习题三

徐海翁

2024.3.6

□□

Exercise 12

$p=0$时,$I=1, \tilde{I}=1$

$p=1$时,$I=\frac{1}{2}, \tilde{I}=\frac{1}{2}$

$p=2$时,$I=\frac{1}{3}, \tilde{I}=\dfrac{65}{192}$

$p=3$时,$I=\frac{1}{4}, \tilde{I}=\dfrac{33}{128}$

$p=4$时,$I=\frac{1}{5}, \tilde{I}=\dfrac{31012}{147456}=\dfrac{7753}{36864}$

在区间$[x_{i-1}, x_i]$中,我们不妨设$c = \dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}, \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, h = \dfrac{\Delta x_i}{2}$,并假设

$$\Psi(h)=\int_{c-h}^{c+h} f(x)\,dx$$

对以上函数连续求导,不难得到

$$\Psi'(h)=f(c+h)+f(c-h)$$

$$\Psi''(h)=f'(c+h)-f'(c-h)$$

$$\Psi''(0) = 0$$

$$\Psi^{(3)}(h) = f''(c+h) + f''(c-h) \leq 2 \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f''(x)$$

我们有

$$I_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \Psi(h)$$

而我们近似的结果

$$\tilde{I}_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{2}\left[f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2} - \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{x_i - x_{i-1}}{2}\right) + f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2} + \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{x_i - x_{i-1}}{2}\right)\right]$$

$$= h \cdot \Psi'(\sqrt{\frac{2}{3}}h)$$

而对$\Psi(h)$在$h=0$处展开可以得到

$$\Psi(h) = \Psi(0) + \Psi'(0)h + \frac{\Psi''(0)}{2}h^2 + \frac{1}{2}\int_0^h \Psi^{(3)}(t)(h-t)^2\,dt \tag{1}$$

而对$\Psi'\left(\sqrt{\frac{2}{3}}h\right)$在$h=0$处展开可以得到

$$\Psi'\left(\sqrt{\frac{2}{3}}h\right) = \Psi'(0) + \Psi''(0)\sqrt{\frac{2}{3}}h + \int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}h} \Psi^{(3)}(t)(\sqrt{\frac{2}{3}}h - t)\,dt \tag{2}$$

不难用(1) $-h$ (2)得到

$$
\begin{aligned}
\left|I_i - \tilde{I}_i\right| &= \left|\Psi(h) - h \cdot \Psi'\left(\sqrt{\frac{2}{3}}h\right)\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}\int_0^h \Psi^{(3)}(t)(h-t)^2\,dt - h\int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}h} \Psi^{(3)}(t)(\sqrt{\frac{2}{3}}h - t)\,dt\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}\int_0^h \Psi^{(3)}(t)(h-t)^2\,dt - \sqrt{\frac{2}{3}}h\int_0^h \Psi^{(3)}(\sqrt{\frac{2}{3}}t)(\sqrt{\frac{2}{3}}h - \sqrt{\frac{2}{3}}t)\,dt\right| \\
&= \left|\int_0^h \Psi^{(3)}(t)(\frac{1}{2}h^2 - ht + \frac{1}{2}t^2) - \Psi^{(3)}(\sqrt{\frac{2}{3}}t)(\frac{2}{3}h^2 - \frac{2}{3}ht)\,dt\right| \\
&\leq \left|\int_0^h \Psi^{(3)}(t)(\frac{1}{2}h^2 - ht + \frac{1}{2}t^2)\,dt\right| + \left|\int_0^h \Psi^{(3)}(\sqrt{\frac{2}{3}}t)(\frac{2}{3}h^2 - \frac{2}{3}ht)\,dt\right| \\
&\leq \int_0^h \max_{t\in[x_{i-1},x_i]}\left|\Psi^{(3)}(t)\right|(\frac{7}{6}h^2 - \frac{5}{3}ht + \frac{1}{2}t^2)\,dt \\
&= (\frac{7}{6}h^2t - \frac{5}{6}ht^2 + \frac{1}{6}t^3)|_0^h \max_{t\in[x_{i-1},x_i]}\left|\Psi^{(3)}(t)\right| \\
&= \frac{1}{2}h^3 \max_{t\in[x_{i-1},x_i]}\left|\Psi^{(3)}(t)\right| \\
&= \frac{1}{8}\Delta x_i^3 \max_{x\in[a,b]}|f''(x)|
\end{aligned}
$$

对于整个区间$[a,b]$,如果采取等距分割可以得到

$$
|I - \tilde{I}| \leq \frac{1}{8n^2}\max_{x\in[a,b]}|f''(x)| = O(\frac{1}{n^2})
$$

因此可以认为这样的结果是二次收敛的 $\square$

Exercise 1

(1)

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2-4}\,dx &= \int_0^2\frac{1}{x^2-4}\,dx + \int_2^4\frac{1}{x^2-4}\,dx + \int_4^{+\infty}\frac{1}{x^2-4}\,dx \\
&= 2\int_2^4\frac{1}{x^2-4} + + \int_4^{+\infty}\frac{1}{x^2-4}\,dx
\end{aligned}
$$

根据比较判别法,右侧第一项是瑕积分,发散,这是因为

$$
\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{4}
$$

而$\int_2^4 \dfrac{1}{x-2}$是一个发散的积分

第二项收敛,故整个积分发散

(2)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4-4}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2-2}\,dx - \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+2}\,dx$$

其中第一项发散,讨论类似于(1)小问,第二项收敛,故整个积分发散

(3)由于被积函数是奇函数

$$V.P\int_{-\infty}^{+\infty} x\sin x^2 = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A f(x)\,dx + \int_0^A f(-x)\,dx = 0$$

