



## quản trị sản xuất ĐH Thủ Dầu Một

quản trị sản xuất (Trường Đại Học Thủ Dầu Một)



Scan to open on Studocu

## BÀI TẬP BUỔI 2(Biến ngẫu nhiên)

### Biến ngẫu nhiên, Phân phối xác suất rời rạc, Phân phối xác suất liên tục

#### Biến ngẫu nhiên rời rạc

3.1. Tìm  $c$  để mỗi hàm số sau là hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc  $X$ :

(a)  $f(x) = c(x^2 + 4)$  với  $x = 0, 1, 2, 3$

(b)  $f(x) = cC_2^xC_3^{3-x}$  với  $x = 0, 1, 2$ .

ĐS: a)  $c = 1/30$

b)  $c = 1/10$

3.2. Một kiện hàng gồm 7 chiếc tivi trong đó có 2 chiếc bị hỏng. Một khách sạn mua ngẫu nhiên 3 chiếc. Gọi  $X$  là số chiếc bị hỏng mà khách sạn đó mua, lập bảng phân phối xác suất của  $X$ .

ĐS:

X	0	1	2
f(x)	2/7	4/7	1/7

3.3. Rút ngẫu nhiên liên tiếp 3 quân bài từ một bộ bài. Tìm phân phối xác suất của số quân bích rút được.

ĐS:

X	0	1	2	3
f(x)	703/1700	741/1700	117/850	11/850

3.4. Một xạ thủ đem 5 viên đạn để bắn thử trước ngày thi bắn. Xạ thủ bắn từng viên với xác suất trúng tâm là 0,95. Nếu bắn trúng 3 viên thì dừng không bắn tiếp. Gọi  $X$  là số viên xạ thủ này đã sử dụng. Lập bảng phân phối xác suất của  $X$ .

ĐS:

X	3	4	5
f(x)	0,857375	0,12860625	0,01401875

3.5. Một thiết bị gồm 3 bộ phận hoạt động độc lập với nhau, xác suất trong khoảng thời gian  $t$  các bộ phận bị hỏng tương ứng là 0,2; 0,3; 0,4. Gọi  $X$  là số bộ phận bị hỏng. Tìm phân phối xác suất của  $X$

ĐS:

X	0	1	2	3
f(x)	0,336	0,452	0,188	0,024

3.6. Một hộp chứa 4 đồng một hào và 2 đồng năm xu. Chọn ngẫu nhiên 3 đồng tiền. Tìm phân phối xác suất của tổng  $T$  của 3 đồng tiền. Lập bảng phân phối của  $T$

ĐS:

T	20	25	30
f(t)	0,2	0,6	0,2

**3.7.** Một hộp có 4 quả bóng đen và 2 quả bóng xanh. Lấy ngẫu nhiên lần lượt 3 quả bóng theo phương thức có hoàn lại. Tìm phân phối xác suất của số quả bóng xanh.

ĐS:

$X$	0	1	2	3
$f(x)$	8/27	4/9	2/9	1/27

**3.8.** Phân phối xác suất của  $X$ , trong đó  $X$  là số lỗi trên 10 m vải sợi tổng hợp trong một súc vải có độ rộng giống nhau, được cho bởi bảng sau:

$X$	0	1	2	3	4
$f(x)$	0,4	0,3	0,1	0,0	0,0
	1	7	6	5	1

Tìm hàm phân phối tích lũy của  $X$ .

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 0,41 & , 0 \leq x < 1 \\ 0,78 & , 1 \leq x < 2 \\ 0,94 & , 2 \leq x < 3 \\ 0,99 & , 3 \leq x < 4 \\ 1 & , x \geq 4 \end{cases}$$

ĐS:

**3.9.** Một công ty đầu tư phát hành đợt trái phiếu có kì hạn biến đổi theo năm. Gọi  $T$  là kì hạn tính theo năm của một trái phiếu được chọn ngẫu nhiên. Biết  $T$  có hàm phân phối tích lũy như sau:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & , t < 1 \\ 1/4 & , 1 \leq t < 3 \\ 1/2 & , 3 \leq t < 5 \\ 3/4 & , 5 \leq t < 7 \\ 1 & , t \geq 7 \end{cases}$$

Tìm:

(a)  $P(T = 5)$ .

