CẤU TRÚC ĐỀ THI TỐT NGHIỆP THPT MÔN TOÁN

*** PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH (7,0 điểm)**

Câu I (3,0 điểm)

- *Khảo sát, vẽ đồ thị của hàm số.*
- *Các bài toán liên quan đến ứng dụng của đạo hàm và đồ thị của hàm số:* chiều biến thiên của hàm số, cực trị, tiếp tuyến, tiệm cận (đứng và ngang) của đồ thị hàm số; tìm trên đồ thị những điểm có tính chất cho trước, tương giao giữa hai đồ thị (một trong hai đồ thị là đường thẳng)...

Câu II (3,0 điểm)

- *Hàm số, phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit.*
- *Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.*
- *Tìm nguyên hàm, tính tích phân.*
- *Bài toán tổng hợp.*

Câu III (1,0 điểm)

Hình học không gian (tổng hợp): Diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay, hình trụ tròn xoay; tính thể tích khối lăng trụ, khối chóp, khối nón tròn xoay, khối trụ tròn xoay; diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu.

*** PHẦN RIÊNG (3,0 điểm)**

Thí sinh học chỉ được làm một trong hai phần (phần 1 hoặc 2).

Theo chương trình Chuẩn

Câu IV.a (2,0 điểm): Phương pháp tọa độ trong không gian:

- *Xác định tọa độ của điểm, vectơ.*
- *Mặt cầu.*
- *Viết phương trình mặt phẳng, đường thẳng.*
- *Tính góc, tính khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng. Vị trí tương đối của đường thẳng, mặt phẳng và mặt cầu.*

Câu V.a (1,0 điểm)

- *Số phức:* môđun của số phức, các phép toán trên số phức; căn bậc hai của số thực âm; phương trình bậc hai hệ số thực có biệt thức Delta âm.
- *Ứng dụng của tích phân:* tính diện tích hình phẳng, thể tích khối tròn xoay.

Theo chương trình Nâng cao

Câu IV.b (2,0 điểm): Phương pháp tọa độ trong không gian:

- *Xác định tọa độ của điểm, vectơ.*
- *Mặt cầu.*
- *Viết phương trình mặt phẳng, đường thẳng.*
- *Tính góc; tính khoảng cách từ điểm đến đường thẳng, mặt phẳng; khoảng cách giữa hai đường thẳng; vị trí tương đối của đường thẳng, mặt phẳng và mặt cầu.*

Câu V.b (1,0 điểm)

- *Số phức:* Môđun của số phức, các phép toán trên số phức; căn bậc hai của số phức; phương trình bậc hai với hệ số phức; dạng lượng giác của số phức.
- *Đồ thị hàm phân thức hữu tỉ dạng* $y = (ax^2 + bx + c)/(px+q)$ *và một số yếu tố liên quan.*
- *Sự tiếp xúc của hai đường cong.*
- *Hệ phương trình mũ và lôgarit.*
- *Ứng dụng của tích phân:* tính diện tích hình phẳng, thể tích khối tròn xoay.

------------- Hết -------------

MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ LƯỢNG GIÁC

I. BẢNG GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT SỐ CUNG ĐẶC BIỆT

Cung/ GTLG	0 (0^0)	$\frac{\pi}{6}$ (30^0)	$\frac{\pi}{4}$ (45^0)	$\frac{\pi}{3}$ (60^0)	$\frac{\pi}{2}$ (90^0)	$\frac{2\pi}{3}$ (120^0)	$\frac{3\pi}{4}$ (135^0)	$\frac{5\pi}{6}$ (150^0)	π (180^0)
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\|$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cot	$\|$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\|$

II. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

1. Công thức cộng

- $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$
- $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$
- $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$
- $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$
- $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b},(a,b\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z})$
- $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b},(a,b\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z})$

2. Công thức nhân đôi

- $\sin 2a=2\sin a\cos a$
- $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$
- $\tan 2a=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

3. Công thức hạ bậc

- $\cos^2 a=\dfrac{1+\cos 2a}{2}$
- $\tan^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$
- $\sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}$

4. Công thức biến đổi tích thành tổng

- $\cos a\cos b=\dfrac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)]$
- $\sin a\sin b=\dfrac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$
- $\sin a\cos b=\dfrac{1}{2}[\sin(a-b)+\sin(a+b)]$

5. Công thức biến đổi tổng thành tích

- $\cos a+\cos b=2\cos\dfrac{a+b}{2}.\cos\dfrac{a-b}{2}$
- $\cos a-\cos b=-2\sin\dfrac{a+b}{2}.\sin\dfrac{a-b}{2}$
- $\sin a+\sin b=2\sin\dfrac{a+b}{2}.\cos\dfrac{a-b}{2}$
- $\sin a-\sin b=2\cos\dfrac{a+b}{2}.\sin\dfrac{a-b}{2}$
- $\tan a+\tan b=\dfrac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}$
- $\cot a+\cot b=\dfrac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}$

6. Các hằng đẳng thức lượng giác

- $\sin^2 a+cos^2 a=1$
- $1+\tan^2 a=\dfrac{1}{cos^2 a},a\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$
- $1+\cot^2 a=\dfrac{1}{\sin^2 a},a\neq k\pi,k\in\mathbb{Z}$
- $\tan a.\cot a=1,a\neq\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$

IV. MỘT SỐ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC HAY DÙNG

◦ $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ ◦ cos4x = $2\cos^2 2x-1=1-2\sin^2 2x=cos^2 2x-\sin^2 2x$ ◦ (sinx ± cosx)^2 $=1\pm\sin 2x$ ◦ $\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)$	◦ $\sin^3 x-\cos^3 x=(\sin x-\cos x)\left(1+\frac{1}{2}\sin 2x\right)$ ◦ $\sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$ ◦ $\sin^4 x-\cos^4 x=\sin^2 x-\cos^2 x$ ◦ $\sin^6 x+\cos^6 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$

III. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Phương trình sinx = a	**Phương trình cosx = a**
◦ $\sin x=a=\sin\alpha\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\alpha+k2\pi\\x=\pi-\alpha+k2\pi\end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}$ ◦ $\sin x=a\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=arc\sin a+k2\pi\\x=\pi-arc\sin a+k2\pi\end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}$	◦ $cos x=a=cos\alpha\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\alpha+k2\pi\\x=-\alpha+k2\pi\end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}$ ◦ $cosx=a\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=arccosa+k2\pi\\x=-arccosa+k2\pi\end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}$
Phương trình tanx = a (ĐK: $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$)	**Phương trình cotx = a** (ĐK: $x\neq k\pi,k\in\mathbb{Z}$)
◦ $\tan x=a=\tan\alpha\Leftrightarrow x=\alpha+k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}$ ◦ $\tan x=a\Leftrightarrow x=\arctan a+k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}$	◦ $\cot x=a=cot\alpha\Leftrightarrow x=\alpha+k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}$ ◦ $\cot x=a\Leftrightarrow x=arc\cot a+k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}$

IV. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

1. Phương trình asinx + bcosx = c

asinx + bcosx = c $\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)=c$. Trong đó $cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

2. Phương trình $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=d$

- Kiểm tra xem cosx = 0 có là nghiệm của phương trình không ?.
- Nếu $\cos x\neq 0$, chia cả 2 vế của phương trình cho $cos^2 x$, ta được: $a\tan^2 x+btanx+c=d(1+\tan^2 x)$

BẢNG ĐẠO HÀM

◦ $(x^\alpha)'=\alpha.x^{\alpha-1}$ ◦ $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ ◦ $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	◦ (sinx)’ = cosx ◦ (cosx)’ = - sinx ◦ (tanx)’ = $\frac{1}{\cos^2 x}$ ◦ (cotx)’ = $-\frac{1}{\sin^2 x}$	◦ $(u^\alpha)'=\alpha.u'.u^{\alpha-1}$ ◦ $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$ ◦ $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	◦ (sinu)’ = u’.cosu ◦ (cosu)’ = -u’.sinu ◦ (tanu)’ = $\frac{u'}{\cos^2 u}$ ◦ (cotu)’ = $-\frac{u'}{\sin^2 u}$
◦ $(e^x)'=e^x$ ◦ $(a^x)'=a^x.\ln a$ ◦ (ln| x |)’ = $\frac{1}{x}$ ◦ ($\log_a$| x |)’ = $\frac{1}{x\ln a}$	◦ $(e^u)'=u'.e^u$ ◦ $(a^u)'=u'.a^u.\ln a$ ◦ (ln| u |)’ = $\frac{u'}{u}$ ◦ ($\log_a$| u |)’ = $\frac{u'}{u\ln a}$	◦ (u ± v)’ = u’ ± v’ ◦ (uv)’ = u’v + v’u ◦ (ku)’ = k.u’ ◦ $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$	◦ $y=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow y'=\frac{a.d-b.c}{(cx+d)^2}$

PHẦN GIẢI TÍCH

Chương I KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

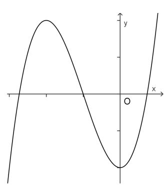
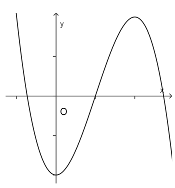
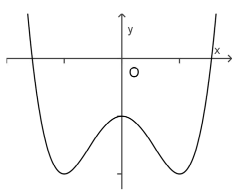
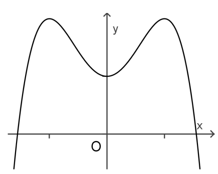
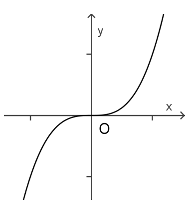
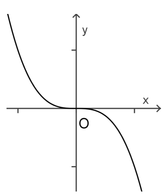
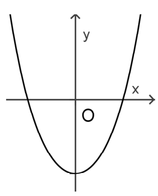
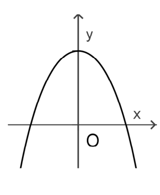
I. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC 3, BẬC 4

1. Các bước khảo sát

- *Tập xác định: D = R ;*
- *Tính đạo hàm y', giải phương trình y' = 0 và tìm các điểm cực trị ;*
- *Tính các giới hạn* $\lim\limits_{x\to-\infty} y$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y$;
- *Lập BBT, nhận xét về tính đơn điệu và cực trị của đồ thị hàm số ;*
- *Vẽ đồ thị.*

Tìm điểm đặc biệt: Tâm đối xứng của đồ thị, giao với các trục Ox, Oy …

2. Các dạng của đồ thị

Hàm số bậc 3		**Hàm số bậc 4**	
Có cực đại và cực tiểu		Có cực đại và cực tiểu	
a > 0	a < 0	a > 0	a < 0
			
Không có cực trị		Có cực đại hoặc cực tiểu	
a > 0	a < 0	a > 0	a < 0
			

3. Các ví dụ

Hàm số bậc ba	**Hàm số bậc bốn**
Ví dụ : Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ **Giải** * Tập xác định: D = R * Đạo hàm: $y' = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$ Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 3x(x+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = -4 \\ x = -2 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right.$ * Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$ * Bảng biến thiên:	**Ví dụ :** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ **Giải** * Tập xác định: D = R * Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$ Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \Rightarrow y = -4 \\ x = 0 \Rightarrow y = -3 \end{array}\right.$ * Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$ * Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

* Nhận xét :

+ HS đồng biến trên $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$, nghịch biến trên (-2 ; 0).

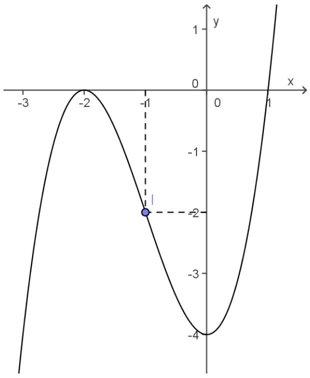
+ HS đạt cực đại tại x = -2 ; $y_{CĐ}$ = 0, đạt cực tiểu tại x = 0 ; y_{CT} = -4.

* Đồ thị:

+ Đồ thị nhận điểm I(-1 ; -2) làm tâm đối xứng.

+ Cho $x=1 \Rightarrow y=0$.

+ Cho $x=-3 \Rightarrow y=-4$.



x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	-4	↗	-3	↘	-4	↗	$+\infty$

* Nhận xét:

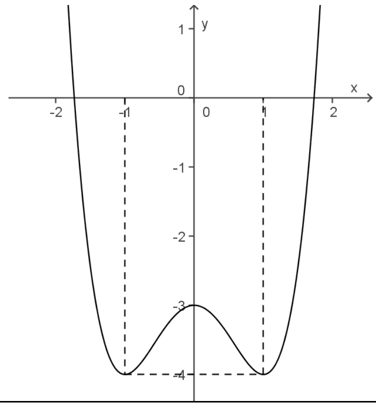
+ HS đồng biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$, nghịch biến trên $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

+ HS đạt cực đại tại x = 0 ; $y_{CĐ}$ = -3, đạt cực tiểu tại x = ± 1 ; y_{CT} = -4.

* Đồ thị:

+ Cho $x=-2 \Rightarrow y=5$.

+ Cho $x=2 \Rightarrow y=5$.



II. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM PHÂN THỨC $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $\left(x \neq -\dfrac{d}{c}\right)$

Các bước khảo sát

* TXĐ: D = $R\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

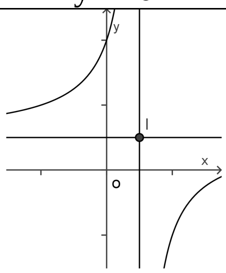
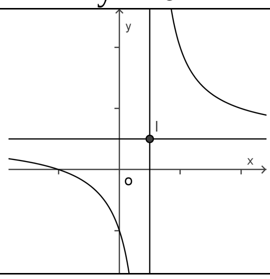
* Tính đạo hàm $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

* Giới hạn, tiệm cận.

