

# Polyèdres flexibles et théorème du soufflet

Hassina Krim, Vu Thi Hai Yen

5 mars 2019

## 1 Introduction

Les polyèdres sont un domaine fortement enraciné dans l'histoire des mathématiques. Ils sont présents à peu près à toutes les époques, y compris la notre. Ce domaine actif, loin d'être tari, constituent une source inépuisable d'inspiration pour l'enseignement de la géométrie et pour l'illustration de la recherche en mathématiques. Dans ce mémoire nous allons parler du problème de rigidité des polyèdres qui est très ancien dont Cauchy a marqué son premier résultat pour ce problème « *Tout polyèdre convexe est rigide* » et pendant 164 ans il y avait rien de nouveau sur les polyèdres flexibles jusqu'à quand Connelly a énoncé le théorème suivant : « *Il existe un polyèdre flexible* » et a réussi à le construire, et c'est ça qui a inspiré Sullivan à souffler de la fumée de cigarette à l'intérieur du modèle, c'est lors qu'il constata qu'en faisant bouger le polyèdre, aucune fumée ne s'échappait. Ceci l'a amené à penser que lorsque le polyèdre se déforme, son volume ne change pas. C'est après cette expérience que Connelly et Sullivan ont finalement conjecturé que « *Le volume d'un polyèdre flexible reste constant lors de sa déformation* » et ils ont ainsi l'appelée *La conjecture du soufflet*. Lors de ce petit mémoire nous allons étudier quelques démonstrations de ces grands théorèmes afin de mieux comprendre les polyèdres flexibles.

## 2 Le théorème de rigidité de Cauchy

Pour pouvoir énoncer ce théorème, il faut d'abord présenter quelques notions de base sur les polyèdres. Dans ce mémoire, nous travaillons uniquement dans l'espace tridimensionnel.

### 2.1 Les polyèdres convexes

**Définition 2.1 (Polyèdre).** On appelle **polyèdre** (du grec *poly* = plusieurs et *hedra* = base, facette) un solide connexe (monobloc) de l'espace limité par un nombre fini de polygones plans non coplanaires, ses faces, de sorte que tout côté d'une de ces faces soit commun à au moins une autre.

Le minimum de faces d'un polyèdre est 4 : il s'agit alors d'un tétraèdre.

Les côtés des faces constituent les **arêtes** du polyèdre.

Les intersections des arêtes sont les **sommet** du polyèdre.

Les sommets définissent un (unique) **angle** polyèdre.



On note une  $k$ -face une face qui est bordée par  $k$  arêtes (une arête qui borde une même région des deux côtés doit être comptée deux fois). Soit  $f_k$  le nombre de  $k$ -faces. En comptant toutes les faces, on trouve :

$$f = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \dots \quad (1)$$

En comptant les arêtes en fonction des faces qu'elles bordent, on obtient :

$$2e = f_1 + 2f_2 + 3f_3 + 4f_4 + \dots \quad (2)$$

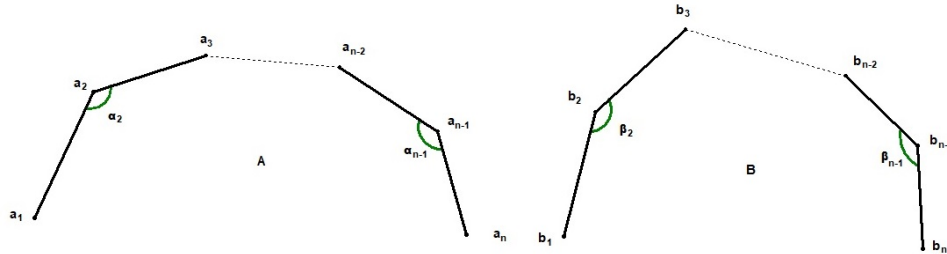
On va démontrer par contradiction.

