习题六

徐海翁

2024.3.27

□□

Exercise 11

$\Rightarrow$,对于$[a,b]$上的任意一个收敛序列,设其极限为x_0,由于$f(x)\in C[a,b]$,故$\forall x_0\in [a,b]$,对$\forall\{x_n\}$满足$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$,都有$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$,也就是

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,f(x_n))=(x_0,f(x_0))$$

又由于$\mathbb{R}^2$上的任何一个收敛点列$\{(x_n,f(x_n))\}$都有其第一个分量组成的点列$\{x_n\}$是$[a,b]$上的收敛点列,上面的过程说明了这个$\mathbb{R}^2$上的序列收敛于$(x_0,f(x_0))\in G$,其中$x_0\in[a,b]$是$\{x_n\}$的极限.

由于前面收敛序列的任意性,以及闭集等价定义,可知G是闭集

$\Leftarrow$,若G是一个闭集,则其上任意一个收敛序列$\{(x_n,f(x_n))\}$的极限都在G内,我们考虑$[a,b]$上收敛到$x_0\in[a,b]$的任何一个收敛序列$\{x_n\}$,根据G的定义,我们有$(x_0,f(x_0))\in G$,又由于$x_n\in[a,b]$,而G是闭集,$(x_n,f(x_n))$收敛到

$$(x_0,\lim_{n\to\infty}f(x_n))\in G$$

利用函数的单值性,可知

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$$

由于我们前面取了收敛于x_0任意一点的任意点列,且这样的x_0是在$[a,b]$上任取的,故在$[a,b]$上任意一点我们都有f连续,即$f(x)\in C[a,b]$ □

Exercise 1

(1)

$$f'_x(x,y)=\sin(x^2+y^2)+2x^2\cos(x^2+y^2)$$

$$f'_y(x,y)=2xy\cos(x^2+y^2)$$

(2)

$$f'_x(x,y)=\frac{2x}{(1+x^2)y}, f'_y(x,y)=-\frac{\ln(1+x^2)}{y^2}$$

(3)

$$f'_x(x,y)=e^x\sin(ky), f'_y(x,y)=ke^x\cos(ky)$$

(4)

$$f'_x(x,y,z)=2x\ln(|z(1+y^2)|)$$

$$f'_y(x,y,z)=x^2\frac{2y}{1+y^2}$$

$$f'_z(x,y,z)=x^2\frac{1}{z}$$

(5)

$$f'_x(x,y)=\frac{1}{1+(\frac{1+xy}{x^2+y^2})^2}\frac{y(x^2+y^2)-(1+xy)2x}{(x^2+y^2)}=\frac{-x^2y+y^3-2x}{(x^2+y^2)^2+(1+xy)^2}$$

利用对称性可以立刻得到

$$f'_y(x,y)=\frac{-xy^2+x^3-2y}{(x^2+y^2)^2+(1+xy)^2}$$

□

Exercise 2

(1)我们先求偏导数:

$$f'_x(x,y)=-y^2\sin(xy^2)-\frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$f'_y(x,y)=-2xy\sin(xy^2)-\frac{2y}{x^2+y^2}$$

不难利用各一元函数的连续性,复合函数的连续性以及连续函数四则运算的连续性,可知这两个偏导数连续,故$f(x,y)$是可微的,利用可微函数的性质,我们有

$$\begin{aligned}f'_{\boldsymbol{n}}(x,y)=\mathrm{grad}f(x,y)\cdot\boldsymbol{n}&=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-y^2\sin(xy^2)-\frac{2x}{x^2+y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(2xy\sin(xy^2)+\frac{2y}{x^2+y^2}\right)\\&=\left(xy-\frac{\sqrt{3}}{2}y^2\right)\sin(xy^2)+\frac{y-\sqrt{3}x}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

(2)对于$x>0,y>0$的情况

同样我们先求偏导数

$$g_x'(x,y)=yx^{y-1}+(\ln y)y^x$$

$$g_y'(x,y)=(\ln x)x^y+xy^{x-1}$$

利用和(1)相同的方法,我们有$g(x,y)$可微,故

$$g_{\boldsymbol{n}}'(x,y)=\mathrm{grad}g(x,y)\cdot\boldsymbol{n}=\frac{\sqrt{3}}{2}(yx^{y-1}+(\ln y)y^x)-\frac{1}{2}((\ln x)x^y+xy^{x-1})$$

对于$x=0,y>0$的情况,则$g(0,y)=1$,

$$\begin{aligned}g_{\boldsymbol{n}}'(0,y)&=\lim_{t\to0+}\frac{g((0,y)+\boldsymbol{n}t)-g(0,y)}{t}\\&=\lim_{t\to0+}\frac{e^{(y-\frac{t}{2})\ln(\frac{\sqrt{3}}{2}t)}+e^{\frac{\sqrt{3}}{2}t\ln(y-\frac{t}{2})}-1}{t}\end{aligned}$$

由于利用洛必达法则

$$\lim_{t\to0+}\frac{e^{\frac{\sqrt{3}}{2}t\ln(y-\frac{t}{2})}-1}{t}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ln y$$

而对

$$\lim_{t\to0+}\frac{e^{(y-\frac{t}{2})\ln(\frac{\sqrt{3}}{2}t)}}{t}$$

我们做变量代换$x=\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$,则化为

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3}}{2}e^{(y-1)x-\frac{\sqrt{3}}{3}e^x x}$$

- 当$y>1$时,上述极限为0
- 当$y=1$时,上述极限为$\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 当$0<y<1$时,上述极限不存在(正无穷)

故

$$g_{\boldsymbol{n}}'(0,y)=\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}\ln y, & y>1\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\ln y+\frac{\sqrt{3}}{2}, & y=1\\ \text{不存在}, & 0<y<1\end{cases}$$

对于$x>0,y=0$,$\boldsymbol{n}$方向上的任何一个点都在函数定义域外,讨论方向导数无意义.

