# ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM VÀO CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ - Mãi

Quản trị chất lượng (Trường Cao đẳng Viễn Đông)

# ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM VÀO CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ

## 1. Mở đầu

Toán học bắt nguồn từ thực tiễn và mọi lí thuyết toán học dù trừu tượng đến đâu cũng đều tìm thấy ứng dụng của chúng trong thực tế cuộc sống. Trong những năm gần đây, theo xu thế mới trong kỳ thi THPT Quốc gia đối với bộ môn Toán, số lượng các câu hỏi mang tính vận dụng thực tiễn ngày càng nhiều. Điều này gây ra những khó khăn nhất định cho các em học sinh khi làm bài thi môn Toán, kể cả những học sinh khá giỏi. Bởi lẽ, ngoài việc nắm chắc các kiến thức môn Toán cùng với các môn học khác, học sinh cần phải biết cách mô hình hóa toán học đối với các bài toán thực tế để đưa bài toán thực tiễn về bài toán toán học mà trong chương trình sách giáo khoa hiện hành, số lượng các bài tập mang tính vận dụng thực tiễn đang còn rất hạn chế. Hơn nữa, số lượng các câu hỏi thực tế vận dụng kiến thức "*Đạo hàm*" trong đề thi tương đối nhiều. Nhận thấy những cần thiết trong việc trang bị cho các em học sinh, đặc biệt là học sinh lớp 12 chuẩn bị bước vào kỳ thi quan trọng, cũng như cung cấp thêm cho các thầy cô giáo một tài liệu ôn thi THPT QG.

Trong khuôn khổ của tài liệu này, chúng ta sẽ cùng nhau tìm hiểu về các "Ứng dụng của Đạo hàm" không chỉ đối với Toán học mà còn đối với các ngành khoa học kỹ thuật khác, bởi lẽ Đạo hàm không chỉ dành riêng cho các nhà Toán học mà Đạo hàm còn được ứng dụng rất nhiều trong cuộc sống và các ngành khoa học khác. Ví dụ như: Một nhà kinh tế muốn biết tốc độ tăng trưởng kinh tế nhằm đưa ra các quyết định đầu tư đúng đắn hay đưa ra các dự báo; một nhà hoạch định chiến lược muốn có những thông tin liên quan đến tốc độ phát triển và gia tăng dân số của từng vùng miền; một nhà Hóa học muốn xác định tốc độ của các phản ứng hóa học nào đó hay một nhà Vật lí cần làm gì để tính toán vận tốc, gia tốc của một chuyển động ?. Và hơn thế nữa, trong thực tiễn đời sống luôn có rất nhiều những bài toán liên quan đến tối ưu hóa nhằm đạt được lợi ích cao nhất như phải tính toán thế nào để làm cho chi phí sản xuất thấp nhất mà lợi nhuận đạt được là cao nhất, …

Theo hình thức thi trắc nghiệm như hiện nay, ngày càng có nhiều bài toán ứng dụng thực tế được đưa vào đề thi THPT Quốc Gia, trong đó có phần ứng dụng của Đạo hàm. Tài liệu này cũng giúp cho các em học sinh lớp 12 chuẩn bị bước vào kì thi THPT Quốc Gia làm quen với các bài toán ứng dụng thực tế ở mức độ vận dụng và vận dụng cao.

Chúng ta hãy cùng nhau tìm hiểu, khám phá và mở mang thêm cho mình những hiểu biết về ứng dụng của đạo hàm thông qua bố cục trình bày như sau:

- Tóm tắt lí thuyết và các kiến thức liên quan đến đạo hàm.
- Các bài toán thực tế ứng dụng đạo hàm.

Trong quá trình nghiên cứu đề tài, tác giả đã tham khảo nhiều tài liệu của nhiều tác giả. Nhân đây, tác giả xin được trân trọng gửi lời cảm ơn chân thành đến các thầy cô và các tác giả nói trên.

Mặc dù đã rất cẩn thận, nghiêm túc trong tính toán và cách trình bày của mình nhưng chắc chắn tài liệu không tránh khỏi những thiếu sót nhất định. Rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của quý thầy cô, các em học sinh và bạn đọc để tài liệu được hoàn thiện hơn.

## 2. Nội dung

### 2.1. Định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên khoảng $\left(a;b\right)$ và điểm $x_0\in\left(a;b\right)$ nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ hữu hạn thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y=f\left(x\right)$ tại $x_0$.

Ký hiệu $y'\left(x_0\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ hoặc $f'\left(x_0\right)$

Lưu ý: Nếu hàm số có đạo hàm trong khoảng $\left(a;b\right)$ thì liên tục trên khoảng đó nhưng ngược lại thì chưa chắc đúng.

### 2.2. Các quy tắc tính đạo hàm

Chú ý: $u=u\left(x\right),v=v\left(x\right)$

•$\left(u\pm v\right)'=u'\pm v'$

•$\left(u.v\right)'=u'.v+u.v'$ *và* $\left(ku\right)'=ku'$

•$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'.v-v'.u}{v^2}$ *và* $\left(\dfrac{k}{v}\right)'=-\dfrac{k.v'}{v^2};\left(v\neq 0\right)$

**BẢNG CÔNG THỨC ĐẠO HÀM THƯỜNG GẶP**

| Hàm số cơ bản | Hàm số hợp |
|---|---|
| $\left(C\right)'=0$ *(C là hằng số)* | |
| $\left(x\right)'=1$ | |
| $\left(x^\alpha\right)'=\alpha.x^{\alpha-1}$ | $\left(u^\alpha\right)'=\alpha.u^{\alpha-1}.u'$ |
| $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$ với $x\neq 0$ | $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$ với $u\neq 0$ |
| $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ với x>0 | $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ với u>0 |
| $\left(\sin x\right)'=\cos x$ | $\left(\sin u\right)'=u'.\cos u$ |
| $\left(\cos x\right)'=-\sin x$ | $\left(\cos u\right)'=-u'.\sin u$ |
| $\left(\tan x\right)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ với $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ | $\left(\text{tanu}\right)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$ với $u\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ |
| $\left(\cot x\right)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ với $x\neq k\pi$ | $\left(\cot u\right)'=-\dfrac{u}{\sin^2 u}$ với $u\neq k\pi$ |
| $\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}$ với $x>0$ | $\left(\ln u\right)'=\dfrac{u'}{u}$ với $u>0$ |
| $\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ với $x>0$ | $\left(\log_a u\right)'=\dfrac{u'}{u\ln a}$ với $u>0$ |
| $\left(e^x\right)'=e^x$ | $\left(e^u\right)'=u'.e^u$ |
| $\left(a^x\right)'=a^x.\ln a$ | $\left(a^u\right)'=u'.a^u.\ln a$ |

Tiếp theo xin trình bày cách tìm GTLN, GTNN của hàm số một biến bằng đạo hàm, đây là kỹ năng cực kỳ quan trọng để ứng dụng giải các Bài toán thực tế.