Soit  $c$  le nombre de coins où se produisent des changements de couleurs. Supposons que le lemme soit faux. Alors nous avons  $c \geq 4n$  changements de couleurs, puisqu'à chaque sommet se produit un nombre pair de changements. Comme chaque face ayant  $2k$  ou  $2k + 1$  côtés présente au plus  $2k$  coins de ce type :

$$\begin{aligned} 4n \leq c &\leq 2f_3 + 4f_4 + 4f_5 + 6f_6 + 6f_7 + 8f_8 + \dots \\ &\leq 2f_3 + 4f_4 + 6f_5 + 8f_6 + 10f_7 + 12f_8 + \dots \\ &= 2(3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \dots) - 4(f_3 + f_4 + f_5 + \dots) \\ &= 4e - 4f \end{aligned}$$

en utilisant encore (1) et (2). Ainsi, nous avons  $e \geq n + f$ . En outre, en utilisant la formule d'Euler nous obtenons  $0 \geq n + f - e = 2$  ce qui est bien une contradiction.  $\square$

**Lemme 2.6. (Lemme du Bras de Cauchy)** Soient  $A$  et  $B$  des  $n$ -gones convexes (planaires ou sphériques), numérotés comme indiqué sur la figure suivante :



tels que les longueurs des arêtes correspondantes vérifient l'égalité  $\overline{a_i a_{i+1}} = \overline{b_i b_{i+1}}$  pour  $1 \leq i \leq n - 1$ , et que les mesures des angles correspondants vérifient l'inégalité  $\alpha_i \leq \beta_i$  ; pour  $2 \leq i \leq n - 1$ .

Alors la longueur de l'arête manquante vérifie :

$$\overline{a_1 a_n} \leq \overline{b_1 b_n}$$

avec égalité si et seulement si  $\alpha_i = \beta_i$  ; pour tout  $i$ .

*Preuve du lemme 2.6.* On va démontrer par récurrence sur  $n$ .

+ Si  $n = 3$ , c'est à dire que dans le cas d'un triangle, on va montrer que en augmentant l'angle  $\gamma$  entre deux côtes de longueurs fixes  $a$  et  $b$ , la longueur  $c$  du côté oppose augmente aussi. (\*)

Dans le cas planaire, l'égalité  $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \gamma$  implique (\*). De même, pour démontrer (\*) dans une trigonométrie sphérique, on utilise l'égalité  $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$

(les longueurs  $a, b, c$  sont mesurées sur la sphère de rayon 1, elles prennent donc leurs valeurs dans l'intervalle  $[0, \pi]$ ).

+ Supposons maintenant que le lemme reste vrai pour  $n - 1$  ( $n \geq 4$ ). On considère deux  $n$ -gones  $A$  et  $B$  vérifiant l'hypothèse du lemme.

- S'il existe  $i \in \{2, \dots, n - 1\}$  tel que :  $\alpha_i = \beta_i$ , alors on a :  $\overline{a_{i-1}a_{i+1}} = \overline{b_{i-1}b_{i+1}}$  (car deux triangles  $a_{i-1}a_i a_{i+1}$  et  $b_{i-1}b_i b_{i+1}$  sont congruents). En considérant deux  $(n - 1)$ -gones  $\overline{a_1 a_2 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_n}$  ( $A$  supprime  $a_i$ ) et  $\overline{b_1 b_2 \dots b_{i-1} b_{i+1} \dots b_n}$  ( $B$  supprime  $b_i$ ), on obtient :  $\overline{a_1 a_n} \leq \overline{b_1 b_n}$  par récurrence.

- Si  $\alpha_i < \beta_i$  pour  $2 \leq i \leq n - 1$ , on va construire un nouveau polygone  $A'$  en gardant  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  de  $A$  et remplaçant  $a_n$  de  $A$  par  $a'_n$  tel que  $\overline{a_{n-1} a_n} = \overline{a'_{n-1} a_n}$ , et  $\alpha'_{n-1}$  est le plus grand angle qui est inférieur ou égal à  $\beta_{i-1}$  possible tout en laissant  $A'$  convexe. En utilisant le cas  $n = 3$ , on a :  $\overline{a_1 a_n} < \overline{a_1 a'_n}$ .

