Bài 6: ĐẶC TRƯNG CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN HAI CHIỀU

Vũ Mạnh Tới

Bộ môn Toán- Trường Đại học Thủy lợi

Ngày 07 tháng 05 năm 2024

6.1. Kỳ vọng của hàm 2 biến ngẫu nhiên

Định nghĩa. Cho (X, Y) là BNN với PPXS đồng thời là $f(x, y)$. Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên $g(X, Y)$ là

$$\mu_{g(X,Y)} = E[g(X, Y)] = \sum_x \sum_y g(x, y) f(x, y) \text{ nếu } (X, Y) \text{ là rời rạc}$$

$$\mu_{g(X,Y)} = E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dxdy \text{ nếu } (X, Y) \text{ liên tục}$$

Tính chất

- $E[g(X, Y) \pm h(X, Y)] = E[g(X, Y)] \pm E[h(X, Y)]$.
- $E(aX + bY) = aEX + bEY$ với $a, b \in \mathbb{R}$
- Nếu X và Y độc lập thì: $E(XY) = E(X).E(Y)$
- Nếu X và Y không độc lập thì khẳng định trên là không đúng.

Ví dụ 1: Cho X và Y là các biến ngẫu nhiên với phân phối xác suất như sau:

X ⋱ Y	0	1	2
0	0,1	0,2	0,2
1	0,05	0,1	0,1
2	0,05	0,2	0

Tính kỳ vọng của biến ngẫu nhiên $g(X,Y) = XY$.

Ví dụ 2: Hãy tính $E(XY)$ biết rằng hàm mật độ đồng thời là

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x(1+3y^2)}{4}, & \text{nếu } (x;y) \in (0;2)\times(0;1) \\ 0, & \text{nếu } (x;y) \notin (0;2)\times(0;1). \end{cases}$$

6.2. Covariance

Cho BNN (X, Y) với PPXS $f(x, y)$. Covariance của X và Y là

$$\sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \sum_x \sum_y (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f(x, y)$$

nếu (X, Y) là BNN rời rạc,

$$\sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f(x, y) dxdy$$

Nếu (X, Y) là BNN liên tục

Công thức Covariance thường dùng

$$\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

Với μ_X tính theo biên duyên $g(x)$;
μ_Y tính theo biên duyên $h(y)$ của Y.

Ý nghĩa của Covariance:

- Covariance của hai biến ngẫu nhiên cho ta biết mối quan hệ của chúng, và dấu của Covariance cho ta biết mối quan hệ của chúng là thuận hay là nghịch.
- Nếu X và Y độc lập thì $\sigma_{XY} = 0$.
- Nếu $\sigma_{XY} = 0$ thì chưa chắc X và Y độc lập.

Ví dụ 1: Cho biến ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều có phân phối xác suất đồng thời như sau

X ⋱ Y	0	1	2
0	0,1	0,2	0,2
1	0,05	0,1	0,1
2	0,05	0,2	0

Tìm Covariance của X và Y.

Ví dụ 2: Tỉ lệ X các nam vận động viên và tỉ lệ Y các nữ vận động viên điền kinh hoàn thành bài thi trong cuộc thi marathon được mô tả bằng hàm mật độ đồng thời sau

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy, & (x,y) \in [0;1] \times [0;x] \\ 0, & (x,y) \notin [0;1] \times [0;x] \end{cases}$$

Hãy tìm Covariance của X và Y.

Định nghĩa

Cho X và Y là các biến ngẫu nhiên. Hệ số tương quan của X và Y là

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Chú ý: $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{E(X^2) - \mu_X^2}$; $\sigma_Y = \sqrt{\sigma_Y^2} = \sqrt{E(Y^2) - \mu_Y^2}$.

Ý nghĩa:

- Hệ số tương quan là đại lượng không phụ thuộc vào đơn vị đo, sẽ cho ta biết mức độ tương quan của chúng.
- $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$
- Nếu $\rho_{XY} = 0$, ta nói X và Y không tương quan với nhau.
- Nếu $\rho_{XY} = \pm 1$ thì X, Y phụ thuộc tuyến tính với nhau, nghĩa là $X = a + bY$.

Ví dụ 1: Cho biến ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều có phân phối xác suất đồng thời như sau

X ⋱ Y	0	1	2
0	0,1	0,2	0,2
1	0,05	0,1	0,1
2	0,05	0,2	0

Tìm hệ số tương quan của X và Y.

Ví dụ 2: Cho biến ngẫu nhiên hai chiều có hàm mật độ đồng thời như sau

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & (x,y) \in [0;1] \times [0;1] \\ 0, & (x,y) \notin [0;1] \times [0;1] \end{cases}$$

Hãy tìm Covariance và hệ số tương quan của X và Y.

Ví dụ 3: Cho biến ngẫu nhiên hai chiều có hàm mật độ đồng thời như sau

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0 \quad , & x,\ y \text{ khác} \end{cases}$$

Hãy tìm hệ số tương quan của X và Y.

Ví dụ 4: Hai xạ thủ A và B cùng bắn vào một mục tiêu, xác suất trúng đích của hai người lần lượt là 0,8 và 0,6. Xạ thủ A bắn 2 viên, xạ thủ B bắn 1 viên. Gọi X, Y là số viên đạn trúng đích của A và B.
a) Tìm phân phối xác suất đồng thời của X, Y.
b) Tính Covariance và hệ số tương quan của X và Y.

Bài tập về nhà

13, 15 (**118**); 8 (**128**); 21 (**129**); 2 (**130**)