Bài 11: KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT VỀ TRUNG BÌNH

Vũ Mạnh Tới

Bộ môn Toán-Trường Đại học Thủy lợi

Ngày 28 tháng 5 năm 2024

11.1. Các khái niệm chung
11.1.1. Giả thuyết thống kê

Định nghĩa 1:

- Một giả thuyết thống kê là một sự xác nhận hay phỏng đoán liên quan tới một hay nhiều tổng thể.
- Thủ tục mà dựa vào đó và những thông tin của mẫu để đưa ra bằng chứng chấp nhận hay bác bỏ giả thuyết được gọi là kiểm định giả thuyết.

Định nghĩa 2:

Khi ta bác bỏ giả thuyết đồng nghĩa với việc ta chấp nhận một khẳng định khác, ta gọi nó là đối thuyết.
Kí hiệu giả thuyết là H_0, đối thuyết là H_1.

Chỉ tiêu kiểm định, miền bác bỏ, miền chấp nhận

Xét ví dụ: Ta khẳng định chiều cao trung bình của người trưởng thành ở Việt Nam là 165 (cm), khi đó

Giả thuyết $H_0 : \mu = 165$

Đối thuyết $H_1 : \mu \neq 165.$

- Lấy ngẫu nhiên 50 người cho giá trị trung bình mẫu $\overline{x}$ của thống kê $\overline{X}$.
  +) Nếu $\overline{X}$ nhận giá trị $\overline{x}$ gần 165 thì đó là bằng chứng để chấp nhận H_0, bác bỏ H_1.
  +) Nếu $\overline{X}$ nhận giá trị $\overline{x}$ xa 165 thì nên bác bỏ H_0, chấp nhận H_1.
  Thống kê $\overline{X}$ được gọi là một chỉ tiêu kiểm định.
- Nói chung, chỉ tiêu kiểm định là một thống kê mẫu.

- Tập giá trị của chỉ tiêu kiểm định được chia thành hai phần: miền bác bỏ và miền chấp nhận.
  Chẳng hạn, nếu chọn $160 < \overline{x} < 170$ thì ta chấp nhận giả thuyết, còn ngược lại thì bác bỏ giả thuyết.
  Ta có: +) miền chấp nhận giả thuyết là $(160; 170)$,
  +) miền bác bỏ là $(-\infty, 160] \cup [170, +\infty)$,
  +) các giá trị tới hạn là 160 và 170.
- Miền bác bỏ D (miền tiêu chuẩn) của bài toán kiểm định là miền mà nếu giá trị chỉ tiêu kiểm định thuộc vào đó thì ta bác bỏ H_0, chấp nhận H_1.

Mức ý nghĩa

Khi đưa ra quyết định chấp nhận hay bác bỏ giả thuyết ta thường mắc một trong hai sai lầm:

- Bác bỏ một giả thuyết đúng thì mắc sai lầm loại I.
- Chấp nhận một giả thuyết sai thì mắc sai lầm loại II.

Đặt $\alpha = P(\text{Sai lầm loại I})$ (gọi là mức ý nghĩa) thường rất nhỏ (khoảng từ 0,01 đến 0,1). $P(\text{Sai lầm loại II}) = \beta$.

- Bài toán sẽ là lý tưởng nếu α, β đều rất nhỏ, nhưng thực tế thì không thể đồng thời làm giảm cả hai giá trị đó, việc giảm giá trị này lại làm tăng giá trị còn lại.
- Nhưng do sai lầm loại I là không đáng lo ngại nên thường ta chấp nhận mắc sai lầm loại I với xác suất α cố định, từ đó tìm cách làm giảm xác suất mắc sai lầm loại II.

11.1.3. Các bước của bài toán kiểm định giả thuyết

+) Gọi tên yếu tố cần kiểm định (ví dụ: $\mu; p; \ldots$)
+) Đưa ra số liệu:
+) Khẳng định loại bài toán kiểm định.

1. Mô tả giả thuyết H_0, chọn đối thuyết H_1 phù hợp.
2. Chọn chỉ tiêu kiểm định. Từ đó tính toán giá trị chỉ tiêu kiểm định thông qua số liệu mẫu.
3. Chọn mức ý nghĩa $\Longrightarrow$ tìm miền bác bỏ.
4. Kiểm tra xem chỉ tiêu kiểm định nằm trong miền chấp nhận hay bác bỏ.
5. Từ đó quyết định chấp nhận hay bác bỏ giả thuyết.