Si on peut choisir  $\alpha'_{n-1} = \beta_{n-1}$  en laissant  $A'$  convexe, d'après l'hypothèse de récurrence, on obtient :  $\overline{a_1 a'_n} < \overline{b_1 b_n}$ . Donc,  $\overline{a_1 a_n} < \overline{b_1 b_n}$ .

Sinon, on peut retrouver dans la situation où  $a_1, a_2, a'_n$  sont colinéaires et tel que :  $\overline{a_1 a'_n} + \overline{a_1 a_2} = \overline{a_2 a'_n}$ . En comparant  $B$  (sauf  $b_1$ ) et  $A'$  (sauf  $a_1$ ), on trouve :  $\overline{b_2 b_n} > \overline{a_2 a'_n}$ . Alors,

$$\overline{b_1 b_n} \geq \overline{b_2 b_n} - \overline{b_1 b_2} \geq \overline{a_2 a'_n} - \overline{a_1 a_2} \geq \overline{a_1 a'_n} > \overline{a_1 a_n}.$$

□

Revenons maintenant à la démonstration du théorème de Cauchy :

*Démonstration du théorème de rigidité.* Soient deux polyèdres convexes  $P$  et  $P'$  dont les faces sont congruentes. On va colorier les arêtes de  $P$  comme suit :

- Une arête est noire (ou positive) si l'angle intérieur des deux facettes adjacentes est plus grand dans  $P'$  que dans  $P$  ;

- Elle est blanche (ou négative) si l'angle correspondant est plus petit dans  $P'$  que dans  $P$ .

Maintenant, en projetant  $P$  sur la sphère unité par la projection radiale, qui transforme chaque sommet  $q$  de  $P$  en  $\frac{q}{\|q\|}$  (on suppose que 0 est à l'intérieur de  $P$ ), on obtient bien un graphe plan à deux couleurs avec ces arêtes noires et blanches.

Supposons que  $P$  et  $P'$  ont les angles entre les facettes correspondantes différents, alors le graphe est non-vide. D'après le lemme 2.5, il existe un sommet  $p$  adjacent à une arête coloriée tel qu'il y ait au plus deux changements entre arêtes noires et blanches (à l'ordre cyclique). On va maintenant s'intéresser au voisinage de  $p$  dans  $P$  et celui correspondant  $p'$  dans  $P'$ . On coupe  $P$  et  $P'$  avec deux sphères  $S_\epsilon$  et  $S'_\epsilon$  de même rayon  $\epsilon$  et de centre  $p$  et  $p'$  respectivement, on obtient alors deux polygones convexes sphériques  $Q$  et  $Q'$  dont les arcs correspondants ont même longueur comme les facettes de  $P$  et  $P'$  sont congruentes et les deux sphères ont même rayon  $\epsilon$ .

On va alors appliquer le lemme du bras de Cauchy pour  $Q$  et  $Q'$ . Marquons d'un + les positions où l'angle de  $Q'$  est supérieur à celui de  $Q$  et par - si l'angle correspondant dans  $Q'$  est plus petit. Par le choix de  $p$ , on voit qu'il existe au moins un + ou -, et qu'il y a au plus deux changements +/- relativement à l'ordre cyclique. On considère 2 cas suivant :

- S'il n'y a qu'un seul type de signes, le lemme du bras implique une contradiction.

- Si les deux signes appartiennent, il y a forcément une *ligne de séparation* qui divise les polygones en 2 côtes positive et négative comme il y a au plus deux changements +/- . On obtient de nouveau une contradiction car la ligne ne peut pas être à plus grande et plus petite dans  $Q'$  que dans  $Q$ .

### 3 Les polyèdres flexibles et le théorème de Connelly

#### 3.1 Les polyèdres flexibles

On va commencer cette partie par la définition plus précise de la flexibilité. Pour cela, on a besoin tout d'abord de la notion d'angle dièdre.

