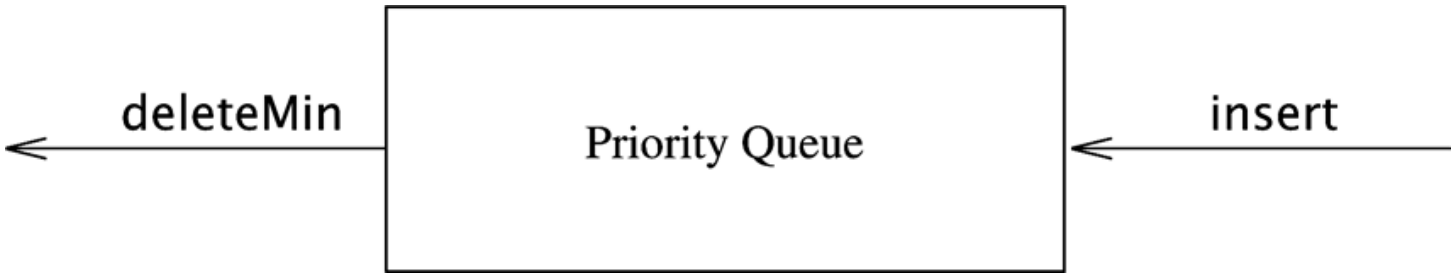
Hàng đợi ưu tiên (Priority Queues)

Bài giảng môn Cấu trúc dữ liệu và giải thuật

Khoa Công nghệ thông tin
Trường Đại học Thủy Lợi

Hàng đợi ưu tiên

- Phần tử nhỏ nhất có độ ưu tiên cao nhất và sẽ được lấy ra đầu tiên.
- Chèn (insert)
  - Thời gian O(log N)
- Xóa phần tử nhỏ nhất (deleteMin)
  - Thời gian O(log N)



Cài đặt hàng đợi ưu tiên

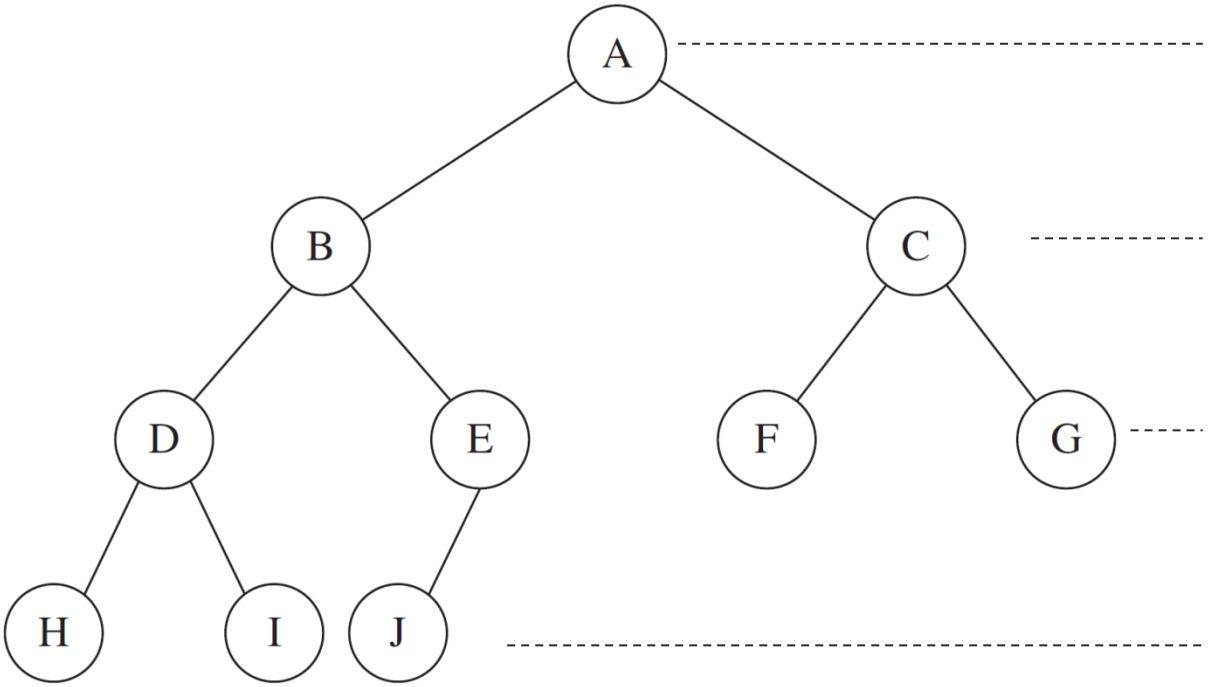
- Dùng danh sách liên kết:
  - insert (dùng pushFront) mất thời gian O(1).
  - deleteMin (quét tìm rồi xóa min) mất thời gian O(N).
- Dùng cây nhị phân tìm kiếm:
  - insert và deleteMin mất thời gian O(log N).
  - Tuy nhiên, cây nhị phân tìm kiếm quá phức tạp cho yêu cầu đơn giản hơn của hàng đợi ưu tiên.
- ***Đống nhị phân*** (binary heap):
  - Là cách cài đặt phổ biến của hàng đợi ưu tiên.
  - insert và deleteMin mất thời gian O(log N).