### 2.3. Định nghĩa GTLN, GTNN

Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định trong khoảng K (đoạn, khoảng, nửa khoảng)

+ Nếu có $x_0 \in K$ sao cho $f\left(x\right) \le f\left(x_0\right), \forall x \in K$ thì $f\left(x_0\right)$ được gọi là giá trị lớn hất của hàm số trên khoảng K. Kí hiệu: $\max\limits_K y = f\left(x_0\right)$

+ Nếu có $x_0 \in K$ sao cho $f\left(x\right) \ge f\left(x_0\right), \forall x \in K$ thì $f\left(x_0\right)$ được gọi là giá trị nhỏ hất của hàm số trên khoảng K. Kí hiệu: $\min\limits_K y = f\left(x_0\right)$.

### 2.4. Phương pháp tìm GTLN, GTNN

Bài toán 1: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng K:

Phương pháp: Lập bảng biến thiên trên khoảng K, rồi nhìn trên đó để kết luận max, min.

Bài toán 2: Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[a;b\right]$:

Phương pháp 1: Lập bảng biến thiên trên khoảng đó và kết luận.

Phương pháp 2: Nếu hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a;b] thì ta có các bước làm sau:

1. Tính đạo hàm của hàm số $y = f\left(x\right)$ đã cho.
2. Tìm các điểm $x_1; x_2; ...; x_n$ trên đoạn $\left[a;b\right]$, tại đó $f'\left(x\right) = 0$ hoặc $f'\left(x\right)$ không xác định.
3. Tính: $f\left(a\right); f(x_1); f(x_2); ...; f(x_n); f(b)$.
4. Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên (ở mục 3)

Khi đó: $M = \max\limits_{\left[a;b\right]} f\left(x\right); \text{m} = \min\limits_{\left[a;b\right]} f\left(x\right)$

**Chú ý:**

1. Hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ thì hàm số f(x) luôn tồn tại giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất và tất cả các giá trị trung gian nằm giữa giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số f(x) trên đoạn đó.

2. Nếu đề bài không cho rõ tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng, đoạn nào cón nghĩa là ta tìm GTLN, GTNN của hàm số trên tập xác định của hàm số đó.

3. Tính đạo hàm $y'$. Nếu $y' \ge 0, \forall x \in \left[a;b\right] \Rightarrow \begin{cases} \min f\left(x\right) = f\left(a\right) \\ \max f\left(x\right) = f\left(b\right) \end{cases}$

4. Tính đạo hàm $y'$. Nếu $y' \le 0, \forall x \in \left[a;b\right] \Rightarrow \begin{cases} \min f\left(x\right) = f\left(b\right) \\ \max f\left(x\right) = f\left(a\right) \end{cases}$

Ngoài ra cần trang bị thêm một số kiến thức về bất đẳng thức cơ bản để giải quyết các bài này nhanh hơn:

### 2.5. Bất đẳng thức Cauchy cho 2 và 3 số

Hai số: Với $A, B \ge 0$ ta luôn có $A + B \ge 2\sqrt{AB}$, dấu bằng xảy ra khi $A = B$

Ba số: Với $A, B, C \ge 0$ ta luôn có $A + B + C \ge 3\sqrt[3]{ABC}$, dấu bằng xảy ra khi $A = B = C$

### 2.6. Một số bài toán vận dụng

Ý tưởng giải là cố gắng thiết lập một hàm số một biến sau đó ứng dụng đạo hàm để tìm GTLN, GTNN.

**Bài 1:**

Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu?

A. 2.250.000 B. 2.350.000 C. 2.450.000 D. 2.550.000

**Lời giải:**

Gọi x là giá thuê thực tế của mỗi căn hộ, ($x$: đồng ; $x \geq 2000.000$ đồng)

Ta có thể lập luận như sau:

Tăng giá 100.000 đồng thì có 2 căn hộ bị bỏ trống.

Tăng giá $x - 2.000.000$ đồng thì có bao nhiêu căn hộ bị bỏ trống.

Theo quy tắc tam xuất ta có số căn hộ bị bỏ trống là:

$$\frac{2\left(x-2.000.000\right)}{100.000}=\frac{x-2.000.000}{50.000}$$

Do đó khi cho thuê với giá x đồng thì số căn hộ cho thuê là:

$$50-\frac{x-2.000.000}{50.000}=-\frac{x}{50.000}+90$$

Gọi $F\left(x\right)$ là hàm lợi nhuận thu được khi cho thuê các căn hộ, (F(x): đồng).

Ta có: $F(x)=\left(-\frac{x}{50.000}+90\right)x=-\frac{1}{50.000}x^2+90x$ ( bằng số căn hộ cho thuê nhân với giá cho thuê mỗi căn hộ).

Bài toán trở thành tìm GTLN của $F\left(x\right)=-\frac{1}{50.000}x^2+90x$, ĐK: $x \geq 2.000.000$

$$F'\left(x\right)=-\frac{1}{25.000}x+90$$

$$F'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{25.000}x+90=0 \Leftrightarrow x=2.250.000$$

Bảng biến thiên:

| X | 2.000.000 | | 2.250.000 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| F'(x) | | + | 0 | | − |
| F(x) | | $\nearrow$ | $F_{max}$ | $\searrow$ | |

Suy ra F(x) đạt giá trị lớn nhất khi $x = 2.250.000$

Vậy công ty phải cho thuê với giá 2.250.000 đồng mỗi căn hộ thì được lãi lớn nhất.

Chọn A.

Nhận xét:

Sau khi tìm được hàm $F(x)=-\frac{1}{50.000}x^2+90x$. Ta không cần phải đi khảo sát và vẽ bảng biến thiên như trên. Đề đã cho bốn đáp án x, ta dùng phím CALC của MTCT để thay lần lượt các giá trị vào, cái nào làm cho F(x) lớn nhất chính là giá trị cần tìm.

**Bài 2:**

Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 40 quả bưởi. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 5000 đồng thì số bưởi bán được tăng thêm là 50 quả. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi quả là 30.000 đồng.