**Définition 3.1 (Angle dièdre).** *L'angle entre deux demi-plans est appelé l'angle **dièdre** de ces deux demi-plans. Dans notre cas, on considérera les faces d'un polyèdre. Quand on parlera d'angle dièdre, on parlera donc de l'angle formé par deux faces de ce polyèdre ayant une arête commune.*

**Définition 3.2 (Flexion).** *Une déformation continue d'un polyèdre  $P$  est dite **flexion** si elle change seulement les angles dièdres de  $P$  (pas forcément tous) en conservant la structure combinatoire du polyèdre.*

**Définition 3.3 (Polyèdre flexible).** *Un polyèdre  $P$  de l'espace Euclidien  $\mathbb{E}$  est flexible s'il existe une application continue*

$$g: [0, 1] \times P \rightarrow E$$

*notée  $g_t(x)$ , telle que :*

- 1) *Pour tout  $t$  de  $[0, 1]$ ,  $P_t := g_t(P)$  est un polyèdre.*
- 2) *L'application  $g_t: P \rightarrow P_t$  est bijective.*
- 3) *L'application  $g_0: P \rightarrow P_0$  est une isométrie.*
- 4) *L'application  $g_1: P \rightarrow P_1$  n'est pas une isométrie.*

*La restriction  $f_t$  de  $g_t$  à la frontière  $\partial P$  de  $P$  est telle que*

- 5)  *$f_t: \partial P \rightarrow \partial P_t$  est bijective.*

*6) Pour toute face  $F$  du polyèdre  $P$ ,  $f_t(F)$  est une face de  $P_t$  et la restriction de  $f_t$  à la face  $F$  est une isométrie de  $F$  sur  $f_t(F)$ .*

*En d'autres termes, un polyèdre est flexible s'il y a une flexion non-triviale (différent de la fonction constante).*

#### 3.2 Le théorème de Connelly

Le théorème précédent de Cauchy pose évidemment la question sur l'existence de polyèdres flexibles. Cette question existait depuis si longtemps qu'il avait été conjecturé qu'aucune surface triangulée, convexe ou non, ne pouvait admettre un tel mouvement. Ce fut donc une surprise lorsqu'en 1977, 164 ans après le théorème célèbre de Cauchy, que Robert Connelly a finalement construit des sphères triangulées plongées dans  $\mathbb{R}^3$  (sans auto-intersections) qui sont flexibles.

**Théorème 3.4. (Connelly, 1977)** *Il existe des polyèdres (non-convexes) flexibles.*

L'idée de ce théorème vient à l'origine des octaèdres articulés de Bricard (1893) présentés dans [5] qui sont en fait des polyèdres flexibles mais qui ne sont pas plongés dans l'espace comme leurs faces s'interpénètrent. Bricard a montré qu'il y a trois types d'octaèdres articulés à faces invariables, dont deux d'entre eux sont utilisés par Connelly lors de sa construction de polyèdres flexibles plongés. Nous allons présenter brièvement les idées de la construction de Connelly dans [4] sans entrer trop dans les détails.

*Idée de preuve.* La construction des polyèdres de Connelly peut généralement être divisée en 2 étapes :

*Étape 1.* La première étape consiste en trouver un sphère flexible immergée qui ne possède que 2 points singulières dans son image. A partir d'un octaèdre de type I de Bricard (figure 2, on considère ici le moment où les points sont tous dans le même plan  $\pi$ ) Connelly a construit un sphère triangulées immergée en transformant les faces triangulaires en tétraèdres dont la base est en effet ces faces triangulaires (figure 2). Notons que les tétraèdres sont placés dans les deux côtés opposés du plane  $\pi$ . Les points singulières du sphère sont donc les intersections de segments  $AF, BF$  avec  $DE, CE$  respectivement que l'on marque en rouge. Comme l'octaèdre est bien flexible, le sphère l'est aussi.

