习题四

徐海翁

2024.3.13

□□

Exercise 8.5

(1)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{3x^5+2x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

根据无穷积分的比较判别法,可知收敛

(2)

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$$

其中第一项是瑕积分,满足

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot x^p=0,\forall p\in(0,1)$$

故根据比较判别法知其收敛;

其中第二项无穷限积分满足

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx\le\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$$

也是收敛的,故这个积分收敛

(3)由变量代换$e^t=x$可知

$$\int_0^1\frac{1}{\ln x}\,dx=\int_{-\infty}^0\frac{e^t}{t}\,dt=\int_{-\infty}^{-1}\frac{e^t}{t}\,dt+\int_{-1}^0\frac{e^t}{t}\,dt$$

由于对$\forall p>1$我们都有

$$\lim_{-\infty}\frac{e^t}{t}t^p=0$$

从而我们知道上面的第一项收敛,然而对于第二项我们有

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^t}{t}\,dt > \int_{-1}^{0} \frac{1}{e}\frac{1}{t}\,dt$$

是发散的,故这个积分发散 $\square$

Exercise 8.6

(1)当$p > 1$时我们有

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}\,dx \leq \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^p}$$

收敛,故$p > 1$时绝对收敛;

当$0 < p \leq 1$时,我们利用分部积分

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}\,dx = (\frac{\sin x}{x^p})|_1^{+\infty} + p\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{p+1}}$$

其中第一项收敛,第二项可以根据类似于$p > 1$情况的讨论证明其同样收敛,故此时原积分收敛.

然而

$$\int_{1}^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^p}\right|\,dx \geq \int_{1}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^p}\,dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{2x^p}\,dx + \int_{1}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^p}\,dx$$

其中第一项发散,第二项收敛,故原积分并非绝对收敛,其条件收敛;

综上,$0 < p \leq 1$时,原积分条件收敛,$p > 1$时,原积分绝对收敛

(2)我们记$f(x) = \dfrac{\ln\ln x}{\ln x}, g(x) = \sin x$,其中对于$f(x)$求导可得

$$f'(x) = \frac{1 - \ln\ln t}{t(\ln t)^2}$$

从而有$f(x)$在$[e^e, \infty)$单调递减,且利用洛必达法则可知

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$$

又因为$\left|\int_{e^e}^{+\infty} g(x)\,dx\right| \leq 2$有界,从而利用迪利克雷判别法可知

$$\int_{e^e}^{+\infty} \frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x\,dx$$

收敛. 又由于常规黎曼积分

$$\int_3^{e^e} \frac{\ln\ln x}{\ln x} \sin x \, dx$$

显然收敛,故我们的积分收敛;

而

$$\int_{e^e}^{\infty} \left| \frac{\ln\ln x}{\ln x} \sin x \right| dx \geq \int_{e^e}^{\infty} \frac{\ln\ln x}{\ln x} \sin^2 x \, dx = \int_{e^e}^{\infty} \frac{\ln\ln x}{2\ln x} \, dx - \int_{e^e}^{\infty} \frac{\ln\ln x}{2\ln x} \cos 2x \, dx$$

其中第一项有

$$\frac{\ln\ln x}{\ln x} > \frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x}$$

对$x > e^e$恒成立,故第一项积分不收敛,第二项积分可以类似前面的讨论利用迪利克雷判别法证明其收敛.从而

$$\int_{e^e}^{\infty} \left| \frac{\ln\ln x}{\ln x} \sin x \right| dx$$

不收敛,那么加上一段区间后的

$$\int_3^{\infty} \left| \frac{\ln\ln x}{\ln x} \sin x \right| dx$$

同样不收敛;

综上,原积分条件收敛; □

Exercise 8.7

由于$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$且有$f(x)$在区间单调,我们可知$f(x)$单调递减,并且利用这个极限可知$\forall M > 0$,$\exists \delta > 0$使得$x < \delta$时有$f(x) > M > 0$

由于$\int_0^1 f(x)\,dx$收敛,由广义积分的柯西收敛原理,$\exists H > 0$使得$\forall 0 < x, x' < \min H, \delta$有$0 < \int_x^{x'} f(x)\,dx < \varepsilon$,不妨取$x' = h < \min H, \delta$,$x = \frac{h}{2}$,则

$$\varepsilon > \int_{\frac{h}{2}}^{h} f(x)\,dx > \frac{h}{2} f(h) > 0$$

取$h \to 0^+$,我们得到

$$\lim_{x\to 0^+} x f(x) = 2 \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{2} f(h) = 0$$

□

Exercise 8.8

(1)

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \int_0^{0.5} \frac{x^p}{x}\frac{(1-x)^q}{1-q}\,dx + \int_{0.5}^1 \frac{x^p}{x}\frac{(1-x)^q}{1-x}\,dx$$

由于

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^p \cdot x}{x}\frac{(1-x)^q}{1-x} = 0$$

上式的第一项收敛,同理

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^p}{x}\frac{(1-x)^q\cdot(1-x)}{1-x} = 0$$

