TRƯỜNG ... PHÒNG KHẢO THÍ ... ĐẢM BẢO CHẤT LƯỢNG

ĐỀ THI MÔN: GIẢI TÍCH HÀM MỘT BIẾN.

Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

(Đề thi có 1 trang)

Mã đề: 955

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^3+1} \text{ khi } x \neq -1 \\ \dfrac{-2}{3} \text{ khi } x = -1 \end{cases}$.

Xét tính liên tục của hàm số trên $\mathbb{R}$.

Câu 2. Cho hàm số $y = \dfrac{x-3}{x+4}$. Chứng minh rằng $y'' - \dfrac{2}{y-1}(y')^2 = 0$.

Câu 3. Tính tích phân sau:

$$I = \int_0^2 f(x)\,dx \text{ với } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } 0 \le x \le 1 \\ 2-x & \text{khi } 1 < x \le 2 \end{cases}.$$

Câu 4. Cho miền phẳng D được giới hạn bởi các đường $x = y^2$ và $x = 4$.

a) Vẽ miền D.

b) Tính diện tích miền D.

Câu 5. Xét sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}.$$

---------------------- *Hết* ----------------------

Câu 1.

+) Với $x \neq -1$ thì $x^3+1 \neq 0$ nên $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3+1}$ liên tục tại mọi điểm $x \neq -1$.

+) Tại $x=-1$, ta có $f(-1)=\dfrac{-2}{3}$.

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^3+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x^2-x+1}=\frac{-1-1}{1+1+1}=\frac{-2}{3}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x)=f(-1)$

$\Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x=-1$.

Kết luận: $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 2.

$y=\dfrac{x-3}{x+4}$. Điều kiện $x\neq -4$

$$y'=\frac{1\cdot(x+4)-1\cdot(x-3)}{(x+4)^2}=\frac{7}{(x+4)^2}$$

$$y''=\frac{7}{(x+4)^3}\cdot(-2)=\frac{-14}{(x+4)^3}$$

$$y''-\frac{2}{y-1}(y')^2=\frac{-14}{(x+4)^3}-\frac{2}{\frac{x-3}{x+4}-1}\cdot\left[\frac{7}{(x+4)^2}\right]^2$$

$$=\frac{-14}{(x+4)^3}-\frac{2}{\frac{-7}{(x+4)}}\cdot\frac{49}{(x+4)^2}$$

$$=\frac{-14}{(x+4)^3}-\frac{-14}{(x+4)^3}=0$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Câu 3.

$$I=\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

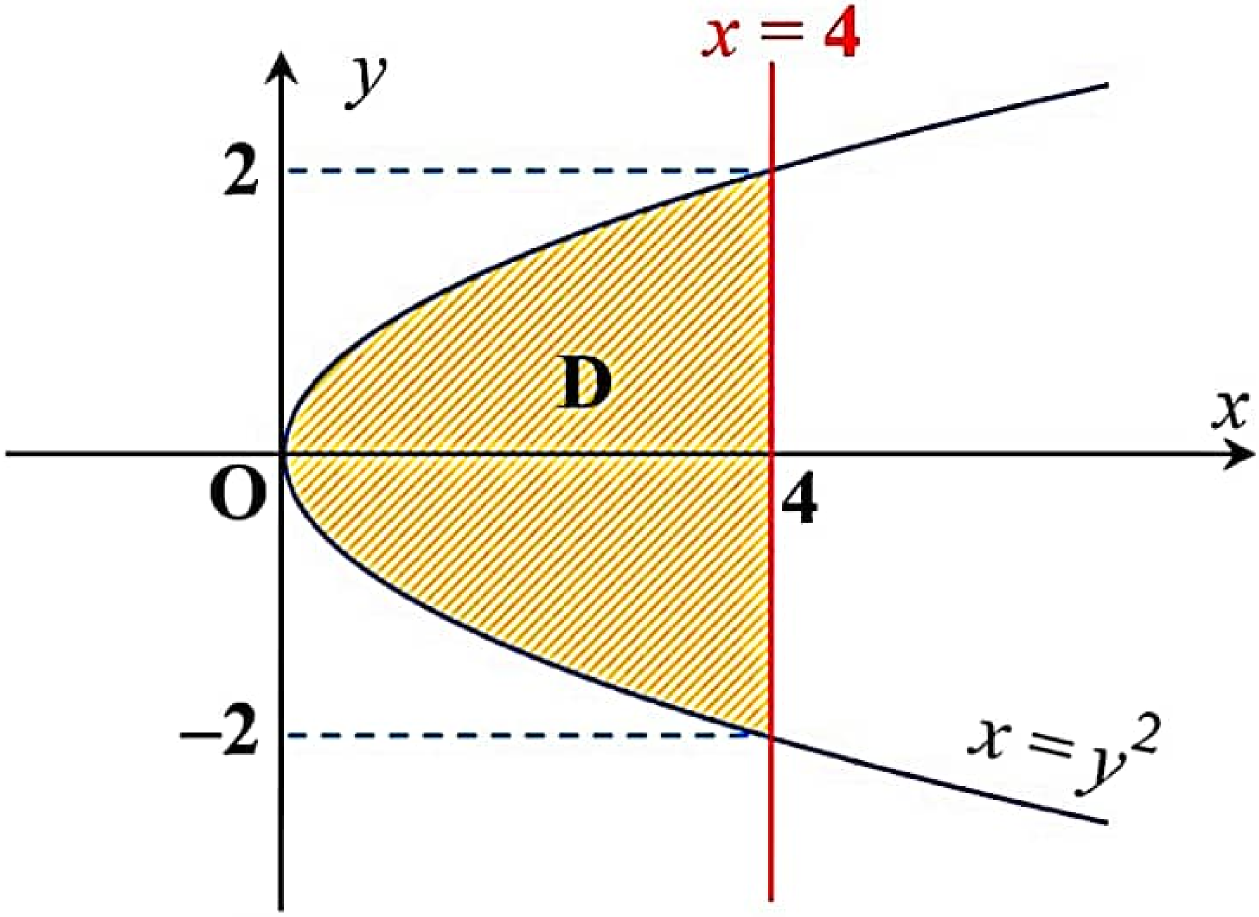
$$=\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x+\int_1^2 (2-x)\,\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1+\left.\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\right|_1^2$$

