

CHỦ ĐỀ ĐẠO HÀM HÀM HỢP – HÀM ẨN

Bài 1. Cho f là hàm có đạo hàm liên tục. Chứng minh rằng $w = f(x^2 - y^2)$ là một nghiệm của phương trình đạo hàm riêng $y \frac{\partial w}{\partial x} + x \frac{\partial w}{\partial y} = 0$.

Bài 2. Cho hàm số $z = x + f(xy)$ với hàm f có đạo hàm. Chứng minh rằng: $xz_x - yz_y = x$.

Bài 3. Cho hàm số $z = yf(x^2 - y^2)$ với hàm f có đạo hàm. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x} z_x + \frac{1}{y} z_y = \frac{z}{y^2}.$$

Bài 4. Cho hàm $z = xy + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, với φ là hàm có đạo hàm. Chứng minh: $xz_x + yz_y = xy + z$.

Bài 5. Cho hàm số $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Tính $A = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$.

Bài 6. Giả sử các phương trình sau xác định hàm ẩn $y = y(x)$. Tính $\frac{dy}{dx}$.

a) $x \sin y = x + y$

b) $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$

Bài 7. Giả sử các phương trình sau xác định hàm ẩn $z = z(x, y)$. Tính $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

a) $\ln z = z + 2y - 3x$

b) $z = xy \sin xz$

Bài 8. Tính $\frac{dy}{dx}$ và $\frac{d^2 y}{dx^2}$ biết hàm $y = y(x)$ được xác định bởi phương trình sau:

$$(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + 1 = 0.$$

CHỦ ĐỀ 5 CỰC TRỊ

Bài 1. Tìm điểm tới hạn và phân loại

$$a) z = x^5 + y^4 - 5x - 32y - 3$$

$$b) z = x^2 + y^3 - 6xy$$

$$c) z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \text{ với } x > 0, y > 0.$$

$$d) z = x^3 + y^3 + 3xy + 5$$

Bài 2. Tìm cực trị tự do của các hàm số sau:

$$a) z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$$

$$b) z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$$

$$c) z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$$

$$d) z = x + y - xe^y$$

Bài 3. Tìm cực trị của hàm $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 10$ thỏa mãn điều kiện $x + y = 4$.

Bài 4. Tìm cực trị của hàm $f(x, y) = 6 - 4x - 3y$ thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

Bài 5. Tìm cực trị có điều kiện của hàm $f(x, y) = x^2 + y^2$ với điều kiện $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

Bài 6. Tìm GTLN – GTNN của hàm số $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ trong miền:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3\}$$

Bài 7. Tìm GTLN – GTNN của hàm $f(x, y) = x^2 - y^2$ trên miền được giới hạn bởi $x^2 + y^2 = 1$.

Bài 8. Tìm GTLN – GTNN của hàm số $f(x, y) = x^3 - y^3 - 3xy$ trên miền hình vuông D được giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0, x = 2, y = -1, y = 2$.