习题十一

徐海翁

2024.5.15

Exercise 3

(1)如果令积分顺序为x,y,那么积分域分别为

$$\left[-\sqrt{4-y^2},\varphi(y)\right],\left[\frac{-2-\sqrt{19}}{5},1\right]$$

其中

$$\varphi(y)=\begin{cases}\sqrt{4-y^2}, & \frac{-2+\sqrt{19}}{5}<y\leq 1\\ 2y+1, & \frac{-2-\sqrt{19}}{5}\leq y\leq \frac{-2+\sqrt{19}}{5}\end{cases}$$

(2)如果令积分顺序为z,y,x,那么积分域分别为

$$\left[-x-y,1-x-y\right],\left[-x,1-x\right],\left[0,1\right]$$

(3)如果令积分顺序为y,x,那么积分域分别为

$$\left[0,\sin x\right],\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$$

□

Exercise 4

(1)

$$=\int_0^1\int_{W_y}f(x,y)\,dxdy$$

其中

$$W_y=\begin{cases}[y^2,\frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2}]\cup[\frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2},1], & 0\leq y\leq\frac{1}{2}\\ [y^2,1], & \frac{1}{2}<y\leq 1\end{cases}$$

(2)

$$=\int_0^2\int_{W_y}f(x,y)\,dxdy$$

其中

$$W_y=\begin{cases}[1,3-y], & 1\leq y\leq 2\\ [3,3-y], & 0\leq y<1\end{cases}$$

□

Exercise 5

(1)

$$\iint_D (x^2+y)\,d(x,y) = \int_{-2}^{6} dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{y+3} (x^2+y)\,dx = \int_{-2}^{6} \left(-\frac{1}{192}y^6 + \frac{1}{12}y^3 + 4y^2 + 12y + 9\right)\,dy = \frac{8000}{21}$$

(2)

$$\iint_D \sin(x+2y)\,d(x,y) = \int_1^{\pi} dx \int_{x-\pi}^{x+\pi} \left(-\frac{1}{2}\right) d(\cos(x+2y)) = \int_1^{\pi} dx \cdot 0 = 0$$

□

Exercise 6

$$E_1 = \{(x,y)|x\text{为}[0,1]\text{上的有理数}, y \in [0,1]\}$$

$$E_2 = \{(x,y)|x\text{为}[0,1]\text{上的无理数}, y \in [0,1]\}$$

利用边界点的定义,以及有理数和无理数都具有的稠密性,我们知道$\forall p = (x,y) \in [0,1] \times [0,1]$,$\forall \delta > 0$,

$$U(p,\delta) \cap E_1 \neq \varnothing$$

$$U(p,\delta) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus E_1) \neq \varnothing$$

$$U(p,\delta) \cap E_2 \neq \varnothing$$

$$U(p,\delta) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus E_2) \neq \varnothing$$

因此E_1, E_2的边界点集都是$[0,1] \times [0,1]$,显然都不是零测集,因此E_1, E_2不是Jordan可测集.

但是$E_1 \cap E_2 = \varnothing$,其边界点集也是空集,故$E_1 \cap E_2$可测,而$E_1 \cup E_2 = [0,1] \times [0,1]$,也显然可测. □

Exercise 7

(1)是零集,我们可以按照Cantor三角列出$[0,1]$中的有理数(可数无穷个),对于每个有理数r,我们使用闭方块

$$[r - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{2^n}, r + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{2^n}] \times [0,1]$$

进行覆盖,其中n为这个有理数的序号,这样所有的闭方块覆盖了这个集合中所有的点,而它们的总面积为

$$\sum_{i=1}^{+\infty} Vol(Q_i) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^i} \leq \varepsilon$$

(2)不是零集

(3)是零集 □

Exercise 8

(1)正确

(2)正确

(3)正确

(4)正确

(5)不正确[考虑之前写过的$m+\sqrt{2}n$等形式]

(6)正确

(7)正确

(8)不正确[参考(5)]

(9)不正确[显然可以相等]

(10)不正确[定义] $\square$