习题十

徐海翁

2024.5.8

Exercise 33

由点$(a,0,0)$和方向$(dy,dz)\parallel(1,1)$可以定义一个截面

$$y-z=0$$

由于这里的方向恰好定义了$(a,0,0)$处的切向量e,且曲面在该点的法线$n=(1,0,0)$也在这个平面内,故这个平面与曲面的交线即为我们的法截线,即有法截线为

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ z=y\end{cases}$$

我们将这个法截线视作关于t的曲线

$$r(t)=(x(t),y(t),y(t))$$

在法截线方程两侧对t求导,得到

$$r'=(x'(t),y'(t),y'(t))$$

$$r''=(x''(t),y''(t),y''(t))$$

利用前面的结论可得

$$k_n=\frac{\|r'\times r''\|}{\|r'\|^3}$$

$$r'\times r''=(0,y'x''-x'y'',x'y''-y'x'')$$

在$(a,0,0)$处对t求偏导数有

$$\begin{cases}x'(t)=0\\ \frac{x''}{a}+\frac{b^2+c^2}{b^2c^2}(y')^2=0\end{cases}$$

$$k_n=\frac{\sqrt{2}|y'x''|}{(\sqrt{2}|y'|)^3}=\frac{1}{2}\frac{|x''|}{|y'|^2}=\frac{a(b^2+c^2)}{2b^2c^2}$$

$$\rho_n=\frac{1}{k_n}=\frac{2b^2c^2}{a(b^2+c^2)}$$

□

Exercise 34

考虑把θ,φ视作关于t的函数,那么有

$$r_\theta = (-\sin\theta\cos\varphi, -\sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$$

$$r_\varphi = (-\cos\theta\sin\varphi, \cos\theta\cos\varphi, 0)$$

从而就有

$$E = r_\theta \cdot r_\theta = 1$$

$$F = r_\varphi \cdot r_\theta = 0$$

$$G = r_\varphi \cdot r_\varphi = \cos^2\theta$$

于是曲面的第一标准形式是

$$I(d\theta, d\varphi) = d\theta^2 + \cos^2\theta\, d\varphi^2$$

我们在一阶导数的基础上得到二阶偏导数

$$r_{\theta\theta} = (-\cos\theta\cos\varphi, -\cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta)$$

$$r_{\theta\varphi} = (\sin\theta\sin\varphi, -\sin\theta\cos\varphi, 0)$$

$$r_{\varphi\varphi} = (-\cos\theta\cos\varphi, -\cos\theta\sin\varphi, 0)$$

同时利用叉乘可以得到

$$r_\theta \times r_\varphi = (-\cos^2\theta\cos\varphi, -\cos^2\theta\sin\varphi, -\sin\theta\cos\theta)$$

同时我们定义法向量

$$n = \frac{r_\theta \times r_\varphi}{\|r_\theta \times r_\varphi\|} = (-\cos\varphi, -\sin\varphi, -\tan\theta)$$

从而我们得到

$$L = n \cdot r_{\theta\theta} = \cos\theta + \sin\theta\tan\theta = \sec\theta$$

$$M = n \cdot r_{\theta\varphi} = 0$$

$$N = n \cdot r_{\varphi\varphi} = \cos\theta$$

于是曲面的第二标准形式是

$$II(d\theta, d\varphi) = \sec\theta\, d\theta^2 + \cos\theta\, d\varphi^2$$

□

Exercise 1

利用一元函数的可积性定理,我们可知$f(x),g(y)$均是可积的,我们接下来在闭方块Q上考察函数$\tilde{f}(x,y)=f(x),\tilde{g}(x,y)=g(y)$.由于前面的可积条件,我们知道,$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$满足$|P|<\delta$时,就有

$$\Omega(f)<\frac{1}{d-c}\varepsilon$$

我们首先考察$\tilde{f}(x,y)$:

对$[a,b]$和$[c,d]$分别做分割$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,\ c=y_0<y_1<\cdots<y_m=d$,这样形成了$mn$个闭方块$J_{ij}$,我们可以使其满足$|J_{ij}|<\delta$.

$$\omega_{ij}=\sup_{(x,y),(x',y')\in(\Delta x_i\times\Delta y_j)}\left|\tilde{f}(x,y)-\tilde{f}(x',y')\right|=\sup_{x,x'\in\Delta x_i}\left|f(x)-f(x')\right|=\omega_i$$

从而

$$\Omega(\tilde{f})=\sum_J\omega_{ij}\Delta x_{ij}=\sum_j\sum_i\omega_{ij}\Delta x_i\Delta y_j=\sum_j\Omega(f)\Delta y_j<\frac{1}{d-c}\varepsilon\cdot(d-c)=\varepsilon$$

同理

$$\Omega(\tilde{g})<\varepsilon$$

那么也就有$\tilde{f},\tilde{g}$在Q上可积,利用书本上的定理可知$f(x)g(y)=\tilde{f}(x,y)\tilde{g}(x,y)$也在$Q$上可积,证毕. $\square$

Exercise 2

(1)由于函数$f(x,y)=e^{x+y}\sin x\cos y$视作关于$y$的函数时在$[c,d]$上可积,故而有

$$\begin{aligned}\iint_{[a,b]\times[c,d]}e^{x+y}\sin x\cos y\,d(x,y)&=\int_a^b\left(e^{x+y}\sin x\cos y\,dy\right)dx\\&=\int_a^b\frac{e^{x+d}(\sin d+\cos d)-e^{x+c}(\sin c+\cos c)}{2}\sin x\,dx\\&=\frac{e^d(\sin d+\cos d)-e^c(\sin c+\cos c)}{2}\int_a^b e^x\sin x\,dx\\&=\frac{e^d(\sin d+\cos d)-e^c(\sin c+\cos c)}{2}\frac{e^b(\sin b-\cos b)-e^a(\sin a-\cos a)}{2}\end{aligned}$$

(2)首先函数$f(x,y,z)=x^2\sin(x+y)(z^2-x-y)$视作关于$z$的函数时在$[2,3]$可积,从而有

$$\iint_{[0,1]\times[1,2]\times[2,3]}x^2\sin(x+y)(z^2-x-y)\,d(x,y,z)=\iint_{[0,1]\times[1,2]}x^2\sin(x+y)\left(\frac{19}{3}-(x+y)\right)d(x,y)$$

之后再将$g(x,y)=x^2\sin(x+y)\left(\frac{19}{3}-(x+y)\right)$视作关于$y$的函数时在$[1,2]$上可积,因此有

$$\int_1^2x^2\sin(x+y)\left(\frac{19}{3}-(x+y)\right)dy=(x^3-\frac{13}{3}x^2)\cos(x+2)-(x^3-\frac{16}{3}x^2)\cos(x+1)-x^2\sin(x+2)+x^2\sin(x+1)$$

最终解得原积分为

$$-\frac{38}{3}\cos3-\frac{8}{3}\sin3+\frac{68}{3}\cos2-7\sin2-8\cos1+\frac{32}{3}\sin1$$

□

(3)函数$f(x,y)=y\tan(x+y^2)$视作关于y的函数时在区间$[0,0.5]$上可积

$$\int_0^{0.5} y\tan(x+y^2)\,dy=\left(-\frac{1}{2}\ln\cos(x+y^2)\right)\Big|_0^{0.5}=-\frac{1}{2}\ln\cos(x+0.25)+\frac{1}{2}\ln\cos x$$

之后我们的再对x积分,但这个函数无法得到初等的原函数,同理我们如果先对x积分,同样可以得到类似的形式,但是再对y积分时无法得到表达式形式的结果,因此我们不再求解.