

Bài 2: QUY TẮC XÁC SUẤT

Vũ Mạnh Tới

Bộ môn Toán-Trường Đại học Thủy lợi

Ngày 19 tháng 4 năm 2024

2.1. Quy tắc xác suất cộng

Định lý 1

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

- **Hệ quả 1:** Nếu A và B xung khắc thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- **Hệ quả 2:** Nếu A_1, A_2, \dots, A_n xung khắc đôi một thì

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

- **Hệ quả 3:** $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.
- **Hệ quả 4:** $P(\overline{AB}) = P(A) - P(AB)$.

Ví dụ 1: Xác suất để một sinh viên thi qua môn Toán A là $\frac{2}{3}$, xác suất để anh ta thi qua môn Toán B là $\frac{4}{5}$ và xác suất để qua cả 2 môn là $\frac{4}{7}$.

- Tính xác suất để sinh viên đó thi qua ít nhất một môn trong hai môn đó.
- Tính xác suất để sinh viên đó thi qua đúng một môn trong hai môn đó.

Định lí 2: (mở rộng cho trường hợp 3 biến cố)

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

Tương tự cho 4 biến cố,...

2.2. Xác suất có điều kiện

Ví dụ 1: Gieo 1 con xúc xắc, gọi

A: "xuất hiện mặt lẻ"

B: "xuất hiện mặt 3 chấm"

Nếu biết rằng biến cố A đã xảy ra, hãy tìm xác suất để biến cố B xảy ra.

- **Định nghĩa:** Xác suất của biến cố B xảy ra khi biết biến cố A nào đó đã xảy ra được gọi là xác suất có điều kiện và được ký hiệu là $P(B|A)$.
- **Công thức:**

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \quad P(A) > 0.$$

Ví dụ 2: Xác suất để một chuyến bay khởi hành đúng giờ là 0,9, xác suất để một chuyến bay đến đúng giờ là 0,85; xác suất để một chuyến bay khởi hành và đến đều đúng giờ là 0,8. Tính xác suất để một chiếc máy bay:

- a) đến đúng giờ biết rằng nó đã khởi hành đúng giờ;
- b) đến không đúng giờ biết rằng nó khởi hành cũng không đúng giờ.

2.3. Quy tắc xác suất nhân

- **Quy tắc:** Với 2 biến cố A, B bất kỳ, ta có

$$P(AB) = P(A)P(B|A).$$

Nhận xét: Ta còn có thể viết

$$P(AB) = P(B)P(A|B).$$

- **Ví dụ 1:** Một hộp chứa 20 sản phẩm, trong đó có 5 sản phẩm bị hỏng. Nếu lấy ngẫu nhiên lần lượt 2 sản phẩm theo phương thức không hoàn lại, thì xác suất để cả hai sản phẩm đều bị hỏng là bao nhiêu?

- Cho A và B là hai biến cố của một phép thử. Khi đó A và B độc lập khi và chỉ khi

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

- Chú ý:**

+) A và B độc lập $\Leftrightarrow A$ và \overline{B} độc lập
 $\Leftrightarrow \overline{A}$ và B độc lập $\Leftrightarrow \overline{A}$ và \overline{B} độc lập.

Ví dụ 2: Có hai túi bóng. Túi thứ nhất đựng 3 quả trắng, 7 quả xanh. Túi thứ hai đựng 10 quả trắng và 15 quả xanh. Từ mỗi túi ta chọn ngẫu nhiên một quả. Tính xác suất để hai quả cầu lấy ra là cùng màu.

Quy tắc nhân tổng quát

Giả sử $A_1; A_2; \dots; A_n$ là n biến cố bất kì thì

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

Còn nếu $A_1; A_2; \dots; A_n$ độc lập thì

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n)$$

Ví dụ 3: Ba xạ thủ mỗi người bắn một viên đạn vào bia, xác suất trúng đích của mỗi người lần lượt là 0,7; 0,6; 0,8. Tính xác suất để

- Có đúng một người bắn trúng đích.
- Có ít nhất hai người bắn trúng đích

2.4. Công thức xác suất đầy đủ và Quy tắc Bayes:

Định nghĩa 1: (Hệ biến cố đầy đủ) là n biến cố $\{B_1; B_2; \dots; B_n\}$ với $B_j \neq \emptyset$ thỏa mãn:

- Đôi một xung khắc, nghĩa là: $B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j..$
- $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega.$

Định lí 1: (công thức xác suất đầy đủ)

Với biến cố A bất kì, ta có:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)$$

Định lí 2 (Quy tắc Bayes): Với biến cố A bất kì **đã xảy ra**. Khi đó

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}$$

Ví dụ 1: Trong một nhà máy, ba máy B_1 , B_2 , và B_3 sản xuất 30%, 45%, và 25% tổng sản phẩm. Trong đó, tỷ lệ phế phẩm của 3 máy tương ứng là 2%, 3% và 2%. Chọn ngẫu nhiên 1 sản phẩm.

- a) Tính xác suất để nó là phế phẩm.
- b) Nếu chọn ngẫu nhiên một sản phẩm và thấy nó là phế phẩm, tính xác suất để sản phẩm đó là do máy B_3 sản xuất.

Ví dụ 3: Một đội có ba nhóm xạ thủ. Nhóm 1 có 30 xạ thủ, nhóm 2 có 25 xạ thủ, nhóm 3 có 15 xạ thủ. Xác suất bắn trúng đích của mỗi xạ thủ trong nhóm 1 là 0,8; của nhóm 2 là 0,9; của nhóm 3 là 0,95. Lấy ra một xạ thủ bất kỳ trong đội đó và cho bắn một viên đạn thì thấy không trúng đích. Tìm xác suất để xạ thủ đó thuộc nhóm 3.

Ví dụ 4: Để buộc mọi người phải lái xe đúng tốc độ quy định, cảnh sát đặt hệ thống ra đa bắn tốc độ ở 4 vị trí khác nhau trong thành phố A, B, C, D với thời gian hoạt động của mỗi hệ thống ra đa ở mỗi vị trí tương ứng là 40%, 30%, 20% và 30%. Một người lái xe quá tốc độ quy định phải đi qua một trong các vị trí này với xác suất tương ứng là 0,2; 0,1; 0,5; và 0,2. Tìm xác suất anh ta phải nhận biên lai phạt?

Các ý chính trong bài giảng buổi 2:

- **Xác suất cộng:** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.
- **Xác suất điều kiện:** $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$.
- **Quy tắc nhân:** $P(AB) = P(A).P(B|A) = P(B).P(A|B)$.
- **Công thức xác suất đầy đủ:**

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i).P(A|B_i)$$

- **Công thức Bayes:**

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^k P(B_j)P(A|B_j)}$$

Bài tập về nhà

5,6(**45-46**);

3,5,10,13,20(**53-56**);

2, 7, 8 (**60-61**);

1, 7,9,10,11,12(**62-63**).