(b)  $P(T > 3)$ .

(c)  $P(1,4 < T < 6)$ .

$$\frac{1}{4}$$

$$\text{b) } \frac{1}{2}$$

$$\text{c) } \frac{1}{2}$$

ĐS: a)

## Biến ngẫu nhiên liên tục

**3.10.** Tỷ lệ người trả lời các thư chào hàng qua đường bưu điện là một biến ngẫu nhiên liên tục  $X$  có hàm mật độ như sau:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x+2)}{5} & ; \quad 0 < x < 1 \\ 0 & ; \quad x \notin (0, 1) \end{cases}$$

(a) Hãy chứng minh  $P(0 < X < 1) = 1$ .

(b) Tìm xác suất để có từ 1/4 đến 1/2 số người được liên hệ trả lời các thư chào hàng nói trên.

ĐS: b)  $\frac{19}{80}$

**3.11.** Xét hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} k\sqrt{x}, & 0 < x < 1 \\ 0, & x \notin (0, 1) \end{cases}$$

(a) Tìm  $k$ .

(b) Tìm  $F(x)$  và sử dụng nó để tính  $P(0,3 < X < 0,6)$ .

ĐS:

(a)  $k = \frac{3}{2}$

(b) 
$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ x^{\frac{3}{2}} & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$P(0,3 < X < 0,6) \approx 0,3004$

**3.12** Thời gian (đơn vị đo: 100 giờ) mà một gia đình cho chạy một chiếc máy hút bụi trong một năm là biến ngẫu nhiên liên tục  $X$  có hàm mật độ như sau:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & x \notin (0, 2) \end{cases}$$

a) Tìm  $F(x)$

b) Tìm xác suất để trong một năm, một gia đình cho chạy máy hút bụi của họ

+ ) Ít hơn 120 giờ.

+ ) Từ 50 đến 100 giờ.

ĐS:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , & x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & , & 0 \leq x < 1 \\ 2x - \frac{x^2}{2} - 1, & & 1 \leq x < 2 \\ 1 & , & x \geq 2 \end{cases}$$

a)

b)

$$P(X < 1, 2) = 0,68 \quad P(0,5 < X < 1) = 0,375$$

**3.13.** Thời gian chờ tính **theo giờ** giữa 2 lần bắn liên tiếp của một thiết bị bắn tốc độ ô tô sử dụng công nghệ rada là một biến ngẫu nhiên liên tục có hàm phân phối tích lũy như sau:

Tìm xác suất để thời gian chờ đó ít hơn 10 phút.

(a) Sử dụng hàm phân phối tích lũy của  $X$ .

(b) Sử dụng hàm mật độ xác suất của  $X$ .

ĐS: 0,995

### Các tham số đặc trưng:

**4.1.** Cho  $X$  là biến ngẫu nhiên với phân phối xác suất như sau:

$X$	-2	3	5
$f(x)$	0,3	0,2	0,5

Hãy tìm kì vọng, phương sai, độ lệch chuẩn của  $X$ .

$$\text{ĐS: } \mu = 2,5 \quad \sigma^2 = 6,85 \rightarrow \sigma = 2,617$$

**4.2.** Gọi  $X$  là biến ngẫu nhiên với phân phối xác suất như sau:

$X$	-3	6	9
$f(x)$	1/6	1/2	1/3

Hãy tìm kỳ vọng và phương sai của biến ngẫu nhiên  $g(X) = (2X + 1)^2$ .

ĐS:

**4.3.** Một công ty kỹ nghệ lớn phải mua một số máy chữ vào cuối mỗi năm, số máy phải mua còn tùy thuộc vào tần số sửa chữa những máy đã có năm trước. Giả sử số máy chữ  $X$  phải mua mỗi năm có phân phối xác suất là

$X$	0	1	2	3
-----	---	---	---	---

$f(x)$	1/1	3/1	2/5	1/5
	0	0		

Nếu giá của loại máy chữ định mua không thay đổi và là 1200USD và được giảm giá 50  $X^2$  với mỗi lần mua, thì công ty này kỳ vọng sẽ phải bỏ ra bao nhiêu tiền để mua máy chữ vào cuối năm?

