Bài 7. Tích phân bội ba

I. Hệ tọa độ trụ - Hệ tọa độ cầu

1. Hệ tọa độ trụ

a. Khái niệm

- Trong $(0xyz)$ cho điểm $P(x;y;z)$. Gọi P' là hình chiếu vuông góc của P trên $(0xy)$.
- Hệ tọa độ trụ là hệ tọa độ trong không gian mà vị trí 1 điểm được xác định bởi 3 yếu tố:
    - Khoảng cách r: $r = 0P'$
    - Góc θ là góc quét từ tia 0x đến tia 0P'

      $\theta > 0$ nếu quét theo chiều ngược kim đồng hồ

      $\theta < 0$ nếu quét theo chiều kim đồng hồ.
    - z: Cao độ của P.
- Bộ ba (r,θ,z) cũng xác định vị trí điểm P và ta nói điểm P có tọa độ trụ là (r,θ,z).

b. Liên hệ giữa tọa độ trụ và tọa độ vuông góc

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

VD4. Tìm tọa độ trụ của các điểm sau biết tọa độ vuông góc của chúng:

1. $P_1(2;2;-1)$ 2. $P_2\left(-3;\sqrt{3};2\right)$.

VD5. Tìm phương trình trong hệ tọa độ trụ của các phương trình sau:

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 2. $z = x^2 - y^2$

2. Hệ tọa độ cầu

a. Khái niệm

- Trong $(0xyz)$ cho điểm $P(x;y;z)$. Gọi P' là hình chiếu vuông góc của P trên $(0xy)$.
- Hệ tọa độ cầu là hệ tọa độ trong không gian mà vị trí 1 điểm được xác định bởi 3 yếu tố:

+ Khoảng cách ρ: $\rho = 0P$.

+ Góc ϕ: góc quét từ tia 0z đến tia 0P, $0 \le \phi \le \pi$.

+ Góc θ: xác định như góc θ trong tọa độ trụ.

- Bộ ba (ρ, ϕ, θ) xác định vị trí điểm P và ta nói điểm P có tọa độ trụ là (ρ, ϕ, θ).

b. Liên hệ giữa tọa độ trụ và tọa độ vuông góc

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ \tan\phi = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

VD6. Tìm tọa độ cầu của các điểm sau biết tọa độ vuông góc của chúng:

1. $P_1\left(1; 1; \sqrt{6}\right)$
2. $P_2\left(1; -1; \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$

VD7. Tìm phương trình trong hệ tọa độ cầu của phương trình sau:

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
2. $z = x^2 - y^2$

II. Tích phân bội 3

1. Khái niệm

- Xét hàm $f(x,y,z)$ xác định trong miền bị chặn R trong không gian 0xyz.
- Chia R thành n hình hộp chữ nhật bởi các mặt phẳng song song với các mặt phẳng tọa độ.
- Gọi ΔV_k là thể tích hình hộp thứ k.
- Trong hình hộp thứ k lấy điểm (x_k, y_k, z_k).
- Lập tổng $\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$.
- Giới hạn hữu hạn

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k = \iiint_R f(x,y,z)dV = \iiint_R f(x,y,z)dxdydz$$

đgl tích phân bội ba của $f(x,y,z)$ trên R.

2. Tính chất

Cho $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ liên tục trên R.

- $\iiint_R (\alpha f + \beta g)dV = \alpha\iiint_R fdV + \beta\iiint_R gdV$
- Nếu $R = R_1 \cup R_2$ thì $\iiint_R fdV = \iiint_{R_1} fdV + \iiint_{R_2} fdV$

3. Cách tính

Nếu miền R được giới hạn phía dưới bởi $z = g_1(x,y)$, phía trên bởi $z = g_2(x,y)$ và hình chiếu của R trên (0xy) là D thì:

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)\,dV = \iint\limits_D \left[\int\limits_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right] dA$$

- Nếu $D = \{(x,y) : a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$ thì

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)\,dV = \int\limits_a^b \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int\limits_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dzdydx$$

- Nếu $D = \{(x,y) : c \le y \le d, x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$ thì

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)\,dV = \int\limits_c^d \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \int\limits_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dzdxdy$$

VD. Tính các tích phân bội ba sau:

a. $I = \iiint\limits_R (x+y)\,dV$, R là miền giới hạn bởi:

$$y = x^2,\ y = 5,\ z = 0,\ z = x^2.$$

4. Ứng dụng

Thể tích khối R bị chặn: $V_R = \iiint\limits_R dV$.

