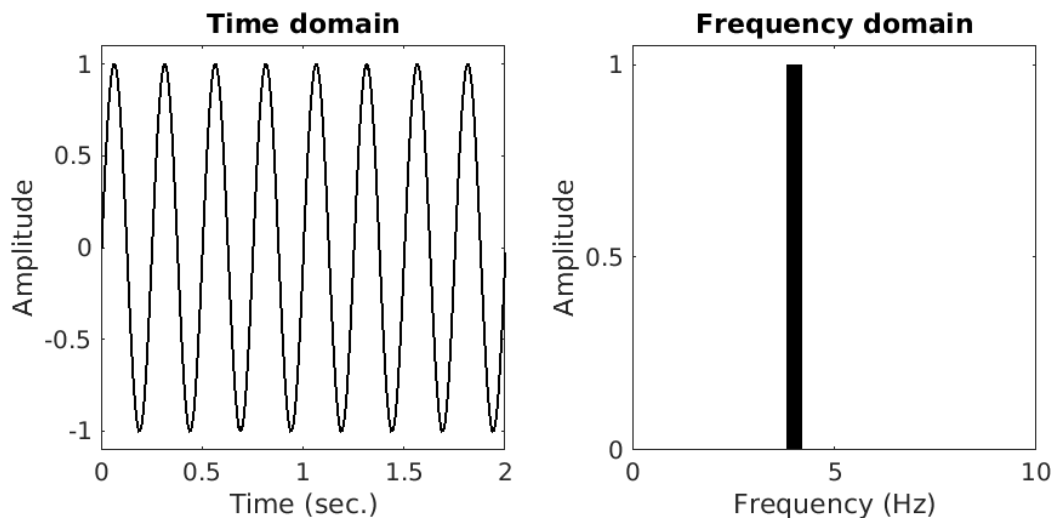
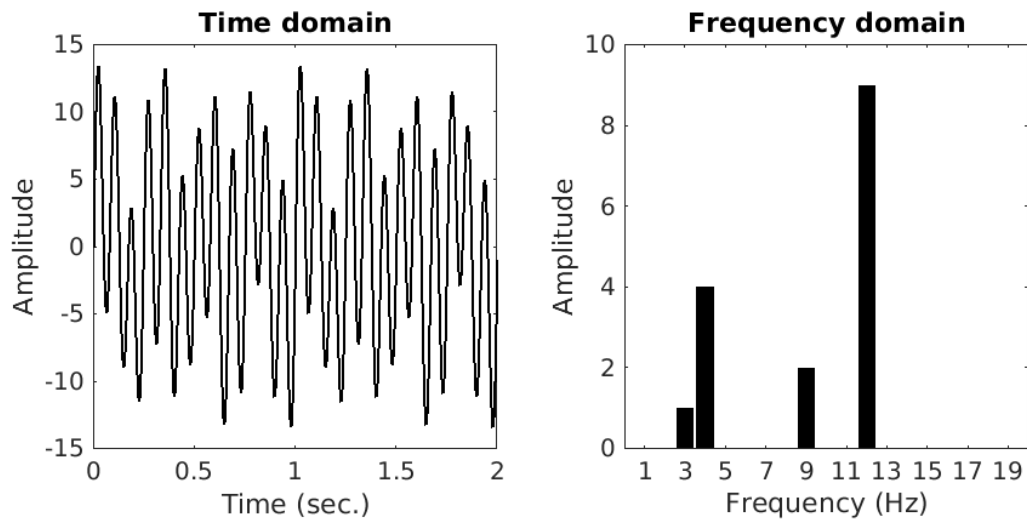