ĐS: 1855

**4.4.** Hàm mật độ của biến ngẫu nhiên liên tục  $X$ , biểu thị tổng số giờ (theo đơn vị 100 giờ) mà một gia đình sử dụng máy hút bụi trong một năm như sau

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0; 1) \\ 2 - x, & x \in [1; 2) \\ 0, & x \notin (0; 2) \end{cases}$$

Hãy tìm số giờ sử dụng máy hút bụi trung bình của một gia đình trong một năm?

ĐS: 100 giờ

**4.5.** Biến ngẫu nhiên liên tục  $X$  có hàm mật độ là

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{khi } x > 0 \\ 0, & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$$

Hãy tìm kỳ vọng của biến ngẫu nhiên  $g(X) = e^{2X/3}$ .

ĐS:

**4.6.** Thời gian, tính theo đơn vị phút, để một chiếc máy bay nhận được giấy phép cất cánh tại một sân bay nào đó là biến ngẫu nhiên  $Y = 3X - 2$ , trong đó  $X$  là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-x/4}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Hãy tìm giá trị trung bình và phương sai của biến ngẫu nhiên  $Y$ .

ĐS:

**4.7.** Giả sử thời gian, tính theo phút, của một cuộc điện đàm  $X$  là một biến ngẫu nhiên với

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-x/5}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

hàm mật độ xác suất

Hãy xác định

- (a) Thời gian trung bình  $[E(X)]$  của một cuộc điện đàm.  
 (b) Tìm phương sai và độ lệch chuẩn của  $X$ .  
 (c)  $E(X+5)^2$ .

ĐS:

(a) (b)(c)

### LỜI GIẢI:

**3.1.** Tìm  $c$  để mỗi hàm số sau là hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc  $X$ :

(a)  $f(x) = c(x^2 + 4)$  với  $x = 0, 1, 2, 3$

(b)  $f(x) = cC_2^x C_3^{3-x}$  với  $x = 0, 1, 2$ .

### **Bài giải:**

(a)  $f(x) = c(x^2 + 4)$  với  $x = 0, 1, 2, 3$

Ta có bảng phân phối xác suất của  $X$  như sau:

$X$	0	1	2	3
$f(x)$	$4c$	$5c$	$8c$	$13c$

Để  $f(x)$  là hàm phân phối xác suất của  $X$  điều kiện là:  $4c + 5c + 8c + 13c = 1 \Leftrightarrow c = 1/30$

(b)  $f(x) = cC_2^x C_3^{3-x} \geq 0$  với  $x = 0, 1, 2 \Rightarrow c \geq 0$ .

Bảng phân phối xác suất của  $X$  là:

$X$	0	1	2
$f(x)$	$c$	$6c$	$3c$

Điều kiện là:  $c + 6c + 3c = 1 \Leftrightarrow c = 1/10$

**3.2.** Một kiện hàng gồm 7 chiếc tivi trong đó có 2 chiếc bị hỏng. Một khách sạn mua ngẫu nhiên 3 chiếc. Gọi  $X$  là số chiếc bị hỏng mà khách sạn đó mua, lập bảng phân phối xác suất của  $X$ .

### **Bài giải:**

Phân phối xác suất của  $X$  là:  $P(X=0) = \frac{C_5^3}{C_7^3} = \frac{2}{7}$ ,  $P(X=1) = \frac{C_2^1 \cdot C_5^2}{C_7^3} = \frac{4}{7}$ ,

$$P(X=2) = \frac{C_2^2 \cdot C_5^1}{C_7^3} = \frac{1}{7}$$

$X$	0	1	2
$f(x)$	$2/7$	$4/7$	$1/7$

**3.3.** Rút ngẫu nhiên liên tiếp 3 quân bài từ một bộ bài. Tìm phân phối xác suất của số quân bích rút được.

**Bài giải:**

Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số quân bích rút ra được. Khi đó X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị trong tập sau:  $\{0; 1; 2; 3\}$ .