A. 44.000đ B. 43.000đ C. 42.000đ D. 41.000đ

**Lời giải:**

Gọi x là giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoan Hùng, (x: đồng; $30.000 \le x \le 50.000$ đồng).

Ta có thể lập luận như sau:

Giá 50.000 đồng thì bán được 40 quả bưởi

Giảm giá 5.000 đồng thì bán được thêm 50 quả.

Giảm giá 50.000 – x thì bán được thêm bao nhiêu quả?

Theo quy tắc tam xuất số quả bán thêm được là:

$(50000-x).\frac{50}{5000}=\frac{1}{100}(50000-x)$.

Do đó Số quả bưởi bán được tương ứng với giá bán x:

$40+\frac{1}{100}(50000-x)=-\frac{1}{100}x+540$

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($F(x)$: đồng).

Ta có: $F(x)=\left(-\frac{1}{100}x+540\right).(x-30.000)=-\frac{1}{100}x^2+840x-16.200.000$

Bài toán trở thành tìm GTLN của

$F(x)=-\frac{1}{100}x^2+840x-16.200.000$, Đk: $30.000 \le x \le 50.000$.

$F'(x)=-\frac{1}{50}x+840$

$F'(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{50}x+840=0 \Leftrightarrow x=42.000$

Vì hàm F(x) liên tục trên $30.000 \le x \le 50.000$ nên ta có:

$F(30.000)=0$

$F(42.000)=1.440.000$

$F(50.000)=800.000$

Vậy với $x=42.000$ thì $F(x)$ đạt GTLN.

Vậy để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất thì giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoan Hùng là 42.000 đồng.

Chọn C.

**Bài 3:** Một xe khách đi từ Việt Trì về Hà Nội chở tối đa được là 60 hành khách một chuyến. Nếu một chuyến chở được m hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách được tính là $\left(30-\frac{5m}{2}\right)^2$ đồng. Tính số hành khách trên mỗi chuyến xe để nhà xe thu được lợi nhuận mỗi chuyến xe là lớn nhất.?

A. 30 B. 40 C. 50 D. 60

**Lời giải:**

Gọi x là số hành khách trên mỗi chuyến xe để số tiền thu được là lớn nhất, $(0 < x \le 60)$

Gọi F(x) là hàm lợi nhuận thu được (F(x): đồng)

Số tiền thu được :

$$F(x)=\left(300-\frac{5x}{2}\right)^2.x=90.000x-1500x^2+\frac{25}{4}x^3$$

Bài toán trở thành tìm x để F(x) đạt giá trị lớn nhất.

$$F'(x)=90000-3000x+\frac{75}{4}x^2$$

$$F'(x)=0\Leftrightarrow 90000-3000x+\frac{75}{4}x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=120(loai)\\x=40(\text{t/ m})\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

| X | 0 | | 40 | | 60 |
|---|---|---|---|---|---|
| F'(x) | | + | 0 | − | |
| F(x) | | ↗ | $F_{\max}$ | ↘ | |

Vậy để thu được số tiền lớn nhất thì trên mỗi chuyến xe khách đó phải chở 40 người.

Chọn B.

**Bài 4:**

Một công ty chuyên sản xuất thùng phi nhận được đơn đặt hàng với yêu cầu là thùng phi phải chứa được $16\pi\left(m^3\right)$ mỗi chiếc. Hỏi chiếc thùng phải có kích thước như thế nào để sản suất ít tốn vật liệu nhất?

A. $R=2(m),h=4(m)$ B. $R=4(m),h=2(m)$

C. $R=3(m),h=4(m)$ D. $R=4(m),h=4(m)$

**Lời giải:**

Do thùng phi có dạng hình trụ nên: $V_{tru}=\pi R^2h=16\pi\Leftrightarrow h=\frac{16}{R^2},(1)$

Diện tích toàn phần của thùng phi là:

$S_{Tp}=2\pi R^2+2\pi Rh=2\pi R(h+R),(2)$

Thay (1) vào (2) ta được:

$$S_{Tp}=2\pi R\left(\frac{16}{R^2}+R\right)=2\pi\left(\frac{16}{R}+R^2\right)$$

$$S'_{Tp}=2\pi\left(-\frac{16}{R^2}+2R\right)=\frac{4\pi}{R^2}\left(R^3-8\right)$$

$$S'_{Tp}=0\Leftrightarrow\frac{4\pi}{R^2}\left(R^3-8\right)=0\Leftrightarrow R=2$$

Bảng biến thiên

| R | 0 | | 2 | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| S'(R) | | − | 0 | + | |
| S(R) | | ↘ | $S_{\min}$ | ↗ | |

Vậy để sản xuất thùng phi ít tốn vật liệu nhất thì R= 2(m) và chiều cao là h = 4 (m).

Chọn A.

**Bài 5:**

Gia đình ông Thanh nuôi tôm với diện tích ao nuôi là $100m^2$. Vụ tôm vừa qua ông nuôi với mật độ là $1\left(kg/m^2\right)$ tôm giống và sản lượng tôm khi thu hoạch được khoảng 2 tấn tôm. Với kinh nghiệm nuôi tôm nhiều năm, ông cho biết cứ thả giảm đi $\left(200g/m^2\right)$ tôm giống thì sản lượng tôm thu hoạch được 2,2 tấn tôm. Vậy vụ tới ông phải thả bao nhiêu kg tôm giống để đạt sản lượng tôm cho thu hoạch là lớn nhất? (Giả sử không có dịch bệnh, hao hụt khi nuôi tôm giống).

A. $\frac{230}{3}kg$ B. $70kg$ C. $72kg$ D. $69kg$

**Lời giải:**

Số Kg tôm giống mà ông Thanh thả vụ vừa qua: 100.1= 100(kg).

Gọi x (0<x<100) là số kg tôm cần thả ít đi trong vụ tôm tới.

Khối lượng trung bình $1\left(kg/m^2\right)$ tôm giống thu hoạch được: $2000:100=20\left(kg\right)$

Khi giảm 0,2 kg tôm giống thì thì sản lượng tôm thu hoạch tăng thêm là $2\left(kg/m^2\right)$

Gọi $F\left(x\right)$ là hàm sản lượng tôm thu được vụ tới $\left(F(x):kg\right)$

Vậy sản lượng tôm thu hoạch được trong vụ tới có pt tổng quát là:

$$F\left(x\right)=\left(100-x\right)\left(20+\frac{3}{8}x\right)=2000+\frac{35}{2}x-\frac{3}{8}x^2$$

Bìa toán trở thành tìm x để F(x) lớn nhất.