Đống nhị phân

- Gọi tắt là đống.
- Thỏa mãn:
  1. Là cây nhị phân đầy đủ.
  2. Có tính chất thứ tự đống.

Cây nhị phân đầy đủ

- Là cây nhị phân với tất cả các mức (trừ mức dưới cùng) đã được lấp đầy các nút từ trái sang phải.
- Số nút $n \geq 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{h-1} + 1 = 2^h \Rightarrow h \leq \log n$



Mức 0 có 2^0 nút

Mức 1 có 2^1 nút

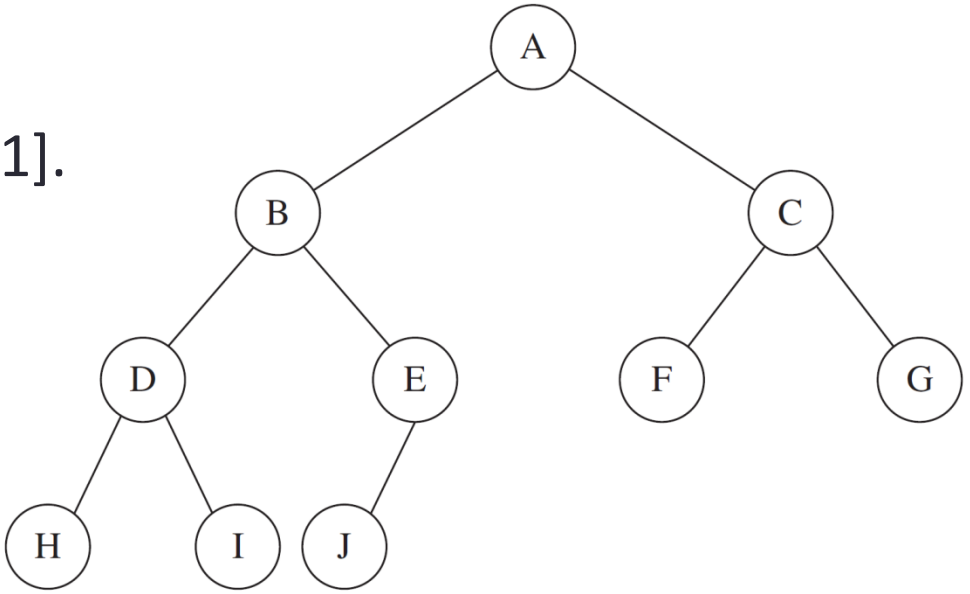
Mức 2 có 2^2 nút

Mức h có ít nhất 1 nút
(h là chiều cao của cây)

Cài đặt cây nhị phân đầy đủ

Lưu trữ các phần tử lần lượt từng mức vào vector v.

- Cha của v[k] là v[k/2].
- Con trái của v[k] là v[2k].
- Con phải của v[k] là v[2k + 1].