11.1.4. Kiểm định một phía và kiểm định hai phía

+) Kiểm định một phía khi đối thuyết có dạng:

$$H_1 : \theta > \theta_0 \text{ hoặc } H_1 : \theta < \theta_0$$

-Nếu $H_1 : \theta > \theta_0$ thì miền bác bỏ giả thuyết nằm ở đuôi phải của phân phối xác suất của chỉ tiêu kiểm định.
-Nếu $H_1 : \theta < \theta_0$ thì miền bác bỏ giả thuyết nằm ở đuôi bên trái của phân phối xác suất của chỉ tiêu kiểm định.
+) Kiểm định hai phía nếu: $H_1 : \theta \neq \theta_0$.
Do $\theta \neq \theta_0$ tức là $\theta > \theta_0$ hoặc $\theta < \theta_0$ nên miền bác bỏ giả thuyết gồm hai phần nằm ở hai phía của phân phối xác suất của chỉ tiêu kiểm định.

+) Giả thuyết H_0 luôn có dạng $H_0: \theta = \theta_0$.

+) Xác định yêu cầu cần kiểm định.

- Nếu yêu cầu, nhận định đề cập tới là lớn hơn, tốt hơn $\Longrightarrow H_1: \theta > \theta_0$; nhỏ hơn, ít hơn $\Longrightarrow H_1: \theta < \theta_0$.
- Nếu yêu cầu, nhận định đề cập tới dấu kép: cùng lắm, không quá $\Longrightarrow H_1: \theta > \theta_0$; ít nhất, lớn hơn hoặc bằng $\Longrightarrow H_1: \theta < \theta_0$.
- Nếu yêu cầu, nhận định đề cập đến như nhau hoặc khác nhau thì $H_1: \theta \neq \theta_0$.

Ví dụ 1: Trong kiểm định một loại thuốc mới, ta muốn đưa ra một chứng cớ rằng hơn 40% bệnh nhân được chữa khỏi. Khi đó $H_0 : p = 0,4$ và $H_1 : p > 0,4$.
Ví dụ 2: Một hãng sản xuất loại ngũ cốc khẳng định lượng chất béo trung bình trong ngũ cốc có nhiều nhất 1,5 miligam. Phát biểu giả thuyết và đối thuyết.
Ví dụ 3: Một đại lý nhà đất khẳng định rằng 60% số nhà riêng đang được xây dựng ngày nay là có 3 phòng ngủ. Phát biểu giả thuyết và đối thuyết của kiểm định.

11.2. Kiểm định về một trung bình
11.2.1. Kiểm định về một trung bình, khi σ đã biết

+) Gọi μ là trung bình của...
+) Số liệu: $n =; \overline{x} =; \sigma =$
+) Đây là bài toán kiểm định cho μ khi σ đã biết.

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$
2. Chỉ tiêu kiểm định là $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$. Tính $z = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$.
3. Chọn mức ý nghĩa α. Tra bảng A.3 ta được giá trị tới hạn $z_{th} = z_{\alpha/2}$. Miền bác bỏ giả thuyết: $D = (-\infty, -z_{th}] \cup [z_{th}, +\infty)$
4. Kiểm tra: $z \in D$ hay $z \notin D$?
5. Kết luận bài toán: Với mức ý nghĩa đó, ta chấp nhận hay bác bỏ giả thuyết

Chú ý:

Ta đã sử dụng định lí giới hạn trung tâm nên nếu tổng thể có phân phối chuẩn thì cỡ mẫu là bao nhiêu thì không quan trọng, nhưng tổng thể không có phân phối chuẩn thì cỡ mẫu phải đủ lớn.

Chú ý: Kiểm định một phía, với

$H_1 : \mu > \mu_0$ thì miền bác bỏ: $D = [z_{th}, +\infty)$;
$H_1 : \mu < \mu_0$ thì miền bác bỏ: $D = (-\infty, -z_{th}]$;
với $z_{th} = z_\alpha$ tra A_3 sao cho $P(Z < z_\alpha) = 1 - \alpha$.