$\lim\limits_{x\to -\frac{d}{c}^+} y = ?$, $\lim\limits_{x\to -\frac{d}{c}^-} y = ?$ $\Rightarrow$ Tiệm cận đứng: $x=-\dfrac{d}{c}$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} y=\dfrac{a}{c}$, $\lim\limits_{x\to -\infty} y=\dfrac{a}{c}$ $\Rightarrow$ Tiệm cận ngang: y = $\dfrac{a}{c}$.

* Lập bảng biến thiên:

y' > 0	y' < 0
	

Ví dụ

Ví dụ: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

$$y=\frac{x+1}{x-1}$$

Giải

* Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

* Đạo hàm: $y'=\dfrac{-2}{(x-1)^2}<0\ \forall x\in D$.

* Giới hạn, tiệm cận:

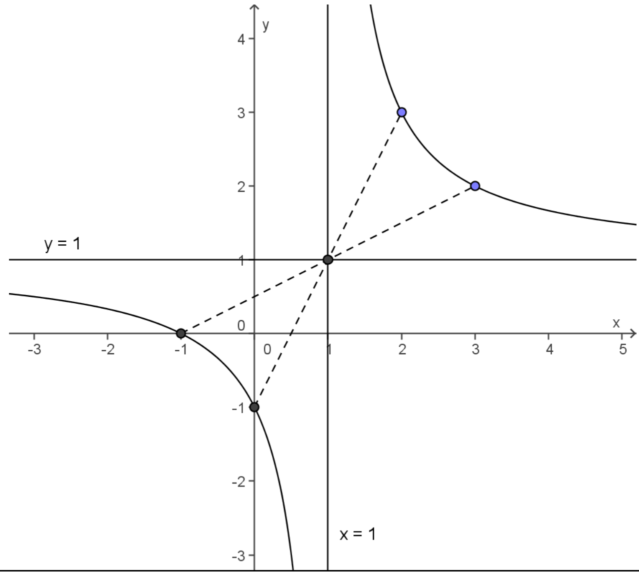
+ Vì $\lim\limits_{x\to 1^+} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^-} y=-\infty$ nên TCĐ: x = 1.

+ Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=1$ nên tiệm cận ngang là y = 1.

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		-	‖	-	
y	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

* Nhận xét:

* Vẽ đồ thị. Tìm điểm đặc biệt: giao với trục Ox, Oy. **Lưu ý:** - Đồ thị đối xứng qua điểm I là giao điểm của TCĐ và TCN. - Trục hoành: y = 0. - Trục tung: x = 0.	+ HS luôn nghịch biến trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$. + HS không có cực trị. * Đồ thị: + Cho $x=0 \Rightarrow y=-1$. + Cho $y=0 \Rightarrow x=-1$. 

BÀI TẬP

Bài tập 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

1. $y=x^3+3x^2-1$
2. $y=x^3-3x^2+1$
3. $y=x^3+3x^2$
4. $y=x^3-3x^2+2$
5. $y=2x^3-3x^2$
6. $y=x^3-6x^2+9x$
7. $y=-x^3+3x^2$
8. $y=-2x^3+3x^2+1$
9. $y=-x^3+3x^2-1$
10. $y=-x^3+3x-2$
11. $y=-x^3-3x^2+2$
12. $y=-x^3+3x^2-4$
13. $y=x^3-6x^2+9x-1$

Bài tập 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

1. $y=x^4-2x^2-1$
2. $y=2x^2-x^4$
3. $y=-\frac{1}{4}x^4+2x^2+1$
4. $y=2x^4-4x^2-1$
5. $y=x^4-2x^2-2$
6. $y=x^4-2x^2+1$
7. $y=\frac{x^4}{2}-x^2-\frac{3}{2}$
8. $y=-x^4+4x^2$

Bài tập 3: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

1. $y=\frac{x-1}{x+2}$
2. $y=\frac{x-1}{x-2}$
3. $y=\frac{2x-1}{x+1}$
4. $y=\frac{2x-3}{x+1}$
5. $y=\frac{x+3}{x-1}$
6. $y=\frac{3x+1}{x-1}$
7. $y=\frac{3x+5}{2x+2}$
8. $y=\frac{3x-2}{x+1}$
9. $y=\frac{2x+1}{x-2}$
10. $y=\frac{-2x+1}{x+2}$
11. $y=\frac{2x+1}{x-2}$
12. $y=\frac{x+2}{x+1}$
13. $y=\frac{x+1}{x-2}$

CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI TOÁN 1: Định giá trị của m để hàm số đồng biến, nghịch biến trên TXĐ

1. Định lí về dấu của tam thức bậc 2

Cho tam thức bậc 2: $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$) có $\Delta=b^2-4ac$. Khi đó:

- *Nếu $\Delta<0$ thì f(x) cùng dấu với hệ số a với mọi $x\in\mathbb{R}$.*
- *Nếu $\Delta=0$ thì f(x) cùng dấu với hệ số a với mọi $x\in\mathbb{R}$, trừ $x=-\dfrac{b}{2a}$.*
- *Nếu $\Delta>0$, giả sử tam thức có 2 nghiệm x_1,x_2 ($x_1<x_2$) ta có bảng xét dấu:*

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		*cùng dấu a*	*0*	*trái dấu a*	*0*	*cùng dấu a*	

2. Định giá trị của m

<table>
<tr><td colspan="2">Đối với hàm bậc 3 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$
- Tập xác định: D = R
- Đạo hàm: $y'=3ax^2+2bx+c$.</td><td colspan="2">Đối với hàm nhất biến $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $\left(x\neq-\dfrac{d}{c}\right)$
TXĐ: D = $R\backslash\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$. Đạo hàm: $y'=\dfrac{a.d-b.c}{(cx+d)^2}$</td></tr>
<tr><td>y đồng biến trên D
$\Leftrightarrow y'\geq 0,\ \forall x\in D$
$\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta\leq 0\end{cases}$</td><td>y nghịch biến trên D
$\Leftrightarrow y'\leq 0,\ \forall x\in D$
$\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta\leq 0\end{cases}$</td><td>y đồng biến trên từng khoảng của D
$\Leftrightarrow y'>0,\ \forall x\in D$
$\Leftrightarrow ad-bc>0$</td><td>y nghịch biến trên từng khoảng của D
$\Leftrightarrow y'<0,\ \forall x\in D$
$\Leftrightarrow ad-bc<0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ví dụ: Định m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+mx^2+(m+6)x-(2m+1)$ đồng biến trên tập xác định.
Giải. Tập xác định: D = R
$y'=x^2+2mx+m+6$ có $\Delta'_{y'}=m^2-.1(m+6)$
$=m^2-m-6$
Để hàm số đồng biến trên tập xác định thì
$\begin{cases}a=1/3>0\\ m^2-m-6<0\end{cases}\Leftrightarrow -2<m<3$.</td><td colspan="2">Ví dụ: Định m để hàm số $y=\dfrac{(2m-1)x+3}{x+m}$ đồng biến trên tập xác định.
Giải. Tập xác định: D = R\{-m}
Ta có $y'=\dfrac{m(2m-1)-3}{(x+m)^2}=\dfrac{2m^2-m-3}{(x+m)^2}$.
Để HS đồng biến trên TXĐ thì
$y'>0\Leftrightarrow 2m^2-m-3>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\ m>\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$.</td></tr>
</table>

BÀI TẬP

1. Cho hàm số $y=x^3+(m+2)x^2-(m-1)x-2$ (1). Định m để hàm số (1) đồng biến trên tập xác định của nó.
2. Cho hàm số $y=2x^3+3x^2-2mx+1$ (1). Định m để hàm số (1) đồng biến trên tập xác định của nó.
3. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-2x+1$ (1). Định m để hàm số (1) đồng biến trên tập xác định của nó.

BÀI TOÁN 2: Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn [a ; b]

Cho hàm số y = f(x) xác định trên đoạn [a ; b].

Phương pháp	Ví dụ
* *Tính đạo hàm y'.* * *Giải y' = 0 tìm nghiệm* $x_1, x_2 \ldots \in (a;b)$ * *Tính các giá trị* $y(a), y(b), y(x_1), y(x_2)\ldots$ * *Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên, ta có:* $\max\limits_{[a;b]} y = M \qquad \min\limits_{[a;b]} y = m$	**Ví dụ.** Tìm GTLN và GTNN của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ trên đoạn [-1 ; 1]. **Giải** * Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ Cho y' = 0 $\Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ (nhận)} \\ x = 2 \text{ (loại)} \end{array}\right.$ * Ta có y(-1) = -2 ; y(0) = 2 ; y(1) = 0 * Vậy: $\max\limits_{[-1;1]} y = 2$ đạt được tại x = 0. $\min\limits_{[-1;1]} y = -2$ đạt được tại x = -1.

BÀI TẬP

1. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trên đoạn [0 ; 2] (TN THPT 2007).
2. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ trên đoạn [0 ; 2] (TN THPT 2008 – Lần 1).
3. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = 2x^3 - 6x^2 + 1$ trên đoạn [-1 ; 1] (TN THPT 2008 – Lần 2).
4. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 7$ trên đoạn [0 ; 2].
5. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = x^2 - \ln(1-2x)$ trên đoạn [-2 ; 0] (TN THPT 2009).
6. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = (3-x)e^x$ trên đoạn [3 ; 3].
7. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = x - e^{2x}$ trên đoạn [-1 ; 0].

BÀI TOÁN 3: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

Phương trình tiếp tuyến (PTTT) của hàm số y = f(x) có đồ thị (C) tại điểm $M_0(x_0; y_0) \in$ đồ thị (C) và có hệ số góc $k = f'(x_0)$ là:

$$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$

Các bài toán thường gặp: Lập phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số (C): y = f(x).

1. Tại điểm có hoành độ là x_0, (tung độ y_0) biết trước.

Cách giải: *Thay x_0, (y_0) vào phương trình của (C) ta tìm được y_0, (x_0) tương ứng.*

Lưu ý: + Tại giao của đồ thị (C) với trục tung: Ta có $x_0 = 0$.
+ Tại giao của đồ thị (C) với trục hoành: Ta có $y_0 = 0$.

2. Có hệ số góc k cho trước.

Cách giải: *Từ phương trình k = f'(x_0) ta tìm được x_0 từ đó tìm được y_0.*

3. Biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng (d) y = ax + b.

Cách giải: *Vì tiếp tuyến // d $\Rightarrow k = a$, từ phương trình k = f'(x_0) = a ta tìm được x_0 từ đó tìm y_0.*

4. Biết tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng (d) y = ax + b.

Cách giải: *Vì tiếp tuyến vuông góc với d nên k.a = -1 từ đó suy ra được k, từ phương trình* *k = f'(x_0) = a ta tìm được x_0 từ đó tìm y_0.*

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$, gọi đồ thị của hàm số là (C). Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) .

1. Tại điểm có hoành độ bằng -1 ;
2. Tại điểm có tung độ bằng 2 ;
3. Tại giao điểm của đồ thị với trục hoành ;
4. Tại giao điểm của đồ thị với trục tung.

Giải. $y'=\dfrac{3}{(x+2)^2}$.

1. Theo đề bài ta có x_0 = -1 $\Rightarrow$ $y_0 = y(-1)=-2$. Mặt khác hệ số góc k = y'(-1) = 3.
   Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y + 2 = 3(x + 1) hay y = 3x + 1.
2. Theo đề bài ta có y_0 = 2 $\Rightarrow \dfrac{x_0-1}{x_0+2}=2\Rightarrow x_0-1=2(x_0+2)\Rightarrow x_0=-5$.
   Mặt khác hệ số góc k = y'(-5) $=\dfrac{1}{3}$.
   Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y - 2 = $\dfrac{1}{3}$(x + 5) hay y = $\dfrac{x}{3}+\dfrac{11}{3}$.
3. Theo đề bài ta có y_0 = 0 $\Rightarrow \dfrac{x_0-1}{x_0+2}=0\Rightarrow x_0=1$. Mặt khác hệ số góc k = y'(1) = $\dfrac{1}{3}$.
   Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y – 0 = $\dfrac{1}{3}$(x - 1) hay y = $\dfrac{1}{3}$x - $\dfrac{1}{3}$.
4. Theo đề bài ta có x_0 = 0 $\Rightarrow$ y_0 = -$\dfrac{1}{2}$. Mặt khác hệ số góc k = y'(0) = $\dfrac{3}{4}$.
   Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y + $\dfrac{1}{2}$ = $\dfrac{3}{4}$(x - 0) hay y = $\dfrac{3}{4}$x - $\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x-1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C). Viết PTTT với đồ thị (C)

1. Tại điểm có hệ số góc bằng -2.
2. Biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $y=-\dfrac{1}{2}x$.
3. Biết tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng $y=\dfrac{9}{2}x+1$.

Giải $y'=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

1. Theo đề bài ta có $y'(x_0)=-2\Leftrightarrow\dfrac{-2}{(x_0-1)^2}=-2\Leftrightarrow(x_0-1)^2=1\Leftrightarrow x_0^2-2x_0=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=2\end{array}\right.$.

   Với $x_0=0\Rightarrow y_0=0$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y – 0 = -2(x – 0) hay y = -2x.
   Với $x_0=2\Rightarrow y_0=4$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: y – 4 = -2(x – 2) hay y = -2x + 8.

2. Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=-\dfrac{1}{2}x$ nên tiếp tuyến có hệ số góc k = $y'(x_0)=-\dfrac{1}{2}$.

   Ta có $y'(x_0)=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{-2}{(x_0-1)^2}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow(x_0-1)^2=4\Rightarrow x_0^2-2x_0-3=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=3\\x_0=-1\end{array}\right.$.

   Với $x_0=3\Rightarrow y_0=3$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y-3=-\dfrac{1}{2}(x-3)$ hay $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{9}{2}$.

   Với $x_0=-1\Rightarrow y_0=1$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y-1=-\dfrac{1}{2}(x+1)$ hay $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$.

3. Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=\frac{9}{2}x$ nên tiếp tuyến có hệ số góc k = $y'(x_0)=-\frac{2}{9}$.

Đến đây làm tương tự câu 2.

Đáp án: Có 2 tiếp tuyến thoả mãn là $y=-\frac{2}{9}x+\frac{32}{9}$ và $y=-\frac{2}{9}x+\frac{8}{9}$.