VD. Tính thể tích khối trụ giới hạn bởi các mặt:

$$x = y^2,\ x = -1,\ y = 0,\ y = 1,\ z = 0,\ z = 5.$$

5. Đổi biến trong tích phân bội ba

5.1. Định thức Jacobi

Định thức Jacobi của các hàm $x = x(u, v, \mathrm{w})$, $y = y(u, v, \mathrm{w}), z = z(u, v, \mathrm{w})$ là 1 số xác định bởi:

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, \mathrm{w})} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_{\mathrm{w}} \\ y_u & y_v & y_{\mathrm{w}} \\ z_u & z_v & z_{\mathrm{w}} \end{vmatrix}$$

VD. Tìm định thức Jacobi của các hàm sau:

a. $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z.$

b. $x = \rho\sin\phi\cos\theta,\ y = \rho\sin\phi\sin\theta,\ z = \rho\cos\phi.$

5.2. Phép đổi biến tổng quát

- Xét $\iiint\limits_R f(x, y, z)\,dV = \iiint\limits_R f(x, y, z)\,dxdydz$
- Phép đổi biến: $\begin{cases} x = x(u, v, \mathrm{w}) \\ y = y(u, v, \mathrm{w}) \\ z = z(u, v, \mathrm{w}) \end{cases}$
- $\iiint\limits_R f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint\limits_{R'} F(u, v, \mathrm{w})\left|J\right| dudvd\mathrm{w}$

ở đó $F(u,v,\mathrm{w}) = f\left[x(u,v,\mathrm{w}), y(u,v,\mathrm{w}), z(u,v,\mathrm{w})\right]$

5.3. Phép đổi sang tọa độ trụ

- Xét $\iiint\limits_R f(x,y,z)\,dxdydz$
- Phép đổi biến: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \ , \ \ r \ge 0 \\ z = z \end{cases}$
- Định thức Jacobi: $J = r.$
- $\iiint\limits_R f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{R'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,rdzdrd\theta$

- $R' = \left\{(r,\theta,z) : \alpha \le \theta \le \beta, r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta), z_1(r,\theta) \le z \le z_2(r,\theta)\right\}$

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{R'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,rdzdrd\theta$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta}\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}\int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,rdzdrd\theta$$

VD. Tính các tích phân bội ba sau:

1. $I = \iiint\limits_R 2z\,dxdydz,$ R là miền giới hạn bởi các mặt: $z^2 = x^2 + y^2$ và $z = a.$

2. $I=\iiint\limits_R \left(x^2+y^2\right)dxdydz$, R là miền giới hạn bởi các mặt: $z=\sqrt{x^2+y^2}$ và $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

Chú ý: Phép đổi biến sang tọa độ trụ áp dụng khi:

- Hàm $f\left(x,y,z\right)$ chứa x^2+y^2
- Hình chiếu của R trên 0xy là hình tròn.

5.4. Phép đổi biến sang tọa độ cầu

- Xét $\iiint\limits_R f\left(x,y,z\right)dxdydz$
- Phép đổi biến:

$$\begin{cases} x=\rho\sin\phi\cos\theta \\ y=\rho\sin\phi\sin\theta \quad , \quad \rho\ge 0,\ 0\le\phi\le\pi \\ z=\rho\cos\phi \end{cases}$$

- Định thức Jacobi: $J=\rho^2\sin\phi$
- $\iiint\limits_R f\left(x,y,z\right)dxdydz=\iiint\limits_{R'} F\left(\rho,\phi,\theta\right)\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta$

ở đó $F\left(\rho,\phi,\theta\right)=f\left(\rho\sin\phi\cos\theta,\rho\sin\phi\sin\theta,\rho\cos\phi\right)$

VD. Tính tích phân: $I=\iiint\limits_R \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$

a. R là hình cầu: $x^2+y^2+z^2\le 1$

b. R là miền giới hạn bởi

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0.$$

c. R là hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$

d. R là miền bị chặn bởi các mặt:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2z \text{ và } z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Chú ý:Phép đổi biến sang tọa độ cầu áp dụng khi:

- Hàm $f(x, y, z)$ chứa $x^2 + y^2 + z^2$.
    - Miền lấy tích phân R là khối cầu.