ĐỀ SỐ 02

Câu 1. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin(x-1)}{a(x-1)}, & x>1 \\ x^2+ax-1, & x\le 1 \end{cases}$.

Tìm giá trị a để hàm số liên tục với mọi giá trị x.

Giải

+) TXĐ: $\mathbb{R}$

+) Với $x>1$ hàm số liên tục vì $f(x)=\dfrac{\sin(x-1)}{a(x-1)}$ là hàm số sơ cấp.

+) Với $x<1$ hàm số liên tục vì $f(x)=x^2+ax-1$ là hàm số sơ cấp.

+) $f(1)=\left(1^2+a.1-1\right)=a$

+) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sin(x-1)}{a(x-1)}=\dfrac{1}{a}$

+) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+ax-1\right)=a$

+) Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ f(x) liên tục tại x=1

Hay là $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{a}=a \Leftrightarrow a^2=1 \Leftrightarrow a=\pm 1$

ĐỀ SỐ 02

Câu 2. Cho y là hàm ẩn của x xác định từ phương trình $\ln y - x^2 - 2xy + 4x = 0$ (C).

Hãy tìm đạo hàm của y theo x, từ đó viết phương trình tiếp tuyến với đường cong (C) tại điểm M có tung độ $y_M = 1$.

Giải

+) Đạo hàm 2 vế của PT theo x, ta được:

$$\frac{y'}{y} - 2x - 2y - 2xy' + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow y' \cdot \left(\frac{1}{y} - 2x\right) = 2x + 2y - 4$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{2x + 2y - 4}{\frac{1}{y} - 2x}$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{(2x + 2y - 4)y}{1 - 2xy}$$

+) Gọi $M(x_M; 1) \in (C) \Rightarrow -x_M^2 - 2x_M + 4x_M = 0$

$$\Leftrightarrow -x_M^2 + 2x_M = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_M = 0 \\ x_M = 2 \end{array}\right.$$

+) Với $M(0;1)$:

$$y' = -\frac{2}{1} = -2$$

→ PTTT tại $M(0,1)$: $y - 1 = -2(x - 0)$

$$\Leftrightarrow y = -2x + 1$$

+) Tại $M(2;1)$:

$$y' = \frac{2}{-3} = \frac{-2}{3}$$

→ PTTT tại $M(2;1)$:

$$y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow y - 1 = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$$

ĐỀ SỐ 02

Câu 3. Tính tích phân suy rộng bằng định nghĩa $K = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+1)^4}} dx$..

Giải

$$K = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{2} \int\limits_0^b (x^2+1)^{-4/3} d\left(x^2+1\right)$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{2} \left[-3\left(x^2+1\right)^{-1/3}\right]_0^b$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \frac{-3}{2} \left[\left(b^2+1\right)^{-1/3} - 1\right]$$

$$= \frac{3}{2}$$

ĐỀ SỐ 02

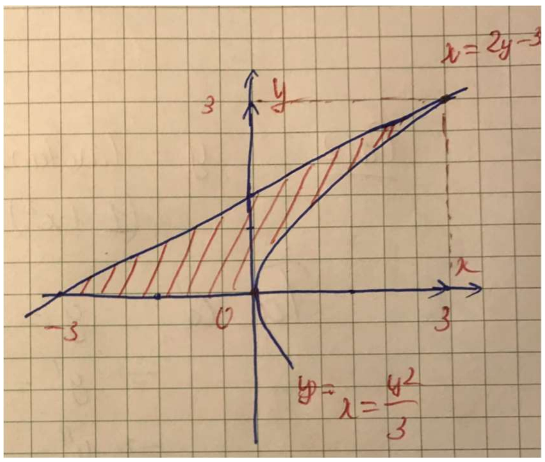
Câu 4. . Cho miền D giới hạn bởi các đường $y^2 = 3x$; $x = 2y - 3$ và Ox .

a) Vẽ miền D .

b) Tính diện tích miền D .

Giải

a) Vẽ miền D



b) Hàm lớn: $x = y^2 / 3$

Hàm bé: $x = 2y - 3$

Cận y từ 0 đến 3

$$S = \int_0^3 \left[\frac{y^2}{3} - (2y - 3) \right] dy$$

$$= \left(\frac{y^3}{9} - y^2 + 3y \right)_0^3$$

=3 (đvdt)

ĐỀ SỐ 02

Câu 5. Tính bán kính hội tụ và tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{\sqrt{2n}}$.

Giải

+) Đặt $X = x-1$. Ta có chuỗi lũy thừa: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{X^n}{\sqrt{2n}}$ (2)

+) $a_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}$

+) $l = \lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}:\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$

$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2(n+1)}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}} = 1$

+) Bán kính hội tụ: $R = 1$

+) Khoảng hội tụ: $(-1;1)$

+) Tại $X = -1$. Chuỗi (2) trở thành chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n}}$

Đây là chuỗi số đan đấu với thành phần dương $u_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ là dãy đơn điệu giảm và tiến đến 0 khi $n \to +\infty$. Theo tiêu chuẩn Lép-nít chuỗi số HT.

+) Tại $X = 1$. Chuỗi (2) trở thành chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$. Đây là chuỗi số cơ bản với $\alpha = \frac{1}{2} \le 1$ nên chuỗi số PK.

+) Miền HT của chuỗi lũy thừa (2) là $-1 \le X < 1$

Miền HT của chuỗi lũy thừa ban đầu là: $-1 \le x-1 < 1 \Leftrightarrow 0 \le x < 2$