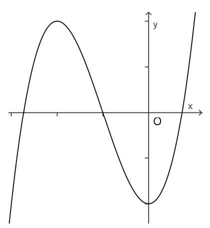
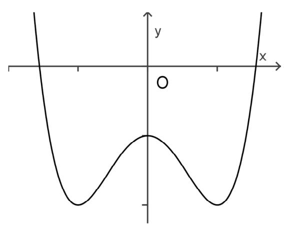
BÀI TẬP

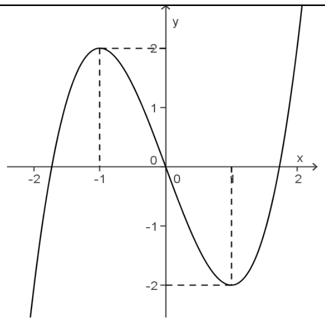
1. Viết PTTT với đồ thị hàm số $y=\frac{2x+3}{x+1}$ tại điểm có hoành độ $x_0=-3$ (TN THPT 2006).
2. Cho HS $y=x^4-2x^2+1$ có đồ thị (C). Viết PTTT với (C) tại điểm cực đại (TN THPT 2007).
3. Cho HS $y=\frac{3x-2}{x+1}$ có đồ thị (C). Viết PTTT với (C) tại điểm có tung độ = -2 (TN THPT 2008).
4. Cho HS $y=\frac{2x+1}{x-2}$ có đồ thị (C). Viết PTTT với (C), biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng -5 (TN THPT 2009).
5. Cho HS $y=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}$ có đồ thị (C). Viết PTTT với (C) tại điểm có hoành độ bằng 2.
6. Cho HS $y=\frac{2x-3}{1-x}$ có đồ thị (C). Viết PTTT với (C), biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng y = -x + 3.

BÀI TOÁN 4: Dùng đồ thị (C) y = f(x) biện luận theo m số nghiệm của phương trình f(x) = m

Phương pháp

- *Biến đổi, đưa phương trình về dạng: f(x) = m (1).*
- *Đặt: y = f(x) (C).*
  y = m (d) là đường thẳng song song với trục Ox.
- *Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của (C) và (d). Dựa vào đồ thị, ta có:*

<table>
<tr><th colspan="2">Hàm bậc 3: $y=ax^3+bx^2+cx+d$</th><th colspan="2">Hàm bậc 4: $y=ax^4+bx^2+c$</th></tr>
<tr><th>Đồ thị</th><th>Biện luận</th><th>Đồ thị</th><th>Biện luận</th></tr>
<tr><td></td><td>* $\left[\begin{array}{l} m>y_{CD} \\ m<y_{CT}\end{array}\right.$: (1) có 1 nghiệm.
* $\left[\begin{array}{l} m=y_{CD} \\ m=y_{CT}\end{array}\right.$: (1) có 2 nghiệm.
* $y_{CT}<m<y_{CD}$: (1) có 3 nghiệm.</td><td></td><td>* $m<y_{CT}$: (1) vô nghiệm.
* $m=y_{CT}$: (1) có 2 nghiệm.
* $y_{CT}<m<y_{CD}$: (1) có 4 nghiệm.
* $m=y_{CD}$: (1) có 3 nghiệm.
* $m>y_{CD}$: (1) có 2 nghiệm.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ví dụ: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y=x^3-3x$. Dựa vào đồ thị (C), biện luận theo m số nghiệm của phương trình
$x^3-3x+1-m=0$.
Giải
* Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số: (học sinh tự làm).
* Đồ thị:</td><td colspan="2">Ví dụ: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y=x^4-2x^2-1$. Dựa vào đồ thị (C), biện luận theo m số nghiệm của phương trình
$x^4-2x^2-m+1=0$.
Giải
* Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số: (học sinh tự làm).
* Đồ thị:</td></tr>
</table>

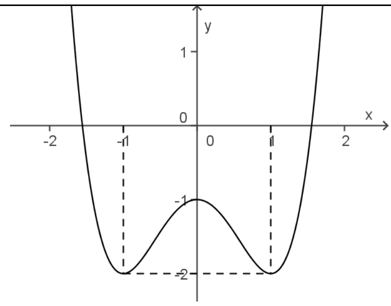


* Ptrình $x^3 - 3x + 1 - m = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x = m - 1 \quad (1)$
* Số nghiệm của PT (1) là số giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng y = m – 1. Dựa vào đồ thị (C), ta có:

+ Nếu $\left[\begin{array}{l} m-1<-2 \\ m-1>2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>3 \end{array}\right.$ thì phương trình (1) có 1 nghiệm.

+ Nếu $\left[\begin{array}{l} m-1=-2 \\ m-1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \end{array}\right.$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm.

+ Nếu $-2 < m-1 < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 3$ thì phương trình (1) có 3 nghiệm.



* Ptrình $x^4 - 2x^2 - m + 1 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 1 = m - 2 \quad (1)$
* Số nghiệm của PT (1) là số giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng y = m – 2. Dựa vào đồ thị (C), ta có:

+ Nếu $m-2<-2 \Leftrightarrow m<0$ thì phương trình (1) vô nghiệm.

+ Nếu $m-2=-2 \Leftrightarrow m=0$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm.

+ Nếu $-2<m-2<-1 \Leftrightarrow 0<m<1$ thì phương trình (1) có 4 nghiệm.

+ Nếu $m-2=-1 \Leftrightarrow m=1$ thì phương trình (1) có 3 nghiệm.

+ Nếu $m-2>-1 \Leftrightarrow m>1$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm.

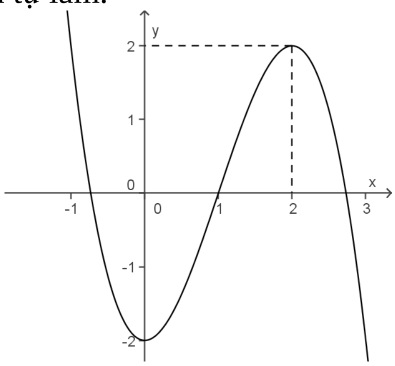
Chú ý: *Phương pháp biện luận trên chỉ áp dụng cho trường hợp hàm bậc 3 hoặc bậc 4 có cả điểm cực đại và điểm cực tiểu.*

Ví dụ: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$, gọi đồ thị của hàm số là (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Tìm các giá trị của m để phương trình $x^3 - 3x^2 + 2 + m + 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Giải

1. Học sinh tự làm.



2. Tìm các giá trị của m …

$x^3 - 3x^2 + 2 + m + 1 = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 - 2 = m + 1 (1)$

Số nghiệm của PT (1) là số giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng y = m + 1. Để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì:

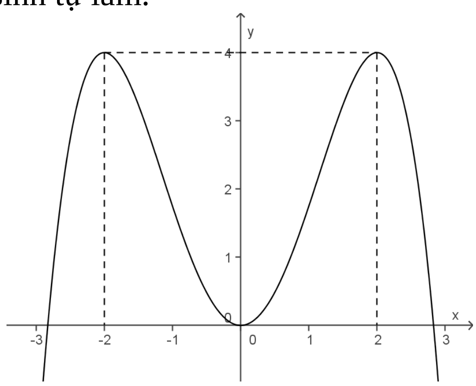
$$-2 < m+1 < 2 \Leftrightarrow -3 < m < 1.$$

Ví dụ: Cho hàm số $y = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2$, gọi đồ thị của hàm số là (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Tìm các giá trị của m để phương trình $-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - 2m + 1 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Giải

1. Học sinh tự làm.



2. Tìm các giá trị của m …

$-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 = 2m - 1$

	Số nghiệm của PT trên là số giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng y = 2m - 1. Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì: $$0<2m-1<4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}<m<\frac{5}{2}.$$

BÀI TẬP

1. Cho hàm số $y=2x^3+3x^2-1$ có đồ thị (C). Dựa vào (C), biện luận theo m số nghiệm của phương trình $2x^3+3x^2-1=m$ (TN THPT 2008 – Lần 1).
2. Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x-1$ có đồ thị (C). Tìm m để phương trình $x^3-6x^2+9x-m=0$ có 3 nghiệm phân biệt.
3. Cho hàm số $y=-x^4+2x^2$ có đồ thị (C). Tìm m để phương trình $x^4-2x^2+m-2=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

BÀI TOÁN 5: Định m để hàm số có cực đại, cực tiểu (đối với HS bậc 3: $y=ax^3+bx^2+cx+d$).

Phương pháp	Ví dụ
Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow$ *y' = 0 có 2 nghiệm phân biệt* $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta_{y'}>0 \end{cases}$.	**Ví dụ:** Định m để hàm số $y=x^3+(m-1)x^2+x-2$ có cực đại, cực tiểu. **Giải** Đạo hàm: $y'=3x^2+2(m-1)x+1$ Ta có $\Delta'_{y'}=(m-1)^2-3.1=m^2-2m-2$ Để hàm số có cực đại và cực tiểu thì $\begin{cases} a=1\neq 0 \\ \Delta'=m^2-2m-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<1-\sqrt{3} \\ m>1+\sqrt{3} \end{array}\right.$.

BÀI TẬP

1. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+(m-1)x^2+(3m^2-4m+1)x+m$. Xác định m để :

a. Hàm số có cực đại và cực tiểu. (Đáp án: 0 < m < 1).
b. Hàm số luôn đồng biến trên R. (Đáp án: $m\le 0$ hoặc $m\ge 1$).

2. Cho hàm số $y=(m+2)x^3+3x^2+mx-5$. Xác định m để hàm số có cực đại và cực tiểu.

3. Cho hàm số $y=mx^3-3x^2+(2m-2)x-2$. Xác định m để hàm số có cực đại và cực tiểu.

4. Cho hàm số $y=x^4-2(m-1)x^2+m$. Xác định m để hàm số có 3 cực trị.

BÀI TOÁN 6: Định m để hàm số nhận điểm x_0 làm điểm cực đại (cực tiểu)

Phương pháp *Điểm* x_0 *là điểm cực đại* $\Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_0)=0 \\ y''(x_0)<0 \end{cases}$.	**Ví dụ:** Định m để hàm số $$y=\frac{m}{3}x^3+(m-1)x^2+(3m^2-4m)x+m-9$$ nhận điểm x =1 làm điểm cực đại. **Giải**

Điểm x_0 là điểm cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_0)=0 \\ y''(x_0)>0 \end{cases}$.	Ta có $y'=mx^2+2(m-1)x+3m^2-4m \Rightarrow y''=2mx+2(m-1)$ Để hàm số nhận điểm x = 1 làm điểm cực đại thì $\begin{cases} y'(1)=0 \\ y''(1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2-m-2=0 \\ 4m-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \vee m=-\frac{2}{3} \\ m<\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m=-\frac{2}{3}$.

BÀI TẬP

1. Cho hàm số $y=x^3-(m+3)x^2+mx+5$. Xác định các giá trị của m để hàm số đạt cực đại tại x = 2.

2. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-m+1)x+1$. Xác định m để hàm số đạt cực tiểu tại x = 1.

3. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+(m^2-1)x+2$. Xác định các giá trị của m để hàm số đạt cực đại tại x = 2.

BÀI TOÁN 7: Chứng minh hàm số y = f(x, m) luôn có cực trị với mọi giá trị của tham số m

Phương pháp *Chứng tỏ f'(x, m) luôn có nghiệm và đổi dấu khi x đi qua các nghiệm đó.* *- Với hàm số bậc 3, chứng tỏ y' = 0 có delta dương với mọi m.* *- Với hàm số bậc 4, cần theo yêu cầu bài toán để tìm m sao cho y' = 0 có 1 nghiệm hoặc 3 nghiệm.*	**Ví dụ:** Chứng minh rằng đồ thị hàm số $y=x^3-mx^2-2x+1$ luôn có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu với mọi giá trị của m. **Giải** * Tập xác định: D = R. * Đạo hàm: $y'=3x^2-2mx-2$ * Ta có $\Delta'=(-m)^2-3.(-2)=m^2+6>0, \forall m \in R$. Suy ra y' = 0 có 2 nghiệm phân biệt và y'đổi dấu (có thể lập bảng xét dấu với hai nghiệm $x_1;x_2$) khi x đi qua 2 nghiệm đó. * Vậy hàm số luôn có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu với mọi m.

-- ***Hết chương I*** --

Chương II HÀM SỐ LUỸ THỪA, HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LÔGARIT

1. Luỹ thừa với số mũ nguyên ($a \neq 0$, $m, n \in \mathbb{Z}$)

- $a^0 = 1, (a \neq 0)$
- $a^m.a^n = a^{m+n}$
- $(a^m)^n = a^{m.n}$
- $(a.b)^m = a^m.b^m$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$

2. Căn bậc n

Định nghĩa: *Cho số thực b và số nguyên dương n ≥ 2. Số a được gọi là căn bậc n của số b nếu* $a^n = b$.

Kí hiệu: $a = \sqrt[n]{b}$.

- n lẻ, $b \in R$: tồn tại duy nhất $\sqrt[n]{b}$.
- n chẵn: + b < 0: không tồn tại căn bậc n của b.
  + b = 0: $\sqrt[n]{0} = 0$.
  + b > 0: tồn tại 2 căn bậc n trái dấu của b đó là $\sqrt[n]{b}$ và $-\sqrt[n]{b}$.

Tính chất ($a, b > 0$, $m, n \in \mathbb{Z}^+$)

- $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
- $\sqrt[m.n]{a^m} = \sqrt[n]{a}$

3. Luỹ thừa với số mũ thực ($a > 0$, $\alpha, \beta \in R$)

- $a^\alpha.a^\beta = a^{\alpha+\beta}$
- $(a.b)^\alpha = a^\alpha.b^\alpha$
- $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha = \dfrac{a^\alpha}{b^\alpha}$
- $\left(a^\alpha\right)^\beta = a^{\alpha.\beta}$
- Nếu a > 1 thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$
- Nếu 0 < a < 1 thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$

4. Lôgarit

a. Định nghĩa: Cho a, b > 0, $a \neq 1$, ta có: $\boxed{\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = b}$

b. Công thức: Cho a > 0, $a \neq 1$, M, N > 0.