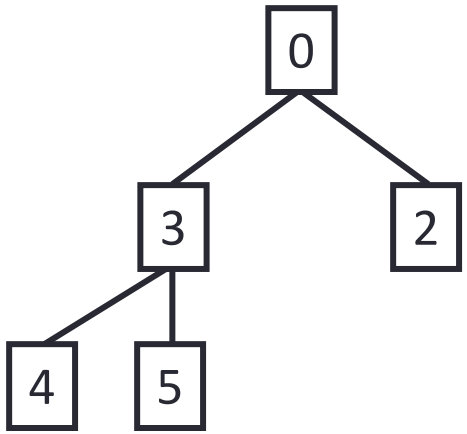


vector v

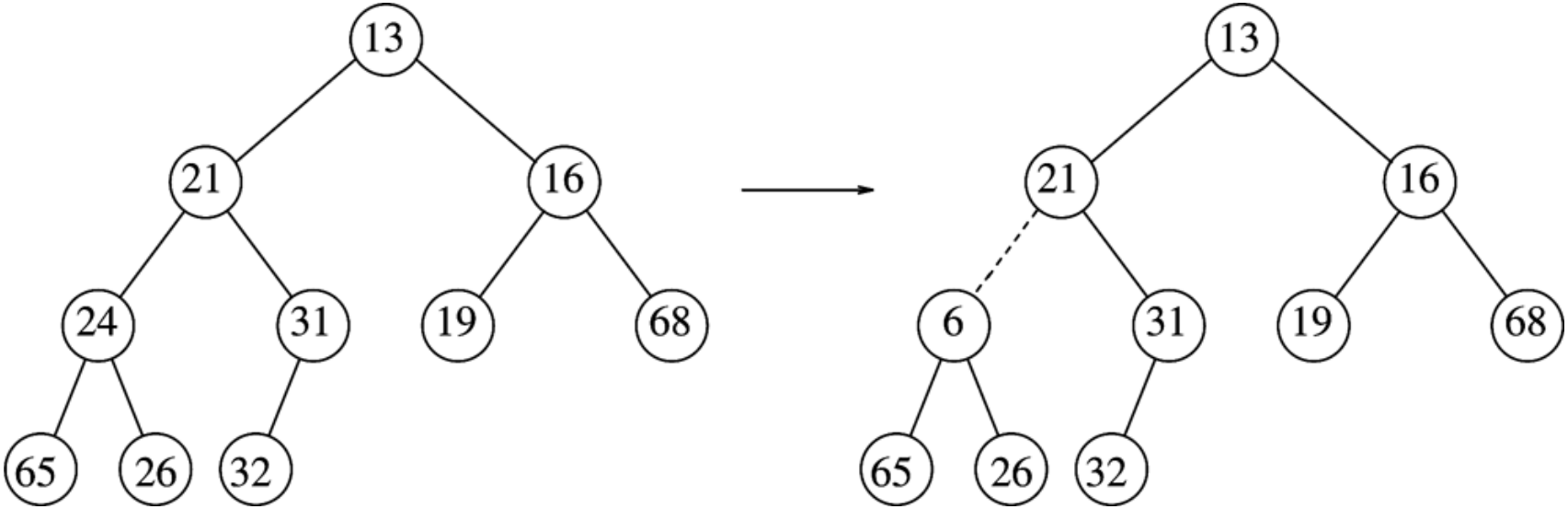
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J			
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Tính chất thứ tự đống

- Với mọi nút X trên đống, giá trị của X nhỏ hơn giá trị của các nút con trái và phải của X.
- Suy ra:
  - Phần tử nhỏ nhất trên đống nằm ở gốc.
  - Không có thứ tự nào giữa các nút con của cùng một nút.



Cây nào là đống?