Ta có:

$$F'\left(x\right)=\frac{25}{2}-\frac{3}{4}x$$

$$F'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\frac{25}{2}-\frac{3}{4}x=0\Leftrightarrow x=\frac{70}{3}$$

Bảng biến thiên

| X | 0 | | $\frac{70}{3}$ | | 100 |
|---|---|---|---|---|---|
| F'(x) | | + | 0 | − | |
| F(x) | | ↗ | $F_{max}$ | ↘ | |

Vậy vụ tới ông Thanh phải thả số kg tôm giống là:

$$100-\frac{70}{3}=\frac{230}{3}\approx 76,67\left(kg\right)$$

Chọn A.

**Nhận xét:**

Làm sao ta có thể tìm được hàm F(x) và tìm được hệ số $\frac{3}{8}$

Ta có thể hiểu đơn giản như sau: nếu ta không giảm số lượng tôm giống thì sản lượng tôm thu hoạch được là: $100.20=2000\left(kg\right)$ tôm.

Nếu ta giảm số $x(kg)$ tôm giống thì số tôm giống cần thả là $100-x$ và số kg tôm thu hoạch được là: $(100-x)(20+mx)kg$

Theo giả thiết tôm giống giảm 0,2 $\left(kg/m^2\right)$ thì $100m^2$ giảm $x=20kg$ , sản lượng thu được là $2200kg$.

Ta có: $(100-20)(20+m20)=2200 \Leftrightarrow m=\dfrac{3}{8}$

**Bài 6:**

Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được đo bởi công thức $G(x)=0,25x^2(30-x)$ trong đó $x(mg)$ và x > 0 là lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân. Để huyết áp giảm nhiều nhất thì cần tiêm cho bệnh nhân một liều lượng bằng bao nhiêu:

A. 15mg B. 30mg C. 40mg D. 20mg

**Lời giải:**

Ta có: $G(x)=0,25x^2(30-x)=\dfrac{3}{4}x^2-\dfrac{1}{40}x^3$

$G'(x)=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{3}{40}x^2$

$G'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}x-\dfrac{3}{40}x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0(\text{loai}) \\ x=20(\text{t/ m}) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

| X | 0 | | 20 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| G'(x) | | + | 0 | − | |
| G(x) | | $\nearrow$ | 100 | $\searrow$ | |

Dựa vào bảng biến thiên thì bênh nhân cần tiêm một lượng thuốc $20mg$

Chọn D.

**Bài 7:**

Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $G(t): 45t^2-t^3$, (kết quả khảo sát được trong 10 tháng vừa qua). Nếu xem $G'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người / ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ:

A. 25 B. 30 C. 20 D. 15

**Lời giải:**

Ta có:

$G'(t)=90t-3t^2$

$G''(t)=90-6t$

$G''(t)=0 \Leftrightarrow 90-6t=0 \Leftrightarrow t=15$

Bảng biến thiên:

| T | 0 | | 15 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| G''(t) | | + | 0 | − | |
| G(t) | | $\nearrow$ | 675 | $\searrow$ | |

Vậy tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ 15.

Chọn D.

**Bài 8:**

Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian $t(h)$ trong ngày cho bởi công thức $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12$. Khi nào mực nước của kênh là cao nhất với thời gian ngắn nhất?

A. $t = 10(h)$ B. $t = 14(h)$ C. $t = 15(h)$ D. $t = 22(h)$

**Lời giải:**

Ta có:

$$h' = -3\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right).$$

$$h' = 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow t = -2 + 6k, \left(k \in Z_{(+)}\right)$$

ở đây ta chỉ cần xét một số giá trị

| *k* | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| *t* | 4 | 10 | 16 | 22 |

Bảng biến thiên:

Ta suy ra được *h* đạt GTLN khi $t = 10$ (*h*)

**Lưu ý:** Ngoài cách trên ta có thể làm như sau

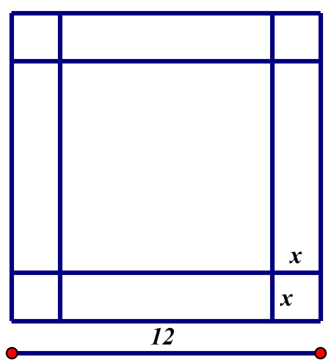
Vì $-1 \le cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) \le 1 \Rightarrow 9 \le 3cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12 \le 15.$

Vậy để h lớn nhất thì $cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow t = -2 + 12k, \left(k \in Z_{(+)}\right)$

Vậy h đạt GTLN khi $t = 10$ (*h*)

**Bài 9:**

(Đề minh họa Quốc gia 2017): Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh $x(cm)$, rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được cái hộp không nắp. Tìm x để được một cái hộp có thể tích lớn nhất.




A. $x = 6(cm)$ B. $x = 3(cm)$

C. $x = 2(cm)$ D. $x = 4(cm)$

**Lời giải:**

Khi cắt tấm nhôm hình vuông và gấp thành một cái hộp thì độ dài cạnh của cái hộp là: $12 - 2x$

Ta có:

$V = S.h = (12-2x)^2.x = 4x^3 - 48x + 144x$ với $0 < x \le 6$

Bài toán trở thành tìm x để V lớn nhất.

Ta có:

$V' = 12x^2 - 96x + 144$

$V' = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 96x + 144 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 6 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

| x | 0 | | 2 | | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| V'(x) | | + | 0 | − | |
| V(x) | | ↗ | 128 | ↘ | |

Vậy để thể tích hộp lớn nhất thì x =2 cm

Chọn C.

**Bài 10:**

Cuốn sách giáo khoa cần một trang chữ có diện tích là $384cm^2$. Lề trên và dưới là $3cm$, lề trái và lề phải là $2cm$. Kích thước tối ưu của trang giấy?

A. Dài $24cm$, rộng $17cm$ B. Dài $30cm$, rộng $20cm$

C. Dài $24cm$, rộng $18cm$ D. Dài $24cm$, rộng $19cm$

**Lời giải:**

Gọi chiều dài của trang chữ nhật là $x(cm), (x > 0)$

Chiều rộng của trang chữ nhật là: $\dfrac{384}{x}cm$

Chiều dài của trang giấy là $x + 6(cm)$

Chiều rộng của trang giấy là : $\dfrac{384}{x} + 4(cm)$

Diện tích trang giấy: $S = (x+6)\left(\dfrac{384}{x} + 4\right) = 408 + 4x + \dfrac{2304}{x}$

Bài toán trở thành tìm x để S đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có: $S'(x) = 4 - \dfrac{2304}{x^2}$

$S' = 0 \Leftrightarrow 4 - \dfrac{2304}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 24(\text{t/ m}) \\ \text{x} = -24(\text{loai}) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

| x | 0 | | 24 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| S'(x) | | − | 0 | + | |
| S(x) | | ↘ | $S_{\min}$ | ↗ | |

Vậy kích thước tối ưu của trang giấy có chiều dài là 30 cm, chiều rộng là 20 cm.

