

ESCALAMIENTO MULTIDIMENSIONAL MÉTODO UNFOLDING; UNA APLICACIÓN A DATOS DE PREFERENCIAS



CIMAT

Hairo Ulises Miranda Belmonte

Centro de Investigación en Matemáticas A.C.
hairo.miranda@cimat.mx

Introducción

El modelo Unfolding es un modelo de elección preferencial considerado variación del método clásico de Escalamiento multidimensional (MDS). Asume que diferentes individuos perciben varios objetos de elección de la misma manera pero de forma diferente. Se aplica el modelo Unfolding a datos del reporte “*World Happiness Report 2019*”, donde los individuos de los países de la OCDE expresan su felicidad en base a sus preferencias en temas emocionales, sociales y económicos.

Escalamiento Multidimensional es un método que representa medidas de (dis)similitud, vistas como proximidades, respecto a pares de objetos a manera de distancia en bajas dimensiones. Se realiza mediante un mapeo de las proximidades a distancias en el espacio de configuración.

$$f : p_{ij} \rightarrow d_{ij}(X) \quad (1)$$

El error de representación del mapeo se define:

$$e_{ij} = [f(p_{ij}) - d_{ij}(X)]^2 \quad (2)$$

La función Stress es una medida de *badness-of-fit*. Stress raw:

$$\sigma_r(X) = \sum_{i < j} w_{ij} (\gamma_{ij} - d_{ij}(X))^2 \quad (3)$$

Stress Normalizado (no es sensible al tamaño de la muestra):

$$\sigma(X)_n = \frac{\sigma_r(X)}{\sum_{i < j} w_{ij} \gamma_{ij}^2} \quad (4)$$

La solución MDS parte de la función Stress

$$\begin{aligned} \sigma(X) &= \sum_{i < j} [f(p_{ij}) - \gamma_{ij}]^2 \\ &= \eta_\sigma^2 + \eta^2(X) - 2\rho(X) \\ \eta(X) &= \sum_{i < j} w_{ij} \gamma_{ij}^2(X) \\ &= \text{tr} X' V X \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \rho(X) &= \sum_{i < j} (w_{ij} \gamma_{ij}) d_{ij}(X) \\ &= \text{tr} X' B(Z) Z \end{aligned} \quad (6)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \sigma(X) &= \eta_\gamma^2 + \text{tr} X' V X \\ &\quad - 2 \text{tr} X' B(Z) Z \\ &= \tau(X, Z) \end{aligned} \quad (7)$$

donde $\tau(X, Z)$ es una simple *majorizing function* del Stress. Su mínimo se obtiene:

$$\Delta \tau(X, Z) = 2VX - 2B(Z)Z = 0 \quad (8)$$

Esto nos lleva a la fórmula de actualización de SMACOF (*Guttman transform*)

$$X^u = V^+ B(Z) Z \quad (9)$$

SMACOF

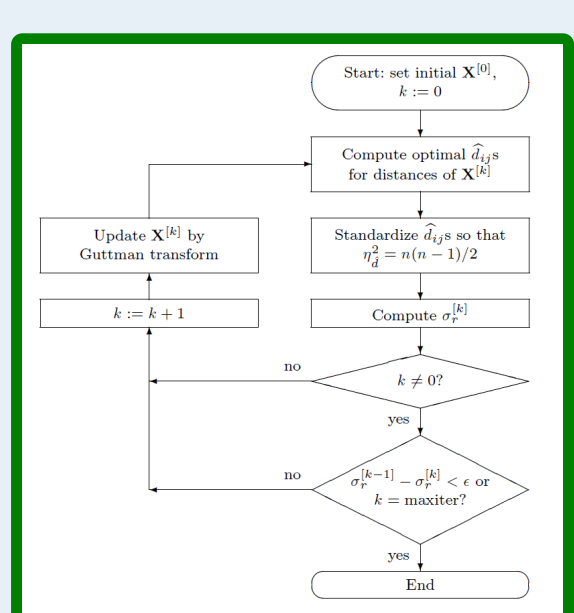


Fig. 1: Algoritmo SMACOF

Modelo Unfolding

El método parte de la matriz de preferencias.