$$=\frac{1}{3}-0+\left(2-\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{6}$$

Vật $I=\frac{5}{6}$

Câu 4.a)

Hoành độ giao điểm: $y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2$



D là miền gạch chéo.

b) Theo hình vẽ, diện tích miền D là:

$$S_D = \int_{-2}^{2} \left(4 - y^2\right) \mathrm{d}y = \left(4y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2}$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{-16}{3} = \frac{32}{3}$$

Vậy $S_D = \dfrac{32}{3}$ (đơn vị diện tích)

Câu 5.

$a_n = \dfrac{3^n}{n!} > 0$ với $n \geq 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{n!}$ là chuỗi số dương.

$$a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot 3^n \cdot n!}{n!(n+1) \cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1$$

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{n!}$ hội tụ theo Đa–lăm–be

Câu 1. Tính các giới hạn sau:

a) $I_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2^x + 6}{2^x - 3}$.

b) $I_2 = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2^{-x} + 6}{2^{-x} - 3}$.

Câu 2. Tính đạo hàm cấp 1, 2, 3 và cấp n của hàm số $y = \dfrac{1}{2x + 7}$.

Câu 3. Tính tích phân suy rộng sau bằng định nghĩa: $I = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^3 + x}$.

Câu 4. Cho miền phẳng D giới hạn bởi các .đường $y = 2x - x^2$ và $x + y = 0$

a) Vẽ miền D .

b) Tính diện tích miền D .

Câu 5. Tìm tổng riêng của chuỗi số sau, từ đó tìm tổng của chuỗi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2}\right).$$

--------------------- *Hết* ---------------------

Câu 1.a)

$$I_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x + 6}{2^x - 3} \left(\text{dạng } \frac{\infty}{\infty} \right)$$

Lôpitan

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(2^x + 6\right)'}{\left(2^x - 3\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x \ln 2}{2^x \ln 2} = 1$$

Vậy $I_1 = 1$

Câu 1.b)

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$ và $2>1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} 2^{-x}=0$

$\Rightarrow I_2=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^{-x}+6}{2^{-x}-3}=\dfrac{0+6}{0-3}=-2$

Vậy $I_2=-2$

Câu 2.

$$y' = \frac{-2}{(2x+7)^2} = \frac{(-2)^1 \cdot 1!}{(2x+7)^{1+1}}$$

$$y'' = \frac{8}{(2x+7)^3} = \frac{(-2)^2 \cdot 2!}{(2x+7)^{2+1}}$$

$$y''' = \frac{-48}{(2x+7)^3} = \frac{(-2)^3 \cdot 3!}{(2x+7)^{3+1}}$$

Ta chứng minh $y^{(n)} = \dfrac{(-2)^n \cdot n!}{(2x+7)^{n+1}}$.