Ta có bảng phân phối xác suất của X như sau:

X	0	1	2	3
f(x)	703/1700	741/1700	117/850	11/850

Trong đó :  $P(X=0) = \frac{C_{39}^3}{C_{52}^3} = \frac{703}{1700} \approx 0,413$  ,  $P(X=1) = \frac{C_{13}^1 \cdot C_{39}^2}{C_{52}^3} = \frac{741}{1700} \approx 0,436$  ,

$$P(X=2) = \frac{C_{13}^2 \cdot C_{39}^1}{C_{52}^3} = \frac{117}{850} \approx 0,138 \quad , \quad P(X=3) = \frac{C_{13}^3}{C_{52}^3} = \frac{11}{850} \approx 0,013$$

**3.4.** Một xạ thủ đem 5 viên đạn để bắn thử trước ngày thi bắn. Xạ thủ bắn từng viên với xác suất trúng tâm là 0,95. Nếu bắn trúng 3 viên thì dừng không bắn tiếp. Gọi X là số viên xạ thủ này đã sử dụng. Lập bảng phân phối xác suất của X.

**Bài giải:**

Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số viên xạ thủ đã sử dụng. Khi đó X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị trong tập sau:  $\{3, 4, 5\}$ .

Ta có bảng phân phối xác suất của X như sau:

X	3	4	5
f(x)	0,857375	0,12860625	0,01401875

Trong đó :  $P(X=3) = (0,95)^3 = 0,857375$  ,

$$P(X=4) = 3(0,95)^3 \cdot 0,05 = 0,12860625$$

$$, P(X=5) = 1 - P(X=3) - P(X=4) = 0,01401875$$

**3.5.** Một thiết bị gồm 3 bộ phận hoạt động độc lập với nhau, xác suất trong khoảng thời gian t các bộ phận bị hỏng tương ứng là 0,2; 0,3; 0,4. Gọi X là số bộ phận bị hỏng. Tìm phân phối xác suất của X

**Bài giải:**

Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số bộ phận bị hỏng. Khi đó X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị trong tập sau:  $\{0, 1, 2, 3\}$ .

Ta có bảng phân phối xác suất của X như sau:

X	0	1	2	3
f(x)	0,336	0,452	0,188	0,024

Trong đó :  $P(X=0) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,6 = 0,336$  ,



$$P(X=1)=0,2.0,7.0,6+0,8.0,3.0,6+0,8.0,7.0,4=0,452$$

$$P(X=2)=0,2.0,3.0,6+0,2.0,7.0,4+0,8.0,3.0,4=0,188$$

$$P(X=3)=0,2.0,3.0,4=0,024$$

**3.6.** Một hộp chứa 4 đồng một hào và 2 đồng năm xu. Chọn ngẫu nhiên 3 đồng tiền. Tìm phân phối xác suất của tổng  $T$  của 3 đồng tiền. Biểu diễn phân phối xác suất này dưới dạng biểu đồ xác suất.

#### Bài giải:

Không gian mẫu khi rút 3 đồng tiền là:

$$S = \{H X X ; H H X ; H H H\}$$

Trong đó: H là kí hiệu chỉ đồng 1 hào, X chỉ đồng 5 xu.

Khi đó biến ngẫu nhiên  $T$  chỉ tổng của 3 đồng tiền nhận các giá trị : 20; 25; 30 (đơn vị xu) với xác suất tương ứng là:

$$P(T=20)=\frac{C_4^1.C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{5}=0,2, \quad P(T=25)=\frac{C_4^2.C_2^1}{C_6^3}=\frac{3}{5}=0,6, \quad P(T=30)=\frac{C_4^3}{C_6^3}=\frac{1}{5}=0,2$$

Ta có

T	20	25	30
f(t)	0,2	0,6	0,2

**3.7.** Một hộp có 4 quả bóng đen và 2 quả bóng xanh. Lấy ngẫu nhiên lần lượt 3 quả bóng theo phương thức có hoàn lại. Tìm phân phối xác suất của số quả bóng xanh.

#### Bài giải:

Gọi  $X$  là biến ngẫu nhiên chỉ số quả bóng xanh được lấy. Khi đó  $X$  là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị trong tập sau:  $\{0, 1, 2\}$ .