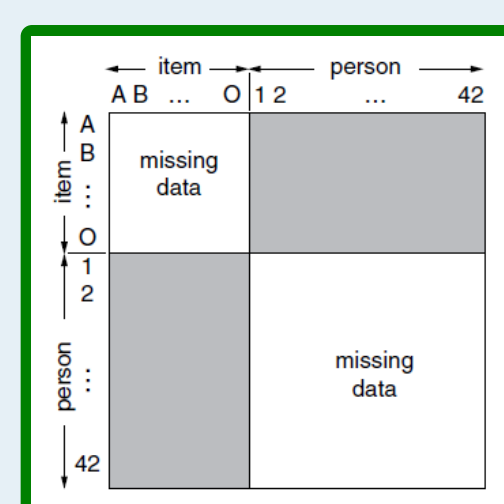


Fig. 2: Matriz de preferencias

Sea W matriz particionada de pesos w_{ij}

$$\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & W_{12} \\ W_{12}' & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

se divide la matriz de coordenadas X en X_1 para individuos n_1 y X_2 para los objetos n_2 .

Considere la minimización de la función Stress raw

$$\begin{aligned} \sigma_r(X) &= \sum_{i < j} w_{ij} (\gamma_{ij} - d_{ij}(X))^2 \\ &= \eta_\gamma^2 + \text{tr} X' V X - 2 \text{tr} X' B(X) X \end{aligned} \quad (11)$$

V es igual a:

$$V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_2 I & -11' \\ -11' & n_1 I \end{bmatrix} \quad (12)$$

Aplicación Datos : 44 países, aquellos con información en 2010 - 2018. Se utilizan 5 variables. La función Unfolding se toma de la biblioteca SMACOF en R. Se hace uso de dos dimensiones de acuerdo al Scree Plot.

Variables:

Libertad	Expresión
Social	Apoyo e integridad social
Afecto(+)	Felicidad, gratitud, sonrisas
Afecto(-)	Enojo, preocupación y tristeza
NoCorrupción	No corrupción en instituciones