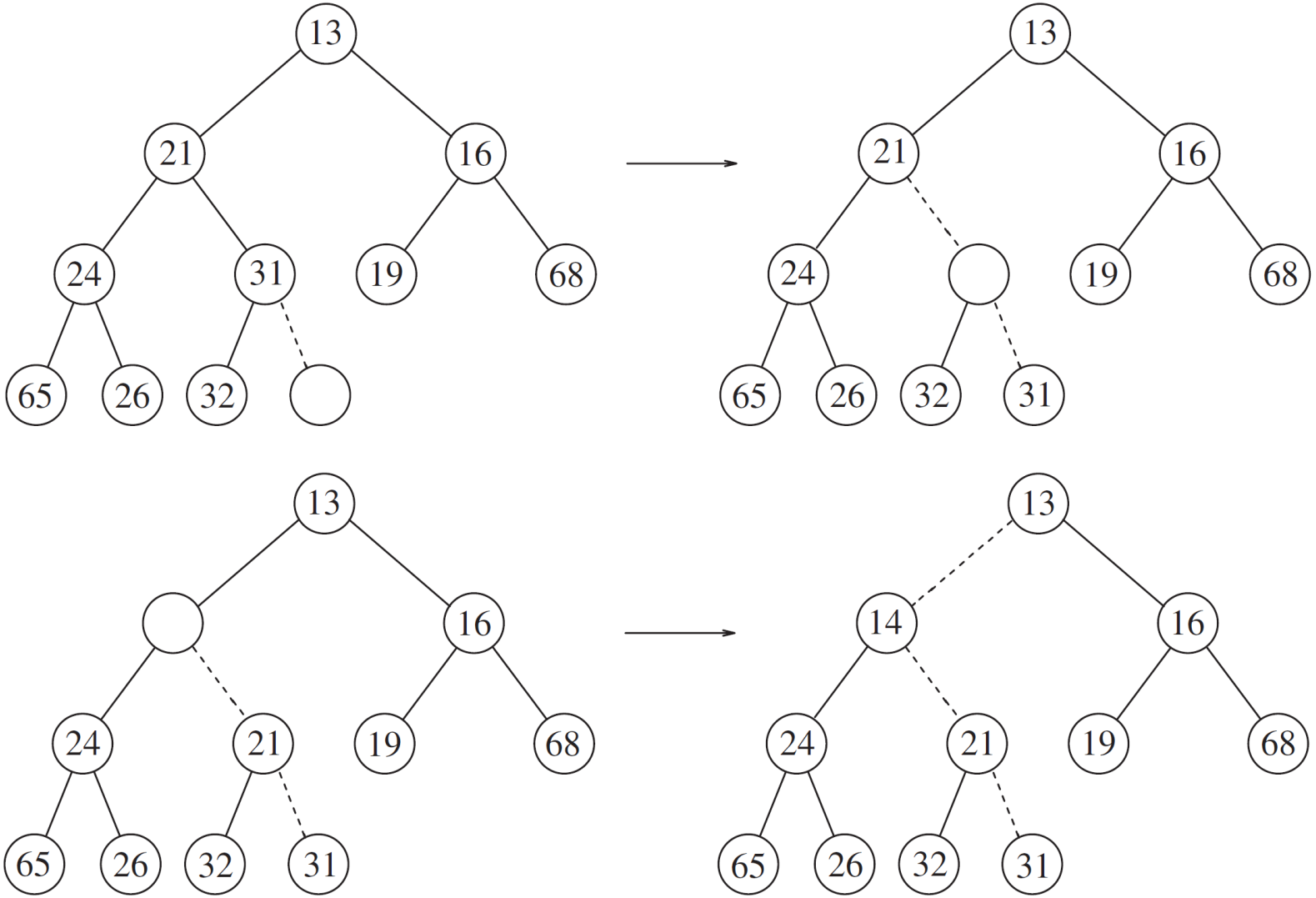


Cài đặt hàng đợi ưu tiên trong C++

```
// Kiểu phần tử
typedef int T;

// Kiểu đống nhị phân
struct BinaryHeap {
    int currentSize; // Số phần tử hiện có
    vector<T> array; // Vector chứa các phần tử
};

// Khởi tạo đống rỗng với dung lượng đã cho
void init(BinaryHeap & bh, int capacity = 100);

// Khởi tạo đống từ danh sách giá trị đã cho
void init(BinaryHeap & bh, vector<T> & elems);

T findMin(BinaryHeap & bh);         // Tìm phần tử nhỏ nhất (ở gốc)

void insert(BinaryHeap & bh, T x); // Chèn x vào đống

void deleteMin(BinaryHeap & bh);   // Xóa phần tử nhỏ nhất (ở gốc)
```

Ta dùng lớp vector trong thư viện chuẩn của C++

Chèn vào đống: insert (bh, 14)



Chèn vào đống: insert (bh, x)

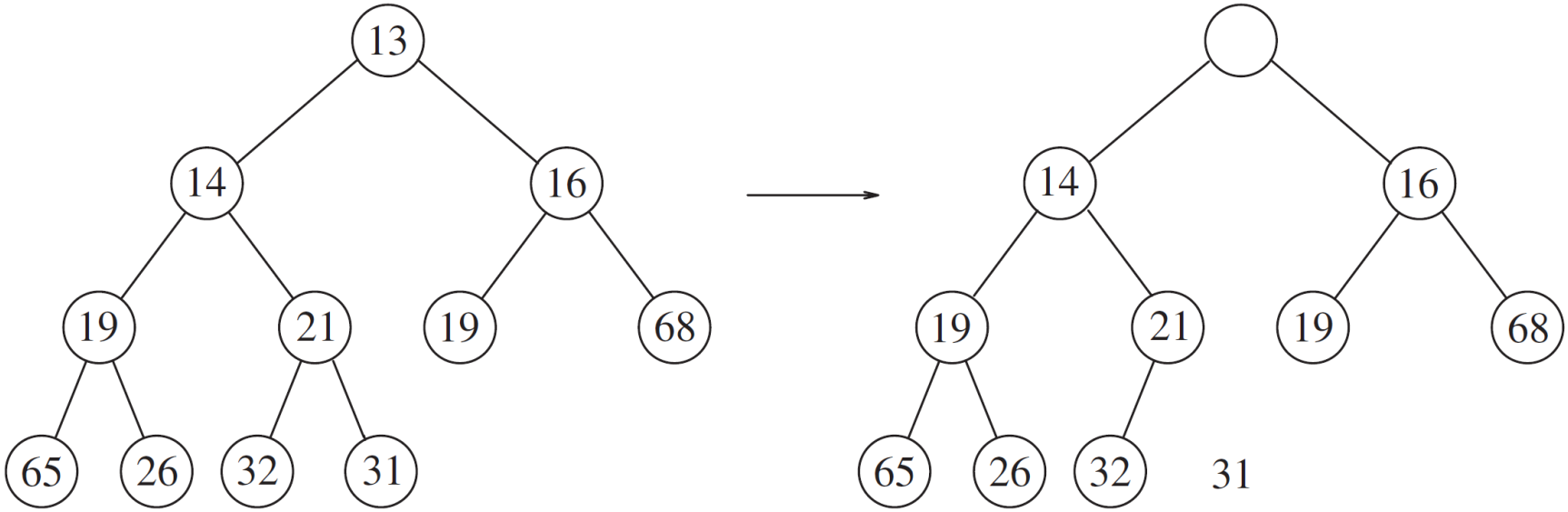
- Tạo lỗ trống (hole) ở vị trí có sẵn tiếp theo trong đống; x là giá trị của lỗ trống nhưng chưa chính thức đặt vào lỗ trống.
- Lặp lại:
  - Nếu x nhỏ hơn giá trị ở nút cha của lỗ trống:
    + Đổi chỗ lỗ trống và nút cha
  - Ngược lại:
    + Dừng lặp
- Đặt x vào lỗ trống.

