习题七

徐海翁

2024.3.27

Exercise 21

题目有误,将ξ,η表达式中的u改成y.

于是我们由链式法则可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=u_\xi+u_\eta$$

同理

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\lambda\frac{\partial u}{\partial \xi}+\mu\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

进而可以求得各二阶偏导

$$u_{xx}=u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_{\eta\xi}+u_{\xi\eta}$$

$$u_{xy}=\lambda u_{\xi\xi}+\mu u_{\eta\eta}+\lambda u_{\eta\xi}+\mu u_{\xi\eta}$$

$$u_{yy}=\lambda^2 u_{\xi\xi}+\mu^2 u_{\eta\eta}+\lambda\mu u_{\eta\xi}+\lambda\mu u_{\xi\eta}$$

由于

$$u_{xx}+au_{xy}+bu_{yy}=0$$

不妨取$\lambda=0$,注意到此时$\mu\neq 0$,那么

$$u_{\xi\xi}+(1+a\mu+b\mu^2)u_{\eta\eta}+(1+a\mu)u_{\eta\xi}+(1+a\mu)u_{\xi\eta}$$

此时我们分三种情况:

$a\neq 0$时,我们取$\mu=-\frac{1}{a}\neq\lambda$,那么方程化为

$$u_{\xi\xi}+\frac{b}{a^2}u_{\eta\eta}=0$$

$a=0$且$b<0$时,我们取$\mu=\frac{1}{\sqrt{-b}}$,那么方程化为

$$u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}+u_{\eta\xi}=0$$

$a=0$且$b\geq 0$时,我们取$\mu=1$即可得到

$$u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}+u_{\eta\xi}+(1+b)u_{\eta\eta}=0$$

$\square$

Exercise 22

由于线性映射数乘的性质,可知给x乘上非零系数c不改变$\sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$的结果,我们不妨限定$\|x\| = 1$,由于

$$\|Ax\|^2 = x^T A^T A x$$

我们的$A^T A$是自伴随算子[对称矩阵],从而其可对角化称为PDP^{-1}的形式,其中$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix}$.然后作变量代换$y = P^{-1}x$,就有

$$\max_{\|x\|=1} x^T A^T A x = \max_{\|y\|=1} y^T D y$$

显然当y为e_1时上式最大,取值为λ_1,也就是说

$$\sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sqrt{\lambda_1} = \sigma_1$$

代入我们的A,可以得到

$$A^T A = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 8 & 8 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

可以求得其特征多项式为

$$p(\lambda) = -\lambda(16 - \lambda)(4 - \lambda)$$

故其最大特征值为16,从而A的最大奇异值为4,故A的范数为4 □

Exercise 23

求梯度可得向量$\begin{pmatrix} e^{x+z} \sin y \\ e^{x+z} \cos y \\ e^{x+z} \sin y \end{pmatrix}$之后利用向量值函数微分的性质,可得

$$Df = \begin{pmatrix} e^{x+z} \sin y & e^{x+z} \cos y & e^{x+z} \sin y \\ e^{x+z} \cos y & -e^{x+z} \sin y & e^{x+z} \cos y \\ e^{x+z} \sin y & e^{x+z} \cos y & e^{x+z} \sin y \end{pmatrix}$$

□

Exercise 24

设三边为a, b, c,不妨假设限制条件为$a + b = 1$,利用角C余弦定理

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

从而

$$S(a, b, c) = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ab \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)^2}$$

我们不妨考虑$2S^2$的极值

$$2S^2 = a(1 - a)(1 - c^2) - \frac{1}{4}(1 - c^2)^2$$

于是我们求各偏导数

$$\frac{\partial 2S^2}{\partial a} = (1-2a)(1-c^2) = 0$$

$$\frac{\partial 2S^2}{\partial c} = -2a(1-a)c - 4c^3 + 4c = 0$$

结合实际意义

$$\begin{cases} 0 < a < 1 \\ c > 0 \end{cases}$$

可解出

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{\sqrt{14}}{4} \end{cases}$$

解出

$$S = \frac{\sqrt{7}}{32}$$

接下来我们利用Hessian矩阵来验证这是极大值,我们有

$$H = \begin{pmatrix} 2c^2-2 & 4ac-2c \\ 4ac-2c & 2a^2-2a-12c^2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$$

这个矩阵是负定的,这证明了我们求得的这个临界点是极大值点,故我们求得的S是极大值.

