习题五

徐海翁

2024.3.20

□□

Exercise 9.3

利用柯西列的性质,也就是 $\forall\varepsilon > 0$,$\exists N > 0$,$\forall n > N, p$使得

$$\|x_n - x_{n+p}\| < \varepsilon$$

利用距离的三角不等式 $|x_n^1 - x_{n+p}^1| \le |\|x_n - x_{n+p}\| < \varepsilon$. 而由于我们知道对于实数空间$\mathbb{R}$,柯西列都是收敛列,也就是序列$\{x_n^1\}$是收敛列,设其收敛于$x^1$,同理设$\{x_n^2\}$收敛于$x^2$,这样也就有

$\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N$,使得

$$|x_n^1 - x^1| < \sqrt{\frac{1}{2}}\varepsilon$$

同理 $\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N$,使得

$$|x_n^2 - x^2| < \sqrt{\frac{1}{2}}\varepsilon$$

这样利用勾股定理就有 $\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N$,使得

$$\|x_n - (x^1, x^2)\| < \varepsilon$$

即这个点列收敛 □

Exercise 9.4

设这个聚点为a,根据聚点的定义,$\forall\varepsilon > 0$,$\exists x \in U_0(a, \varepsilon) \cap A$,故我们可以构造去心邻域$U_0(a, \frac{1}{n})(n = 1, 2, \ldots)$,并在每个邻域与$A$的交集中取出$x_n$,使得

$$\|x_n - a\| < \frac{1}{n}$$

当$n \to +\infty$时,我们有$x_n \to a$,也就是A中存在点列$\{x_n\}$收敛到a. $\square$

Exercise 9.5

这里我们假定闭集的定义方式是"$F \subset X$,任意的收敛点列$\{x_n\}$的极限都在集合中",否则证明命题的后半部分即是定义

我们先证明命题的后半部分:

对于某个开集G,记$F = X \setminus G$,我们考察F中的收敛点列$\{x_n\}$,假如有$\lim_{n\to+\infty} x_n = a \notin F$,则有

$$a \in X \setminus F = G$$

由于开集的性质,$\exists \varepsilon > 0$使得

$$U(a, \varepsilon) \subset X \setminus F$$

与此同时,当n充分大时,有

$$x_n \in U(a, \varepsilon) \subset X \setminus F$$

这与我们的点列$\{x_n\} \in F$矛盾,于是我们证明略开集的补集是一个闭集

对于命题的前半部分,对于某个闭集F,我们记$G = X \setminus F$,对于G中任何一点b,取邻域$U(b, \frac{1}{n})$,如果对于任意$n > 0$,我们都有$U(b, \frac{1}{n}) \cap F \neq \varnothing$,那么我们能够在$F$中选出一个收敛于$b$的点列,但这与$F$是闭集的事实矛盾,从而一定存在一个$N > 0$,使得$\forall n > N$都有$U(b, \frac{1}{n}) \subset G$,由于$b$的任意性,我们证明了闭集的补集是一个开集 $\square$

Exercise 9.6

(1)做变量代换$r = \sqrt{x^2+y^2}$,当$(x, y) \to (0, 0)$时必然有$r \to 0$,这样

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}-2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2}{r-2} = 0$$

(2)做变量代换$r = \pi - z$,则

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y,z)\to(0,0,\pi)} \left|\frac{\sin^3 z}{x^2+y^2+(\pi-z)^2}\right| &= \lim_{(x,y,r)\to(0,0,0)} \left|\frac{\sin^3 r}{x^2+y^2+r^2}\right| \\ &\leq \lim_{(x,y,r)\to(0,0,0)} \left|\frac{r^3}{x^2+y^2+r^2}\right| \leq 0\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,\pi)}\frac{\sin^3 z}{x^2+y^2+(\pi-z)^2}=0$$

(3)不难利用复合函数的极限和函数连续性证明

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)}\ln(x+2y)=\ln 3$$

和

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{1}{x+y}=\frac{1}{2}$$

再不难利用两个函数乘积极限的性质有

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{\ln(x+2y)}{x+y}=\lim_{(x,y)\to(1,1)}\ln(x+2y)\cdot\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{1}{x+y}=\frac{\ln 3}{2}$$

(4)不妨设$x>1,y>1$,取$r=x+y$,那么$(x,y)\to(+\infty,+\infty)$,时有$r\to+\infty$此时利用一元函数的性质,我们有