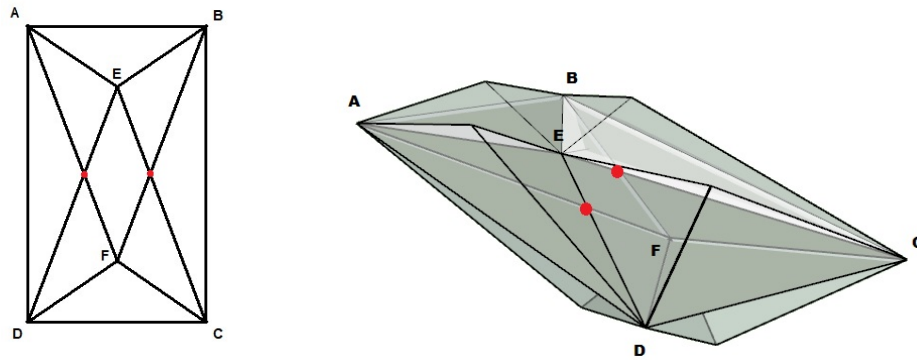


FIGURE 2 – L'octaèdre flexible de Bricard (gauche) et le sphère flexible immergée de Connelly associée qui ne possède que 2 points singulières (en rouges).

On voit que dans le voisinage d'un point singulière, il est le point commun de deux v-surfaces (union de 2 demi-plans) comme dans la figure 3.

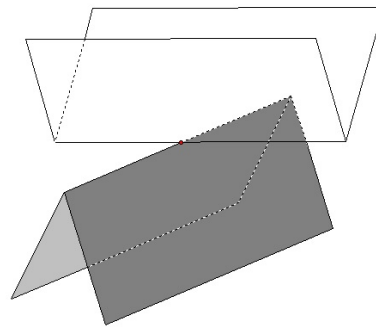


FIGURE 3 – Voisinage d'un point singulière comme le point commun de 2 v-surfaces.

*Étape 2.* Dans l'étape d'après, Connelly essaie de se débarrasser de 2 points singuliers en créant un pli dans le voisinage de ces points là. A partir d'un autre octaèdre de type II de Bricard, Connelly a construit une surface polyédrique flexible plongée dans l'espace comme dans la figure 4.

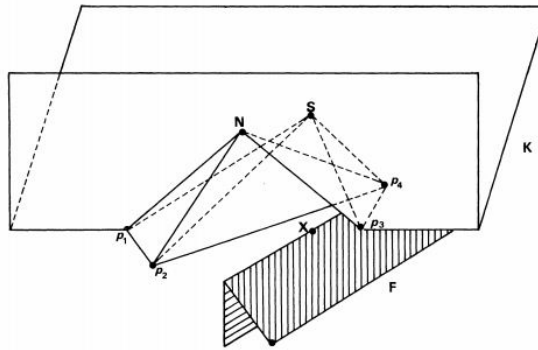


FIGURE 4 – Une surface polyédrique flexible plongée créée au voisinage du point  $x$ .

Puis, il applique ces plis aux deux points singulières dans le sphère à première étape et obtient finalement un polyèdre flexible plongé dans l'espace.  $\square$

### 3.3 Le flexaèdre plongé de Klaus Steffen

Peu de temps après que Connelly a trouvé des polyèdres flexibles plongés, d'autres modèles ont été apparus, dont le plus simple connu à ce jour peut appartenir à Klaus Steffen. Ce polyèdre possède de 9 sommets alors qu'il a indiqué dans [1] qu'un polyèdre ayant au plus 7 sommets est rigide. La recherche d'un polyèdre à 8 faces reste toujours une question ouverte pour les mathématiciens. On représente ci-dessous le patron du flexaèdre de Klaus Steffen ainsi que sa réalisation géométrique (figure 5).