□

Exercise 25

我们记$\angle BOC = \alpha, \angle AOC = \beta$,那么面积可以表示为

$$S = \frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin\beta + \frac{1}{2}\sin(\pi-\alpha-\beta)$$

我们来求

$$2S = \sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)$$

的极值,从而利用

$$\frac{\partial 2S}{\partial \alpha} = \cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) = 0$$

$$\frac{\partial 2S}{\partial \beta} = \cos\beta + \cos(\alpha+\beta) = 0$$

在

$$\begin{cases} 0 < \alpha < \pi \\ 0 < \beta < \pi \\ 0 < \alpha+\beta < \pi \end{cases}$$

的条件下,我们可以解出$\alpha = \beta$,进而

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha=\beta=\frac{\pi}{3}$$

从而

$$S=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

之后我们求出Hessian矩阵

$$H=\begin{pmatrix}-\sin\alpha-\sin(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ -\sin(\alpha+\beta) & -\sin\beta-\sin(\alpha+\beta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

其奇数阶(这里就是一阶)顺序主子式小于0,偶数阶顺序主子式(这里就是二阶)大于0,故矩阵负定,从而此时取到极大值. □

Exercise 26

我们不妨设

$$f_1(x)=x^2,f_2(x)=x,f_3(x)=x$$

这样

$$L(a,b,c)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-af_1(x_i)-bf_2(x_i)-cf_3(x_i))^2$$

我们对于各参数求二阶偏导

$$\frac{\partial L}{\partial a}=-\sum_{i=1}^{n}2(y_i-af_1(x_i)-bf_2(x_i)-cf_3(x_i))f_1(x_i)=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial b}=-\sum_{i=1}^{n}2(y_i-af_1(x_i)-bf_2(x_i)-cf_3(x_i))f_2(x_i)=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial c}=-\sum_{i=1}^{n}2(y_i-af_1(x_i)-bf_2(x_i)-cf_3(x_i))f_3(x_i)=0$$

写成矩阵的形式也就是

$$\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^n f_1^2(x_i) & \sum_{i=1}^n f_1(x_i)f_2(x_i) & \sum_{i=1}^n f_1(x_i)f_3(x_i)\\ \sum_{i=1}^n f_1(x_i)f_2(x_i) & \sum_{i=1}^n f_2^2(x_i) & \sum_{i=1}^n f_2(x_i)f_3(x_i)\\ \sum_{i=1}^n f_1(x_i)f_3(x_i) & \sum_{i=1}^n f_2(x_i)f_3(x_i) & \sum_{i=1}^n f_3^2(x_i)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^n y_if_1(x_i)\\ \sum_{i=1}^n y_if_2(x_i)\\ \sum_{i=1}^n y_if_3(x_i)\end{pmatrix}$$

同样我们可以得到Hessian矩阵

$$H=2\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^n f_1^2(x_i) & \sum_{i=1}^n f_1(x_i)f_2(x_i) & \sum_{i=1}^n f_1(x_i)f_3(x_i)\\ \sum_{i=1}^n f_1(x_i)f_2(x_i) & \sum_{i=1}^n f_2^2(x_i) & \sum_{i=1}^n f_2(x_i)f_3(x_i)\\ \sum_{i=1}^n f_1(x_i)f_3(x_i) & \sum_{i=1}^n f_2(x_i)f_3(x_i) & \sum_{i=1}^n f_3^2(x_i)\end{pmatrix}$$

这个矩阵从多元微积分的角度很难处理,但如果我们考虑从线性代数的角度,我们定义向量

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}f_1(x_1)\\ \vdots\\ f_1(x_n)\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}f_2(x_1)\\ \vdots\\ f_2(x_n)\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}f_3(x_1)\\ \vdots\\ f_3(x_n)\end{pmatrix}$$

那么

$$\frac{1}{2}H = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} = A^T A$$

我们利用线性代数的性质不难有对于任意的$v \in \mathbb{R}^3, v \neq 0$,有

$$\frac{1}{2}v^T H v = v^T A^T A v = \|Av\|^2 \geq 0$$

故H是半正定的,对于取等条件也就是存在$v \in \mathbb{R}^3$使得$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$,也就是$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关.然而在现实问题中,我们的三个$\mathbb{R}^n$中的向量共面需要满足非常严苛的条件,基本不可能发生(尤其是n足够大时).更为严谨地说,我们此时三个向量分别为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{pmatrix}$$

而我们要让等号不成立,也就是$\mathrm{null}A = \{0\}$,也即$\mathrm{rank}A = 3$,其充分必要条件为存在A的一个不为零的三阶子式,形如

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_i & x_i^2 \\ 1 & x_j & x_j^2 \\ 1 & x_k & x_k^2 \end{pmatrix} = (x_k - x_j)(x_j - x_i)(x_k - x_i)$$

(这是一个范德蒙行列式),而因此只要存在三个互不相同的x_i,就足以保证这个矩阵H正定!
因此可以认为在现实问题中,矩阵H是正定的,因此我们就有:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^4 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^1 \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^1 & n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{pmatrix}$$

如果一定要解出来,那么有

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 y_i - (\sum_{i=1}^n x_i^2)(\sum_{i=1}^n y_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^4 - (\sum_{i=1}^n x_i^2)^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$

$$c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a(\sum_{i=1}^n x_i^2) - b(\sum_{i=1}^n x_i)}{n}$$

其中c的表达式过于复杂,我们没有代入a, b的解析形式
与此同时我们知道了H正定,从而可以在所取得a, b, c时取得极小值. □