2. 复分析例题五 (Example 5 of Complex Analysis)

- **推导思想**：本题核心目标是计算实积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx$。与简单回归的 OLS 推导逻辑类似——OLS 是最小化残差平方和，本题则是利用**复变函数留数定理**，将实轴上的无穷积分转化为复平面上的闭合回路积分，通过求解极点留数、验证大弧积分收敛性，最终取实部得到结果。
    - 构造辅助复变函数：选取 $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$（利用欧拉公式 $e^{iz} = \cos z + i \sin z$，其实部恰好是目标积分的被积函数 $\frac{\cos x}{x^2+1}$）。
    - 确定积分路径：选择上半平面闭合回路（包含实轴区间 $[-R, R]$ 和上半圆周 C_R），令 $R \to \infty$，仅包含上半平面的极点以简化计算。

积分求解步骤 (Steps of Integral Solution)：

- **步骤1：寻找极点**：令分母 $z^2+1=0$，解得极点为 $z=i$ 和 $z=-i$。其中仅 $z=i$ 位于上半平面，因此只需计算该极点处的留数。
- **步骤2：计算极点留数**：根据一阶极点留数公式，

$$\mathrm{Res}(f, i) = \lim_{z \to i} (z-i) \frac{e^{iz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{i \cdot i}}{2i} = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

- **步骤3：应用留数定理**：闭合回路积分等于 $2\pi i$ 乘以回路内所有极点的留数之和，因此

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}(f, i) = 2\pi i \cdot \frac{e^{-1}}{2i} = \pi e^{-1}.$$

- **步骤4：验证大弧积分收敛到 0**：当 $R \to \infty$ 时，上半圆周 C_R 上的积分 $\int_{C_R} f(z) dz \to 0$（由 Jordan 引理，因 $|f(z)| \le \frac{1}{R^2-1}$，且 $\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \le \pi R \cdot \frac{1}{R^2-1} \to 0$）。
- **步骤5：拆分积分并取实部**：闭合回路积分可拆分为实轴积分与大弧积分之和：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx + \int_{C_R} f(z) dz = \pi e^{-1}.$$

令 $R \to \infty$，大弧积分消失，对左侧实轴积分取实部（右侧为实数）：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx = \mathrm{Re}\left(\pi e^{-1}\right) = \frac{\pi}{e}.$$

例题结论与性质 (Conclusion and Properties)：

- **核心结论**：最终求得目标积分结果为 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{e}$，即原题初始形式 $-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx = -\frac{\pi}{e}$。
- **方法性质**：该方法（留数定理求解实无穷积分）具备类似 OLS 的优良性质：
    - **有效性 (Efficiency)**：相较于实分析方法（如傅里叶变换），留数定理直接通过极点特征求解，计算步骤更简洁、误差更小。
    - **一致性 (Consistency)**：随着积分区间 R 趋近于无穷大，估计值（积分结果）收敛到真实值 $\frac{\pi}{e}$。
    - **通用性 (Generality)**：该方法可推广到形如 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2} dx$ 的一类积分，类似 OLS 可推广到多元线性回归。