课程读本：傅里叶变换概述

- 傅里叶变换是所有科学、数学和通信技术里最重要的算法之一。
- 在19世纪，法国人约瑟夫·傅里叶（Joseph Fourier）为了解决金属中的热传导问题发明了傅里叶变换理论，这一理论随后被发现可以应用在很多其他领域。
- 在高等数学中，你应该已经学习过连续傅里叶变换，其主要涉及到使用积分和函数的方法来标示转换过程。而在工程学，信号处理和统计学中，你可能已经学过了离散傅里叶变换，其主要涉及到使用计算机中离散的正弦波(sine wave)和数据向量(data vectors)来标示转换过程。这里我们主要强调后一种方法，因为其更适合通过计算机交互来学习。
- 傅里叶变换定理认为 任何信号都可以完美的使用一系列正弦波的和来表达，其中每一个正弦波都有各自的相位（phase），频率（frequency）和振幅（amplitude）。基本上，我们可以用正弦波来表示所有信号。
- 傅里叶变换提供了一个将信号（如无线电波）从时域转换到频域的有效方法。时域就是我们常见的信号表达方式（比如无线电波就是一个振幅随着时间变化而上下波动的波）。频域就是信号在每个频率（正弦波的快慢）的能量的大小。在频域中我们可以看到信号的每一个组成部分，因而我们可以更好的理解一些复杂的信号。
- 下图就是同一个正弦波在时域（Time domain, 左图）和频域（Frequency domain, 右图）中的表示。这里在一秒钟内有4个波峰波谷，因此在频域能量谱中在4Hz就有一个相应的峰值（"Hz" 又称赫兹，代表一秒内周期性事件发生的次数）。

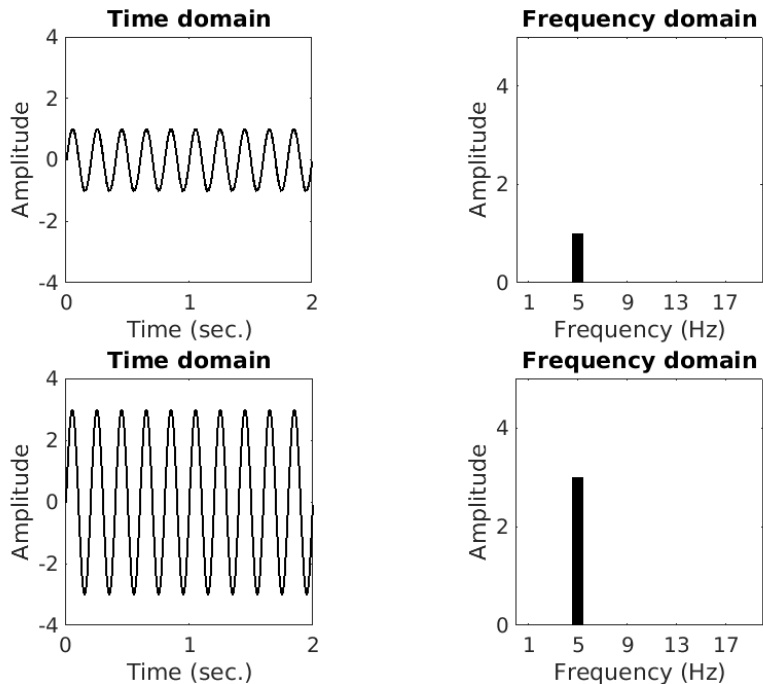


- 下图就是一个通过在频域中更好理解一个信号的例子。在时域中，信号看起来很复杂。而在频域中，我们明显可以看到信号就是包含了一些特定的频域特征。

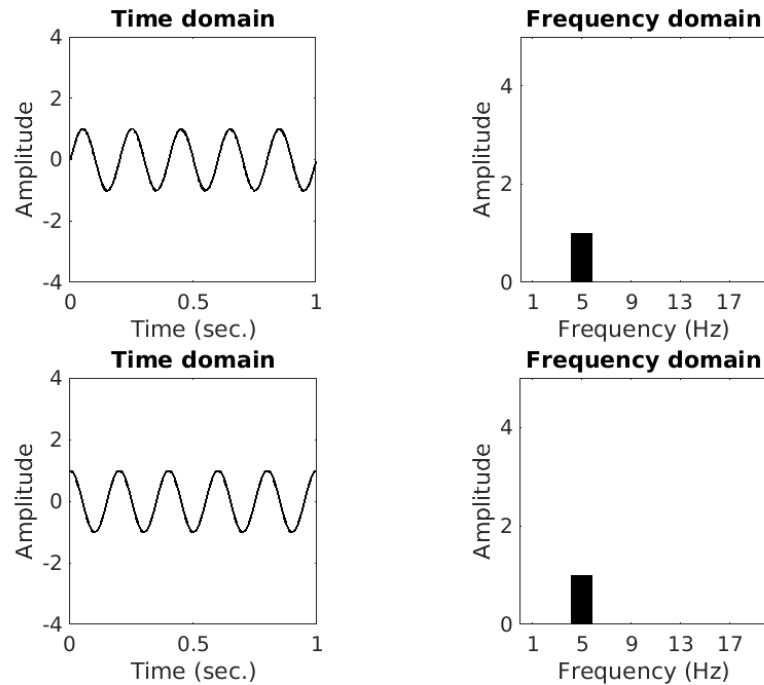


- 对于信号来说，在每一个频率，傅里叶变换都给出了两个信息：

1. **功率 (power)**，也叫振幅 (amplitude)，能量 (energy) 或者量级 (magnitude)：表示波距离 $y=0$ 这条线的变形量。当一个系统活动更强的时候，功率就越大。下面是两个例子：