Quá trình lỗ trống dịch chuyển dần lên trên như vậy được gọi là thẩm thấu ngược (percolate up).

Chèn vào đống: Lập trình

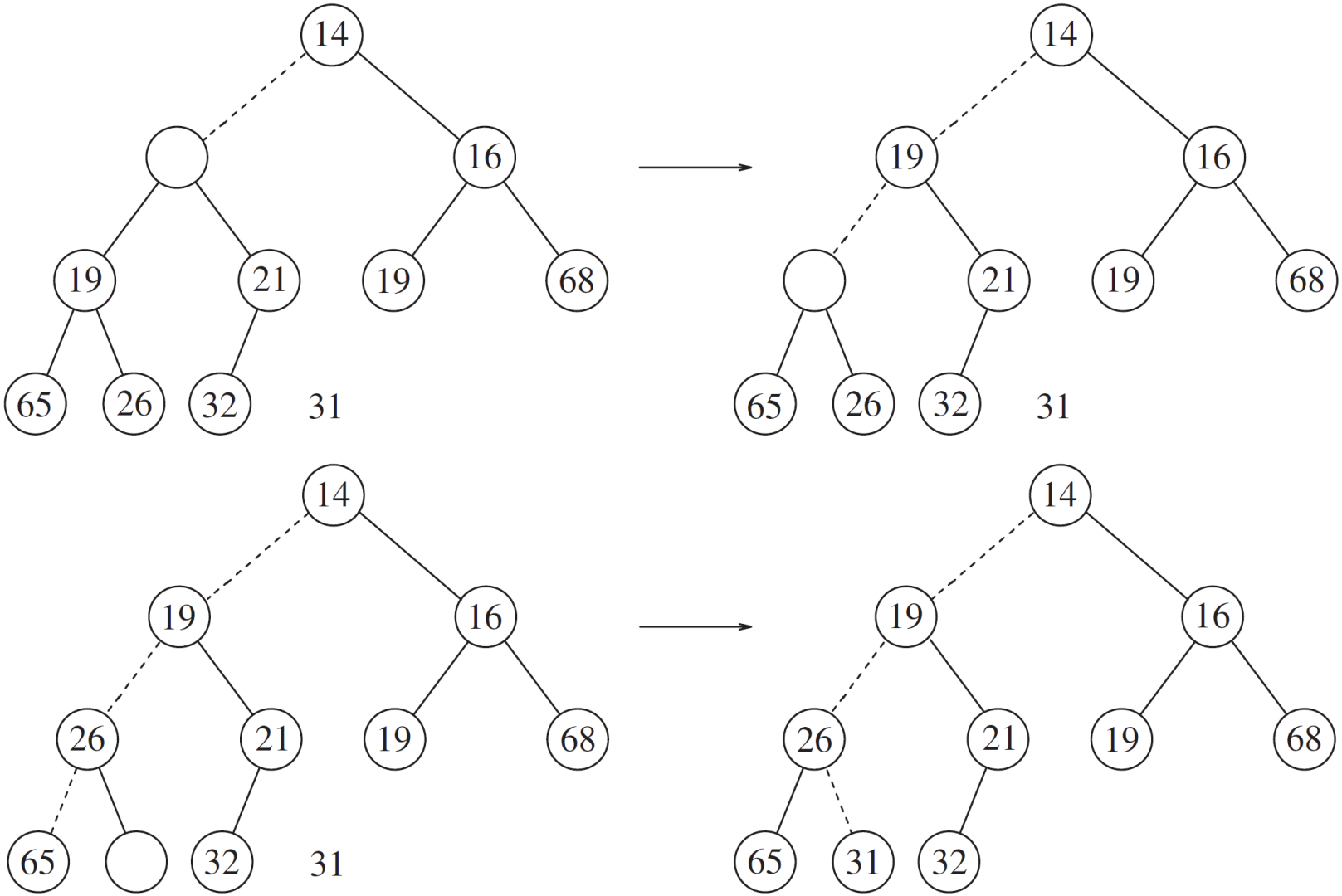
```
void insert(BinaryHeap & bh, T x) {
    // Tăng kích thước 2 lần nếu vector đầy
    if (bh.currentSize == bh.array.size() - 1)
        bh.array.resize(bh.array.size() * 2);

    // Thẩm thấu ngược
    bh.currentSize++;
    int hole = bh.currentSize;
    while (hole > 1 && x < bh.array[hole / 2]) {
        bh.array[hole] = bh.array[hole / 2];
        hole = hole / 2;
    }
    bh.array[hole] = x;
}
```

Xóa khỏi đống: Ví dụ



Tạo lỗ trống ở gốc; Xóa phần tử cuối cùng (x = 31)

Xóa khỏi đống: Ví dụ (tiếp)



Xóa khỏi đống: Thuật toán

- Tạo lỗ trống ở nút gốc.
- Gọi x là giá trị ở nút cuối cùng.
- Xóa nút cuối cùng.
- Lặp lại:
  - Xác định nút con nhỏ hơn của lỗ trống
  - Nếu x lớn hơn giá trị ở nút con nhỏ hơn:
    + Đổi chỗ lỗ trống và nút con nhỏ hơn (thẩm thấu xuôi – percolate down)
  - Ngược lại:
    + Dừng lặp
- Đặt x vào lỗ trống.

