Bài 4: ĐẶC TRƯNG CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN MỘT CHIỀU

Vũ Mạnh Tới

Bộ môn Toán-Trường Đại học Thủy lợi

Ngày 26 tháng 4 năm 2024

4.1.1. Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên X

Định nghĩa. Kỳ vọng của BNN X là giá trị trung bình của X, tính theo độ tập trung xác suất, ký hiệu $E(X)$ hoặc μ.

Cách tính kỳ vọng

Cho X là một BNN với phân phối xác suất $f(x)$.

- **Nếu X là BNN rời rạc thì**

$$\mu = E(X) = \sum_{x \in X} x f(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \cdots + x_n f(x_n) + \cdots$$

- **Nếu X là BNN liên tục thì**

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Ví dụ 1: Tìm kỳ vọng của BNN rời rạc X có phân phối xác suất

X	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

Ví dụ 2: Tuổi thọ tính theo giờ của một thiết bị điện tử là một BNN X có hàm mật độ xác suất là

$$f(x) = \begin{cases} \frac{20000}{x^3}, & x > 100 \\ 0, & x \le 100 \end{cases}$$

Hãy tính tuổi thọ trung bình của thiết bị điện tử loại này.

Ví dụ 3: Thời gian (đơn vị đo: 100 giờ) mà một gia đình cho chạy một chiếc máy hút bụi trong một năm là BNN liên tục X có hàm mật độ như sau:

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & 0 < x < 1 \\ 2 - x\,, & 1 \le x < 2 \\ 0, & x \notin (0,2) \end{cases}$$

Hỏi rằng trung bình một năm, một gia đình chạy máy hút bụi bao nhiêu giờ.

Ví dụ 4. Một người nghiện chơi đề. Mỗi ngày người này chỉ thích đánh duy nhất một con 86. Mỗi lần đánh với số tiền 10000 (đồng). Hỏi rằng anh ta hy vọng mỗi ngày kiếm được bao nhiêu?

4.1.2. Kỳ vọng của hàm của BNN

Cho X là BNN với hàm phân phối xác suất là $f(x)$. Kỳ vọng của BNN $g(X)$ là

$$\mu_{g(X)} = E[g(X)] = \sum_{x} g(x)f(x) \text{ nếu } X \text{ là BNN rời rạc}$$

$$\mu_{g(X)} = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx \text{ nếu } X \text{ là liên tục}$$

Tính chất của kỳ vọng

- $E[g(X) \pm h(X)] = E[g(X)] \pm E[h(X)]$.
- $E(aX + b) = aE(X) + b, \ \forall a, b \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 1: Cho BNN rời rạc có phân phối xác suất

X	-1	2	3	5
f(x)	0.2	0.3	0.4	0.1

Hãy tìm kỳ vọng của BNN $Y = 3X^2 + 1$.

Ví dụ 2: Cho X là BNN có hàm mật độ là

$$f(x) = \begin{cases} k.x^2, & x \in (-1; 2), \\ 0, & x \notin (-1; 2) \end{cases}.$$

Hãy tìm kỳ vọng của $g(X) = 4X + 3$.

4.2. Phương sai
4.2.1. Phương sai của BNN X

Định nghĩa. Cho X là BNN với phân phối xác suất $f(x)$ và kỳ vọng μ. Phương sai của X (kí hiệu $D(X)$ hoặc σ_X^2) và

$$D(X) = E[(X-\mu)^2] = \sum_x (x-\mu)^2 f(x) \text{ nếu X là rời rạc,}$$

và

$$D(X) = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx \text{ nếu X liên tục.}$$

Công thức tính phương sai thường dùng

$$D(X) = \sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Độ lệch chuẩn của BNN X là $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{D(X)}$

Ví dụ 1: Cho BNN X có hàm xác suất $f(x)$ cho bởi

X	0	1	2	3
$f(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Tính phương sai của BNN X.

Ví dụ 2: Nhu cầu hàng tuần đối với Pepsi, theo đơn vị 1000 lít, tại một chuỗi các cửa hàng ở một địa phương nào đó, là một BNN liên tục X với hàm mật độ xác suất như sau

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x \in (1;2) \\ 0, & x \notin (1;2) \end{cases}$$

Hãy tìm phương sai và độ lệch chuẩn của X.

Cho X là BNN với phân phối xác suất $f(x)$. Phương sai của $g(X)$ là

$$D(g(X)) = E[g(X) - \mu_{g(X)}]^2 = \sum_x [g(x) - \mu_{g(X)}]^2 f(x)$$

nếu X là BNN rời rạc, và

$$D(g(X)) = E[g(X) - \mu_{g(X)}]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [g(x) - \mu_{g(X)}]^2 f(x) dx$$

nếu X là BNN liên tục.

Công thức thường dùng:

$$D[g(X)] = \sigma^2_{g(X)} = E[g(X)]^2 - (E[g(X)])^2$$

Ví dụ 1: Cho X là BNN có hàm mật độ là

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & x \in (-1;2), \\ 0, & x \notin (-1;2) \end{cases}.$$

Hãy tính phương sai của BNN $g(X) = 4X + 3$.

Ví dụ 2: Cho BNN X có hàm phân phối tích lũy

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-2x}, & x > 0 \end{cases}$$

Tính kỳ vọng và phương sai của BNN $g(X) = e^{\frac{2X}{3}}$.

Bài tập về nhà

5,7, 8, 11,12,15,19,22(107-109);
2,6(117); 3(127); 4(130).