Ví dụ: Một nhà sản xuất khẳng định rằng khối lượng trung bình của dây câu có thể chịu là 8 kg, với độ lệch chuẩn là $0,5$ kg. Để kiểm định đúng sai thì 50 dây ngẫu nhiên được kiểm tra và khối lượng trung bình dây có thể chịu là $7,8$ kg. Hãy kiểm định khẳng định của nhà sản xuất với mức ý nghĩa 0,01.

11.2.2. Kiểm định về một trung bình, khi σ chưa biết, cỡ mẫu nhỏ ($n < 30$)

+) Gọi μ là trung bình của...
+) Số liệu: $n =; \overline{x} =; s =$
+) Đây là bài toán kiểm định cho μ khi σ chưa biết, cỡ mẫu nhỏ.

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$
2. Chỉ tiêu kiểm định là $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$. Tính $t = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$
3. Chọn mức ý nghĩa α, tra bảng A_4 với bậc $v = n - 1$ được $t_{th} = t_{\alpha/2}$ ta xác định được miền bác bỏ
$$D = (-\infty, -t_{th}] \cup [t_{th}, +\infty)$$
4. Kiểm tra: $t \in D$ hay $t \notin D$?
5. Kết luận bài toán: Với mức ý nghĩa đó, ta chấp nhận hay bác bỏ giả thuyết

Chú ý: tổng thể phải có phân phối xấp xỉ chuẩn hoặc phân phối chuẩn.

Chú ý: Kiểm định một phía, với

$H_1 : \mu > \mu_0$ thì miền bác bỏ: $D = [t_{th}, +\infty)$;
$H_1 : \mu < \mu_0$ thì miền bác bỏ: $D = (-\infty, -t_{th}]$
với $t_{th} = t_\alpha$ tra A_4 thỏa mãn $P(T > t_\alpha) = \alpha$ với bậc $v = n - 1$.

Ví dụ: Một báo cáo khẳng định mỗi máy hút bụi tiêu thụ là 46 kWh/1 năm. Từ một mẫu gồm 12 gia đình được nghiên cứu, cho thấy máy hút bụi tiêu thụ trung bình 42 kWh mỗi năm với độ lệch chuẩn 11,9 kWh. Với mức ý nghĩa 0,05, khẳng định đó có cơ sở không. Giả sử tổng thể đang xét có phân phối chuẩn.

11.2.3. Kiểm định về một trung bình, khi σ chưa biết, cỡ mẫu lớn ($n \geq 30$)

Thay việc tra A_4, ta tra bảng A_3 được $z_{th} = z_{\alpha/2}$ (hai phía), còn $z_{th} = z_{\alpha}$ trong trường hợp một phía.

Ví dụ: Kiểm tra một lượng trứng gà tại một cơ sở ấp trứng tại Bắc Ninh cho kết quả về khối lượng trứng như sau:

Khối lượng (gam)	155	160	165	170	180	185
Số quả	10	15	35	20	14	6

Từ đó có ý kiến cho rằng, trọng lượng trung bình trứng gà của cơ sở đó đạt cùng lắm 175 gam. Ý kiến đó có chấp nhận được không với mức ý nghĩa 0.04.

Bài toán:

- Từ tổng thể 1 (với μ_1, σ_1) lấy ra mẫu cỡ n_1 cho giá trị mẫu $\overline{x}_1, s_1$;
- Từ tổng thể 2 (với μ_2, σ_2) lấy ra mẫu cỡ n_2 cho giá trị mẫu $\overline{x}_2, s_2$.
- Một nhận định về $\mu_1 - \mu_2$. Với mức ý nghĩa α, hãy kiểm định cho $\mu_1 - \mu_2$.
- Tùy thuộc: σ_1, σ_2 đã biết hay chưa biết.

11.3.1. Kiểm định về hiệu hai trung bình, khi σ_1^2, σ_2^2 đã biết

+) Gọi $\mu_1; \mu_2$ lần lượt là trung bình của...

+) Số liệu: $n_1 =; \overline{x}_1 =; \sigma_1 =;$ $n_2 =; \overline{x}_2 =; \sigma_2 =;$

+) Đây là bài toán kiểm định cho hiệu hai giá trị trung bình, $\sigma_1^2; \sigma_2^2$ đã biết.

1. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0;$ $\quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq d_0$
2. Chỉ tiêu kiểm định là $Z = \dfrac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - d_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \Longrightarrow z = \dfrac{\overline{x_1} - \overline{x_2} - d_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$
3. Từ mức ý nghĩa α. Ta suy ra miền bác bỏ $D = (-\infty, -z_{th}] \cup [z_{th}, +\infty)$ với $z_{th} = z_{\alpha/2}$ tra bảng A_3 thỏa mãn $P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$.
4. Kiểm tra: $z \in D$ hay $z \notin D$
5. Kết luận bài toán: Với mức ý nghĩa đó, ta chấp nhận hay bác bỏ giả thuyết

Chú ý: Ta đã sử dụng định lí giới hạn trung tâm nên

- Hai tổng thể phải có phân phối xấp xỉ chuẩn hoặc phân phối chuẩn khi $n_1 < 30$ hoặc $n_2 < 30$.
- Nếu $n_1 \geq 30, n_2 \geq 30$ thì hai tổng thể bất kì.

Chú ý: Kiểm định một phía, với

$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > d_0$ thì miền bác bỏ: $D = [z_{th}, +\infty)$;
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < d_0$ thì miền bác bỏ: $D = (-\infty, -z_{th}]$;
với $z_{th} = z_\alpha$ tra A_3 thỏa mãn $P(Z < z_\alpha) = 1 - \alpha$.

Ví dụ: Một mẫu ngẫu nhiên $n_1 = 25$ lấy từ tổng thể có phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn là $\sigma_1 = 5$, cho trung bình $\bar{x}_1 = 80$. Một mẫu ngẫu nhiên thứ hai $n_2 = 6$ lấy từ tổng thể có phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn là $\sigma_2 = 3$, cho trung bình $\bar{x}_2 = 75$. Kiểm định giả thuyết rằng không có sự sai khác về chất lượng giữa hai tổng thể, với mức ý nghĩa 0,05.

11.3.2. Kiểm định về hiệu hai giá trị trung bình, khi $\sigma_1; \sigma_2$ chưa biết, mẫu nhỏ, nhưng $\sigma_1 = \sigma_2$

+) Gọi $\mu_1; \mu_2$ lần lượt là trung bình của...

+) Từ giả thiết, ta có số liệu: $n_1 =; \overline{x}_1 =; s_1 =; \quad n_2 =; \overline{x}_2 =; s_2 =;$

+) Đây là bài toán KĐ cho $\mu_1 - \mu_2$, khi $\sigma_1; \sigma_2$ chưa biết, mẫu nhỏ, nhưng $\sigma_1 = \sigma_2$.

1. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0; \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq d_0$
2. Chỉ tiêu kiểm định: $T = \dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - d_0}{s_p\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}$ với
$$s_p = \sqrt{\frac{s_1^2(n_1-1) + s_2^2(n_2-1)}{n_1+n_2-2}} \Longrightarrow t = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - d_0}{s_p\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}$$
3. Với mức ý nghĩa α. Miền BB: $D = (-\infty, -t_{th}] \cup [t_{th}, +\infty)$ với $t_{th} = t_{\alpha/2}$ được tra bảng A_4 thỏa mãn $P(T > t_{\alpha/2}) = \alpha/2$ với $v = n_1 + n_2 - 2$.
4. Kiểm tra: $t \in D$ hay $t \notin D$?
5. Kết luận: Với mức ý nghĩa đó, ta chấp nhận hay bác bỏ H_0.

Chú ý: Hai tổng thể phải có phân phối xấp xỉ chuẩn hoặc phân phối chuẩn.

Chú ý: Kiểm định một phía, với

$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > d_0$ thì miền bác bỏ: $D = [t_{th}, +\infty)$;
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < d_0$ thì miền bác bỏ: $D = (-\infty, -t_{th}]$
với $t_{th} = t_\alpha$ tra A_4 thỏa mãn $P(T > t_\alpha) = \alpha$ với $v = n_1 + n_2 - 2$.