同理对于x,y均为0的情况,不难发现这个方向上的任何一个点都在定义域外,从而讨论方向导数也是无意义的. $\square$

Exercise 3

$$f'_x(x,y,z)=g'_x(e^{x^2y},z)e^{x^2y}\cdot 2xy+h'_x(\tan\frac{x}{z}+y)\frac{1}{\cos^2\frac{x^2}{z^2}}\frac{1}{z}$$
$$f'_y(x,y,z)=g'_y(e^{x^2y},z)e^{x^2y}\cdot x^2++h'_y(\tan\frac{x}{z}+y)$$
$$f'_z(x,y,z)=g'_z(e^{x^2y},z)-h'_z(\tan\frac{x}{z}+y)\frac{1}{\cos^2\frac{x^2}{z^2}}\frac{x}{z^2}$$

$\square$

Exercise 4

(1)

$$du=u'_x\,dx+u'_y\,dy=2x\cos(x^2+y^2)\,dx+2y\cos(x^2+y^2)\,dy$$

(2)

$$dv=v'_x\,dx+v'_y\,dy=\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{x^2+3y^2})^2}}\cdot\frac{-x^2+3y^2}{(x^2+3y^2)^2}\,dx-\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{x^2+3y^2})^2}}\cdot\frac{6xy}{(x^2+3y^2)^2}\,dy$$

(3)

$$dw=w'_x\,dx+w'_y\,dy+w'_z\,dz=(\ln 2)\cdot 2^xy^3\cosh(2z+1)\,dx+3\cdot 2^xy^2\cosh(2z+1)\,dy+2\cdot 2^xy^3\sinh(2z+1)\,dz$$

$\square$

Exercise 5

$$z'_x=\cos x\sin y-e^{x+y},z'_y=\cos y\sin x-e^{x+y}$$

从而

$$z'_x(1,1)=\cos 1\sin 1-e^2,z'_y(1,1)=\cos 1\sin 1-e^2$$

故我们得到了两个切向量 $(1, 0, \cos 1\sin 1 - e^2)$和$(0, 1, \cos 1\sin 1 - e^2)$ 利用$\mathbb{R}^3$中向量的叉乘,我们有

$$\boldsymbol{n} = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \cos 1\sin 1 - e^2 \\ 0 & 1 & \cos 1\sin 1 - e^2 \end{bmatrix} = (e^2 - \cos 1\sin 1, e^2 - \cos 1\sin 1, 1)$$

根据这个法向量,我们立刻可以得到切平面

$$P : (e^2 - \cos 1\sin 1)x + (e^2 - \cos 1\sin 1)y + z = 0$$

$\square$

Exercise 6

对于$(0, 0)$邻域$U((0, 0), \delta), \forall\delta > 0$中的的点$(x, y)$,不妨限定$x, y < \frac{1}{2}$

$$f_x'(x, y) = 2x\sin\frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2}\cos\frac{1}{x^2 + y^2}$$

利用绝对值三角不等式

$$|f_x'(x, y)| \geq \left|\frac{2x}{x^2 + y^2}\cos\frac{1}{x^2 + y^2}\right| - 1$$

我们取这个邻域中的点$(\sqrt{\frac{1}{2k\pi}}, 0)$,其中$k$取$\left[\frac{1}{2\delta^2\pi}\right] + m$,$m = 1, 2, \ldots$,那么我们就有

$$|f_x'(x, y)| \geq 2\sqrt{2k\pi} - 1$$

由于这里的k可以任意大,故这个偏导数是无界的

利用对称性,我们同样可以证明偏导数$f_y'(x, y)$也是无界的

然而,对于$r = (x, y)$在$(0, 0)$的邻域内,我们通过变量代换$\|r\| = \sqrt{x^2 + y^2}$,也就有

$$f(x, y) = \|r\|^2 \sin\frac{1}{\|r\|^2} = o(\|r\|)$$

也就是说

$$f(h, k) - f(0, 0) = 0h + 0k + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

即f在$(0, 0)$处可微 $\square$

Exercise 7

$$f'_x(0,0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0,0)-f(0,0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0}{t}=0$$

其中最后一个等式利用了洛必达法则

同理我们可利用对称性得知$f'_y(0,0,0),f'_z(0,0,0)$都存在.

然而,当我们取方向向量$e=(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$时,我们的

$$\frac{\partial f}{\partial e}(0,0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(\frac{\sqrt{3}}{3}t,\frac{\sqrt{3}}{3}t,\frac{\sqrt{3}}{3}t)-f(0,0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\left|\frac{1}{t}\right|=+\infty$$

倒数第二个等号是因为这个式子的分子在$t>0$时为1,在$t<0$时为-1,故最终极限不存在.

由于$(0,0)$处存在一个方向导数不存在,故f在$(0,0)$一定不可微.

$\square$