Bài 7:
MỘT SỐ PHÂN PHỐI XÁC SUẤT THƯỜNG GẶP

Vũ Mạnh Tới

Bộ môn Toán-Trường Đại học Thủy lợi

Ngày 9 tháng 5 năm 2024

Định nghĩa phép thử Bernoulli:
Một thí nghiệm thực hiện mà chỉ có hai khả năng xảy ra, gọi là khả năng thành công và khả năng thất bại, gọi là một phép thử Bernoulli. Xác suất thành công trong mỗi phép thử đều bằng nhau và bằng p. Xác suất thất bại là $q = 1 - p$.

Quá trình Bernoulli: là việc thực hiện n phép thử Bernoulli cùng loại, lặp đi lặp lại và độc lập.

Định nghĩa phân phối nhị thức

Cho quá trình Bernoulli. Gọi X là số lần thành công, thì X là biến ngẫu nhiên có phân phối Nhị thức với hàm xác suất là

$$b(x; n, p) = C_n^x p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, ..., n.$$

Chú ý:

- X là BNN có phân phối nhị thức với hàm xác suất $b(x; n, p)$ viết tắt là $X \sim b(x; n, p)$.
- $P(X = x_0) = b(x_0; n, p)$
- $P(X \leq r) = \sum_{x=0}^{r} b(x; n, p)$ được tính sẵn ở Bảng A.1, với $n = 1, 2, .., 20$ và p là từ 0,1 đến 0,9

Định lí Nếu $X \sim b(x; n, p)$ thì

$$\mu = E(X) = np \quad \text{và} \quad D(X) = \sigma^2 = npq$$

Ví dụ 1: Xác suất để một bệnh nhân sống sót sau khi mắc một loại bệnh hiếm thấy về máu là 0,4. Nếu biết rằng đã có 15 người mắc loại bệnh này, tìm xác suất để

a) có ít nhất 10 người sống sót;

b) có từ 2 đến 8 người sống sót;

c) có đúng 5 người sống sót,

d) tìm trung bình bệnh nhân sống sót.

7.1.2. Phân phối siêu bội

Chọn ngẫu nhiên cùng lúc n phần tử từ tập có N phần tử trong đó có k phần tử được đặt tên là thành công còn $N-k$ phần tử thất bại, ta quan tâm đến xác suất để chọn được x phần tử thành công. Phép thử kiểu này được gọi là phép **thử siêu bội**.

Định nghĩa phân phối siêu bội:

Gọi X là số phần tử thành công trong phép thử siêu bội được gọi là biến ngẫu nhiên siêu bội và có hàm xác suất

$$P(X=x)=h(x;N,n,k)=\begin{cases}\frac{C_k^x C_{N-k}^{n-x}}{C_N^n} & khi\ x=0,\ 1,\ldots,\min\{k,n\}\\ 0 & khi\ x\neq 0,1,\ldots,\min\{k,n\}\end{cases}$$

Định lí: Nếu $X \sim h(x; N, n, k)$ thì BNN X có trung bình và phương sai:

$$\mu = \frac{nk}{N}; \quad \sigma^2 = \frac{N-n}{N-1}.\frac{nk}{N}\left(1 - \frac{k}{N}\right)$$

Ví dụ: Một hộp có 10 bóng xanh, 3 bóng đỏ, 7 bóng vàng. Lấy ngẫu nhiên ra cùng lúc 5 quả bóng. Tìm xác suất để
a. Có đúng 3 bóng xanh lấy được.
b. Có ít nhất 2 bóng xanh lấy được.
Trung bình lấy được bao nhiêu quả xanh?

Định nghĩa 1

Biến ngẫu nhiên liên tục X được gọi là biến ngẫu nhiên chuẩn nếu hàm mật độ là:

$$N(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Định lí: Nếu $X \sim N(x;\mu,\sigma)$ thì $E(X) = \mu$ và $D(X) = \sigma^2$.

Định nghĩa 2

Phân phối của biến ngẫu nhiên chuẩn có trung bình $\mu = 0$ và phương sai $\sigma^2 = 1$ được gọi là phân phối tiêu chuẩn, ký hiệu là $Z \sim N(z; 0; 1)$ với hàm mật độ của Z là

$$N(z; 0; 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad -\infty < z < +\infty.$$

Chú ý:

Nếu $X \sim N(x; \mu, \sigma)$ thì $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(z; 0, 1)$.

Đường cong chuẩn và đường cong chuẩn tắc

Đường cong chuẩn là đồ thị của phân phối chuẩn

$$N(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \; -\infty < x < +\infty$$

Đường cong chuẩn tắc (đồ thị của phân phối tiêu chuẩn). Tức là đồ thị của hàm

$$N(z;0;1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, -\infty < z < +\infty$$

Diện tích phần nằm bên dưới đường cong chuẩn

Nếu $X \sim N(x; \mu, \sigma)$ thì

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} N(x; \mu, \sigma) dx$$
$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Nếu $Z \sim N(z; 0; 1)$ thì $P(Z < z)$ là phần diện tích bên trái điểm z phía dưới đường cong tiêu chuẩn, trên trục hoành.

Giá trị $P(Z < z)$ được cho bởi bảng A_3.

Khi biết $P(Z < z)$ ta có thể tìm được z nhờ bảng A_3.

Ví dụ 1: Cho $Z \sim N(z; 0; 1)$. Hãy

a) Tìm $P(Z < 1.75)$

b) Tìm z sao cho $P(Z < z) = 0.975$

c) Tìm k sao cho $P(k < Z < -0,18) = 0,4197$.

Ví dụ 2: Cho X là BNN chuẩn với trung bình là 30, độ lệch chuẩn 5

a) Tìm xác suất để X nhận giá trị lớn nhất là 36.
b) Tìm $P(X \geq 25)$.
c) Tìm k sao cho $P(X < k) = 0,98$
d) Tìm x sao cho phần nằm bên trái x dưới đường cong chuẩn có diện tích là 15%.

Ví dụ 3. Một loại bóng đèn thắp sáng có tuổi thọ tuân theo phân phối chuẩn với trung bình tuổi thọ là 800h và độ lệch chuẩn là 40h.

a) Tìm xác suất để bóng đèn có tuổi thọ từ 778h đến 834h.

b) Cần đặt ra thời gian bảo hành cho bóng là bao nhiêu giờ để sao cho công ty sản xuất bóng đó chỉ phải bảo hành cho nhiều nhất 11,2% tổng số bóng.

c) Nếu có 1000 bóng. Hỏi rằng có bao nhiêu bóng loại A (loại mà có tuổi thọ từ 890h)?

Tự xem thêm một số phân phối thường gặp khác:

- Phân phối đều rời rạc
- Phân phối nhị thức âm
- Phân phối hình học
- Phân phối Poisson
- Phân phối đa thức
- Phân phối đều liên tục
- Phân phối mũ.

Ngoài ra, tự xem thêm mối quan hệ giữa phân phối nhị thức và phân phối chuẩn.

Bài tập về nhà

4,15**(140-142)**;
2,5**(148-150)**
5, 11, 13**(178-181)**