Thật vậy, với $n = 1$ thì mệnh đề đúng.

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$, tức là: $y^{(k)} = \dfrac{(-2)^k \cdot k!}{(2x+7)^{k+1}}$

$$\Rightarrow y^{(k+1)} = \left(y^{(k)}\right)' = \frac{(-2)^k k!(-k-1)}{(2x+7)^{k+2}} = \frac{(-2)^{k+1}(k+1)!}{(2x+7)^{k+2}}$$

$\Rightarrow$ mệnh đề đúng với $n = k + 1$

Vậy theo quy nạp, ta có: $y^{(n)} = \dfrac{(-2)^n \cdot n!}{(2x+7)^{n+1}}$

Câu 3.

$$I=\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^3+x}=\lim_{A\to+\infty}\int_{1}^{A}\frac{dx}{x^3+x}=\lim_{A\to+\infty}\int_{1}^{A}\frac{dx}{x\left(x^2+1\right)}$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\int_{1}^{A}\frac{\left(x^2+1\right)-x^2}{x\left(x^2+1\right)}dx=\lim_{A\to+\infty}\int_{1}^{A}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left(\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|\right)\Big|_{1}^{A}$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left(\ln A-\frac{1}{2}\ln\left(A^2+1\right)+\frac{1}{2}\ln 2\right)$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\left[\ln A^2-\ln\left(A^2+1\right)\right]+\frac{1}{2}\ln 2\right)$$

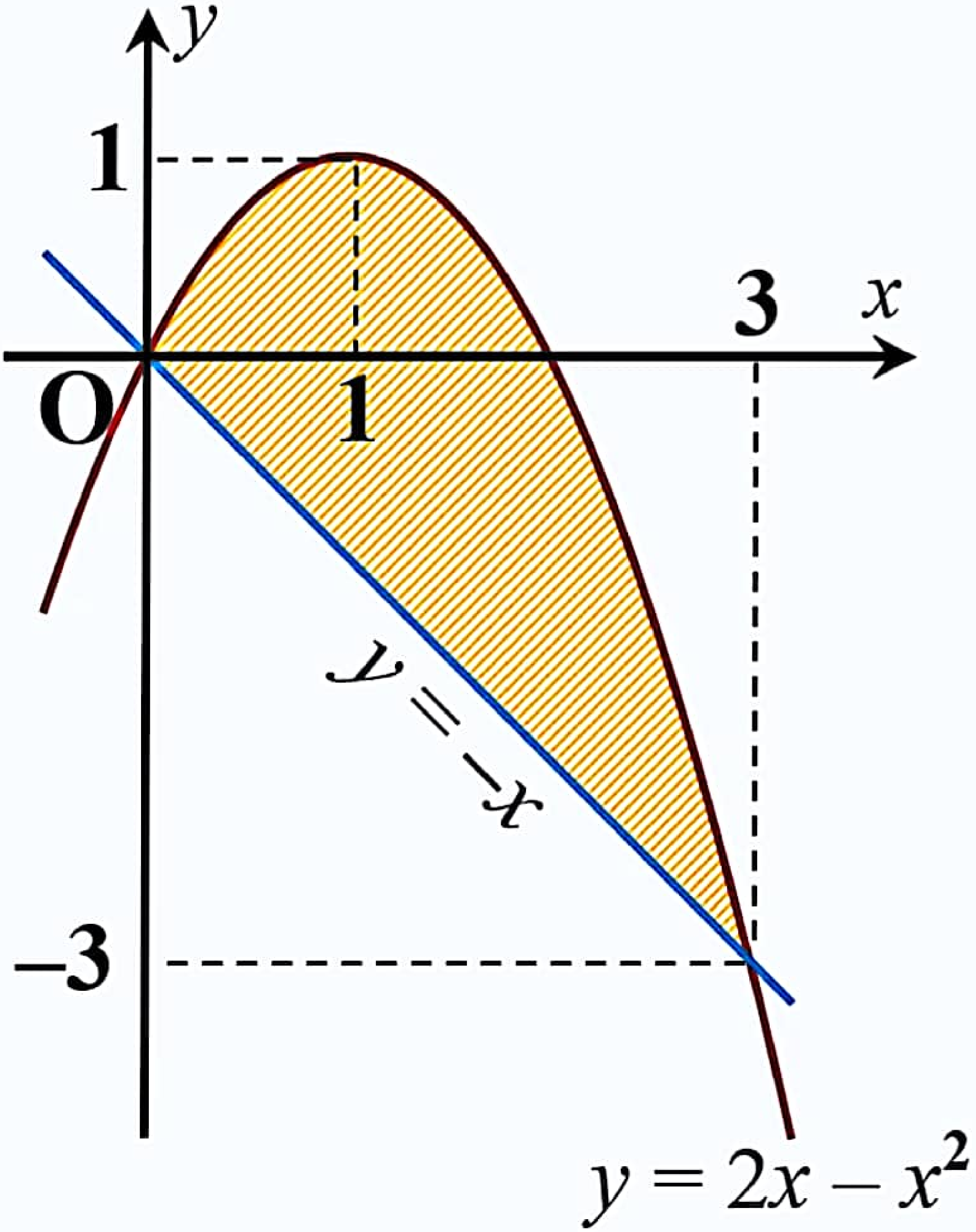
$$=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{A^2}{A^2+1}+\frac{1}{2}\ln 2\right)$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln 1+\frac{1}{2}\ln 2\right)=\frac{1}{2}\ln 2$$