**Bài 11:**

Trong tất cả các hình chữ nhật có chu vi bằng 16cm thì hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $36cm^2$ B. $20cm^2$ C. $16cm^2$ D. $30cm^2$

**Lời giải:**

Gọi độ dài hình chữ nhật đó là: $x(cm)$. Chiều rộng của hình chữ nhật đó là: $(8-x)cm$

Suy ra $4 \le x \le 8$

Diện tích hình chữ nhật đó là: $S = x(8-x) = 8x - x^2$

Bài toán trở thành tìm x để S đạt GTLN.

Ta có: $S' = 8 - 2x; S' = 0 \Leftrightarrow 8 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 4$

Vì hàm S(x) liên tục trên $4 \le x \le 8$, ta có: $S(4) = 16; S(8) = 0$

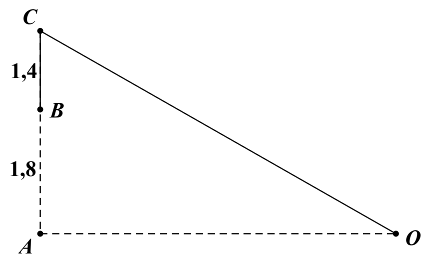
Kết luận: hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng $16cm^2$

Lưu ý: Bìa này ta còn có thể sử dụng lí thuyết của lớp 10. Tìm GTLN của parapol với hệ số a<0 thì $S_{\max} = -\frac{\Delta}{4a} = S\left(-\frac{b}{2a}\right) = 16$

Chọn C.

**Bài 12:**

Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4 mét và đặt ở độ cao 1,8 mét so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đó? Biết rằng góc $BOC$ là góc nhọn.




A. $AO = 2,4m$ B. $AO = 2m$

C. $AO = 2,6m$ D. $AO = 3m$

**Lời giải:**

Đặt độ dài cạnh $AO = x(cm), (x > 0)$

Suy ra:

$BO = \sqrt{3,24 + x^2}, CO = \sqrt{10,24 + x^2}$

Ta sử dụng định lí cosin trong tam giác OBC ta có:

$$\cos \text{BOC} = \frac{OB^2 + OC^2 - BC^2}{2.OB.OC} = \frac{(3,24 + x^2) + (10,24 + x^2) - 1,96}{2\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}}$$

$$= \frac{5,76 + x^2}{\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}}$$

Vì góc $BOC$ là góc nhọn nên bài toán trở thành bài toán tìm x để $F(x) = \frac{5,76 + x^2}{\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}}$

Đạt GTNN.

Đặt $(3,24 + x^2) = t, (t > 3,24)$.

Suy ra $F(t)=\dfrac{t+\dfrac{63}{25}}{\sqrt{t(t+7)}}=\dfrac{25t+63}{25\sqrt{t(t+7)}}$

Ta tìm t để $F(t)$ nhận giá trị nhỏ nhất.

$$F'(t)=\left(\frac{25t+63}{25\sqrt{t(t+7)}}\right)'=\frac{1}{25}\left(\frac{25\sqrt{t(t+7)}-(25t+63)\left(\dfrac{2t+7}{2\sqrt{t(t+7)}}\right)}{t(t+7)}\right)$$

$$=\frac{1}{25}\left(\frac{50(t^2+7t)-(25t+63)(2t+7)}{2t(t+7)\sqrt{t(t+7)}}\right)=\frac{1}{25}\left(\frac{49t-441}{2t(t+7)\sqrt{t(t+7)}}\right)$$

$F'(t)=0\Leftrightarrow t=9$

BBT

| t | 3,24 | | 9 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| F’(t) | | − | 0 | + | |
| F(t) | | $\searrow$ | $F_{\min}$ | $\nearrow$ | |

Thay vào đặt ta có: $\left(3,24+x^2\right)=9\Leftrightarrow x^2=\dfrac{144}{25}\Leftrightarrow x=2,4m$

Vậy để nhìn rõ nhất thì AO =2,4 m.

Chọn A.

**Bài 13:**

Một công trình nghệ thuật kiến trúc trong công viên thành phố Việt Trì có dạng là một tòa nhà hình chóp tứ giác đều nội tiếp một mặt cầu có bán kính 5(m). Toàn bộ tòa nhà đó được trang trí các hình ảnh lịch sử và tượng anh hùng, do vậy để có không gian rộng bên trong tòa nhà người ta đã xây dựng tòa nhà sao cho thể tích lớn nhất. Tính chiều cao của tòa nhà đó.

A. $h=\dfrac{20}{3}(m)$ B. $h=\dfrac{22}{3}(m)$ C. $h=\dfrac{23}{3}(m)$ D. $h=\dfrac{25}{3}(m)$

**Lời giải:**

Gọi độ dài cạnh đáy, chiều cao của hình chóp tứ giác đều lần lượt là x và h, (x>0, h>0, m)

Dựng mặt phẳng trung trực của 1 cạnh bên cắt trục đáy ở O, vậy O là tâm mặt câu. Ta có: $OS=5m,$ nên $OI=h-5,$ với I là giao của 2 đường chéo đáy. Vì tam giác OIC vuông nên ta có:

$$IC=\sqrt{OC^2-OI^2}=\sqrt{5^2-(h-5)^2}\Leftrightarrow\frac{x\sqrt{2}}{2}=\sqrt{10h-h^2}$$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt{20h-2h^2},(5<h<10)$$

Ta có thể tích khối chóp tứ giác đều:

$$V(h)=Bh=\frac{1}{3}\left(\sqrt{20h-2h^2}\right)^2h=\frac{1}{3}\left(20h^2-2h^3\right)$$

Bài toán trở thành tìm $h$ để V(h) đạt GTNN.

$V'(h)=\frac{1}{3}\left(40h-6h^2\right)$

$V'(h)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(40h-6h^2\right)=0 \Leftrightarrow h=\frac{20}{3}$

BBT

| $h$ | $5$ | $\frac{20}{3}$ | $10$ |
|---|---|---|---|
| $V'(h)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $V(h)$ | $\nearrow$ | $V_{\max}$ | $\searrow$ |

Vậy chọn chiều cao đó là $h=\frac{20}{3}(m)$

Chọn A.