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a(M.N) = \log_a M + \log_a N$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
- $\log_a a^M = M$
- $\log_a b^M = M \log_a b$
- $a^{\log_a M} = M$
- $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha}\log_a b$
- $\log_a b = 1/\log_b a$

c. Công thức đổi cơ số: Cho a, b, c > 0, $a \neq 1$, c ≠ 1. $\boxed{\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}}$

d. So sánh lôgarit: Cho a > 0, $a \neq 1$.

a > 1 : $\log_a M > \log_a N \Leftrightarrow M > N$.

0 < a < 1: $\log_a M > \log_a N \Leftrightarrow M < N$.

e. Lôgarit thập phân và lôgarit tự nhiên: Số $e = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \approx 2,71828...$

Lôgarit thập phân: $\boxed{\log_{10} x = \log x = \lg x}$ Lôgarit tự nhiên: $\boxed{\log_e x = \ln x}$

5. Giải PT, BPT mũ và lôgarit

Phương trình mũ	Phương trình lôgarit
a. Phương trình mũ cơ bản Dạng: $a^x = b$, $(a>0, a\neq 1)$. Với b > 0, ta có: $\boxed{a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b}$ Với b ≤ 0, phương trình vô nghiệm. **b. Phương pháp giải PT mũ thường gặp** - *Đưa về cùng cơ số.* - *Đặt ẩn phụ (đặt t = a^x, t>0).* - *Lôgarit hoá.*	**a. Phương trình lôgarit cơ bản** Dạng: $\log_a x = b$, (a > 0, a ≠ 1). Ta có: $\boxed{\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b}$ **b. Phương pháp giải PT lôgarit thường gặp** - *Đưa về cùng cơ số.* - *Đặt ẩn phụ (không cần đặt điều kiện cho ẩn phụ).* - *Mũ hoá.*

Chú ý: Các em nắm thật vững hai phương pháp đưa về cùng cơ số và đặt ẩn phụ để giải PT, BPT mũ, lôgarit. Còn phương pháp thứ 3 tương đối khó chỉ nên tham khảo thêm.

6. Một số dạng phương trình (BPT) mũ, lôgarit thường gặp

a. Các dạng cơ bản

a > 0, $a\neq 1$	a > 1	0 < a < 1
$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)=g(x) \end{cases}$	$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)>0 \\ f(x)>g(x) \end{cases}$	$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)<g(x) \end{cases}$

b. Vận dụng

Dạng toán	Ví dụ
Dạng 1: Phương trình mũ bậc hai $m.a^{2x} + n.a^x + p = 0$ (1) **Phương pháp** - *Đặt* $t = a^x$, *(t > 0). Ta được PT:* $m.t^2 + n.t + p = 0$ - *Giải phương trình trên tìm nghiệm t (nhớ với điều kiện t > 0).* - *Giải phương trình* $a^x = t \Leftrightarrow x = \log_a t$. - *Kết luận, nghiệm của (1).*	**Ví dụ:** Giải phương trình $3^{2x+1} - 4.3^x + 1 = 0$. **Giải** $3^{2x+1} - 4.3^x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3.3^{2x} - 4.3^x + 1 = 0$ Đặt t = 3^x (t > 0), ta được phương trình $3t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t = 1/3 \end{array}\right.$ Với t = 1 $\Leftrightarrow 3^x = 1 \Leftrightarrow x = \log_3 1 = 0$. Với t = $\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^x = \log_3 \frac{1}{3} = -1$. Vậy PT đã cho có 2 nghiệm x = 0 ; x = -1.
Dạng 2: $m.a^x + n.a^{-x} + p = 0$ hay $m.a^x + \frac{n}{a^x} + p = 0$. **Phương pháp** - *Đặt* $t = a^x$, *(t > 0). Khi đó* $a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \frac{1}{t}$. - *Thay vào PT đã cho giải tìm t (t > 0). Rồi tìm x.* - *Kết luận, nghiệm của PT.*	**Ví dụ:** Giải phương trình $6^x - 6^{1-x} - 5 = 0$. **Giải** $6^x - 6^{1-x} - 5 = 0 \Leftrightarrow 6^x - \frac{6}{6^x} - 5 = 0$ Đặt t = 6^x (t > 0), ta được phương trình $t - \frac{6}{t} - 5 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=6 \text{ (nhận)} \\ t=-1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$. Với t = 6 $\Leftrightarrow 6^x = 6 \Leftrightarrow x = \log_6 6 = 1$.

	Vậy phương trình đã cho có nghiệm là x = 6.
Dạng 3: BPT mũ $a^{f(x)} \le a^{g(x)}, (0 < a \ne 1)$. **Phương pháp** *- Nếu 0 < a < 1, ta có f(x) ≥ g(x) (BPT đổi chiều).* *- Nếu a > 1, ta có f(x) ≤ g(x).* *Với BPT* $a^{f(x)} \le c$ *- Nếu 0 < a < 1, ta có f(x) ≥* $\log_a c$ *(BPT đổi chiều)* *- Nếu a > 1, ta có f(x) ≤* $\log_a c$.	**Ví dụ:** Giải bất phương trình $2^{x^2-3x} \le \frac{1}{4}$. **Giải** $2^{x^2-3x} \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{x^2-3x} \le 2^{-2} \Leftrightarrow x^2-3x \le -2$ $\Leftrightarrow x^2-3x+2 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le x \le 2$ Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: [1 ; 2].
Dạng 4: Biến đổi về phương trình dạng $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. **Phương pháp** *- Dùng các công thức tính toán, cộng, trừ lôgarit để biến đổi.* *- Cần chú ý đến ĐK của các biểu thức dưới dấu lôgarit.*	**Ví dụ:** Giải phương trình $\log_3(9x) + \log_9 x = 5$. **Giải** Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ 9x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$. Khi đó: $\log_3(9x) + \log_9 x = 5 \Leftrightarrow \log_3 9 + \log_3 x + \log_{3^2} x = 5$ $\Leftrightarrow 2 + \log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 x = 5 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\log_3 x = 3$ $\Leftrightarrow \log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 3^2 = 9.$ Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm là x = 9.
Dạng 5: Phương trình bậc hai chứa dấu lôgarit $m.\log_a^2 f(x) + n.\log_a f(x) + p = 0$. **Phương pháp** *- ĐK: f(x) > 0.* *- Đặt* $t = \log_a f(x)$, *ta được* $m.t^2 + n.t + p = 0$. *Giải phương trình tìm t.* *- Giải PT* $\log_a f(x) = t \Leftrightarrow f(x) = a^t$ *để tìm x.* *- Kết luận nghiệm.*	**Ví dụ:** Giải phương trình $4\log_2^2 x - 3\log_2 x - 10 = 0$. **Giải** Điều kiện: $x > 0$. Đặt $t = \log_2 x$, ta được PT $4t^2 - 3t - 10 = 0$. Giải PT này được t = 2 ; t = $-\frac{5}{4}$. Với t = 2, ta có $\log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 2^2 = 4$. Với t = $-\frac{5}{4}$, ta có $\log_2 x = -\frac{5}{4} \Leftrightarrow x = 2^{-\frac{5}{4}}$.
Dạng 6: BPT lôgarit $\log_a f(x) < \log_a g(x), (0 < a \ne 1)$. **Phương pháp** *- ĐK:* $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$. *- Nếu 0 < a < 1, ta có f(x) > g(x) (BPT đổi chiều).* *- Nếu a > 1, ta có f(x) < g(x).* *Với BPT* $\log_a f(x) \le c$ *- Nếu 0 < a < 1, ta có* $f(x) \ge a^c$ *(BPT đổi chiều)* *- Nếu a > 1, ta có f(x) ≤* a^c.	**Ví dụ:** Giải các bất phương trình sau: a. $\log_2 x \ge \log_2(3x-1)$; b. $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) > \log_{\frac{1}{3}}(x+2)$. **Giải** a. Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ 3x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}$. Khi đó: $\log_2 x \ge \log_2(3x-1) \Leftrightarrow x \ge 3x-1 \Leftrightarrow 2x \le 1 \Leftrightarrow x \le \frac{1}{2}$. Kết hợp ĐK ta được tập nghiệm là: $T = \left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$. b. Điều kiện: $\begin{cases} 2x-1 > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$. Khi đó: $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) > \log_{\frac{1}{3}}(x+2) \Leftrightarrow 2x-1 < x+2 \Leftrightarrow x < 3$. Kết hợp ĐK ta được tập nghiệm là: $T = \left(\frac{1}{2};3\right)$.

BÀI TẬP

Bài tập 1. Không sử dụng máy tính cầm tay. Hãy tính:

a. $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$

b. $2^{2-3\sqrt{5}}.8^{\sqrt{5}}$

c. $(0,04)^{-1,5}.(0,125)^{-\frac{2}{3}}$

d. $(4^{2\sqrt{3}}-4^{\sqrt{3}-1}).2^{-2\sqrt{3}}$

e. $\left(5^{-\frac{2}{5}}\right)^{-5}+\left(0,2^{\frac{3}{4}}\right)^{-4}$

f. $3^{1+2\sqrt[3]{2}}:9^{\sqrt[3]{2}}$

g. $8^{\frac{9}{7}}:8^{\frac{2}{7}}-3^{\frac{6}{5}}.3^{\frac{4}{5}}$

h. $\dfrac{10^{2+\sqrt{7}}}{2^{2+\sqrt{7}}.5^{1+\sqrt{7}}}$

i. $8^{3+\sqrt{2}}.4^{1-\sqrt{2}}.2^{-4-\sqrt{2}}$

j. $\dfrac{6^{5+\sqrt{20}}}{4^{2+\sqrt{5}}.9^{1+\sqrt{5}}}$

k. $4^{\log_2 32}$

l. $7^{\log_{49}15}$

m. $3^{\log_9 27}$

n. $8^{1-\log_2 3}$

o. $10^{2+2\log_{10}7}$

p. $9^{2\log_3 2+4\log_{81}2}$

Bài tập 2. Giải các phương trình sau:

a. $2^{x^2-3x+2}=4$ b. $(0,5)^{x-3}.(0,5)^{1-2x}=2$ c. $3^{2x-1}+3^{2x}=108$ d. $2^{x+1}+2^{x-1}+2^{x}=28$

Bài tập 3. Giải các phương trình sau:

a. $3.9^{x}-3^{x}-2=0$

b. $2^{2x+2}-9.2^{x}+2=0$

c. $9^{x+1}-36.3^{x-1}+3=0$

d. $4^{x}-10.2^{x-1}=24$

e. $5^{2x-1}+5^{x+1}=250$

f. $2^{2x+6}+2^{x+7}-17=0$

i. $3^{2x+1}-9.3^{x}+6=0$

j. $e^{6x}-3.e^{3x}+2=0$

k. $3^{x}+3^{3-x}-12=0$

l. $5^{x-1}+5^{3-x}=26$

m. $2^{x}+2^{1-x}-3=0$

n. $6^{x}-6^{1-x}-5=0$

o. $3^{x+1}-5.3^{3-x}=12$

p. $7^{x}+2.7^{1-x}-9=0$

q. $\left(\frac{1}{4}\right)^{3x}-\left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}-128=0$

r. $\left(2-\sqrt{3}\right)^{x}+\left(2+\sqrt{3}\right)^{x}=14$

Bài tập 4. Giải các phương trình sau:

a. $\log_4(5-2x)=\log_4(x+3)$

b $\log_2(x+1)=1+\log_2 x$

c. $\log_4 x+\log_2(4x)=5$

d. $\log_3(9x)+\log_9 x=5$

e. $\log_3(x+2)+\log_3(x-2)=\log_3 5$

f. $\log_2(x-2)+\log_2(x-3)=\log_2 12$

g. $\log_2(x-2)+\log_2(x-3)=1$

h. $\log_2 x+\log_2(x-1)=1$

i. $\log_6(x-4)-\log_{\frac{1}{6}}(x+1)=1$

j. $\log_4(x+3)-\log_4(x-1)=2-\log_4 8$

k. $\log_2(\log_3(\log_4 x))=0$

l. $\log_{\frac{1}{4}}(3^{x}+1)=\log_4(2-3^{x})$

m. $\log_3(9^{x}+1)-\log_3(2.3^{x}-1)=\log_3 2$

n. $\log_{\frac{1}{4}}(e^{x}+5)+2\log_4(e^{x}-1)=0$

o. $\log_2 x=1+\dfrac{1}{\log_2\sqrt{x}}$

p. $\log_4^2 x-2\log_4 x+1=0$

q. $\log_2^2 x+\log_2 x^3-4=0$

r. $\log_2^2 x-3\log_2 x-10=0$

Bài tập 5. Giải các bất phương trình sau:

a. $7^{2x^2-3x+2}<\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2}$

b. $2^{x^2-3x}\le\frac{1}{4}$

c. $5^{x+1}<\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{x}}$

d. $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x-1}>\left(\frac{5}{2}\right)^{-3x+2}$

e. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-3x}\ge 9$

f. $7^{x}-2^{x+2}\le 5.7^{x-1}-2^{x-1}$

g. $2^{x^2-1}-3^{x^2}>3^{x^2-1}-2^{x^2+2}$

h. $9^{x}-3^{x}-2\ge 0$

i. $49^{x}-6.7^{x}-7<0$

j. $5^{2x+1}>5^{x}+4$

Bài tập 6. Giải các bất phương trình sau:

a. $\log_2 x \ge \log_2(3x-1)$
b. $2\log_2(x-1) - \log_2(5-x) - 1 \le 0$
c. $\log_{\sqrt{2}}(x+2) + \log_{\frac{1}{2}}(3-x) \ge 4$
d. $\log_{\frac{1}{2}}(2x+4) \ge 1$
e. $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) > \log_{\frac{1}{3}}(x+2)$
f. $\log_2 x \ge \log_2(3x-1)$
g. $2\log_2(x-1) - \log_2(5-x) - 1 \le 0$
h. $\log_{\sqrt{2}}(x+2) + \log_{\frac{1}{2}}(3-x) \ge 4$
i. $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-6x+5) + 2\log_2(2-x) \ge 0$
j. $\log_{\frac{1}{5}} x - \log_5(x-2) < \log_{\frac{1}{5}} 3$
k. $\log_{\frac{1}{2}}(2^{3x+5} - 15) > 0$
l. $\log_3\left[\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 + \frac{1}{16}\right)\right] > 1$
m. $\log_4(x^2-2x) > \log_4(x^2+4)$
n. $\log_3^2 2x - 5\log_3 2x + 4 < 0$

-- *Hết chương II* --

Chương III NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN, ỨNG DỤNG

1. Định nghĩa nguyên hàm

Cho hàm số f(x) xác định trên K.