Ta có bảng phân phối xác suất của  $X$  như sau:

$X$	0	1	2	3
$f(x)$	8/27	4/9	2/9	1/27

trong đó :  $P(X=0)=\frac{4}{6}.\frac{4}{6}.\frac{4}{6}=\frac{8}{27}, \quad P(X=1)=\frac{2}{6}.\frac{4}{6}.\frac{4}{6}+\frac{4}{6}.\frac{2}{6}.\frac{4}{6}+\frac{4}{6}.\frac{4}{6}.\frac{2}{6}=\frac{4}{9},$

$$P(X=2)=\frac{2}{6}.\frac{2}{6}.\frac{4}{6}+\frac{2}{6}.\frac{4}{6}.\frac{2}{6}+\frac{4}{6}.\frac{2}{6}.\frac{2}{6}=\frac{2}{9} \quad P(X=3)=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$$

( Chú ý: Lấy hoàn lại thì số quả xanh luôn có trong hộp để thực hiện quá trình lấy ngẫu nhiên)

**3.8.** Phân phối xác suất của  $X$ , trong đó  $X$  là số lỗi trên 10 m vải sợi tổng hợp trong một súc vải có độ rộng giống nhau, được cho bởi bảng sau:

$X$	0	1	2	3	4
$f(x)$	0,4	0,3	0,1	0,0	0,0
	1	7	6	5	1

Tìm hàm phân phối tích lũy của  $X$ .

**Bài giải:**

$$x < 0: F(x) = 0$$

$$0 \leq x < 1: F(x) = f(0) = 0,41$$

$$1 \leq x < 2: F(x) = f(0) + f(1) = 0,78$$

$$2 \leq x < 3: F(x) = f(0) + f(1) + f(2) = 0,94$$

$$3 \leq x < 4: F(x) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 0,99$$

$$4 \leq x: F(x) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 0,41 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 0,78 & , \quad 1 \leq x < 2 \\ 0,94 & , \quad 2 \leq x < 3 \\ 0,99 & , \quad 3 \leq x < 4 \\ 1 & , \quad x \geq 4 \end{cases}$$

Vậy

**3.9.** Một công ty đầu tư phát hành đợt trái phiếu có kì hạn biến đổi theo năm. Gọi  $T$  là kì hạn tính theo năm của một trái phiếu được chọn ngẫu nhiên. Biết  $T$  có hàm phân phối tích lũy như sau:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 1 \\ 1/4 & , \quad 1 \leq t < 3 \\ 1/2 & , \quad 3 \leq t < 5 \\ 3/4 & , \quad 5 \leq t < 7 \\ 1 & , \quad t \geq 7 \end{cases}$$

Tìm:

(a)  $P(T = 5)$ .

(b)  $P(T > 3)$ .

(c)  $P(1,4 < T < 6)$ .

**Bài giải:**

$$(a) \quad P(T=5) = P(T \leq 5) - P(T < 5) = F(5) - F(3) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$(b) \quad P(T > 3) = 1 - P(T \leq 3) = 1 - F(3) = 1/2$$

$$(c) \quad P(1,4 < T < 6) = F(6) - F(1,4) = 3/4 - 1/4 = 1/2$$

**3.10.** Tỷ lệ người trả lời các thư chào hàng qua đường bưu điện là một biến ngẫu nhiên liên tục  $X$  có hàm mật độ như sau:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x+2)}{5} & ; \quad 0 < x < 1 \\ 0 & ; \quad x \notin (0, 1) \end{cases}$$

(a) Hãy chứng minh  $P(0 < X < 1) = 1$ .

(b) Tìm xác suất để có từ 1/4 đến 1/2 số người được liên hệ trả lời các thư chào hàng nói trên.

**Bài giải:**

$$(a) \quad P(0 < X < 1) = \int_0^1 \frac{2(x+2)}{5} dx = \left( \frac{x^2}{5} + \frac{4x}{5} \right)_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1. \quad (\text{dpcm})$$

$$(b) \quad P(1/4 < X < 1/2) = \int_{1/4}^{1/2} \frac{2(x+2)}{5} dx = \frac{19}{80}$$

**3.11.** Xét hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} k\sqrt{x}, & 0 < x < 1 \\ 0, & x \notin (0, 1) \end{cases}$$

(a) Tìm  $k$ .