(vì $\lim\limits_{A\to+\infty}\dfrac{A^2}{A^2+1}=\lim\limits_{A\to+\infty}\dfrac{A^2}{A^2}=1$)

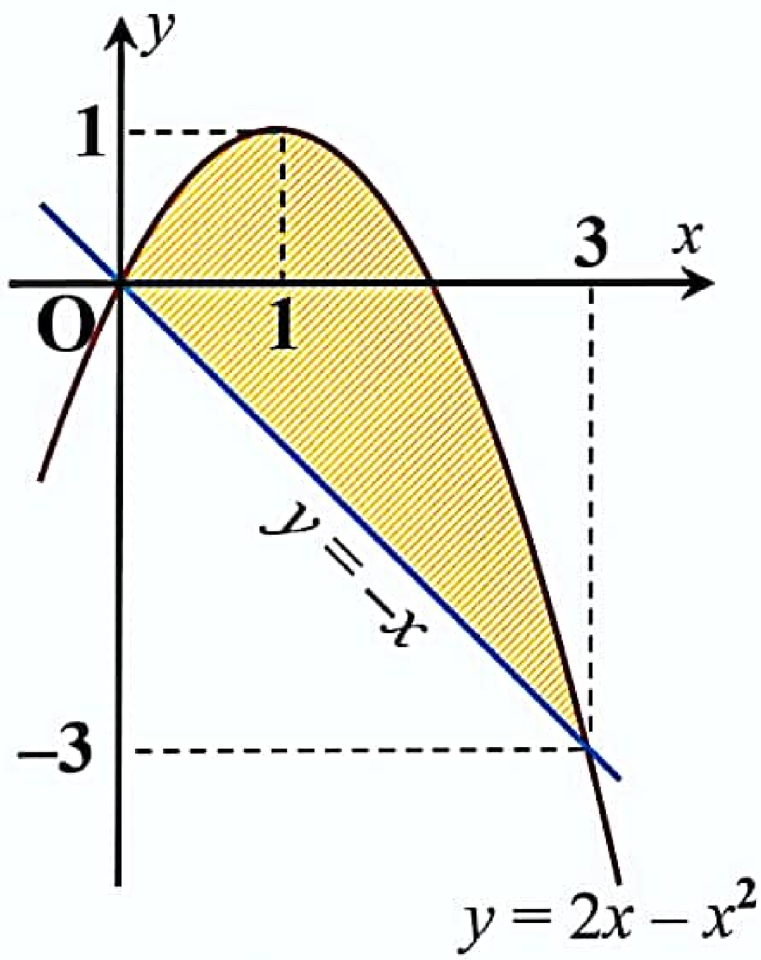
Vậy $I=\dfrac{\ln 2}{2}$

Câu 4.a)



D là miền được gạch chéo.

Câu 4.a)



D là miền được gạch chéo.

b) Theo hình vẽ, diện tích miền D là:

$$S_D = \int_0^3 \left[\left(2x - x^2\right) - (-x)\right] \mathrm{d}x = \int_0^3 \left(3x - x^2\right) \mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{9}{2} - 0 = \frac{9}{2}$$

Vậy $S_D = \dfrac{9}{2}$ (đơn vị diện tích).

Câu 5.

Gọi tổng riêng thứ n là $S(n)$.

$$S(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{7}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)$$

$\Rightarrow$ tổng chuỗi:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)=\lim_{n\to\infty}S(n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}-0\right)=\frac{1}{14}$$

Vậy tổng chuỗi cần tìm là $\frac{1}{14}$