Ví dụ: Một thí nghiệm được thực hiện nhằm so sánh mức độ mài mòn của hai loại kim loại khác nhau. Kiểm tra 12 miếng kim loại I và 10 miếng kim loại II. Mẫu ứng với kim loại I có trung bình mài mòn là 84 đơn vị, với độ lệch chuẩn mẫu là 4; mẫu ứng với kim loại II có trung bình là 81 và độ lệch chuẩn mẫu là 5. Có thể kết luận, với mức ý nghĩa 0,05, rằng mức độ mài mòn của kim loại I là hơn kim loại II được không? Giả sử các tổng thể xấp xỉ chuẩn với phương sai bằng nhau.

11.3.3. Kiểm định về hiệu hai giá trị trung bình, khi $\sigma_1; \sigma_2$ chưa biết, mẫu lớn ($n_1 \geq 30$ và $n_2 \geq 30$)

+) Gọi $\mu_1; \mu_2$ lần lượt là trung bình của...
+) Số liệu: $n_1 =; \overline{x}_1 =; s_1 =;\ n_2 =; \overline{x}_2 =; s_2 =;$
+) Đây là bài toán KĐ cho $\mu_1 - \mu_2$, khi $\sigma_1; \sigma_2$ chưa biết, mẫu lớn.

1. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0; \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq d_0$
2. Chỉ tiêu kiểm định: $Z = \dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - d_0}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}} \Longrightarrow z = \dfrac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - d_0}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$
3. Với mức ý nghĩa α. Miền BB: $D = (-\infty, -z_{th}] \cup [z_{th}, +\infty)$ với $z_{th} = z_{\alpha/2}$ được tra A_3 thỏa mãn $P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$.
4. Kiểm tra: $z \in D$ hay $z \notin D$?
5. Kết luận: Với mức ý nghĩa đó, ta chấp nhận hay bác bỏ giả thuyết.

Chú ý: Nếu một phía với $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > d_0$ thì $D = [z_{th}; +\infty)$

Nếu $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < d_0$ thì $D = (-\infty; -z_{th}]$ với $z_{th} = z_\alpha$ tra A3.

Ví dụ tổng hợp kiểm định trung bình

Ví dụ 1: Một mẫu gồm 90 người làm việc trong công ty A, thấy mức lương trung bình là 10500 USD/năm và độ lệch chuẩn là 200 USD/năm. Trong khi đó với mẫu 80 người làm việc ở công ty B, thấy mức lương trung bình là 11200 USD/năm và phương sai là 42000 USD/năm. Từ đó có ý kiến cho rằng mức lương trung bình của người làm ở công ty B là lớn hơn 800 USD/năm so với công ty A. Với mức ý nghĩa 0,05, hãy kiểm định xem tuyên bố đó có chấp nhận được không?

Ví dụ 2: Một mẫu ngẫu nhiên gồm 100 giấy báo tử ở Mỹ cho thấy tuổi thọ trung bình là $71,8$ năm. Giả sử độ lệch chuẩn tổng thể là $8,9$ năm. Với mức ý nghĩa $0,05$, có thể cho rằng tuổi thọ trung bình hiện nay là hơn 70 năm không?

Ví dụ 3: Một thí nghiệm được thực hiện nhằm so sánh mức độ mài mòn của hai loại kim loại khác nhau. Kiểm tra 25 miếng kim loại I và 20 miếng kim loại II. Mẫu ứng với kim loại I có trung bình mài mòn là 84 đơn vị, với độ lệch chuẩn mẫu là 4; mẫu ứng với kim loại II có trung bình là 81 và độ lệch chuẩn mẫu là 5. Có thể kết luận, với mức ý nghĩa 0,05, rằng mức độ mài mòn của kim loại I là hơn kim loại II được không? Giả sử các tổng thể xấp xỉ chuẩn với phương sai bằng nhau.

Các ý chính và bài tập

- Khái niệm kiểm định, kiểm định 1 phía, 2 phía.
- Bài toán kiểm định cho 1 trung bình khi phương sai tổng thể đã biết và chưa biết
- Bài toán kiểm định cho hai trung bình khi phương sai các tổng thể đã biết và chưa biết.

Bài tập về nhà: Cho một trung bình: 1,2,7,8,11 **(351-352)**

Cho hai trung bình: 10,14,17,18,24**(352-353)**.