Xóa khỏi đống: Lập trình

```
void deleteMin(BinaryHeap & bh) {
    bh.array[1] = bh.array[bh.currentSize];
    bh.currentSize--;

    // Thẩm thấu xuôi (xem slide sau)
    percolateDown(bh, 1);
}
```

Thẩm thấu xuôi

```
void percolateDown(BinaryHeap & bh, int hole) {
    T x = bh.array[hole];
    int child;
    while (hole * 2 <= bh.currentSize) {
        child = hole * 2;
        if (child < bh.currentSize
            && bh.array[child + 1] < bh.array[child])
            child++;
        if (x > bh.array[child]) {
            bh.array[hole] = bh.array[child];
            hole = child;
        }
        else
            break;
    }
    bh.array[hole] = x;
}
```

Thời gian chạy của chèn và xóa

- Số phép so sánh (số đoạn đứt nét) trong quá trình thẩm thấu ngược (chèn) hoặc xuôi (xóa) không quá chiều cao của cây.
- Ta đã biết chiều cao của cây $h \leq \log n$.
- Suy ra, thời gian chạy của các thao tác chèn và xóa là $O(\log n)$.

Xây dựng đống từ danh sách giá trị đã cho

- Xây dựng đống từ một tập phần tử đã có:

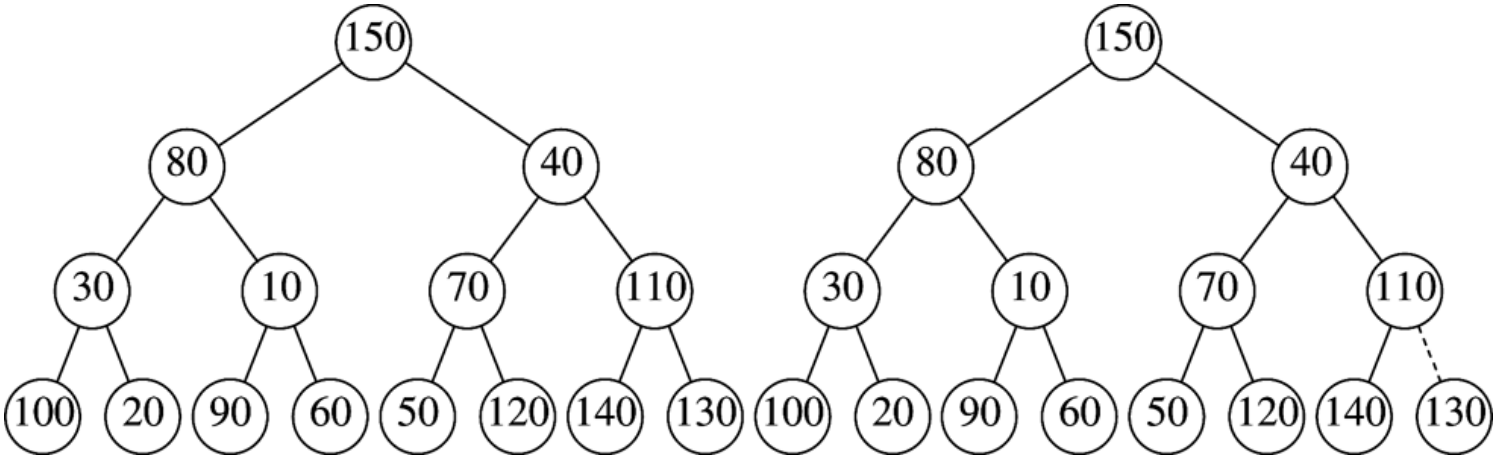
```
void init(BinaryHeap & bh, vector<T> & elems);
```

- Các bước:
  - Chèn lần lượt các phần tử vào cây mà không quan tâm tính chất thứ tự đống.
  - Duyệt qua các nút từ dưới lên trên, từ phải sang trái:
    + Tại mỗi nút, dùng phép thẩm thấu xuôi để nút đó thỏa mãn tính chất thứ tự đống.
- Thời gian chạy là O(n) (sẽ phân tích sau).