Hàm số F(x) được gọi là nguyên hàm của hàm số f(x) nếu F'(x) = f(x) với mọi $x \in K$.

2. Bảng nguyên hàm

Hàm số sơ cấp	Nguyên hàm bổ sung
∘ $\int dx = x + C$ ∘ $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ ∘ $\int \cos x dx = \sin x + C$ ∘ $\int \sin x dx = -\cos x + C$ ∘ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$ ∘ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$ ∘ $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$ ∘ $\int e^x dx = e^x + C$ ∘ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	∘ $\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a}.\frac{1}{\alpha+1}(ax+b)^{\alpha+1} + C$ ∘ $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$ ∘ $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C$ ∘ $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$ ∘ $\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$ ∘ $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln\lvert \cos x\rvert + C$ ∘ $\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln\lvert \sin x\rvert + C$

3. Định nghĩa tích phân

Cho f(x) là hàm số liên tục trên đoạn [a ; b]. Giả sử F(x) là 1 nguyên hàm của f(x) trên đoạn [a ; b].

Hiệu số F(b) – F(a) được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số f(x). ***Kí hiệu:*** $\int_a^b f(x)dx$.

Công thức: $\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)}$

4. Các bài toán đổi biến số

Bài toán	Ví dụ
Bài toán 1: $\int_a^b f[u(x)].u'(x)dx$ **Phương pháp:** - *Đặt* $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)dx$ - *Đổi cận:* $\left[\begin{array}{l} x = b \Rightarrow t = \beta \\ x = a \Rightarrow t = \alpha \end{array}\right.$ - *Thế:* $\int_a^b f[u(x)].u'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt$	**Ví dụ:** Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}.\cos xdx$ **Giải** Đặt t = sinx $\Rightarrow$ dt = cosxdx Đổi cận: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{array}\right.$ $\Rightarrow I = \int_0^1 e^t dx = e^t \Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$
Bài toán 2: $\int_a^b \sqrt{u(x)}.u'(x)dx$ **Phương pháp:** - *Đặt* $t = \sqrt{u(x)} \Rightarrow t^2 = u(x)$ $\Rightarrow 2tdt = u'(x)dx$ - *Đổi cận.* - *Thế vào.*	**Ví dụ:** Tính $I = \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx$ **Giải** Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow 2tdt = 2xdx$ $\Rightarrow tdt = xdx$ Đổi cận: $\left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2} \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \end{array}\right.$ $\Rightarrow I = \int_1^{\sqrt{2}} t.tdt = \int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt = \frac{1}{3}t^3\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{3}\left[2\sqrt{2} - 1\right]$
Bài toán 3: $\int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{a^2 - x^2}dx$ **Phương pháp:** Đặt $x = a\sin t \Rightarrow dx = a\cos t$	**Bài toán 4:** $\int_0^a \frac{1}{a^2+x^2}dx$ **Phương pháp** Đặt $x = a\tan t \Rightarrow dx = a(1+\tan^2 t)dt$

Chú ý: Các em nên tập trung vào 2 bài toán đầu, còn 2 bài toán sau chỉ nên tham khảo.

BÀI TẬP

Tính các tích phân sau:

1. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 2xdx$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos xdx$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\sin xdx$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 xdx$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3+\sin x}dx$
7. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2 - \cos x}dx$
8. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\sin x}\cos xdx$
9. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\sqrt{1+4\sin 3x}.\cos 3xdx$

11. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos x + 1)\sin xdx$
12. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{4 - \cos^2 x}dx$
13. $\int_1^2 (6x^2 - 4x + 1)dx$
14. $\int_1^2 (2x-1)^5 dx$
15. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx$

17. $\int_0^1 \sqrt{3x+1}dx$
18. $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}.xdx$
19. $\int_0^1 e^{-x^2}.xdx$
20. $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx$
21. $\int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{(e^x+1)e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx$
22. $\int_1^e \frac{\ln^3 x}{x}dx$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$ 10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x+3)\cos x dx$ 16. $\int_{-1}^{1} x^2(1-x^3)^4 dx$

5. Phương pháp tích phân từng phần

a. Công thức $\boxed{\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du}$

b. Các bài toán tích phân từng phần

Bài toán	Ví dụ
Bài toán 1: $\int_a^b P(x)e^x dx$ **Phương pháp:** Đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^x dx \end{cases}$	**Ví dụ:** Tính tích phân $I = \int_0^1 xe^x dx$. **Giải.** Đặt $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{cases}$ Vậy $I = (xe^x)\|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x \|_0^1 = e-(e-1) = 1$.
Bài toán 2: $\int_a^b P(x)\sin x dx$ **Phương pháp:** Đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \sin x dx \end{cases}$	**Ví dụ**: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\sin x dx$. **Giải.** Đặt $\begin{cases} u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$ Vậy $I = -[(2x+1)\cos x]\|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ $= 1 + 2\sin x \|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1+2 = 3$.
Bài toán 3: $\int_a^b P(x) cosxdx$ **Phương pháp:** Đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \cos x dx \end{cases}$	**Ví dụ:** Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-x)cosxdx$. **Giải.** Đặt $\begin{cases} u = 1-x \Rightarrow du = -dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = sinx \end{cases}$ Vậy $I = [(1-x)\sin x]\|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ $= 1 - \frac{\pi}{2} + \cos x \|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{2} - 1 = -\frac{\pi}{2}$.
Bài toán 4: $\int_a^b P(x)\ln x dx$ **Phương pháp:** Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = P(x)dx \end{cases}$	**Ví dụ:** Tính tích phân $I = \int_1^2 2x\ln x dx$. **Giải.** Đặt $\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = 2xdx \Rightarrow v = x^2 \end{cases}$ Vậy $I = (x^2\ln x)\|_1^2 - \int_1^2 xdx = (x^2\ln x)\|_1^2 - \frac{1}{2}x^2\|_1^2$ $= 4\ln 2 - \frac{3}{2}$.

BÀI TẬP

Tính các tích phân sau:

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x-1)cosxdx$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x+3)\sin xdx$
3. $\int_0^{\pi}(1-x)\sin 2xdx$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(1+cosx)dx$
5. $\int_0^{1}(2x+xe^x)dx$
6. $\int_0^{1}(2x+1)e^x dx$
7. $\int_0^{1}2x.e^{-x}dx$
8. $\int_0^{2}(5-2x)e^x dx$
9. $\int_0^{1}\ln(1+x)dx$
10. $\int_1^{3}2x\ln xdx$
11. $\int_1^{2}x^2\ln xdx$

6. Diện tích hình phẳng

Dạng 1: *Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) y = f(x), trục Ox, hai đường thẳng x = a, x = b.*

Phương pháp

- Giải phương trình y = f(x) = 0 tìm nghiệm trên đoạn [a ; b].
- Nếu không có nghiệm nào ∈ [a ; b] thì áp dụng công thức:

$$\boxed{S=\int_a^b|f(x)|dx=\left|\int_a^b f(x)dx\right|}$$

- Nếu có 1 nghiệm c ∈ [a ; b] thì áp dụng công thức (tương tự nếu có 2, 3 … nghiệm)

$$\boxed{S=\int_a^b|f(x)|dx=\left|\int_a^c f(x)dx\right|+\left|\int_c^b f(x)dx\right|}$$

Ví dụ. Tính diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi các đường: $y=x^2-2x$, trục Ox, hai đường thẳng x = -1, x = 1.

Giải

Đặt y = f(x) = x^2-2x. Ta có f(x) = 0 $\Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow$ x = 0 hoặc x = 2 (loại).

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S=\left|\int_{-1}^{1}(x^2-2x)dx\right|=\left|\int_{-1}^{0}(x^2-2x)dx\right|+\left|\int_{0}^{1}(x^2-2x)dx\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{-1}^{0}\right|+\left|\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{0}^{1}\right|=2\ \text{(đvdt).}$$

BÀI TẬP

1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-x$; y = 0 ; x = 0 ; x = 2 ;
2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$, trục hoành và các đường thẳng x = - 2, x = 1 ;

Dạng 2: *Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của 2 đường y = $f_1(x)$, y = $f_2(x)$.*

Phương pháp

- Hoành độ giao điểm của 2 đường y = $f_1(x)$, y = $f_2(x)$ là nghiệm của phương trình $f_1(x) = f_2(x)$.
  Giả sử giải được 2 nghiệm x = a và x = b.
- Diện tích S được tính theo công thức:

$$\boxed{S=\int_a^b|f_1(x)-f_2(x)|dx=\left|\int_a^b[f_1(x)-f_2(x)]dx\right|}$$

Ví dụ. Tính diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi các đường: $y = x^2 - 2x$ và y = x.

Giải

Hoành độ giao điểm của 2 đường cong là nghiệm của phương trình $x^2 - 2x = x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$.
Giải PT ta được x = 0 hoặc x = 3.
Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_0^3 |x^2 - 3x|\,dx = \left|\int_0^3 (x^2 - 3x)dx\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right)\Big|_0^3\right| = \left|\left(\frac{3^3}{3} - \frac{3}{2}.3^2\right) - 0\right| = \frac{9}{2} \text{ (đvdt)}.$$

BÀI TẬP

1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 6$, y = 5x ;
2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$, y = 2 và đường thẳng x = 1 ;
3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số y = lnx, y = 0 và đường thẳng x = e.
4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = -x^2 + 6x$, y = 0 (TN THPT 2007).
5. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2$ có đồ thị (C). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành (TN THPT 2006).

7. Thể tích vật thể tròn xoay

Thể tích của khối tròn xoay sinh ra do hình phẳng giới hạn bởi các đường: (C) y = f(x), trục Ox, hai đường thẳng x = a, x = b khi quay quanh trục Ox là:

$$\boxed{V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx}$$

Ví dụ. Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh ra do hình phẳng giới hạn bởi các đường (C) $y = 2x - x^2$, trục Ox và hai đường thẳng x = 0, x = 2.

Giải

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là:

$$V = \pi\int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi\int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)dx = \pi\left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2 = \frac{16\pi}{5} \text{ (đvtt)}$$

BÀI TẬP

1. Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số y = cosx, trục hoành và hai đường thẳng $x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{\pi}{2}$ quay quanh trục hoành ;
2. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường y = sinx, y = 0, x = 0, x = $\frac{\pi}{2}$. Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình (H) quanh trục hoành ;
3. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{(2x+1)\sin x}$, y = 0, x = 0, x = $\frac{\pi}{2}$. Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình (H) quanh trục hoành.

-------------------------------------- ***Hết chương III*** --------------------------------------

Chương IV **SỐ PHỨC**

1. Định nghĩa

Số phức là một biểu thức có dạng:

$$\boxed{z = a + bi}$$

với $a, b \in R$, $i^2 = -1$.

Tập hợp các số phức kí hiệu là: $\mathbb{C}$

2. Số phức liên hợp

Số phức liên hợp của z = a + bi là:

$$\boxed{\overline{z} = a - bi}$$

3. Mô đun của số phức

Mô đun của z = a + bi là:

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

4. Các phép toán cộng, trừ, nhân số phức

Cho z = a + bi và z' = a' + b'i. Ta có:

- $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$
- $z + z' = (a + a') + (b + b')i$
- $z - z' = (a - a') + (b - b')i$
- $z.z' = (a.a' - b.b') + (ab' + a'b)i$

5. Phép chia

Cho z = a + bi, z' = c + di $\neq 0$

$$\boxed{\frac{z}{z'} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}}$$

6. Nghịch đảo của số phức

Số phức nghịch đảo của z = a + bi là:

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}}$$

7. Phép cộng và nhân hai số phức liên hợp

Cho số phức z = a + bi, gọi $\overline{z}$ *= a – bi là số phức liên hợp của z. Ta có:*

- $z + \overline{z} = 2a$
- $z.\overline{z} = a^2 + b^2$

8. Căn bậc hai của số thực âm và phương trình bậc hai hệ số thực

- Căn bậc hai của số thực a âm là: $\pm i\sqrt{|a|}$.
- Cho PT bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c$\in$ R,a $\neq 0$). Có biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$. Khi đó ta có bảng:

Δ	*Phương trình* $ax^2 + bx + c = 0$
$\Delta > 0$	*Có 2 nghiệm thực phân biệt* $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	*Có 1 nghiệm thực* $x = -\dfrac{b}{2a}$
$\Delta < 0$	*Có 2 nghiệm phức liên hợp* $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a}$

BÀI TẬP

Bài tập 1. Tính giá trị của các biểu thức sau:

1. $P = (1+\sqrt{3}i)^2 + (1-\sqrt{3}i)^2$ (TN THPT 2008)
2. $P = (1-2i)^2 + 2i - 3$
3. $P = 2i - 1 + \dfrac{3+2i}{2-3i}$
4. $P = (2i-1)^3 + 5 - 2i$

Bài tập 2. Tìm môđun của số phức z, biết:

1. $z = (\sqrt{2} + \sqrt{3}i)(\sqrt{3} - \sqrt{2}i)$
2. $iz + 4 + 5i = i(6+3i)$

Bài tập 3. Giải các phương trình sau trên tập hợp số phức.