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{r^4}{e^r}=0$$

同时

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\frac{x^2+y^4}{e^{x+y}}&\le\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\frac{x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4}{e^{x+y}}\\&=\lim_{r\to+\infty}\frac{r^4}{e^r}=0\end{aligned}$$

又由于被求极限式子不小于0,从而原极限

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\frac{x^2+y^4}{e^{x+y}}=0$$

□

Exercise 9.7

(1)重极限不存在,因为当我们令点以曲线$y=x^{\frac{3}{2}}$趋近于$(0,0)$时,$f(x,y)=\frac{1}{2}$,而令点以$y=x$趋近于$(0,0)$时,我们有$f(x,y)=\frac{x}{x^2+1}$,对于上述两种曲线上收敛于$(0,0)$的点列,它们具有两种不同的极限$\frac{1}{2}$和0,故原重积分不存在

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{x^3y^2}{x^6+y^4}=\lim_{x\to0}0=0$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^3y^2}{x^6+y^4}=\lim_{y\to 0}0=0$$

(2)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right|\le\lim_{(x,y)\to(0,0)}|(x+y)|=0$$

故原重极限存在,值为0

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{y}$$

由于极限

$$\lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{y}$$

不存在,故整个累次极限也不存在

同理根据对称性,累次极限

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

也不存在 □

Exercise 9.8

对于一元函数$g(r)=\sin r$,其连续性我们我们已经在一元函数部分进行证明,在这里省略

由于$p(x)=x^2$的连续性,$\forall\varepsilon=\varepsilon_0>0$,$\exists\delta_1>0$,使得$\forall x\in U(x_0,\delta_1)$时

$$|p(x)-p(x_0)|<\frac{1}{2}\varepsilon$$

由于$q(x)=x$的连续性,$\forall\varepsilon=\varepsilon_0>0$,$\exists\delta_2>0$,使得$\forall x\in U(x_0,\delta_2)$时

$$|q(x)-q(x_0)|<\frac{1}{2}\varepsilon$$

对于$r=h(x,y)=x^2+y$,任取$a=(x_0,y_0)$,$\forall\varepsilon=\varepsilon_0>0$,$\exists\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,不妨限定$\delta<1$ 当$(x,y)\in U(a,\delta)$时

$$|h(x,y)-h(x_0,y_0)|=|x^2-x_0^2+y-y_0|\le|x^2-x_0^2|+|y-y_0|<\varepsilon$$

因此我们也证明了$h(x,y)$的连续性

由于$f=g\circ h$,以及后面两个函数的连续性,我们有$\forall\varepsilon>0$,$\exists\eta>0$使得$\forall r,|r-r_0|<\eta$,有

$$|g(r)-g(r_0)|<\varepsilon$$

我们有对η,$\exists\delta>0$,使得$(x,y)\in U(a,\delta)$时有

$$|h(x,y)-h(x_0,y_0)|<\eta$$

故$(x,y)\in U(a,\delta)$时有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$$

由于我们前面所取$a=(x_0,y_0)$的任意性,我们证明了上述函数f时在全空间上的连续函数 $\square$

Exercise 9

根据利普西茨连续的性质$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\frac{\varepsilon}{2L}$,使得对于$\forall(x,y)\in U((x_0,y_0),\delta)$都有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\le L(|x-x_0|+|y-y_0|)|\le L(\frac{\varepsilon}{2L}+\frac{\varepsilon}{2L})=\varepsilon$$

其中第二个不等号利用了

$$|x-x_0|\le\|(x,y)-(x_0,y_0)\|,|y-y_0|\le\|(x,y)-(x_0,y_0)\|$$

$\square$

Exercise 10

任取曲线$D:y=\alpha x^3$上的点$(x_0,y_0)=(t_0,\alpha t_0^3)\neq(0,0)$

$$\lim_{D\ni(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=\lim_{D\ni t\to t_0}\frac{\alpha t^6}{(1+\alpha^2)t^6}=\frac{\alpha t_0^6}{(1+\alpha^2)t_0^6}=f(x_0,y_0)$$

其中中间的等号利用了一元函数的连续性

而对于$(x_0,y_0)=(t_0,\alpha t_0^3)=(0,0)$

$$\lim_{D\ni(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=\lim_{D\ni t\to t_0}\frac{\alpha t^6}{(1+\alpha^2)t^6}=\frac{\alpha}{(1+\alpha^2)}\neq 0=f(x_0,y_0)$$

从而$f(x,y)$在曲线D上连续,但在$(0,0)$处不连续

$\square$