2. **相位 (phase)**：表示正弦波通过 $X=0$ 时的值。相位具有循环 (circular) 的特性，用弧度 (radians) 来表示 (2π 是一个整圆)。下面是一个例子。注意：相位的变化对功率谱没有影响 (这个变化反应在相位谱，这里没有画出来)。

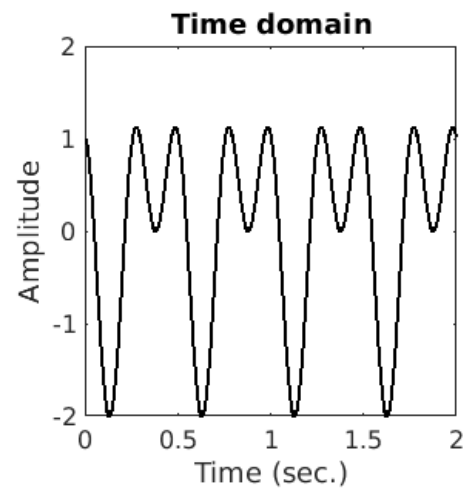
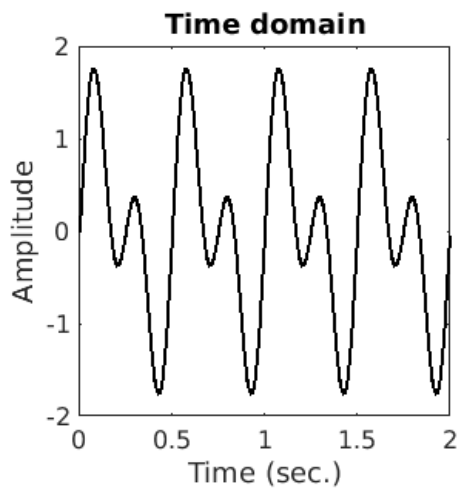
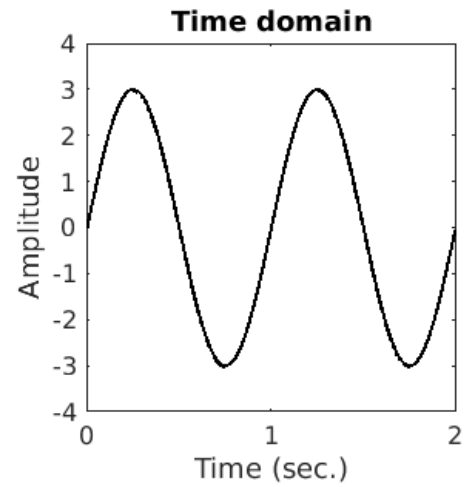
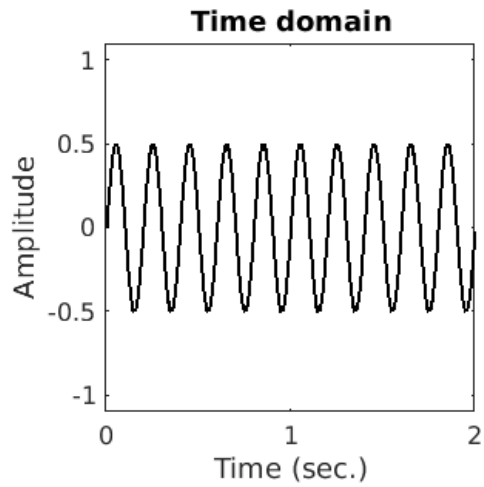