**Bài 14:**

Khi nuối cá thí nghiệm trong hồ, một nhà khoa học đã nhận thấy rằng: nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng là $P(n)=480-20n(g)$. Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

A. 14 B. 13 C. 12 D. 11

**Lời giải:**

Gọi $F(n)$ là hàm cân nặng của n con cá sau vụ thu hoạch trên một đơn vị diện tích

Ta có: $F(n)=(480-20n).n=480n-20n^2$

Để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất thì cân nặng của n con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ là lớn nhất.

Bài toán trở thành tìm $n\in\mathbb{N}^*$ sao cho F(x) đạt GTLN.

$F'(n)=480-40n$

$F'(n)=0 \Leftrightarrow 480-40n=0 \Leftrightarrow n=12$

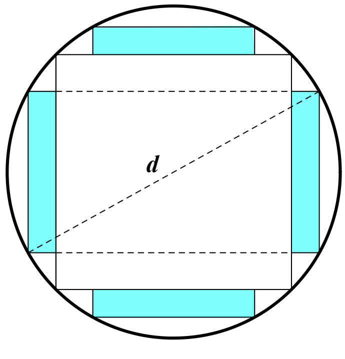
Học sinh tự lập bảng biến thiên.

Vậy phải thả 12 con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất.

Chọn C.

**Bài 15:**

(Trích luận văn thạc sĩ Nguyễn Văn Bảo): Một khúc gỗ tròn hình trụ cần xẻ thành một chiếc xà có tiết diện ngang là hình vuông và 4 miếng phụ như hình vẽ. Hãy xác định kích thước của các miếng phụ để diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là lớn nhất. Biết đường kính khúc gỗ là d.




A. Rộng $\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{16}d$, dài $\frac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{4}d$

B. Rộng $\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{15}d$, dài $\frac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{4}d$

C. Rộng $\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{14}d$, dài $\frac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{4}d$

D. Rộng $\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{13}d$, dài $\frac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{4}d$

**Lời giải:**

Gọi chiều dài và chiều rộng của miếng phụ lần lượt là x, y. Đường kính của khúc gỗ là d, khi đó tiết diện ngang của thanh xà có độ dài cạnh là $\frac{d}{\sqrt{2}}$ và

$$0<x<\frac{d\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}, 0<y<\frac{d}{\sqrt{2}}$$

Theo đề bài ta được hình chữ nhật ABCD như hình vẽ, theo định lý Pitago ta có:

$$\left(2x+\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2+y^2=d^2 \Leftrightarrow y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2-8x^2-4\sqrt{2}x}$$

Do đó, miếng phụ có diện tích là:

$$S\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2-8x^2-4\sqrt{2}dx} \text{ với } 0<x<\frac{d\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}$$

Bài toán trở thành tìm x để S(x) đạt GTLN.

Ta có:

$$S'(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2-8x^2-4\sqrt{2}dx}+\frac{x\left(-8x-2\sqrt{2}d\right)}{\sqrt{2}\sqrt{d^2-8x^2-4\sqrt{2}dx}}$$

$$=\frac{-16x^2-6\sqrt{2}dx+d^2}{\sqrt{2}\sqrt{d^2-8x^2-4\sqrt{2}dx}}$$

$$S'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow -16x^2-6\sqrt{2}dx+d^2=0 \Leftrightarrow -16\left(\frac{x}{d}\right)^2-6\sqrt{2}\left(\frac{x}{d}\right)+1=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{16}d$$

BBT

| X | 0 | | $\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{16}d$ | | $\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}d$ |
|---|---|---|---|---|---|
| S'(x) | | + | 0 | − | |
| S(x) | | $\nearrow$ | $S_{\max}$ | $\searrow$ | |

Vậy miếng phụ có kích thước $x=\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{16}d, y=\frac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{4}d$

Chọn A.

**Bài 16:**

Nhà Long muốn xây một hồ chứa nước có dạng một khối hộp chữ nhật có nắp đậy có thể tích bằng $576m^3$. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá tiền thuê nhân công để xây hồ tính theo $m^2$ là $500.000$ đồng/m$^2$. Hãy xác định kích thước của hồ chứa nước sao cho chi phí thuê nhân công là ít nhất và chi phí đó là bao nhiêu?

A. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 216 triệu

B. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 215 triệu

C. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 214 triệu

D. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 213 triệu.

**Lời giải:**

Gọi x, y, h lần lượt là chiều dài, chiều rộng, chiều cao của hồ chứa nước, $\left(x>0, y>0, h>0, m\right)$

Ta có: $\dfrac{y}{x}=2 \Leftrightarrow y=2x$

Thể tích hồ chứa nước $V=xyh \Leftrightarrow h=\dfrac{V}{xy}=\dfrac{576}{x\left(2x\right)}=\dfrac{288}{x^2}$

Diện tích cần xây dựng hồ chứa nước:

$S\left(x\right)=2xy+2xh+2yh=2x\left(2x\right)+2x\dfrac{288}{x^2}+2\left(2x\right)\dfrac{288}{x^2}=4x^2+\dfrac{1728}{x}$

Để chi phí nhân công là ít nhất thì diện tích cần xây dựng là nhỏ nhất, mà vẫn đạt thể tích như mong muốn.

Bài toán trở thành tìm x để $S\left(x\right)$ nhỏ nhất.

$S\left(x\right)=4x^2+\dfrac{1728}{x}$

$S'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow 8x-\dfrac{1728}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=6$

BBT

| X | 0 | | 6 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| S'(x) | | $-$ | 0 | $+$ | |
| S(x) | | $\searrow$ | $S_{\min}$ | $\nearrow$ | |

Vậy kích thước của hồ là: rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Diện tích cần xây: $432m^2$

Chi phí ít nhất là: $432x500.000=216.000.000$

Chọn A.

**Bài 17:**

Một công ty chuyên sản xuất container muốn thiết kế các thùng gỗ đựng hàng ở bên trong có dạng hình hộp chữ nhật và không có nắp, có đáy là hình vuông. Thùng gỗ có thể chứ được $62,5m^3$. Hỏi các cạnh của hình hộp chữ nhật có độ dài là bao nhiêu để tổng diện tích xung quanh và diện tích mặt đáy của thùng là nhỏ nhất?