(b) Tìm  $F(x)$  và sử dụng nó để tính  $P(0,3 < X < 0,6)$ .

**Bài giải:**

$$(a) \quad \int_{-\infty}^{\infty} k\sqrt{x} dx = \int_0^1 k\sqrt{x} dx = \frac{2}{3}k = 1 \rightarrow k = \frac{3}{2}$$

$$(b) \quad x < 0: F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

$$0 \leq x < 1: F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{3}{2} \sqrt{t} dt = \int_0^x \frac{3}{2} \sqrt{t} dt = x^{\frac{3}{2}}$$

$$1 \leq x: F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt = \int_0^1 \frac{3}{2} \sqrt{t} dt = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ x^{\frac{3}{2}} & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Vậy

$$P(0,3 < X < 0,6) = F(0,6) - F(0,3) \approx 0,3004$$

**3.12** Thời gian (đơn vị đo: 100 giờ) mà một gia đình cho chạy một chiếc máy hút bụi trong một năm là biến ngẫu nhiên liên tục  $X$  có hàm mật độ như sau:

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x < 0 \\ 2 - x & , \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 & , \quad x \notin (0, 2) \end{cases}$$

a) Tìm  $F(x)$

b) Tìm xác suất để trong một năm, một gia đình cho chạy máy hút bụi của họ

+) Ít hơn 120 giờ.

+) Từ 50 đến 100 giờ.

**Bài giải:**

$$x < 0: F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

(a)

$$0 \leq x < 1: F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x t dt = \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2}$$

$$1 \leq x < 2: F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^1 t dt + \int_1^x (2 - t) dt = 2x - \frac{x^2}{2} - 1$$

$$2 \leq x: F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^1 t dt + \int_1^2 (2 - t) dt + \int_2^x 0 dt = \int_0^1 t dt + \int_1^2 (2 - t) dt = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ 2x - \frac{x^2}{2} - 1, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

Vậy

b)

cách 1

$$P(X < 1,2) = F(1,2) = 0,68$$

Cách 2:

$$P(X < 1,2) = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_1^{1,2} f(x) dx = \int_0^1 x dx + \int_1^{1,2} (2-x) dx = 0,68$$

C1

$$P(0,5 < X < 1) = F(1) - F(0,5) = 0,375$$

Cách 2:

$$P(0,5 < X < 1) = \int_{0,5}^1 x dx = 0,375$$

**3.13.** Thời gian chờ tính **theo giờ** giữa 2 lần bắn liên tiếp của một thiết bị bắn tốc độ ô tô sử dụng công nghệ rada là một biến ngẫu nhiên liên tục có hàm phân phối tích lũy như sau:

$$\begin{cases} 1 - e^{-9x} & \text{nếu } x > 0 \\ 0 & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$$

Tìm xác suất để thời gian chờ đó ít hơn 10 phút.

(a) Sử dụng hàm phân phối tích lũy của  $X$ .

(b) Sử dụng hàm mật độ xác suất của  $X$ .

**Bài giải:**

$$(a) P(X \leq 0,6) = F(0,6) = 1 - e^{-9 \cdot 0,6} = 0,995$$

$$(b) f(x) = 9e^{-9x}$$

$$P(X \leq 0,6) = \int_{-\infty}^{0,6} f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^{0,6} 9e^{-9x} dx = -e^{-9x} \Big|_0^{0,6} = 0,995$$

**4.1.** Cho  $X$  là biến ngẫu nhiên với phân phối xác suất như sau:

$X$	-2	3	5
$f(x)$	0,3	0,2	0,5

Hãy tìm kì vọng, phương sai, độ lệch chuẩn của  $X$ .

**Bài giải:**

$$\sigma^2 = \sum_x x^2 f(x) - \mu^2 = -2^2 \cdot f(-2) + 3^2 f(3) + 5^2 f(5) - 2,5^2 = 6,85$$

$$\rightarrow \sigma = 2,617$$

**4.2.** Gọi  $X$  là biến ngẫu nhiên với phân phối xác suất như sau:

$X$	-3	6	9
$f(x)$	1/6	1/2	1/3

Hãy tìm kỳ vọng và phương sai của biến ngẫu nhiên  $g(X) = (2X+1)^2$ .