- 通俗来讲，傅里叶变化有如下两个用途：
 1. 一种侦测信号或者图片中特定频率的功率和相位变化的方法，比如上面那些的例子。
 2. 一些算法的中间步骤，如滤波和卷积。这种情况下，操作的目的是为了理解傅里叶变换的结果，而是通过使用快速傅里叶变换（fast Fourier transform, FFT）将信号在频域和时域中相互转换。在卷积中操作中尤其有用，因为在频域中使用乘法即可达到时域卷积的效果。这样的频域操作往往比在时域中直接操作更快捷。
- 傅里叶变换的结果只在信号是静态（stationary）的，并包含节律成分的时候才能被简单的解读。静态意味着信号在不同的时间窗内差不多。节律意味着信号有一些周期性重复的特征，如正弦波。但仍然，不管数据是什么样的，傅里叶变换后的结果都保留了信号的全部信息（它是一个无损的转换方法）。
- 傅里叶变换可以从一维（如无线电信号）扩展到二维（如图像信号）。
- 本课程在每一章节都有相对应的MATLAB代码，这些代码也可以在Octave平台（一个跨平台的免费的可以执行MATLAB代码的编程环境）上执行。我们也提供了与MATLAB代码相似的Python代码（画图细节上可能有所不同）。Python代码是Jupyter平台（以前的iPython平台）上编写的，因此你可以在浏览器中执行这些代码。在课程中，由于时间的关系，我们只会讨论MATLAB代码。

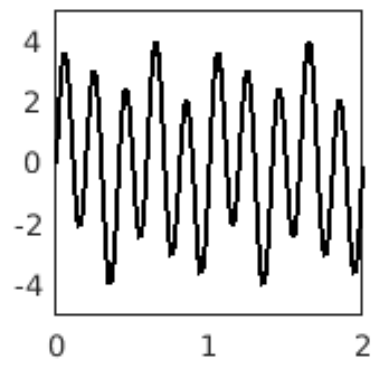
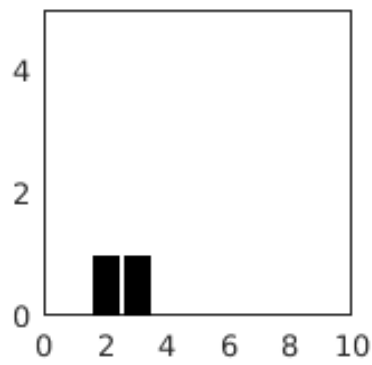
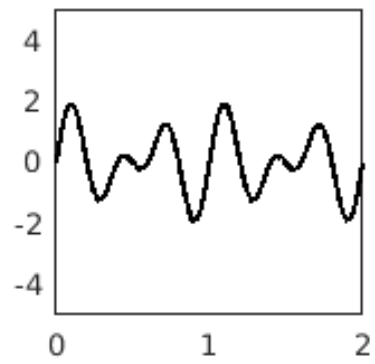
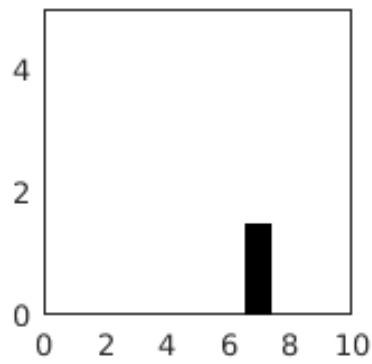
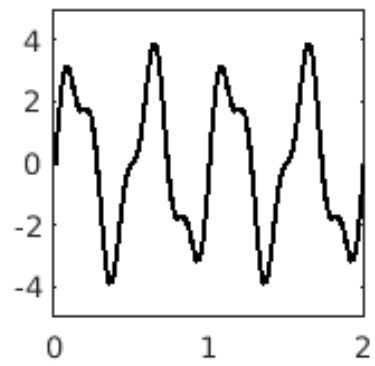
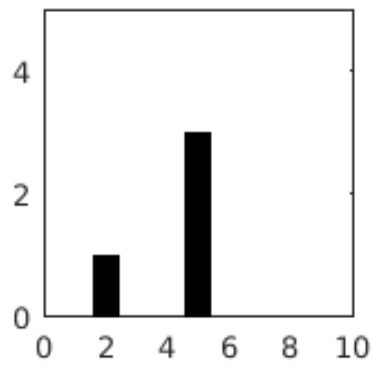
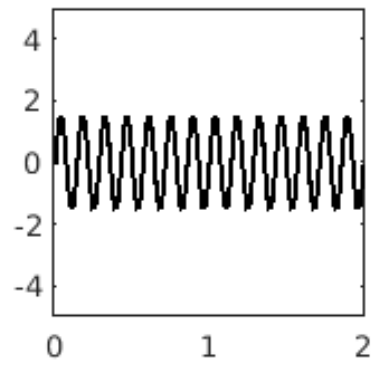
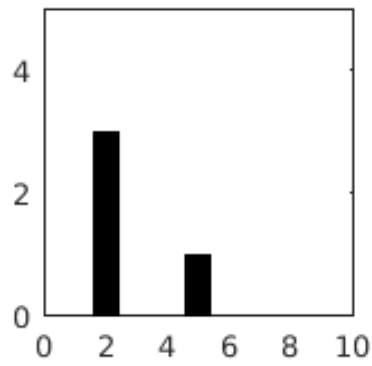
编程是一个十分好的理解数学中各种概念的工具，我们希望你可以在上课的时候可以结合MATLAB或者Python的代码来理解。当然你如果非要只看视频，不编程，我们也没办法。