A. Cạnh bên: $2,5m$, cạnh đáy: $5m$. B. Cạnh bên: 4m, cạnh đáy: $\dfrac{5\sqrt{10}}{4}m$

C. Cạnh bên: 3m, cạnh đáy: $\dfrac{5\sqrt{10}}{6}m$ D. Cạnh bên: 5m, cạnh đáy: $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}m$.

**Lời giải:**

Gọi x, h lần lượt là độ dài cạnh đáy hình vuông, chiều cao của thùng gỗ, $\left(x > 0, h > 0, (m)\right)$

.

Thể tích thùng gỗ: $V = x^2h \Leftrightarrow h = \dfrac{V}{x^2} = \dfrac{62,5}{x^2}$

Diện tích xung quanh và diện tích mặt đáy của thùng là:

$S(x) = x^2 + 4xh$

$= x^2 + 4x.\dfrac{62,5}{x^2}$

$= x^2 + \dfrac{250}{x}$

Bài toán trở thành tìm x để S(x) nhỏ nhất.

$S'(x) = 2x - \dfrac{250}{x^2}$

$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \dfrac{250}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 5$

BBT

| X | 0 | | 5 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| S'(x) | | − | 0 | + | |
| S(x) | | $\searrow$ | $S_{\min}$ | $\nearrow$ | |

Vậy để tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy của thùng là nhỏ nhất thì cạnh đáy là 5m, chiều cao 2,5m.

Chọn A.

**Bài 18:**

Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính R, nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp?

A. $2R^2$ B. $5R^2$ C. $R^2$ D. $3R^2$

**Lời giải:**

Gọi x là độ dài cạnh của hình chữ nhật không nằm dọc theo đường kính của hình tròn $(0 < x < R)$.

Độ dài cạnh còn lại của hình chữ nhật là $2\sqrt{R^2 - x^2}$

Ta có diện tích của hình chữ nhật là: $S(x) = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$

Bài toán trở thành tìm x để S(x) đạt GTLN.

$$S'(x)=2\sqrt{R^2-x^2}-\frac{2x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}=\frac{2R^2-4x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

$$S'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2R^2-4x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}=0\Leftrightarrow 2R^2-4x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{R\sqrt{2}}{2}\text{(t/ m)}\\ x=\frac{-R\sqrt{2}}{2}\text{(loai)}\end{array}\right.$$

BBT:

| | | | |
|---|---|---|---|
| X | 0 | $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ | R |
| S'(x) | + | 0 | − |
| S(x) | ↗ | $R^2$ | ↘ |

Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật là $R^2$

**Bài 19:**

(Đề thi thử Việt Trì lần I): Để thiết kế một chiếc bể cá hình chữ nhật có chiều cao là $60cm$, thể tích là $96.000cm^3$, người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70.000 đồng/m$^2$ và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 100.000 đồng/m$^2$. Chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là:

A. 83.200.000 đồng	B. 382.000 đồng

C. 83.200 đồng	C. 8.320.000 đồng.

**Lời giải:**

Diện tích của đáy hộp là: $S=\frac{V}{h}=\frac{96.000}{60}=1600cm^2=0,16m^2$

Gọi chiều dài cạnh đáy của hộp là $x,(x>0,m)$. Chiều rộng của hộp là $\frac{0,16}{x}$

Gọi $F(x)$ là hàm chi phí để làm để cá. Chi phí để hoàn thành bể cá:

$$F(x)=0,16\times 100.000+2.0,6x.70.000+2.0,6.\frac{0,16}{x}.70.000$$

$$=16.000+48.000x+\frac{13440}{x}$$

Bài toán trở thành tìm x để F(x) đạt GTNN.

$$F'(x)=84.000-\frac{13440}{x^2}$$

$$F'(x)=0\Leftrightarrow 84.000-\frac{13440}{x^2}=0\Leftrightarrow x=0,4$$

BBT

| | | | |
|---|---|---|---|
| X | 0 | 0,4 | $+\infty$ |
| F'(x) | − | 0 | + |
| F(x) | ↘ | $F_{\min}$ | ↗ |

Vậy chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là: 83.200 đồng

**Bài 20:**

Người ta muốn mạ vàng cho một cái hộp có đáy là hình vuông không có có nắp có thể tích chứa được $4dm^3$. Tìm kích thước của thùng để lượng vàng mạ là ít nhất. Giả sử độ dày của lớp mạ tại mọi nơi trên mặt ngoài hộp là như nhau:

A. Cạnh đáy: 2dm, cao: 1dm. B. Cạnh đáy: 2dm, cao: 2dm.

C. Cạnh đáy: 1dm, cao: 2dm. D. Cạnh đáy: 2dm, cao: 3dm.

**Lời giải:**

Gọi: Độ dài cạnh đáy của hộp là $x,(x>0,dm)$

Chiều cao của hộp là $h,(h>0,dm)$. S(x) là diện tích của hộp cần mạ $(dm^2)$

Ta có khối lượng cần mạ là: $(P_{vang}.d).S(x)=C.S(x)$

Với C là hằng số, $P_{vang}$ là khối lượng riêng của vàng.

Ta có: Khối lượng vàng cần mạ tỉ lệ thuận với $S(x)$

Thể tích hộp $V=x^2h \Leftrightarrow h=\frac{V}{x^2}=\frac{4}{x^2}$

$S(x)=4xh+x^2=\frac{16}{x}+x^2$

Bài toán trở thành tìm x để $S(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$S'(x)=\frac{-16}{x^2}+2x$

$S'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-16}{x^2}+2x=0 \Leftrightarrow x=2$

BTT:

| X | 0 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| S’(x) | | − | 0 | + | |
| S(x) | | ↘ | $S_{\min}$ | ↗ | |

Vậy để tiết kiệm nhất lượng vàng cần mạ thì chũng ta phải sản xuất hoppj có kích thước cạnh đáy: $x=2dm,\ \ cao:h=1dm$.

Chọn A.

## 2.7. Bài tập tự giải

**Bài 21:**

Ông Thanh nuôi cá chim ở một cái ao có diện tích là $50m^2$.Vụ trước ông nuôi với mật độ là 20 con/$m^2$ và thu được 1,5 tấn cá. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình thì cứ thả giảm đi 8 $con/m^2$ thì mỗi con cá khi thu hoạch tăng lên 0,5kg. Vậy vụ tới ông phải thả bao nhiêu con cá giống để được tổng năng suất khi thu hoạch là cao nhất? Giả sử không có hao hụt khi nuôi.

A. 512 con B. 511 con C. 510 con D. 509 con

Chọn A.