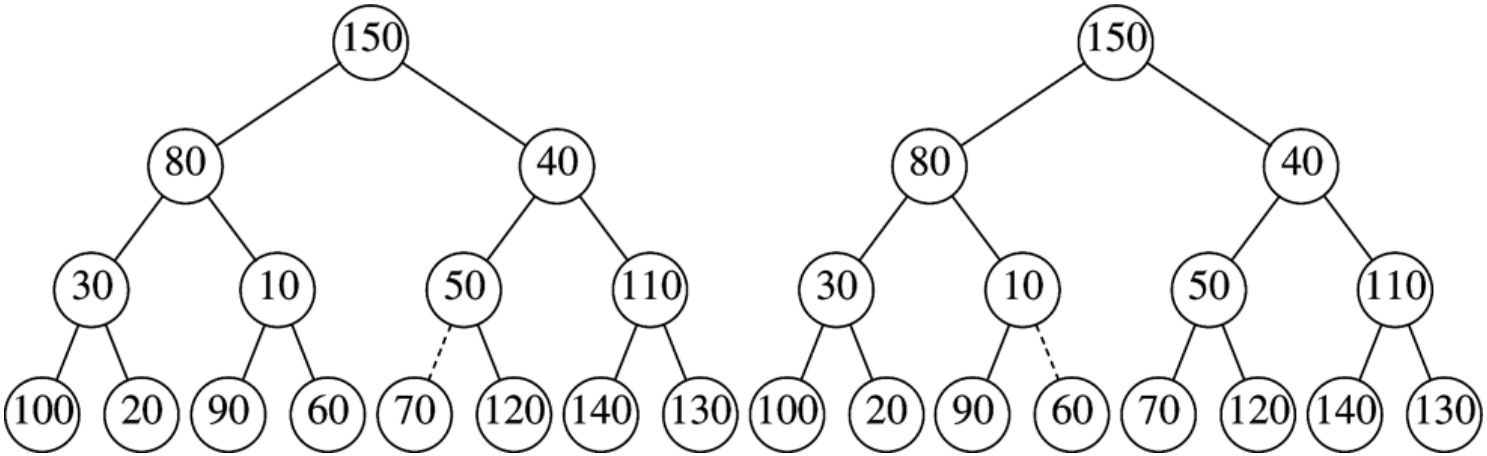
Xây dựng đống: Lập trình

```
void init(BinaryHeap & bh, vector<T> & elems) {
    bh.array.resize(elems.size() + 10);
    bh.currentSize = elems.size();
    for (int i = 0; i < elems.size(); i++) // O(n)
        bh.array[i + 1] = elems[i];

    buildHead(bh); // O(n), sẽ phân tích sau
}

// Thiết lập tính chất thứ tự đống
void buildHead(BinaryHeap & bh) {
    for (int i = bh.currentSize / 2; i > 0; i--)
        percolateDown(bh, i);
}
```

Xây dựng đống: Ví dụ



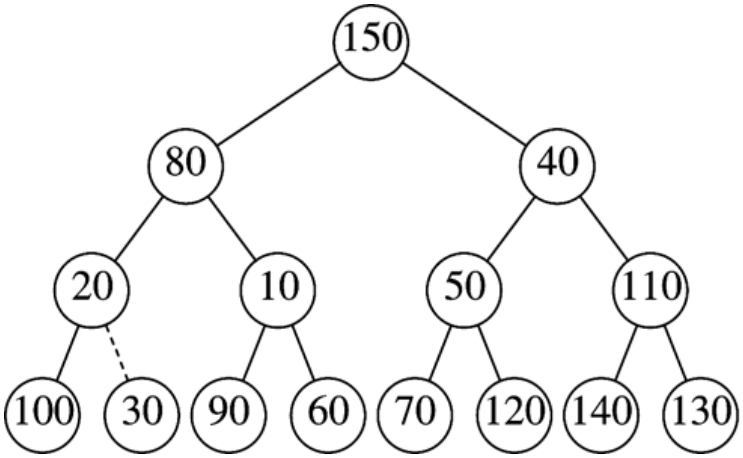
percolateDown(bh, 7)



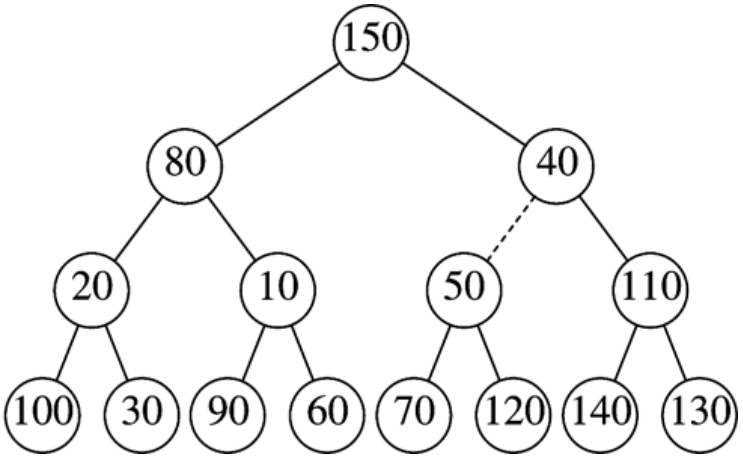
percolateDown(bh, 6)

percolateDown(bh, 5)

