

Bài 3: BIẾN NGẪU NHIÊN MỘT CHIỀU

Vũ Mạnh Tới

Bộ môn Toán-Trường Đại học Thủy lợi

Ngày 22 tháng 4 năm 2024

3.1. Khái niệm biến ngẫu nhiên (BNN) một chiều

Định nghĩa: BNN là một hàm số đặt tương ứng mỗi phần tử trong không gian mẫu Ω với một số thực.

Ví dụ 1: Gieo 1 con xúc xắc, gọi X là số chấm xuất hiện. Khi đó, X là một biến ngẫu nhiên, và $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- **Kí hiệu:** X, Y, Z, \dots , giá trị x, y, z, \dots tương ứng.
- Tập các giá trị của X được gọi là tập giá trị của X .
- $(X = x)$: Biến cố X nhận giá trị x ;
 $(a \leq X \leq b)$: Biến cố X nhận giá trị từ a đến b ; ...
- **Phân loại:**
 - +) Nếu tập giá trị của X là tập đếm được: BNN rời rạc.
 - +) Nếu tập giá trị của X là tập không đếm được: BNN liên tục.

3.2. Phân phối xác suất của Biến ngẫu nhiên

3.2.1. Biến ngẫu nhiên rời rạc

Định nghĩa: Hàm số $f(x)$ là hàm xác suất (hàm phân phối xác suất) của BNN rời rạc X nếu:

- $f(x) \geq 0$ mọi x
- $\sum_{x \in X} f(x) = 1$
- $P(X = x) = f(x)$.

Chú ý:

- Nếu X là BNN rời rạc với hàm xác suất $f(x)$ thì

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{a \leq x \leq b} P(X = x) = \sum_{a \leq x \leq b} f(x)$$

- $f(x)$ của BNN rời rạc X thường được cho bởi bảng phân bố xác suất:

x	x_1	x_2	\dots	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	\dots	$f(x_n)$

Ví dụ 1: Một hộp bóng có 5 quả xanh và 3 quả đỏ. Lấy ra cùng lúc 3 quả bóng.

- a. Tìm phân phối xác suất cho số quả bóng xanh lấy được.
- b. Tìm xác suất có ít nhất 1 xanh lấy được.

Định nghĩa. Hàm phân phối tích lũy $F(x)$ của BNN rời rạc X với phân phối xác suất $f(x)$ là:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t), \text{ với } -\infty < x < \infty$$

Chú ý: Nếu X là BNN rời rạc có hàm tích lũy $F(x)$ thì:

- $0 \leq F(x) \leq 1$.
- $P(X < a) = F(a-)$ với $F(a-)$ là giới hạn trái của $F(x)$ tại a .
- $f(a) = P(X = a) = F(a) - F(a-)$.

Ví dụ 2: Cho BNN X có hàm xác suất cho bởi

x	-1	0	2	4
$f(x)$	0,2	0,1	0,4	0,3

- Tìm hàm tích lũy $F(x)$ của X .
- Dựa vào $F(x)$, hãy tìm
 - a) $P(X \leq 2)$;
 - b) $P(X = 2)$;
 - c) $P(1 \leq X < 3)$;

3.2.2. Biến ngẫu nhiên liên tục

Định nghĩa. $f(x)$ là hàm mật độ xác suất của BNN liên tục X , nếu:

① $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

② $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

③ $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$

Chú ý: Nếu X là BNN liên tục thì $P(X = x_0) = 0$.

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b)$$

$$= P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

Ví dụ 1: Cho BNN X có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} k(2-x)^2, & 0 < x < 2 \\ 0, & x \notin (0, 2) \end{cases}$$

a) Tìm k .

b) Tính $P(1 < X < 2)$.

Ví dụ 2: Thời gian (đơn vị đo: 100 giờ) mà một gia đình cho chạy một chiếc máy hút bụi trong một năm là BNN liên tục X có hàm mật độ như sau:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & x \notin (0, 2) \end{cases}$$

Tìm xác suất để thời gian chạy máy hút bụi trong một năm

- a) ít hơn 120 giờ.
- b) từ 50 đến 100 giờ.

Định nghĩa: Hàm phân phối tích lũy $F(x)$ của BNN liên tục X với hàm mật độ $f(x)$ là:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt, \quad -\infty < x < \infty.$$

Chú ý:

- $f'(x) = F'(x).$

-

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) \\ &= P(a < X \leq b) = F(b) - F(a). \end{aligned}$$

- $0 \leq F(x) \leq 1.$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0.$

Ví dụ 3: Cho BNN X có hàm mật độ là

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & -1 < x < 2 \\ 0, & x \notin (-1; 2) \end{cases}$$

Tìm hàm phân phối tích lũy của X .

Ví dụ 4: Cho BNN X có hàm tích lũy:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-8x}, & x > 0 \end{cases}$$

a) Tìm hàm mật độ của X .

b) Tính $P(X < \frac{1}{2})$.

Các ý chính cho bài giảng buổi 3:

- Định nghĩa BNN 1 chiều.
- Biến ngẫu nhiên rời rạc và liên tục.
- Bảng phân phối và hàm phân phối tích lũy của BNN rời rạc.
- Hàm mật độ và hàm phân phối tích lũy của BNN liên tục.

7,8,9,11,12,13,14, 20,21,22,25,26(**75-78**); 2,9(**99-100**)