**Bài 22:**

Người ta cần làm một hộp theo dạng một khối lăng trụ đều không nắp với thể tích lớn nhất từ một miếng tôn hình vuông có cạnh là 1 mét. Thể tích của hộp cần làm.

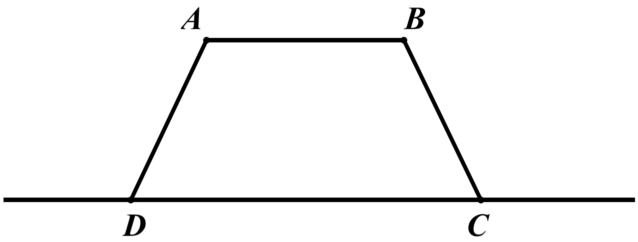
A. $V = \frac{2}{27}dm^3$ B. $V = \frac{3}{27}dm^3$ C. $V = \frac{4}{27}dm^3$ D. $V = \frac{5}{27}dm^3$

Chọn A.

**Bài 23:**

(Đề minh học HSG Phú Thọ 2016-2017)

Một người nông dân có ba tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài $a(m)$ và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân ABCD như hình vẽ (Bờ sông là đường thẳng CD không phải rào). Hỏi ông ta có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu $m^2$ ?




A. $\sqrt{3}a^2$ B. $\frac{5\sqrt{3}a^2}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$ D. $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$

Chọn D.

**Bài 24:**

Một công ty muốn làm đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ đến một điểm B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6km. Giá thành để xây đường ống trên bờ là 50.000USD mỗi km, và 130.000USD mỗi km để xây dưới nước. B' là điểm trên bờ sao cho BB' vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến B' là 9km. Vị trí C trên đoạn AB' sao cho khi nối ống theo hướng ACB thì số tiền ít nhất. Khi đó C cách A một đoạn bằng:

A. 9km B. 6,5km C. 5km D. 4km.

Chọn B.

**Bài 25:**

Một gia đình cần xây một cái bể nước hình trụ có thể chứa được $150m^3$ có đáy được làm bằng bê tông, thành làm bằng tôn, bề mặt làm bằng kính. Tính chi phí thấp nhất cần dùng để xây bể nước đó. biết giá thành vật liệu làm bằng bê tông có giá thành là 100.000 đồng/m$^2$, làm bằng tôn là 90.000 đồng/m$^2$, bề mặt làm làm bằng kính là 120.000 đồng/m$^2$. (số tiền để xây được tính lấy giá trị lớn hơn gần nhất với số tiền tính toán trên lí thuyết).

A. 15.041.000đ B. 15.040.000đ C. 15.039.000đ D. 15.038.000đ

Chọn C.

**Bài 26:**

Có một tấm gỗ hình vuông có độ dài cạnh là 2m. Cắt tấm gỗ đó thành tấm gỗ có hình dạng là một tam giác vuông sao cho tổng của một cạnh tam giác vuông và cạnh huyền của tấm gỗ tam giác vuông đó bằng 1,2m. Hỏi cạnh huyền của tấm gỗ tam giác vuông đó bằng bao nhiêu để tam giác vuông có diện tích lớn nhất.

A. 0,8m B. 0,9m C. 1m D. 1,1m

Chọn A.

**Bài 27:**

Anh Tuân muốn xây dựng một hố ga không có nắp đậy dạng hình hộp chữ nhật có thể tích chứ được $3200cm^3$, tỉ số giữa chiều cao và chiều rộng của hố ga bằng 2. Xác định diện tích đáy của hố ga để khi xây hố tiết kiệm được nguyên liệu nhất.

A. $170cm^2$ B. $160cm^2$ C. $150cm^2$ D. $140cm^2$

Chọn B

**Bài 28:**

Một trung tâm thương mại bán 2500 ti vi mỗi năm. Chi phí gửi trong kho là 100.000 đồng một cái ti vi mỗi năm. Để đặt hàng chi phí cố định cho mỗi lần đặt là 200.000 đồng cộng thêm 90.000 đồng mỗi cái ti vi. Trung tâm nên đặt hàng bao nhiêu lần trong mỗi năm và mỗi lần bao nhiêu cái để chi phí hàng tồn kho là ít nhất. Biết rằng mỗi lần đặt hàng về chỉ có một nửa trong số đó được trưng bày ở cửa hàng.

A. Đặt hàng 25 lần, mỗi lần 100 ti vi B. Đặt hàng 20 lần, mỗi lần 125 ti vi

C. Đặt hàng 10 lần, mỗi lần 250 ti vi D. Đặt hàng 50 lần, mỗi lần 50 ti vi

Chọn A.

**Bài 29:**

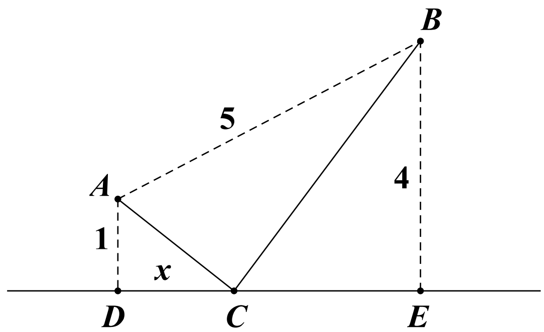
Mùa này công ty sách định ra 2 cuốn trắc nghiệm Lý và Toán với giá sản xuất là 200.000 đồng và 300.000 đồng. Khi đó hàm lợi ích chúng ta là $u(x;y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}$, với x, y là số lượng hai cuốn sách được in ra. Nhưng ban quản trị chỉ đồng ý đưa ra số tiền 300.000.000 đồng. Theo bạn phải sản xuất số lượng như thế nào để đạt doanh thu cho công ty sách cao nhất?

A. $\left(\frac{3000}{5}\right)^{\frac{5}{6}}$ triệu. B. $\left(\frac{2000}{5}\right)^{\frac{5}{6}}$ triệu. C. $\left(\frac{3001}{5}\right)^{\frac{5}{6}}$ triệu. D. $\left(\frac{2001}{5}\right)^{\frac{5}{6}}$ triệu.

Chọn A.

**Bài 30:**

Có hai cây cột dựng trên mặt đất lần lượt cao 1m và 4m, đỉnh của hai cây cột cách nhau 5m. Người ta chọn một vị trí trên mặt đất (nằm giữa hai chân cột) để giăng dây nối đến hai đỉnh cột để trang trí như hình dưới. Tính độ dài dây ngắn nhất.




A. $\sqrt{41}$ B. $\sqrt{37}$

C. $\sqrt{29}$ D. $3\sqrt{5}$

Chọn A.