\vec{u}$ đến một điểm rất gần $Q(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$.
- Hàm f sẽ thay đổi một lượng là:

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0,y_0,z_0)$$

- Gọi $\Delta s = PQ$ là khoảng cách giữa P và Q
- Tỉ số $\dfrac{\Delta f}{\Delta s}$ là tốc độ biến thiên trung bình của hàm f về mặt khoảng cách trên đoạn PQ.
- Ta gọi giới hạn $\dfrac{df}{ds} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta s}$ là đạo hàm của hàm f tại điểm P theo hướng $\vec{u}$.

3. Công thức tính đạo hàm theo hướng

Định lý: Cho véc tơ đơn vị $\vec{u} = (a,b,c)$ và hàm $f(x,y,z)$ có các đạo hàm riêng liên tục tại điểm $P(x_0,y_0,z_0)$. Khi đó hàm f có đạo hàm tại điểm P theo hướng $\vec{u}$ và

$$\frac{df}{ds} = gradf\left(P\right).u$$

- Phương trình đường thẳng đi qua điểm P theo hướng véc tơ $\vec{u}$ là:

$$\begin{cases} x = x_0 + as \\ y = y_0 + bs \\ z = z_0 + cs \end{cases}$$

- Khi đó ta có hàm hợp $f\left[x(s), y(s), z(s)\right]$.
- Do đó đạo hàm của hàm f tại điểm P theo hướng $\vec{u}$ sẽ là:

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{ds} = a.\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} + c.\frac{\partial f}{\partial z}$$

Hay $\dfrac{df}{ds} = \text{grad}\, f.\vec{u}$

VD. Cho hàm $f\left(x, y, z\right) = x^2 - y + z^2$. Tìm đạo hàm của hàm f tại điểm $\text{P}(1, 2, 1)$ theo hướng $\vec{v} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

4.Liên hệ giữa đạo hàm theo hướng vàgradient

Nhận xét:

$$\frac{df}{ds} = \text{grad } f.\vec{u} = |gradf|.|\vec{u}|\cos\theta = |gradf|.\cos\theta$$

trong đó θ là góc giữa grad f và $\vec{u}$.

Khi đó: $\text{Max}\dfrac{df}{ds} = |gradf|$ khi $\cos\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = 0.$

$\text{Min}\dfrac{df}{ds} = -|gradf|$ khi $\cos\theta = -1 \Leftrightarrow \theta = \pi.$

- TC1: Hướng của véc tơ grad f trùng với hướng hàm f tăng nhanh nhất, hướng của $-$grad f trùng với hướng hàm f giảm nhanh nhất.
- TC2: Độ dài của véc tơ grad f là tốc độ tăng lớn nhất của hàm f.
- TC3: Gradient của hàm $f(x,y,z)$ tại điểm P là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng tiếp xúc với mặt $f(x,y,z) = c$ tại P.

VD. Tìm phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt $xy^2z^3 = 12$ tại điểm $P(3,-2,1)$.

VD. Viết phương trình tiếp diện mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong $z = f\left(x, y\right) = 2xy^3 - 5x^2$ tại điểm $\left(3; 2; 3\right)$.