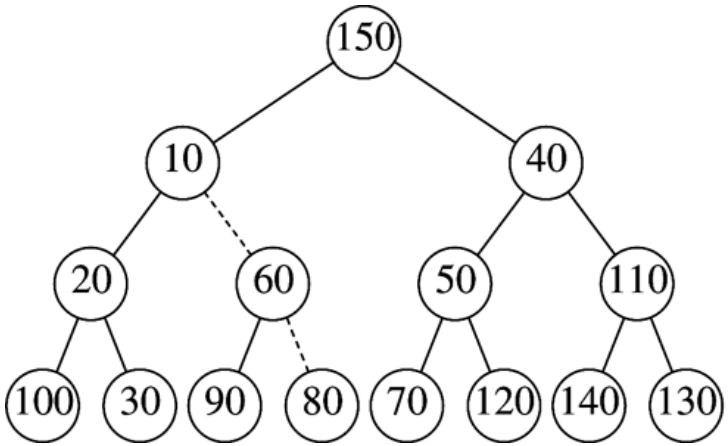
Xây dựng đống: Ví dụ (tiếp)



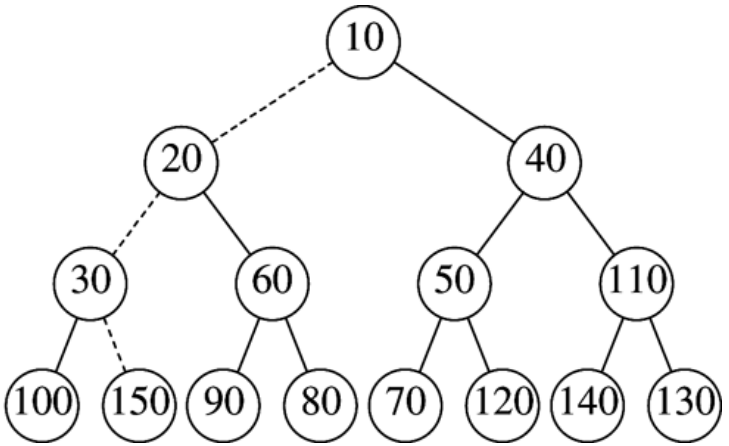
percolateDown(bh, 4)



percolateDown(bh, 3)



percolateDown(bh, 2)



percolateDown(bh, 1)

Thời gian chạy của buildHeap

- Thời gian chạy của buildHead tỉ lệ với tổng số đoạn đứt nét ≤ tổng chiều cao S của tất cả các nút ≤ tổng chiều cao S_2 của tất cả các nút trên cây nhị phân hoàn hảo tương ứng (mức dưới cùng cũng được lấp đầy).
- Cộng chiều cao của các nút theo từng mức trên cây:

$$S_2 = h + 2(h-1) + 2^2(h-2) + \cdots + 2^{h-1}$$

- Nhân hai vế với 2:

$$2S_2 = 2h + 2^2(h-1) + 2^3(h-2) + \cdots + 2^h$$

- Trừ hai đẳng thức trên theo từng vế:

$$S_2 = -h + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{h-1} + 2^h = -h + 2 \times \frac{1-2^h}{1-2}$$
$$= 2 \times 2^h - h - 2 < 2 \times 2^h$$

- Ta đã biết tổng số nút $n \geq 2^h \Rightarrow S_2 < 2n \Rightarrow$ Thời gian chạy của buildHeap là O(n).

Một ứng dụng của hàng đợi ưu tiên

- Bài toán: Tìm số nhỏ nhất thứ k trong n phần tử đã cho.
- Cách giải 1: thời gian $O(n^2)$
  - Sắp xếp n phần tử bằng một thuật toán đơn giản (VD: sắp xếp chọn), mất thời gian $O(n^2)$.
  - Trả về số thứ k.
- Cách giải 2: thời gian $O(n + k \log n)$
  - Tạo đống từ n phần tử đã cho $\rightarrow O(n)$
  - Thực hiện thao tác deleteMin k – 1 lần liên tiếp

    $\rightarrow O(k \log n)$
  - Thực hiện thao tác findMin $\rightarrow O(1)$

Bài tập

Bài tập 1:

a. Xét một đống đang rỗng. Hãy chèn (insert) lần lượt vào đống các giá trị sau đây:

{ 10, 12, 1, 14, 6, 5, 8, 15, 3, 9, 7, 4, 11, 13, 2 }

b. Xây dựng đống dùng hàm khởi tạo từ danh sách giá trị cho trong câu a.

Bài tập 2:

Thực hiện thao tác xóa (deleteMin) 3 lần liên tiếp trên các đống thu được trong bài tập 1.