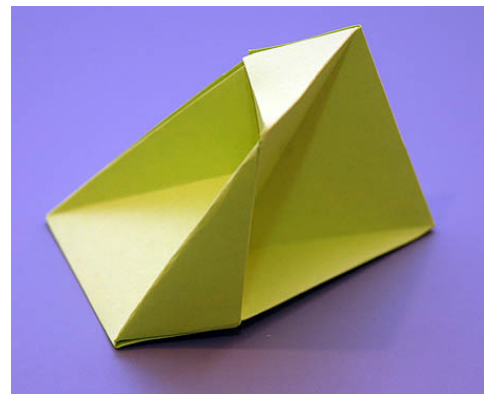
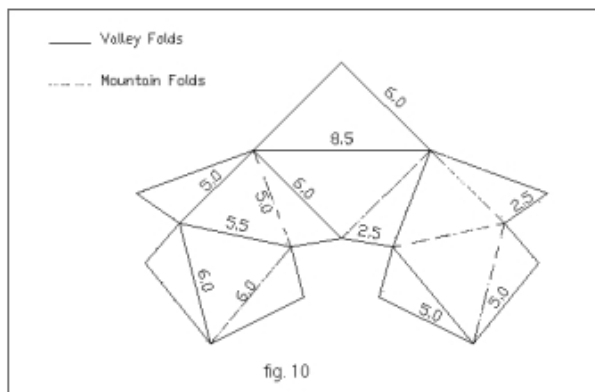


FIGURE 5 – Le flexaèdre plongé de Klaus Steffen.

## 4 La conjecture du soufflet

Dans son article, Connelly a remarqué que le volume de ses polyèdres reste constants pendant qu'ils fléchissent. Il a posé alors une telle question sur tout polyèdre flexible qui est connue comme la conjecture du soufflet.

**Théorème 4.1 (Conjecture du soufflet).** *Soit  $P$  un polyèdre flexible dans  $\mathbb{R}^3$ . Lors d'une flexion de  $P$ , son volume ne change pas.*

Cette conjecture a été démontrée en 1997 par R. Connelly et ses collaborateurs R. Sabitov et I. Walz. Leur démonstration s'appuie sur les propriétés algébriques du volume d'un polyèdre que l'on abordera dans les parties suivantes.

## 4.1 Le théorème de Sabitov

La conjecture du soufflet peut être expliqué par le résultat plus fondamental suivant qui voit le volume des polyèdres comme une racine d'un polynôme à coefficients dans un corps de nombres. On commence tout d'abord par l'introduction d'une formule qui porte parfois le nom du mathématicien grec Héron qui exprime l'aire d'un triangle en fonction des longueurs de ses cotés.

**Théorème 4.2 (Formule de Héron).** *Soit  $T$  un triangle euclidien, et soient  $a$ ;  $b$  et  $c$  les longueurs de ses côtés. Soit  $p = (a + b + c)/2$  le demi-périmètre de  $T$ , alors son aire  $A$  vérifie l'équation :*

$$A^2 - p(p - a)(p - b)(p - c) = 0.$$

La formule précédente implique que, en développant  $p(p - a)(p - b)(p - c)$ , l'aire du triangle est racine d'une équation polynomiale dont les coefficients s'expriment en fonction des carrés des longueurs des côtés du triangle. Le théorème de Sabitov ci dessous peut donc être vu comme une extension de ce résultat qui assure que le volume de chaque polyèdre de  $\mathbb{R}^3$  est racine d'une équation polynomiale dont les coefficients dépendent seulement (de manière polynomiale) des longueurs de ses arêtes.

**Théorème 4.3. (Sabitov, 1997)** *Soit  $[P]$  l'ensemble des polyèdres dans  $\mathbb{R}^3$ , à faces triangulaires, avec la même structure combinatoire  $K$  et avec des arêtes correspondantes de mêmes longueurs  $(l_1, \dots, l_e)$  où  $e$  correspond au nombre d'arêtes. Alors il existe un polynôme unitaire :*

$$Q(l, V) = V^{2N} + a_1(l)V^{2N-2} + \dots + a_{N-1}(l)V^2 + a_N(l),$$

*tel que le volume généralisé de tout polyèdre de  $[P]$  est racine de ce polynôme.*

*Les coefficients  $a_i(l)$ ,  $1 \leq i \leq N$ , de ce dernier sont eux-mêmes des polynômes en les carrés des longueurs des arêtes du polyèdre dont les coefficients numériques ne dépendent que de la structure du polyèdre .*

*Remarque.* On remarque que ce théorème implique directement le théorème 4.1. En effet, lors d'une flexion de  $P$ , son volume  $V$  change de manière continue. Par conséquent, s'il n'est pas constant, il peut prendre un nombre infini de valeurs ce qui contredit le théorème précédent car un polynôme ne peut avoir qu'un nombre fini de racines.