1. $z^4 + 7z^2 - 18 = 0$ (Thi thử TN 2009)
2. $x^2 - 2x + 2 = 0$ (TN THPT 2009)
3. $x^2 - 4x + 7 = 0$ (TN THPT 2007 – Lần 1)
4. $x^2 - 6x + 25 = 0$ (TN THPT 2007 – Lần 2)
5. $2x^2 - 5x + 4 = 0$ (TN THPT 2006)
6. $4x^2 - 3x + 1 = 0$
7. $x^2 + 3x + 3 = 0$
8. $x^2 - 4x + 20 = 0$

-- *Hết chương IV* --

PHẦN HÌNH HỌC

Chương I + II DIỆN TÍCH VÀ THỂ TÍCH CÁC HÌNH, KHỐI

1. Thể tích hình hộp chữ nhật $\boxed{V = a.b.c}$ Với a, b, c lần lượt là chiều dài, rộng cao của hình hộp. **2. Thể tích hình chóp** $\boxed{V = \frac{1}{3}S.h}$ - S: Diện tích đáy - h: Chiều cao hình chóp **3. Thể tích hình lăng trụ** $\boxed{V = S.h}$ - S: Diện tích đáy - h: Chiều cao hình lăng trụ	**4. Hình trụ** $\boxed{S_{xq} = 2\pi Rl}$ $\boxed{V = \pi R^2.h}$ **5. Hình nón** $\boxed{S_{xq} = \pi Rl}$ $\boxed{V = \frac{1}{3}\pi R^2.h}$ **6. Mặt cầu** $\boxed{S = 4\pi R^2}$ $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$

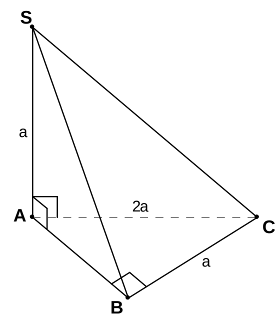
CÁC DẠNG BÀI TẬP

I. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

Dạng 1. *Hình chóp có một cạnh bên d vuông góc với mặt đáy B*

Thì thể tích $\boxed{V = \frac{1}{3}B.d}$ B: Diện tích đáy; d: là chiều cao.

Ví dụ. Tính thể tích của khối chóp S.ABC có cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC), SA=a; tam giác ABC vuông tại B, BC = a; AC = 2a.



Giải

Ta có thể tích $V = \frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA$. Mà SA = a.

Trong tam giác ABC vuông tại B ta có:

$$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$$

Nên $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{1}{2}a\sqrt{3}.a = \frac{1}{2}a^2\sqrt{3}$. Vậy $V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a^2\sqrt{3}\right).a = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Bài tập tương tự

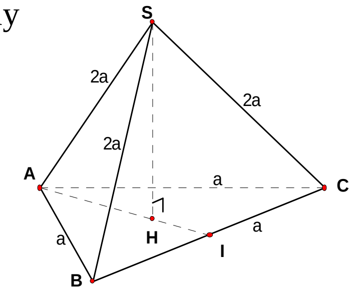
1. (*) (TN THPT 09) Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng đáy, mặt bên SBC là tam giác đều cạnh bằng a, biết $\widehat{BAC} = 120^0$. Tính thể tích khối chóp S.ABC theo a.
2. (TN THPT 08L2) Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng đáy, đáy ABC là tam giác vuông tại B, biết AB = a, $BC = a\sqrt{3}$ và SA = 3a. Tính thể tích khối chóp S.ABC theo a.
3. (TN THPT 07L1) Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng đáy, đáy ABC là tam giác vuông tại B, biết SA = AB = BC = a. Tính thể tích khối chóp S.ABC theo a.
4. (TN THPT 07L2) Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với mặt phẳng đáy, đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a và SA = AC. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Dạng 2. *Biết hình chiếu vuông góc của một đỉnh lên mặt đáy. (hình chiếu của đỉnh S lên đáy B là H)*

Thì thể tích $\boxed{V=\frac{1}{3}B.SH}$ B: Diện tích đáy; SH: là chiều cao.

Ví dụ. (TN THPT 08L1) Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng 2a. Gọi I là trung điểm của cạnh BC. Tính thể tích khối chóp S.ABI theo a.

Giải



Gọi H là trọng tâm của tam giác ABC. Khi đó SH vuông góc với mặt đáy ABC nên thể tích $V=\frac{1}{3}B.h=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH$

Mà $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.BC\sin B=\frac{1}{2}a.a.\sin 60^0=\frac{1}{2}a^2\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Lại có $AH=\frac{2}{3}AI=\frac{2}{3}\sqrt{AB^2-BI^2}=\frac{2}{3}\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Trong tam giác SAH vuông tại H có $SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\sqrt{(2a)^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{a\sqrt{33}}{3}$.

Vậy $V=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH=\frac{1}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{33}}{3}=\frac{a^3\sqrt{11}}{8}$

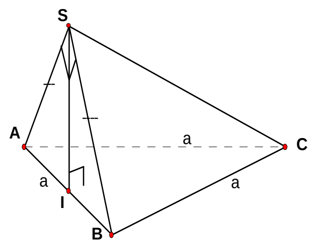
Bài tập tương tự

1. Cho hình chóp đều S.ABCD có AC = $a\sqrt{3}$, góc giữa cạnh bên và mặt đáy ABCD bằng 30^0. Tính thể tích của khối chóp S.ABCD theo a.
2. Cho hình chóp S.ABCD có hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt đáy trùng với trung điểm I của cạnh AB, đáy ABCD là hình chữ nhật biết AB = 2a, AC = 3a , góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy ABCD bằng 45^0. Tính thể tích của khối chóp S.ABCD theo a.

Dạng 3. *Biết một mặt bên vuông góc với đáy. Khi đó đường thẳng đi qua 1 đỉnh của mặt bên, vuông góc với giao tuyến giữa mặt bên và mặt đáy là đường cao của hình chóp.*

Ví dụ. Cho hình chóp S.ABC, có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy (ABC), đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a và mặt SAB là tam giác vuông cân tại S. Tính thể tích của khối chóp S.ABC theo a.

Giải



Ta có $(SAB)\cap(ABC)=AB$. Từ S dựng đường thẳng vuông góc với AB cắt AB tại I; nên SI vuông góc với đáy (ABC) mà ΔSAB vuông cân tại S nên I là trung điểm của AB => $SI=\frac{1}{2}AB=\frac{a}{2}$.

Khi đó thể tích $V=\frac{1}{3}B.h=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SI$. Mà $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin A=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SI=\frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a}{2}=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ (đvtt).

Bài tập tương tự

1. Cho hình chóp S.ABC có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy (ABC), đáy ABC là tam giác vuông tại B. Biết BC = a, AC = $a\sqrt{3}$ mặt SAB là tam giác vuông tại S và SA = a. Tính thể tích của khối chóp S.ABC theo a.

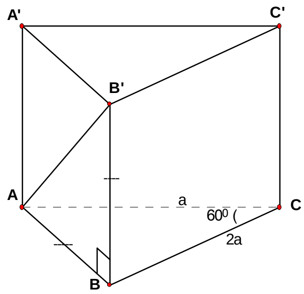
2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật biết BC = a ,BD = $a\sqrt{3}$, mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy (ABCD) và góc giữa hai mặt phẳng (SCD), (ABCD) bằng 60^0. Tính thể tích của khối chóp S.ABCD theo a.

II. THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ

Dạng 1. *Hình lăng trụ có một cạnh bên d vuông góc với mặt đáy B (nó là lăng trụ đứng)*
Thì thể tích $\boxed{V = B.d}$ B: Diện tích đáy; d: là chiều cao.

Ví dụ. Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' có AC = a, BC = 2a, $\widehat{ACB} = 60^0$ và tam giác ABB' cân. Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho theo a .

Giải



Ta có thể tích $V = B.h = S_{\Delta ABC}.BB'$.

Mà $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC.BC.\sin C = \frac{1}{2}a.2a.\sin 60^0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$(đvdt)

Lại có tam giác ABB' vuông cân tại B nên AB = BB'.

Trong tam giác ABC có $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2.AC.BC.\cos C$

$\Leftrightarrow AB^2 = a^2 + (2a)^2 - 2.a.2a.\cos 60^0 = 3a^2 \Leftrightarrow AB = a\sqrt{3}$.

Vậy $V = S_{\Delta ABC}.BB' = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{3} = \frac{3.a^3}{2}$(đvtt)

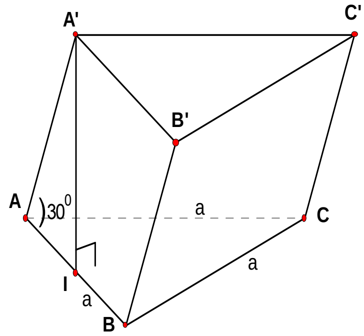
Bài tập tương tự

Cho lăng trụ đều ABC.A'B'C' có cạnh đáy bằng a, góc giữa đường chéo B'C với mặt bên (ABB'A') bằng 45^0 . Tính thể tích khối lăng trụ đã cho theo a.

Dạng 2. *Biết hình chiếu của một đỉnh lên mặt đáy*

Ví dụ. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên đáy (ABC) trùng với trung điểm I của AB , đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, góc giữa cạnh bên AA' với đáy bằng 30^0. Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho theo a .

Giải



Ta có thể tích $V = B.h = S_{\Delta ABC}.A'I$.

Mà $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC.BC.\sin C = \frac{1}{2}a.a.\sin 60^0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Góc giữa AA' với đáy (ABC) là góc giữa AA' với AI (Vì AI là hình chiếu vuông góc của AA' lên đáy (ABC). Nên $\widehat{A'AI} = 30^0$

Trong tam giác AA'I vuông tại I ta có:

$$\tan A = \frac{A'I}{AI} \Leftrightarrow \tan 30^0 = \frac{A'I}{\frac{1}{2}AB} \Leftrightarrow A'I = \tan 30^0.\frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{1}{2}a = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Vậy $V = S_{\Delta ABC}.A'I = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a^3}{8}$ (đvtt)

Bài tập tương tự

Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên đáy (ABC) trùng với trung điểm I của BC, cạnh bên bằng 2a , đáy ABC là tam giác vuông tại A biết AB = a, AC $= a\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho theo a .

III. DIÊN TÍCH XUNG QUANH - THỂ TÍCH HÌNH NÓN

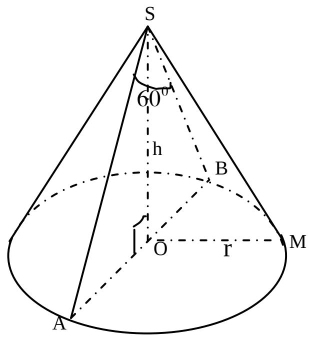
Diện tích xung quanh hình nón: $\boxed{S_{xq} = \pi.r.l}$ trong đó r là bán kính đáy, l là độ dài đường sinh.

Chú ý: Diện tích toàn phần $\boxed{S_{tp} = S_{xq} + S_{day} = \pi.r.l + \pi r^2}$

Thể tích khối nón $\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2.h}$ trong đó r là bán kính đáy ; h: là chiều cao.

Ví dụ. Cho hình nón đỉnh S, đường tròn đáy tâm O, bán kính r = a và góc ở đỉnh của hình nón bằng 60^0 . Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón.

Giải



Ta có $S_{xq} = \pi.r.l = \pi.a.SA$. Trong tam giác ASO vuông tại O ta có

$\sin S = \frac{AO}{SA} \Leftrightarrow \sin 30^0 = \frac{r}{SA}$ $SA = \frac{a}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow SA = 2a$.

Nên $S_{xq} = \pi.r.l = \pi.a.SA = 2a^2\pi$. Mà $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

Vậy thể tích $V = \frac{1}{3}\pi r^2.h = \frac{1}{3}\pi r^2.SO = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ (đvtt)

Bài tập tương tự

Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn C(O, r). Trên đường tròn (O) lấy hai điểm A, B sao cho $\widehat{AOB} = 60^0$, AB = a, đường sinh SA tạo với đáy một góc bằng 30^0 . Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón đã cho theo a.

IV. DIÊN TÍCH XUNG QUANH - THỂ TÍCH HÌNH TRỤ

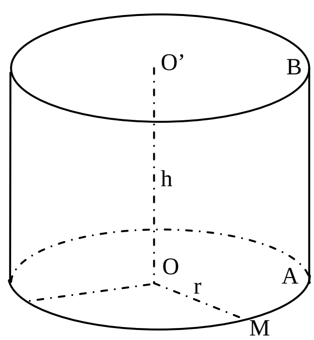
Diện tích xung quanh hình trụ: $\boxed{S_{xq} = 2\pi.r.l}$ trong đó r là bán kính đáy, l là độ dài đường sinh.

Chú ý: Diện tích toàn phần $\boxed{S_{tp} = S_{xq} + 2.S_{day} = 2\pi.r.l + 2\pi r^2}$

Thể tích khối trụ $\boxed{V = \pi r^2.h}$ trong đó r là bán kính đáy ; h: là chiều cao.

Ví dụ. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng a và khoảng cách giữa hai đáy bằng $a\sqrt{3}$. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ đã cho theo a.

Giải



Gọi hình trụ có tâm của hai đáy là O, O' (như hình bên). Theo giả thiết ta có OO'= $a\sqrt{3}$.

Khi đó diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi.r.l = 2\pi.r.AB = 2\pi.r.OO'$.

$\Leftrightarrow S_{xq} = 2\pi.a.a\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\pi a^2$ (đvdt).

Thể tích khối trụ : $V = \pi r^2.h = \pi a^2.OO' = \pi a^2.a\sqrt{3} = \pi a^3\sqrt{3}$ (đvtt).

Bài tập tương tự

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng a. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ có hai hình tròn đáy là hai đường tròn ngoại tiếp hai đáy ABCD, A'B'C'A' của hình lập phương trên.

V. DIÊN TÍCH XUNG QUANH - THỂ TÍCH MẶT CẦU

Diện tích của mặt cầu: $\boxed{S = 4\pi.R^2}$ trong đó R là bán kính mặt cầu.