练习

1. 下图是各种频率的正弦波，请画出他们频域功率谱。

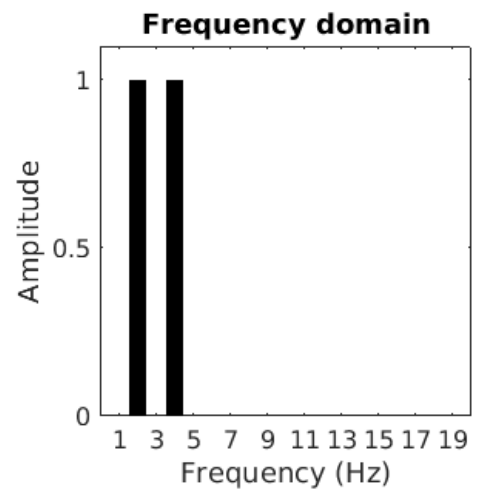
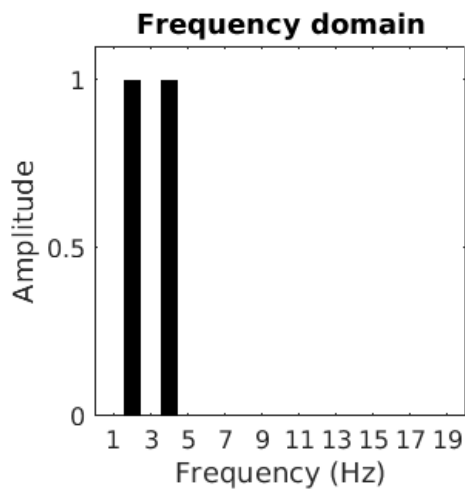
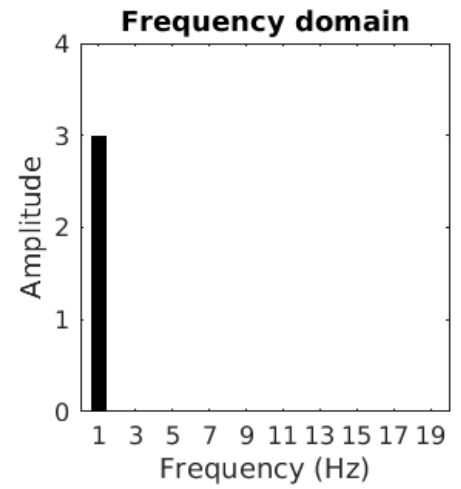
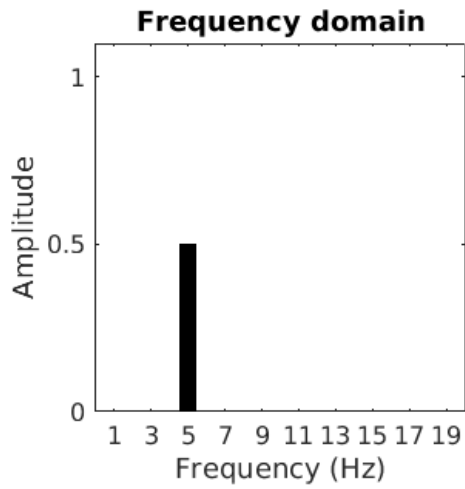


2. 请将左边的功率谱和右边的时域信号一一对应起来。（挺难的，试试看排除法）



答案

1. 注意下面的两个时间序列有相同的功率谱，他们仅仅是相位不同。



2. 对应关系已用数字表示