Representación

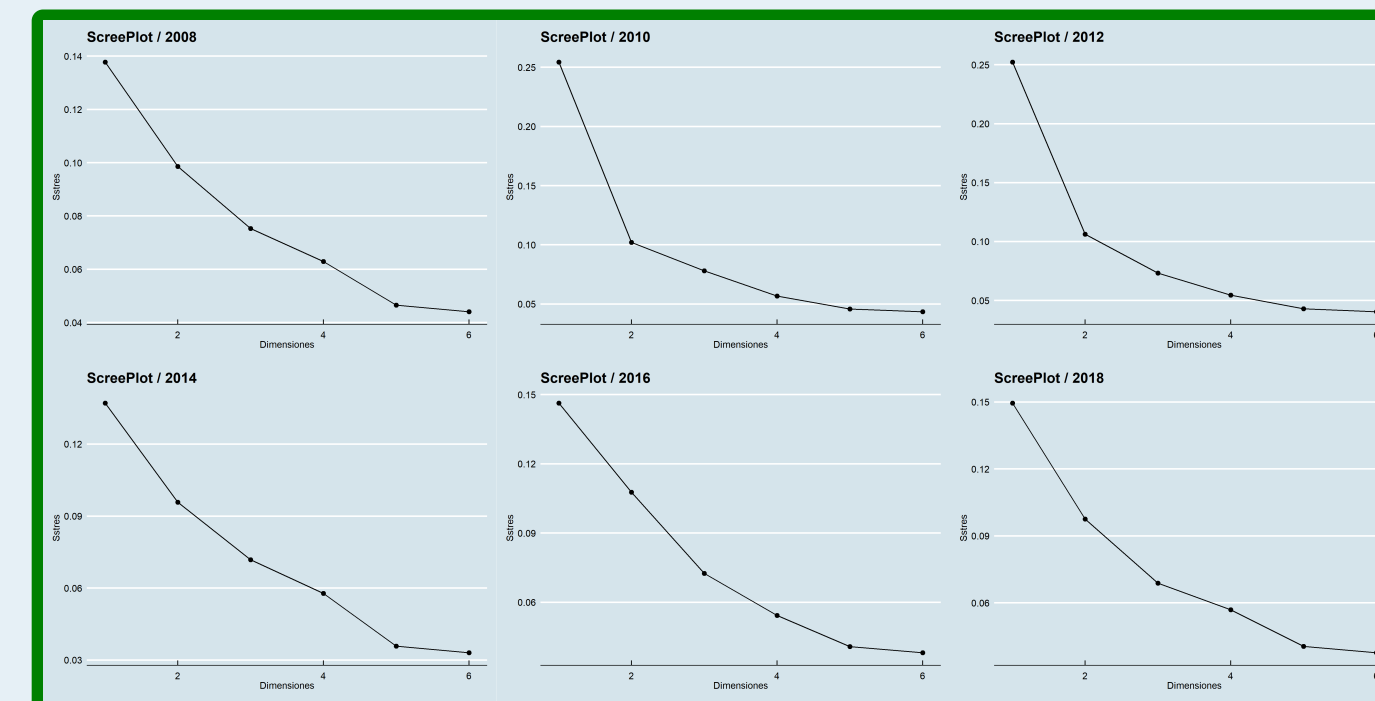


Fig. 4: Scree Plot

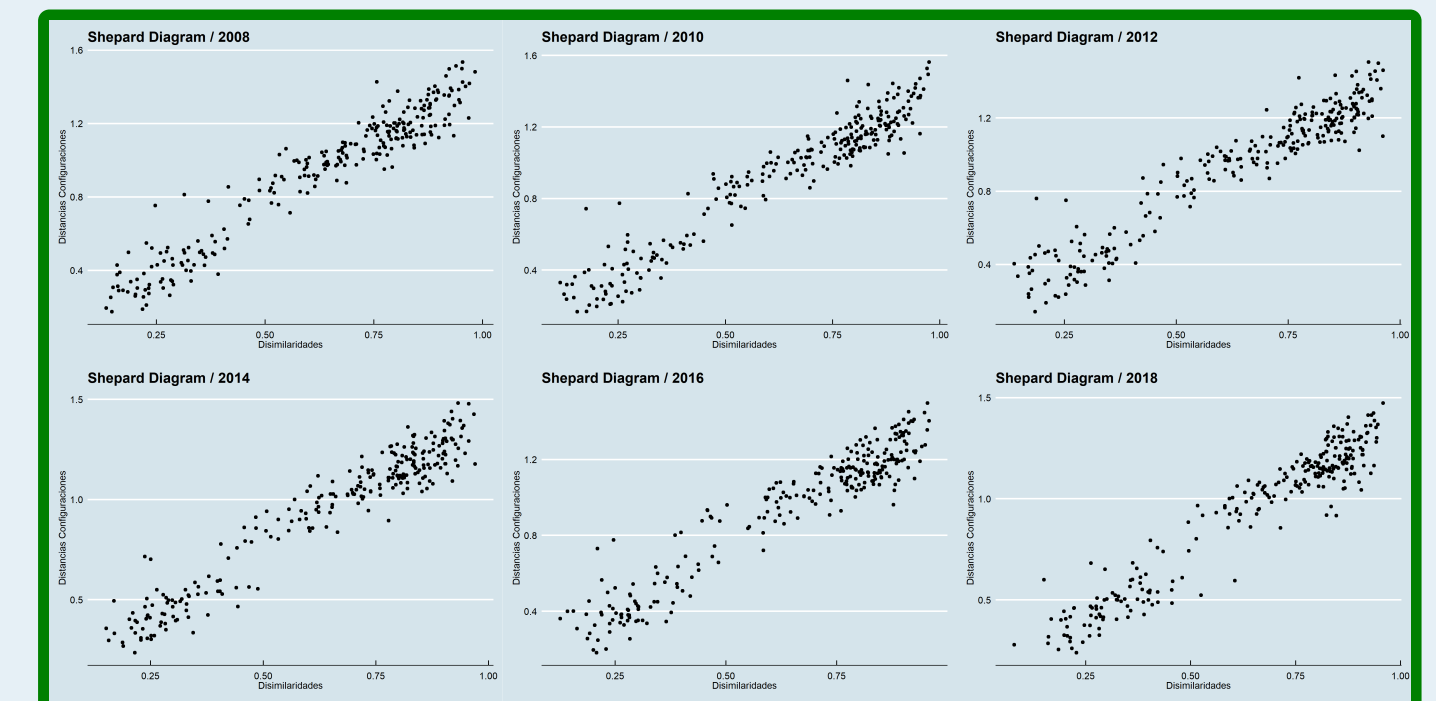
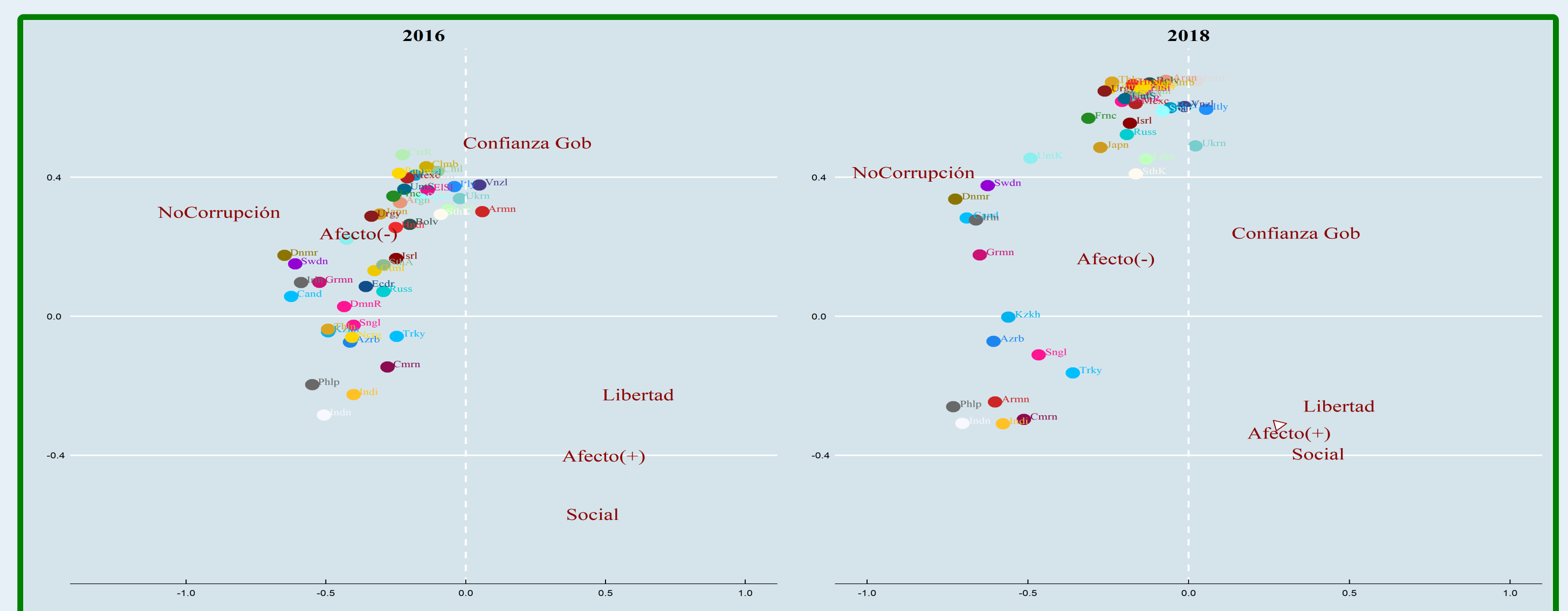
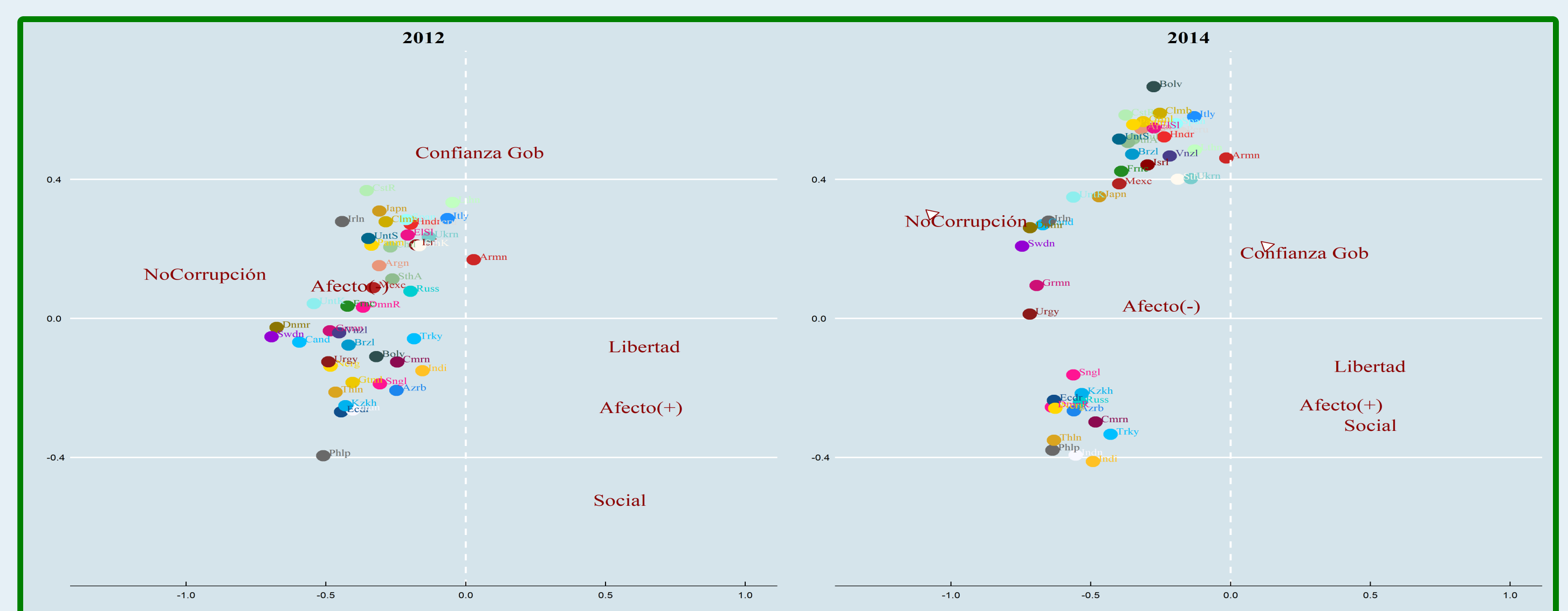
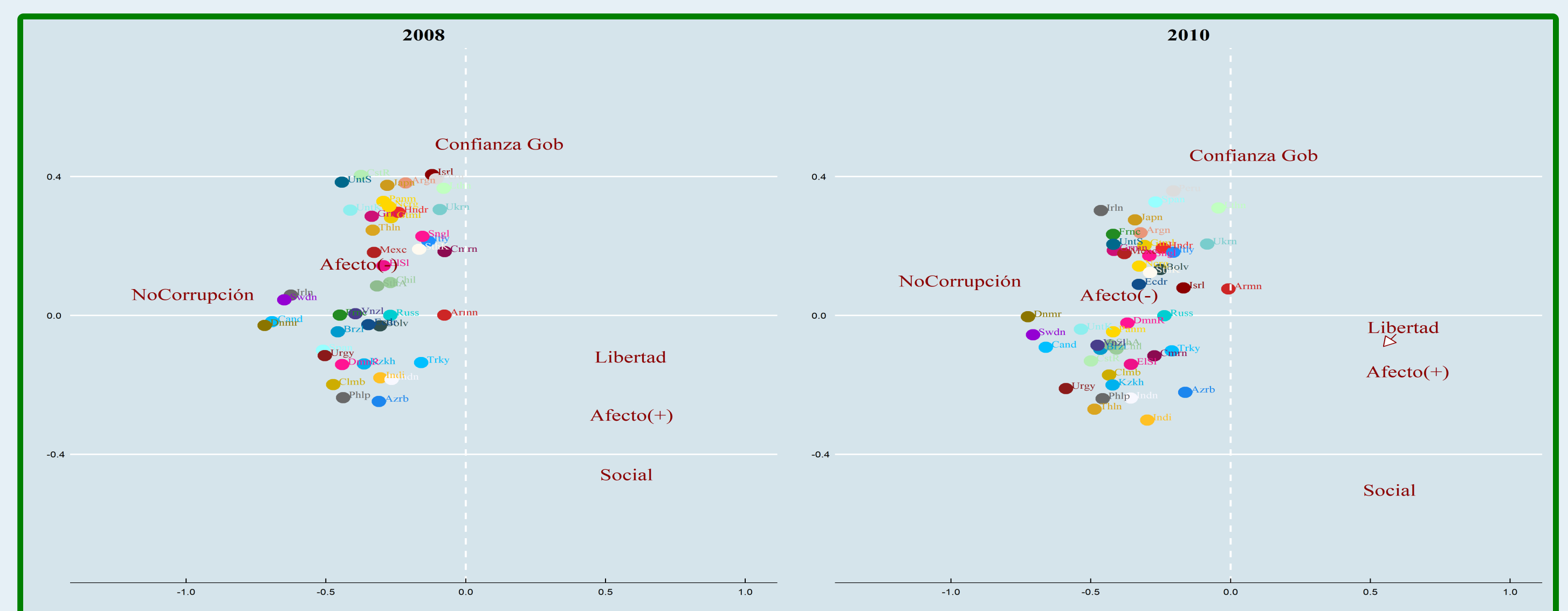


Fig. 5: Shepard Diagram

Resultados



Conclusión

El método Unfolding permite encontrar los siguiente:

- La primera Dimensión se representa por los efectos positivos y en contraste los negativos. La segunda Dimensión se representa por la confianza a las instituciones y aporte social. La percepción de la confianza del gobierno cae en incertidumbre, y a través del tiempo tienden a definirse como algo positivo.
- MDS descubre principalmente 3 grupos de países; el primer grupo lo conforman países que no perciben la corrupción; el segundo grupo aquellos que se alejaron de los efectos negativos y mejora la percepción hacia el gobierno; el tercer grupo son países de oriente que tienden al contraste del apoyo social.
- A partir del 2014, se incrementa la brecha entre los grupos. En el 2016, la configuración regresa a la del 2013 y hasta el 2018, se muestra claramente la diferencia entre ellos.

- I. I. Borg y F. Groenen. (2005). Unfolding. En *Modern Multidimensional Scaling*(293-317).Springer.
- F. Groenen y M. Patrick (2010). The propose of MDS and Unfolding. *Applied Multidimensional Scaling and Unfolding* (11-27).Springer.