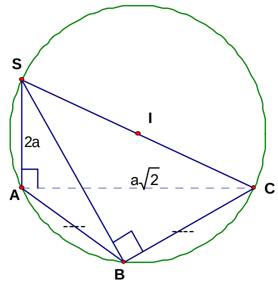
Thể tích khối cầu: $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^2}$

Đường tròn giao tuyến của S(O,r) và mp(P) có tâm là hình chiếu vuông góc của tâm O lên mp(P) và bán kính $r' = \sqrt{R^2 - d^2(O, mp(P))}$.

Mp(P) tiếp xúc với mặt cầu S(O;R) $\Leftrightarrow d(O, mp(P)) = R$.

Ví dụ. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, SA = 2a, AC = $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy.

1. Chứng minh trung điểm I của SC là tâm của mặt cầu (S) đi qua các đỉnh của hình chóp S.ABC. Tính bán kính của mặt cầu (S) và thể tích của khối cầu.
2. Xác định tâm và tính bán kính của đường tròn giao tuyến của mặt cầu (S) với mp(ABC).



Giải

1. Ta có các tam giác SAC và SBC lần lượt vuông tại A , B.

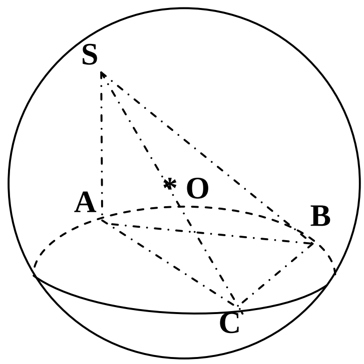
nên AI = BI = $\frac{1}{2}SC$ = IS = IC . Do đó I cách đều các đỉnh S, A, B, C.

Vậy I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC. Bán kính

R = $\frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AC^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

2. Đường tròn giao tuyến là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Do ABC là tam giác vuông tại B nên tâm là trung điểm của AC và bán kính

r = $\frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Bài tập tương tự

1. Cho hình chóp đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng 2a.

a. Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp trên.
b. Tính diện tích và thể tích khối cầu (S).
c. Tính bán kính của đường tròn giao tuyến của (S) và mp(ABCD).

2. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'cạnh bằng a và mặt cầu (S) đi qua các đỉnh của hình lập phương.

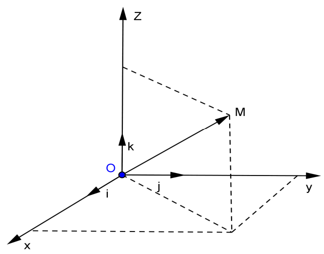
a. Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu (S) trên.
b. Tính diện tích và thể tích khối cầu (S).
c. Tính bán kính của đường tròn giao tuyến của (S) và mp(ABCD).

--------------------------------------- ***Hết chương I + II*** ---------------------------------------

Chương III PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Bài 1 HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

1. Định nghĩa



$M(x;y;z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

$\vec{a} = (a_1;a_2;a_3) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$.

Vectơ đơn vị: $\vec{i}$ =(1 ; 0 ; 0) trên trục Ox.

$\vec{j}$ =(0 ; 1 ; 0) trên trục Oy.

$\vec{k}$ =(0 ; 0 ; 1) trên trục Oz .

2. Các phép toán

Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b} = (b_1;b_2;b_3)$. Ta có:

- $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$
- $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$
- $k\vec{a} = k(a_1;a_2;a_3) = (ka_1;ka_2;ka_3)$

3. Hệ quả

Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b} = (b_1;b_2;b_3)$, $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$. Ta có:

a. $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1; a_2 = b_2; a_3 = b_3$

b. $\vec{a}$ *cùng phương* $\vec{b}$, $(\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \exists k$ *sao cho:*

$$\vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow a_1 = kb_1; a_2 = kb_2; a_2 = kb_3$$

c. $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

d. Toạ độ trung điểm M của AB là:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

e. Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_B}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

4. Tích vô hướng

Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b} = (b_1;b_2;b_3)$, $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$. Ta có:

- $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a.b = 0$
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
- $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- $\cos(\vec{a};\vec{b}) = \dfrac{a.b}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$

5. Phương trình mặt cầu

Phương trình:

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2}$$

là phương trình mặt cầu tâm I(a ; b ; c), bán kính r.

Phương trình:

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0}$$

với $A^2 + B^2 + C^2 - D > 0$ là phương trình mặt cầu tâm I(-A ; -B ; -C), bán kính $r = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D}$.

LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Dạng 1: - Tìm toạ độ tâm và bán kính của mặt cầu (S): $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ **Phương pháp:** Tâm I(a ; b ; c) và bán kính bằng R - Tìm toạ độ tâm và bán kính của mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ **Phương pháp:** Tâm I(a ; b ; c) và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$	**Ví dụ:** Tìm tọa độ tâm và bán kính của các mặt cầu sau: a. $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=4$; b. $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$ **Giải** a. Tâm là I(1 ; - 2 ; 0), bán kính R = 2. b. Tâm là I(1 ; - 2 ; 3) Bán kính $R=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2-(-2)}=4$.
Dạng 2: Lập phương trình mặt cầu (S) tâm I(a ; b ; c) và đi qua điểm A($x_A;y_A;z_A$). **Phương pháp** *- Tâm I(a ; b ; c).* *- Bán kính R =* $IA=\|\overrightarrow{IA}\|$ $=\sqrt{(x_A-a)^2+(y_A-b)^2+(z_A-c)^2}$.	**Ví dụ:** Lập phương trình mặt cầu (S) tâm I(1 ; 2 ; 0) và đi qua điểm M(-2 ; 1 ; 3). **Giải** Ta có $\overrightarrow{IM}=(-3;-1;3)$ $\Rightarrow R=\|\overrightarrow{IM}\|=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{19}$ Vậy phương trình mặt cầu (S) cần tìm là: $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=19$
Dạng 3: Lập phương trình mặt cầu (S) nhận A($x_A;y_A;z_A$), B($x_B;y_B;z_B$) làm đường kính. **Phương pháp** *- Toạ độ tâm I là toạ độ trung điểm của đoạn AB* $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$ *- Bán kính R =* $\frac{AB}{2}=\frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{2}$.	**Ví dụ:** Lập phương trình mặt cầu (S) nhận A(1 ; -1 ; 4), B(-1 ; 3 ; 2) làm đường kính. **Giải** Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;4;-2)$. Tâm $I(0;1;3)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB. Bán kính R = $\frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{2}=\frac{\sqrt{(-2)^2+4^2+(-2)^2}}{2}=\frac{\sqrt{24}}{2}$ Vậy phương trình mặt cầu (S) cần tìm là: $x^2+(y-1)^2+(z-3)^2=6$
Dạng 4: Lập phương trình mặt cầu (S) tâm I(a ; b ; c) và tiếp xúc với mặt phẳng (P): Ax + By + Cz + D = 0. **Phương pháp** *- Tâm I(a ; b ; c)*. *- Bán kính R = d[I ; (P)] =* $\frac{\|A.a+B.b+C.c+D\|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.	**Ví dụ:** Lập phương trình mặt cầu (S) tâm I(2;2;-1) và tiếp xúc với mặt phẳng (P): 2x + y – z -1 = 0. **Giải** Bán kính R = $d[I;(P)]=\frac{\|2.2+2-(-1)-1\|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\sqrt{6}$ Vậy phương trình mặt cầu (S) cần tìm là: $(x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=6$
Dạng khác: - Có tâm và đi qua điểm M thoả hệ thức vectơ. - Mặt cầu đi qua 4 điểm.	**Ví dụ:** Trong không gian Oxyz, cho 3 điểm A(2 ; 0 ; 0), B(0 ; -4 ;0), C(0 ; 0 ; 6). Lập phương trình mặt cầu : a. Tâm B và độ dài đường kính bằng độ dài AC. b. Tâm G là trọng tâm tam giác ABC và mặt cầu đi qua điểm M thoả mãn $\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{MB}$. c. Mặt cầu đi qua 4 điểm O, A, B, C. **HS tự giải**

Bài 2 **PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG**

1. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng

Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (α) và cặp vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ có giá song song hoặc nằm trong mp(α). Khi đó VTPT của mp(α) là:

$$\boxed{\vec{n}_{(\alpha)}=\vec{a}\wedge\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)}$$

2. PTTQ của mặt phẳng có dạng

$$\boxed{Ax+By+Cz+D=0}$$

Trong đó vectơ $\vec{n}$(A ; B ; C) là VTPT.

3. Phương trình mặt phẳng toạ độ

- mp(Oxy) có phương trình: z = 0.
- mp(Oxz) có phương trình: y = 0.
- mp(Oyz) có phương trình: x = 0.
- Mặt phẳng đi qua 3 điểm M(a ; 0 ; 0), N(0 ; b ; 0), P(0 ; 0; c) có phương trình là:

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}$$

4. Vị trí tương đối của 2 mặt phẳng

Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng:

$(\alpha): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ có $\vec{n}_{(\alpha)}=(A_1;B_1;C_1)$.

$(\beta): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ có $\vec{n}_{(\beta)}=(A_2;B_2;C_2)$.

Khi đó:

∘ (α) cắt $(\beta)\Leftrightarrow \overrightarrow{n_\alpha}\neq k\overrightarrow{n_\beta}$

∘ $(\alpha)//(\beta)\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{n_\alpha}=k\overrightarrow{n_\beta}\\ D_1\neq kD_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(A_1;B_1;C_1)=k(A_2;B_2;C_2)\\ D_1\neq kD_2\end{cases}$

∘ $(\alpha)\equiv(\beta)\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{n_\alpha}=k\overrightarrow{n_\beta}\\ D_1=kD_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(A_1;B_1;C_1)=k(A_2;B_2;C_2)\\ D_1=kD_2\end{cases}$

∘ $(\alpha)\perp(\beta)\Leftrightarrow\vec{n}_{(\alpha)}.\vec{n}_{(\beta)}=0$

$\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

5. Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng

Trong không gian Oxyz, cho $M(x_0;y_0;z_0)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$. Ta có:

$$\boxed{d[M;(\alpha)]=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

Phương trình mp(α) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$ là:

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$$

Dạng toán	Ví dụ
Dạng 1: Mặt phẳng đi qua 3 điểm A, B, C không thẳng hàng có toạ độ cho trước. **Phương pháp** - *Tìm một cặp vectơ không cùng phương thuộc mp(ABC), giả sử là $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.* - *VTPT của mp(ABC) là $\vec{n}_{(ABC)}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.* - *Từ đó sẽ lập được phương trình mp (α) đi qua A và có VTPT $\vec{n}_{(ABC)}$.*	**Ví dụ:** Lập PTTQ của mặt phẳng đi qua 3 điểm A(1 ; -1 ; 0), B(-2 ; 0 ; 1), C(0 ; 2 ; 0). **Giải.** Ta có $\overrightarrow{AB}$(-3 ; 1 ; 1), $\overrightarrow{AC}$(-1 ; 3 ; 0) nên vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là: $\vec{n}_{(ABC)}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=$ (-3 ; -1 ; -8) Vập phương trình tổng quát của mp(ABC) là: -3(x - 1) - 1(y + 1) - 8(z – 0) = 0 Hay 3x + y + 8z - 2 = 0.
Dạng 2: Mp(α) đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và song song với mp $(\beta): Ax+By+Cz+D=0$. **Phương pháp** - *Vì $(\alpha)//(\beta)$ nên (α) có VTPT là $\vec{n}=(A;B;C)$.* - *Biết toạ độ điểm M và VTPT $\vec{n}$ ta lập được*	**Ví dụ:** Viết phương trình tổng quát của mp(P) đi qua điểm A(1 ; 2 ; -3) và: a. Vuông góc với đường thẳng (d): $\begin{cases}x=1+2t\\ y=-t\\ z=-2+3t\end{cases}$.

phương trình mặt phẳng.

Dạng 3: Ptrình mp(α) qua điểm A và vuông góc với đường thẳng d.

Phương pháp

- *VTCP của d chính là VTPT của mp(α).*
- *Từ đó xác định được phương trình mp (α).*

Dạng 4: Ptrình mp(α) qua 2 điểm A, B và vuông góc với mp $(\beta): Ax+By+Cz+D=0$.

Phương pháp

- *Tìm toạ độ của các vectơ* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{n_{(\beta)}}$.
- *Khi đó VTPT* $\overrightarrow{n_{(\alpha)}}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{n_{(\beta)}}$.
- *Từ đó xác định được phương trình mp (α).*

b. Song song với mp(Q): x – y – 3z = 0.
c. Đi qua 2 điểm A, B với A(0 ; 1 ; 1), B(-1 ; 0 ; 2) và vuông góc với mp (α): x – y + z – 1 = 0.

Giải

a. Ta có VTCP $\overrightarrow{u_d}=(2;-1;3)$

Vì mp(P) vuông góc với đường thẳng (d) nên (P) có 1 VTPT $\vec{n}_{(P)}=(2;-1;3)$.

Vập phương trình tổng quát của mp(P) là:

2(x -1) - 1(y - 2) + 3(z + 3) = 0

Hay 2x – y + 3z + 9 = 0.

b. Ta có VTPT $\vec{n}_{(Q)}=(1;-1;-3)$

Vì mp(P) song song mp(Q) nên mp(P) có 1 VTPT $\vec{n}_{(P)}=(1;-1;-3)$.

Vập phương trình tổng quát của mp(P) là:

1(x -1) - 1(y - 2) - 3(z + 3) = 0

Hay x – y - 3z - 8 = 0.

c. Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;-1;1)$, VTPT $\vec{n}_{(\alpha)}=(1;-1;1)$

nên VTPT của mp(P) là $\vec{n}_{(P)}=\overrightarrow{AB}\wedge\vec{n}_{(\alpha)}=(0;2;2)$

Vập phương trình tổng quát của mp(P) là:

0(x - 0) + 2(y - 1) + 2(z – 1) = 0

Hay y + z – 2 = 0.