故上式第二项收敛,故整个式子收敛

(2) 利用变量代换$t=\ln x$,

$$\int_0^1 |\ln x|^p\,dx = \int_{-\infty}^0 |t|^p e^t\,dt$$

由于$\forall q>1$

$$\lim_{t\to-\infty} |t|^p e^t t^q = 0$$

利用无穷限积分的比较判别法,可知原式子收敛

(3)利用变量代换$1-x=e^t$,则

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{1-x^2}\,dx = \int_0^{-\infty} \frac{t}{2-e^t}\,dt$$

由于$\lim_{t\to-\infty}\frac{t^2}{2-e^t}=+\infty$,根据无穷限积分的比较判别法,原式子不收敛 □

Exercise 8.9

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x\cos^q x} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^p x\cos^q x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^p(\frac{\pi}{2}-x)\sin^q(\frac{\pi}{2}-x)} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^p x\cos^q x} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^p x\sin^q x}\end{aligned}$$

$p<1,q<1$时,我们有

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^p}{\sin^p x\cos^q x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^q}{\sin^q x\cos^p x}=0$$

故上式中两项均收敛,原积分收敛;由于此时被积函数恒大于0,我们有原积分绝对收敛.

$p\geq 1$或$q\geq 1$时,两项中至少一项发散到正无穷,且未发散的项也一定为正,故原积分发散.

综上$p<1,q<1$时,原积分绝对收敛,$p\geq 1$或$q\geq 1$时,原积分发散 $\square$

Exercise 9.1

(1)

$$IntA=(0,1)\cap(3,4),\partial A=\{0,1,2,3,4,5\},\bar{A}=[0,1]\cap[3,4]\cap\{2,5\}$$

(2)

$$IntB=\varnothing,\partial B=B=\{\sqrt{2}m+n|m,n\in\mathbb{Z}\},\bar{B}=B=\{\sqrt{2}m+n|m,n\in\mathbb{Z}\}$$

(3)

$$IntC=\varnothing,\partial C=\{2\}\cap\left\{2+\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N}\right\},\bar{C}=\{2\}\cap\left\{2+\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N}\right\}$$

$\square$

Exercise 9.2

(1)不可以,我们可以逐一验证以上性质,首先正定性是显然成立的,其次交换性由于平方和绝对值的存在也是满足的,然而并不满足三角恒等式,例如$x=(1,0),y=(2,0),z=(0,0)$

那么有

$$d(x,y)=1,d(x,z)=1,d(y,z)=4$$

这与三角不等式的要求

$$4=d(y,z)\leq d(x,z)+d(x,y)=2$$

矛盾

(2)可以.首先正定性可以通过平方根的存在直接判断,其次交换性由于根号内平方的存在也成立,最后是三角不等式,我们如下证明

我们可以通过柯西不等式导出

$$\sqrt{(x_1-z_1)^2+4(x_2-z_2)^2}\sqrt{(y_1-z_1)^2+4(y_2-z_2)^2} \geq (z_1-x_1)(y_1-z_1)+4(z_2-x_2)(y_2-z_2)$$

也就有

$$d(x,z)d(y,z) \geq -\frac{1}{2}(d^2(x,z)+d^2(y,z)-d^2(x,y))$$

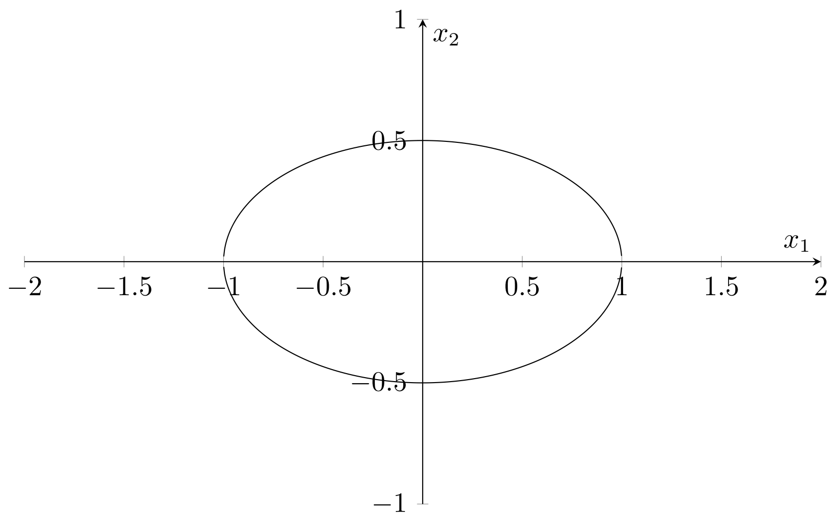
移项也就有

$$d^2(x,z)+d^2(y,z)-d^2(x,y)+2d(x,z)d(y,z) \geq 0$$

即

$$d(x,y) \leq d(x,z)+d(y,z)$$

以下是这个距离定义下的单位圆,如果写成解析式即是$x_1^2+4x_2^2=1$



(3)不可以,例如对于$x=(1,2), y=(1,3)$,二者满足$d(x,y)=0$但$x\neq y$,这与距离的性质矛盾

(4)不可以,例如对于$x=(1,2), y=(1,1)$,二者满足$d(x,y)=0$但$x\neq y$,这与距离的性质矛盾 $\square$