(4)被积函数的原函数是$F(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-x^2} + C$,因此依据牛顿莱布尼茨公式可得

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx = F(+\infty) - F(0) = 0 - \frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$$

(5)注意到被积函数的原函数为$F(x) = \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = F(+\infty) - F(0)$$

显然$\lim_{x\to+\infty} F(x)$这个极限不存在

(6)

$$\int_2^{+\infty} \sqrt{1+x^2} - \sqrt{x^2-1}\,dx = \int_2^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

这时利用比较判别法

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = 1$$

可知这个积分发散 □

Exercise 2

第一部分我们使用反证法:

假设$x\to+\infty$时没有这样的极限,那么由极限条件的反面,$\exists\varepsilon_0 > 0, \forall X > 0, \exists x > X$,使得

$$|f(x)| \geq \varepsilon_0$$

由$f(x)$的一致连续性,对于$\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon_0 > 0$,$\exists\delta > 0$,使得$\forall x', x'' \subset [0, +\infty)$, $|x' - x''| < \delta$ 有

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{1}{2}\varepsilon_0$$

从而我们对$\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon_0\delta}{2}$, $\forall M \geq 0$,令$X = M + 1$,并且按照前面的步骤取出x_0,不妨设$f(x_0) > 0$,那么有$\forall x \in U(x_0, \delta)$

$$f(x) > f(x_0) - \frac{1}{2}\varepsilon_0 \geq \frac{1}{2}\varepsilon_0 > 0$$

取a, b分别为$x_0 - \frac{1}{2}\delta, x_0 + \frac{1}{2}\delta$,但是

$$\int_{x_0-\frac{1}{2}\delta}^{x_0+\frac{1}{2}\delta} f(x)\,dx > \frac{1}{2}\varepsilon_0\delta = \varepsilon_1$$

这与广义积分的柯西收敛原理矛盾,也就是这个广义积分不收敛,与题目条件矛盾

不能将一致连续换为连续,我们可以设计如下的函数$n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = \begin{cases} 2^n(x-n), x \in [n, n+\frac{1}{2^n}) \\ 2 - 2^n(x-n), x \in [n+\frac{1}{2^n}, n+\frac{2}{2^n}) \\ 0, otherwise \end{cases}$$

不难发现这个函数不收敛,因为任意$M > 0$,我们都能找到一个$x > M$,使得$f(x) = 1$.但是根据这个函数的几何图像,我们可以知道这个函数的广义积分收敛于1 □

Exercise 3

显然在定义域范围内有$1 + x^a \geq 1$,且被积函数恒大于零

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)} = \arctan(+\infty) - \arctan 0 = \frac{\pi}{2}$$

积分单调递增而有上界,从而一定收敛.接下来我们证明这个收敛值不随a的变化而变化

进行变量代换$t = \dfrac{1}{x}$,则

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)} = -\int_{+\infty}^{0} \frac{1}{t^2} \frac{dt}{(1+\frac{1}{t^2})(1+\frac{1}{t^a})} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^{-a})}$$

移项即有$\forall a \geq 1$

$$\int_0^{+\infty} \frac{(x^a-1)dx}{(1+x^2)(1+x^a)} = 0$$

对于两个不同的$a, b \in [1, +\infty)$,二者的积分式相减得到

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)} - \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^b)} &= \int_0^{+\infty} \frac{(x^b-x^a)dx}{(1+x^2)(1+x^a)(1+x^b)} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{-1}{2} \frac{(x^a-1)(1+x^b)-(1+x^a)(x^b-1)}{(1+x^2)(1+x^a)(1+x^b)} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{(x^a-1)dx}{(1+x^2)(1+x^a)} - \frac{(x^b-1)dx}{(1+x^2)(1+x^b)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

从而我们证明了这个式子的值与a的取值无关 □

Exercise 4

(1)被积函数的原函数$F(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{x-2}{x+2}$,

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2-4} \, dx = \lim_{x \to 2^-} F(x) - F(0)$$

这个极限不存在,故原瑕积分发散

(2)被积函数的原函数$F(x) = -\ln \cos x, x \in [0, \frac{\pi}{2})$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} F(x) - F(0)$$

这个极限不存在,原瑕积分发散

(3)被积函数同样是一个奇函数

$$\begin{aligned}
V.P. \int_{-1}^1 \frac{\sin x^2}{x} \, dx &= \lim_{\eta \to 0} \int_{-1}^{-\eta} \frac{\sin x^2}{x} \, dx + \int_\eta^1 \frac{\sin x^2}{x} \, dx \\
&= \lim_{\eta \to 0} - \int_{-\eta}^{-1} \frac{\sin x^2}{x} \, dx + \int_\eta^1 \frac{\sin x^2}{x} \, dx \\
&= \lim_{\eta \to 0} - \int_\eta^1 \frac{\sin x^2}{-x} \, d(-x) + \int_\eta^1 \frac{\sin x^2}{x} \, dx \\
&= \lim_{\eta \to 0} - \int_\eta^1 \frac{\sin x^2}{x} \, dx + \int_\eta^1 \frac{\sin x^2}{x} \, dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

(4)这题有问题,考虑把$x-3$改成$3-x$

进行变量代换$x=2+\sin t$,从而

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos t}{\cos t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

(5)做变量代换$t=\ln x$,从而

$$\int_0^1 x^2(\ln x)^2\,dx = \int_{-\infty}^0 e^{3t}t^2\,dt$$

此时被积函数原函数$F(t)=\left(\frac{1}{3}t^2-\frac{2}{9}t+\frac{2}{27}\right)e^{3t}$,从而有

$$\int_0^1 x^2(\ln x)^2\,dx = F(0)-F(-\infty)=\frac{2}{27}$$

$\square$