Dạng 5: Song song với mp(Q): Ax+By+Cz+D = 0 và tiếp xúc với mặt cầu (S):

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Phương pháp

- Mp(P) có dạng : Ax + By + Cz + D = 0
- Khi đó (P) tiếp xúc với (S) $\Leftrightarrow d(I,(P))=R$

$$\Leftrightarrow \frac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=R.$$

- Giải tìm được d, thay vào phương trình mp(P) để được phương trình mặt phẳng cần tìm.

Ví dụ : Lập phương trình mặt phẳng (P) song song với mp(Q): 2x + 2y – z + 1 = 0 và tiếp xúc với mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=4$.

Giải

Mặt cầu (S) có tâm I(1 ; - 2; - 1), bán kính R = 2.
Do mp(P) song song mp(Q) nên mp(P) có phương trình dạng: 2x + 2y – z + D = 0.
Mà mp(P) tiếp xúc với (S) nên

$$d(I,(P))=R \Leftrightarrow \frac{|2.1+2.(-2)-(-1)+D|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=2$$

$$\Leftrightarrow |D-1|=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D=-5 \\ D=7 \end{array}\right.$$

Vậy mp(P): 2x + 2y – z - 5 = 0
Hoặc 2x + 2y – z + 7 = 0.

Bài 3 **PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG**

1. Phương trình tham số của đường thẳng

PTTS của đường thẳng (d) đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và có VTCP $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$.

$$\boxed{\begin{cases} x=x_0+a_1t \\ y=y_0+a_2t \ ;\ t\in\mathbb{R} \\ z=z_0+a_3t \end{cases}}$$

VTCP $\vec{a}$ là vectơ có giá song song hoặc trùng với (d).

2. Phương trình chính tắc của đường thẳng

Đường thẳng (d) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có VTCP $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ có phương trình là:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}}$$

3. Phương trình đoạn thẳng AB

Cho $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$ ta có phương trình đoạn thẳng AB là:

$$\boxed{\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{z-z_A}{z_B-z_A}}$$

4. Điều kiện để 2 đường thẳng song song, cắt nhau, chéo nhau

Gọi $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{a}'=(a_1';a_2';a_3')$ lần lượt là VTCP của d và d', lấy điểm $M(x_0;y_0;z_0)\in d$. Khi đó:

∘ $d\,//\,d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}=k\vec{a}' \\ M\notin d' \end{cases}$; $d\equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}=k\vec{a}' \\ M\in d' \end{cases}$

∘ d cắt d' $\Leftrightarrow \begin{cases} x_0+ta_1=x_0'+t'a_1' \\ y_0+ta_2=y_0'+t'a_2' \\ z_0+ta_3=z_0'+t'a_3' \end{cases}$ có đúng 1 n_0.

∘ d chéo d' $\Leftrightarrow \vec{a}\neq k\vec{a}'$ và $\begin{cases} x_0+ta_1=x_0'+t'a_1' \\ y_0+ta_2=y_0'+t'a_2' \\ z_0+ta_3=z_0'+t'a_3' \end{cases}$ vô nghiệm.

5. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (α): Ax + By + Cz + D = 0 và đường thẳng d: $\begin{cases} x=x_0+a_1t \\ y=y_0+a_2t \\ z=z_0+a_3t \end{cases}$.

Xét phương trình:

$$A(x_0+a_1t)+B(y_0+a_2t)+C(z_0+a_3t)+D=0 \quad (1)$$

- *Nếu (1) vô nghiệm* $\Rightarrow d\,//\,(\alpha)$.
- *Nếu (1) vô số nghiệm* $\Rightarrow d\equiv(\alpha)$.
- *Nếu (1) có một nghiệm* $\Rightarrow$ *d cắt* (α) *tại điểm* $M(x_0+a_1t;y_0+a_2t;z_0+a_3t)$.

6. Điều kiện để đường thẳng (d) $\perp(\alpha)$

Cho VTCP của (d) là $\vec{a}$, VTPT của (α) là $\vec{n}$

$$(d)\perp(\alpha)\Leftrightarrow\left[\vec{a};\vec{n}\right]=\vec{0}=(0;0;0).$$

7. Góc giữa 2 đường thẳng (d_1) **và** (d_2)

Trên (d_1) lấy VTCP $\vec{a_1}=(a_1;a_2;a_3)$.

Trên (d_2) lấy VTCP $\vec{a_2}=(b_1;b_2;b_3)$.

$$\boxed{\cos(d_1;d_2)=\frac{|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}}$$

8. Góc giữa đường thẳng (d) và mp (α)

Trên (d) lấy VTCP $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$.

Trên (α) lấy VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$.

$$\boxed{\sin(d;\alpha)=\frac{|a_1A+a_2B+a_3C|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Dạng toán	Ví dụ
Dạng 1: Đi qua 2 điểm $A(x_A;y_A;z_A);B(x_B;y_B;z_B)$. **Phương pháp:** VTCP $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$	**Ví dụ**: Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua hai điểm A(- 1 ; 0; 2) ; B(1; -1 ; 1) **Giải** Ta có VTCP $\overrightarrow{u_d}=\overrightarrow{AB}=(2;-1;-1)$. Vậy phương trình tham số đường thẳng (d) là: d: $\begin{cases}x=-1+2t\\y=0-t\\z=2-t\end{cases}$ (t là tham số).
Dạng 2: Đi qua một điểm $M(x_1;y_1;z_1)$ và song song với đường thẳng (d’): $\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}$ **Phương pháp** - Ta có VTCP của (d’) là $\overrightarrow{u_{d'}}=(a;b;c)$ - Hai đường thẳng song song nhau nên chúng có cùng VTCP . Do đó VTCP của (d) là $\overrightarrow{u_d}=\overrightarrow{u_{d'}}=(a;b;c)$. Vậy phương trình đường thẳng (d): $\begin{cases}x=x_1+at\\y=y_1+bt\\z=z_1+ct\end{cases}$	**Ví dụ:** Lập phương trình đường thẳng (d) qua điểm M(2; -1; 0) và song song với đường thẳng d’: $\begin{cases}x=1+t\\y=-2t\\z=3\end{cases}$ (t là tham số). **Giải** Đường thẳng (d’) có VTCP là $\overrightarrow{u_{d'}}=(1;-2;0)$. Vì d // d’ nên (d) có VTCP là $\overrightarrow{u_d}=(1;-2;0)$. Vậy phương trình tham số đường thẳng (d) là: d: $\begin{cases}x=2+t\\y=-1-2t\\z=0\end{cases}$ (t là tham số)
Dạng 3: Đi qua một điểm $M(x_1;y_1;z_1)$ và vuông góc với mp(P): Ax + By + Cz + D = 0. **Phương pháp** - Ta có VTPT của mp(P) là $\vec{n}=(A;B;C)$. - Đường thẳng (d) vuông góc với mp(P) nên có VTCP là $\vec{u}=(A;B;C)$ - Vậy phương trình đường thẳng (d): $\begin{cases}x=x_1+At\\y=y_1+Bt\\z=z_1+Ct\end{cases}$	**Ví dụ:** Lập phương trình đường thẳng (d) qua điểm M(1 ; 2 ; -1) và vuông góc với mp(P): 2x + 3y – 4 = 0 . **Giải** Mp(P) có VTPT là $\overrightarrow{n_P}=(2;3;0)$. Vì đường thẳng (d) vuông góc mp(P) nên có VTCP là $\overrightarrow{u_d}=(2;3;0)$. Vậy phương trình tham số đường thẳng (d) là: d: $\begin{cases}x=1+2t\\y=2+3t\\z=-1\end{cases}$ (t là tham số)
Dạng 4: Đường thẳng d’ là hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d): $\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}$ lên mp(P): Ax + By + Cz + D = 0. **Phương pháp** - Đường thẳng d’ là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) chứa (d) và vuông góc với	**Ví dụ:** Viết phương trình hình chiếu d’ của đường thẳng (d): $\begin{cases}x=2\\y=1-t\\z=3+t\end{cases}$ lên mp(P): x - y -2 = 0. **Giải** Gọi mp(Q) chứa (d) và vuông góc với (P). Mà đường thẳng (d) đi qua M(2 ; 1; 3) và có VTCP là $\overrightarrow{u_d}=(0;-1;1)$

<table>
<tr>
<td>(P). Khi đó mp(Q) lập như Dạng 3. Giả sử có phương trình A'x + B'y + C'z + D' = 0.
- Nên những điểm nằm trên d' thỏa hệ:
$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$ (*) .
- Cho x = t, (hoặc y = t, hoặc z = t), thay vào hệ phương trình (*) giải hệ tìm được y và z theo t (hoặc x, z theo t, hoặc x, y theo t).
- Từ đó có x, y, z theo t chính là phương trình hình chiếu.</td>
<td>Mặt phẳng (P) có VTPT là $\overrightarrow{n_P}=(1;-1;0)$. Do đó mp(Q) qua M(2 ; 1; 3), nhận $\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{n_P}\right]=(1;1;1)$ làm VTPT có phương trình là: x + y + z - 6 = 0.
Nên tọa độ những điểm thuộc d' thỏa mãn hệ:
$\begin{cases} x+y+z-6=0 \\ x-y-2=0 \end{cases}$.
Cho x = t, suy ra y = -2 + t và z = 8 – 2t
Vậy phương trình hình chiếu (d') là: $\begin{cases} x=t \\ y=-2+t \\ z=8-2t \end{cases}$.</td>
</tr>
</table>

TỌA ĐỘ GIAO ĐIỂM CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng (d): $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$ **và mp(P): Ax + By + Cz + D = 0**

Phương pháp:

+ Tọa độ giao điểm (x ; y ; z) là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x=x_0+at & (1) \\ y=y_0+bt & (2) \\ z=z_0+ct & (3) \\ Ax+By+Cz+D=0 & (4) \end{cases}$.

+ Thay (1), (2), (3) vào phương trình (4) ta tìm được t .

+ Thay t vừa tìm được vào (1), (2), (3) ta được tọa độ giao điểm.

Ví dụ: Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng (d): $\begin{cases} x=2t \\ y=1-t \\ z=3+t \end{cases}$ và mp(P): x + y + z – 10 = 0.

Giải

Tọa độ giao điểm (x ; y ; z) là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x=2t & (1) \\ y=1-t & (2) \\ z=3+t & (3) \\ x+y+z-10=0 & (4) \end{cases}$

Thay (1), (2), (3) vào phương trình (4), ta được:

$$(2t) + (1 - t) + (3 + t) - 10 = 0 \Rightarrow t = 3 .$$

Thay t = 3 vào (1), (2), (3) ta được x = 6 ; y = -2 ; z = 6.

Vậy tọa độ giao điểm là M(6 ; - 2 ; 6).

TỌA ĐỘ HÌNH CHIẾU VUÔNG GÓC CỦA MỘT ĐIỂM LÊN MẶT PHẲNG

Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $M\left(x_0; y_0; z_0\right)$ lên mp(P): Ax + By + Cz + D = 0.

Phương pháp

- Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $M\left(x_0; y_0; z_0\right)$ và vuông góc với mp(P). Khi đó phương trình đường thẳng (d) là: $\begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt \\ z = z_0 + Ct \end{cases}$.
- Tọa độ hình chiếu chính là tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) với mp(P).

Ví dụ: Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $M\left(2;-1;0\right)$ lên mp(P): x + 2y – z + 2 = 0.

Hướng dẫn

Đường thẳng (d) đi qua $M\left(2;-1;0\right)$ và vuông góc với mp(P): x + 2y – z + 2 = 0 có phương trình là:

$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -t \end{cases}$. Tọa độ hình chiếu H(x ; y ; z) là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -t \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1/3 \\ x = 5/3 \\ y = -5/3 \\ z = 1/3 \end{cases}$.

Vậy toạ độ giao điểm là H(5/3 ; -5/3 ; 1/3).

TỌA ĐỘ HÌNH CHIẾU VUÔNG GÓC CỦA MỘT ĐIỂM LÊN ĐƯỜNG THẲNG

Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $M\left(x_M; y_M; z_M\right)$ lên đường thẳng (d): $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$.

Phương pháp

- Lập phương trình mp(P) đi qua điểm $M\left(x_M; y_M; z_M\right)$ và vuông góc với đường thẳng (d). Khi đó phương trình mp(P) là: $a(x - x_M) + b(y - y_M) + c(z - z_M) = 0$.
- Tọa độ hình chiếu chính là tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) với mp(P).

Ví dụ: Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $M\left(1;2;-1\right)$ lên đường thẳng (d): $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -2 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$.

Hướng dẫn

Mp(P) đi qua $M\left(1;2;-1\right)$ và vuông góc với (d) có phương trình là: 3x – 2y + 2z + 3 = 0.

Tọa độ hình chiếu H(x ; y ; z) là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -2 - t \\ z = 2 + 2t \\ 3x - 2y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$. **KQ** $H\left(-\frac{13}{5}; -\frac{22}{15}; \frac{14}{15}\right)$

-- ***Hết chương III*** --

Lôi Nhan

1. *Để ôn tập có trọng tâm, các em cần ôn tập bám sát theo các dạng toán mà cấu trúc đề thi đã đưa ra.*
2. *Làm các bài tập trong SGK tương tự các dạng trên để khắc sâu phương pháp giải từng dạng toán.*
3. *Dành thời gian để giải một số đề thi thử (theo cấu trúc của Bộ GD&ĐT) để rèn luyện thêm. Khi làm bài cần tập trung và làm bài nghiêm túc theo đúng thời gian đã quy định (150 phút).*
4. *Sau mỗi lần giải đề cần tự đánh giá xem phần nào đã đạt yêu cầu, phần nào chưa đạt, còn yếu để lần sau cố gắng hơn.*
5. *Trong quá trình biên soạn không thể tránh được các thiếu sót. Rất mong các em học sinh thông cảm, phát hiện và góp ý giúp thầy hoàn thiện bộ tài liệu này để có thể lưu hành cho các năm sau.*

Chúc các em ôn tập tốt !