**Bài giải:**

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E(G(X) - \mu)^2 = E(G(X)^2) - \mu^2 = \sum_x (2x+1)^4 f(x) - \mu^2 \\ &= 5^4 \cdot f(-3) + 13^4 f(3) + 19^4 f(6) - 209^2 = 14144 \end{aligned}$$

**4.3.** Một công ty kỹ nghệ lớn phải mua một số máy chữ vào cuối mỗi năm, số máy phải mua còn tùy thuộc vào tần số sửa chữa những máy đã có năm trước. Giả sử số máy chữ  $X$  phải mua mỗi năm có phân phối xác suất là

$X$	0	1	2	3
$f(x)$	1/1	3/1	2/5	1/5
	0	0		

Nếu giá của loại máy chữ định mua không thay đổi và là 1200USD và được giảm giá 50

$X^2$  với mỗi lần mua, thì công ty này kỳ vọng sẽ phải bỏ ra bao nhiêu tiền để mua máy chữ vào cuối năm?

**Bài giải:**

Đặt  $Y = 1200X - 50X^2 = G(X)$  là giá tiền mua  $X$  máy.

Bảng phân phối của  $Y$  là

$X$	0	1	2	3
$f(x)$	1/1	3/1	2/5	1/5

	0	0		
$y=g(x)$	0	115	22	31
		0	00	50

$$\mu = E(Y) = 0 \cdot \frac{1}{10} + 1150 \cdot \frac{3}{10} + 2200 \cdot \frac{2}{5} + 3150 \cdot \frac{1}{5} = 1855$$

**4.4.** Hàm mật độ của biến ngẫu nhiên liên tục  $X$ , biểu thị tổng số giờ (theo đơn vị 100 giờ) mà một gia đình sử dụng máy hút bụi trong một năm như sau

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0;1) \\ 2-x, & x \in [1;2) \\ 0, & x \notin (0;2) \end{cases}$$

Hãy tìm số giờ sử dụng máy hút bụi trung bình của một gia đình trong một năm?

**Bài giải:**

$$\begin{aligned} \mu = E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = \int_{-\infty}^0 xf(x) dx + \int_0^1 xf(x) dx + \int_1^2 xf(x) dx + \int_2^{\infty} xf(x) dx \\ &= \int_0^1 xx dx + \int_1^2 x(2-x) dx = \frac{x^3}{2} \Big|_0^1 + \left( x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = 1 \end{aligned}$$

Vậy trung bình 1 năm 1 gia đình sử dụng máy hút bụi 100 giờ.

**4.5.** Biến ngẫu nhiên liên tục  $X$  có hàm mật độ là

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{khi } x > 0 \\ 0, & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$$

Hãy tìm kỳ vọng của biến ngẫu nhiên  $g(X) = e^{2X/3}$ .

$$E(g(X)) = \int_0^1 e^{-x} \cdot e^{2x/3} dx = 3$$

**Bài giải:**

**4.6.** Thời gian, tính theo đơn vị phút, để một chiếc máy bay nhận được giấy phép cất cánh tại một sân bay nào đó là biến ngẫu nhiên  $Y = 3X - 2$ , trong đó  $X$  là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-x/4}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Hãy tìm giá trị trung bình và phương sai của biến ngẫu nhiên  $Y$ .

**Bài giải:**

$$E(g(X)) = \int_0^{+\infty} (3x - 2) \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}} dx = 10 \quad \sigma_Y^2 = \int_0^{+\infty} (3x - 2 - 10)^2 \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}} dx = 144$$

4.7. Giả sử thời gian, tính theo phút, của một cuộc điện đàm  $X$  là một biến ngẫu nhiên với

hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-x/5}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Hãy xác định

- (a) Thời gian trung bình  $[E(X)]$  của một cuộc điện đàm.
- (b) Tìm phương sai và độ lệch chuẩn của  $X$ .
- (c)  $E(X + 5)^2$ .

**Bài giải:**

(a) 
$$E(X) = \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x/5} dx = 5$$

(b)

(c) 
$$E(X + 5)^2 = \int_0^{+\infty} (x + 5)^2 \cdot e^{-x/5} dx = 105$$