Projet

À mettre sur le serveur EPREL `https://eprel.u-pec.fr/eprel : M1 Outils Numériques -> Travaux -> Projet décembre 2018` en cliquant sur <u>Nouvelle soumission</u>
Date limite : 14/12/18 minuit.

Le but du projet est d'utiliser des simulations probabilistes de chemins dans $\mathbb{R}^2$ pour résoudre de manière approchée des problèmes de Dirichlet du type : chercher $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u(x) & = & 0, & \text{sur } D, \\ u(x) & = & g(x), & \text{sur } \partial D, \end{array} \right. \tag{1}$$

où D est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, ∂D sa frontière que l'on suppose régulière et g une application de ∂D dans $\mathbb{R}$. Ici Δ désigne le laplacien de u, soit $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Interprétation probabiliste

Soit $h > 0$ et $(Z_j)_{j\geq 1}$ une suite i.i.d. suivant une loi $\mathcal{N}(0,h)$. Pour tout $t > 0$ et pour tout $x_0 \in D$, on pose

$$B_t = x_0 + \sum_{j=1}^{\lfloor t/h \rfloor} Z_j.$$

Ainsi pour tout ω, $t \mapsto B_t(\omega)$ est une fonction aléatoire constante par morceaux telle que $B_t = B_n$ si $t \in [nh, (n+1)h]$.

On sait que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière, on a (voir notes de cours)

$$(\star) \quad \mathbb{E}\Big(f(B_{nh})\Big) = f(x_0) + \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\Big(f''(B_{(i-1)h})\Big).$$

Il est immédiat de génériser $(\star)$ en dimension 2. Pour cela, on note $Z_j = (Z_j^1, Z_j^2)_{j\geq 1}$ une suite i.i.d. de v.a. indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0,h)$. Puis on pose pour tout $x_0 = (x_0^1, x_0^2) \in D$, $B_t = (B_t^1, B_t^2)$ avec B_t^i définies par

$$B_t^i = x_0^1 + \sum_{j=1}^{\lfloor t/h \rfloor} Z_j^1, \quad i = 1, 2.$$

Alors pour toute fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière, on a

$$(\star\star) \quad \mathbb{E}\Big(f(B_{nh})\Big) = f(x_0) + \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\Big(\Delta f(B_{(i-1)h})\Big).$$

Soit maintenant u solution de (1) et appliquons $(\star\star)$ à u. Auparavant, notons

$$N_{x_0} = \inf\{n \geq 1, \quad B_{nh} \notin D\}.$$

Puisque $\Delta u = 0$ sur D et $u = g$ sur le bord de D, une approximation de $u(x_0)$ est alors fournie par
$$u(x_0) = \mathbb{E}(g(B_{N_{x_0}h})).$$

Mise en œuvre

On implémentera un algorithme qui simule les trajectoires $t \mapsto B_t$ partant de x_0 pour un pas de temps $h >$ fixé jusqu'à ce qu'elles atteignent le bord de D. La valeur de $u(x_0)$ sera estimée par la moyenne empirique des valeurs prises par la fonction g sur ∂D atteitn par la trajectoire.

On pourra traiter par exemple les cas suivants, ou en imaginer d'autres.

$$\begin{array}{rclrcl} D & = &]-1,1[^2, & g(x,y) & = & \max(x,y), \\ D & = &]-1,1[^2, & g(x,y) & = & \sin(\pi(x+y)), \\ D & = & \{(x,y),\ x^2+y^2<1\}, & g(x,y) & = & xy, \\ D & = & \{(x,y),\ x^2+y^2<1\}, & g(x,y) & = & \exp(x+y). \end{array}$$

On cherchera par un maillage à calculer suffisamment de valeurs approchées de $u(x_0)$ pour pouvoir représenter graphiquement ses valeurs sur l'enemble du domaine D (c.-à-d. la fonction $x_0 \mapsto u(x_0)$). Deux paramètres influent sur la précision et la vitesse d'éxécution de l'algorithme. Il s'agit du pas de temps $h > 0$ et du nombre de trajectoires simulées pour chaque initialisation de chemin x_0. On discutera de l'influence de ces deux paramètres sur la précision et sur le temps de calcul.

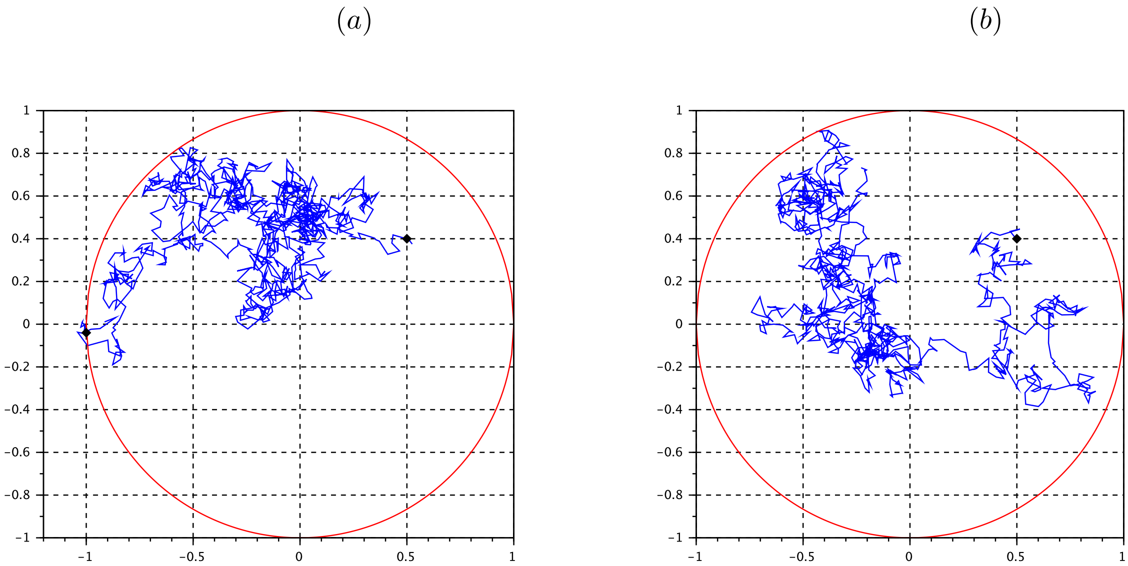

FIGURE 1 – Cas où $n = 1000$, $h = 10^{-3}$ et un domaine D circulaire. (a) Exemple d'une trajectoire partant de $x_0 = (0.5, 0.4)$ (en $\diamond$ noir) et atteignant le bord de D (avec la même marque). (b) Exemple d'une trajectoire n'atteignant pas le bord.