## 4.2 Une propriété algébrique du volume

On commence d'abord par la définition d'un entier sur un anneau dans un corps.

**Définition 4.4 (Élément entier).** *Soit  $L$  un corps et  $R \subset L$  est un sous anneau, un élément  $x \in L$  est dit **entier** sur  $R$  s'il existe un polynôme unitaire à coefficients dans  $R$  dont  $x$  est racine.*

Grâce à cette définition et à un changement de variables, on remarque que le théorème 4.3 est équivalent au théorème ci-dessous.



**Théorème 4.5. (Connelly, Sabitov, Walz, 1997)** Soit  $P$  un polyèdre dans  $\mathbb{R}^3$  dont la structure combinatoire et les coordonnées sont données. Alors  $12\text{vol}(P)$  est **entier** sur l'anneau engendré par les carrés des longueurs des arêtes de  $P$ .

*Remarque.* Ici  $\text{vol}(P)$  désigne le volume de  $P$ .

Il existe maintenant plusieurs preuves de la conjecture du soufflet. A travers des théorèmes 4.3 et 4.5, nous nous contenterons ici d'indiquer une preuve du théorème 4.5 due à Connelly, Sabitov et Walz, qui a l'avantage d'être conceptuellement simple et de nécessiter peu de calculs. Par contre, cette preuve ne permet pas de donner la forme exacte du polynôme dont le volume est racine. Pour une telle preuve, nous vous invitons à consulter [2].

Les étapes de la preuve suivante sont beaucoup inspirées par [6].

### 4.3 La démonstration

Le principe de la preuve est de montrer, par un argument récursif sur la « complexité » des polyèdres, que, pour chaque polyèdre (combinatoire)  $P$ , chaque place sur  $R$  qui est finie sur le corps engendré par les carrés des longueurs des arêtes de  $P$  est aussi finie sur  $12\text{vol}(P)$ .

#### 4.3.1 Préliminaires algébriques

On utilise la notion usuelle suivante de place sur un corps

**Définition 4.6 (Place sur un corps).** Soient  $L$  et  $F$  des corps, une place sur  $L$  à valeurs dans  $F$  est une application  $\phi: L \rightarrow F \cup \{\infty\}$  telle que, pour tous  $x, y \in L$  :

- $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$
- $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$
- $\phi(1) = 1$

*Remarque.* Notons que la définition généralisée de  $\infty$  implique que, pour  $a \in F$ ,  $a \pm \infty = \infty$ ,  $a/\infty = 0$ ,  $a \cdot \infty = \infty$  si  $a \neq 0$  et  $1/0 = \infty$ . Les expressions  $\infty/\infty$ ,  $0 \cdot \infty$  et  $\infty \pm \infty$  ne sont pas définies. On note aussi que les conditions de la définition précédente ne s'appliquent que lorsque les termes correspondants sont définis.

**Définition 4.7 (Place finie).** Une place  $\phi$  est dite finie en  $x \in L$  si  $\phi(x) \neq \infty$ .

On donne maintenant un lemme classique dans [7] qui nous permet de donner une condition nécessaire et suffisante pour que un élément soit entier sur un anneau :

**Lemme 4.8** (cf. [7], p. 12). Soit  $L$  un corps contenant un anneau  $R$ . Un élément  $x \in L$  est **entier** sur  $R$  si et seulement si toute place sur  $L$  qui est finie sur  $R$  est finie en  $x$ .

On en déduit immédiatement le résultat important suivant :

**Corollaire 4.9.** Si  $x, y \in L$  sont des éléments entiers sur  $\mathbb{R}$ , alors  $x + y$  et  $x - y$  sont entiers sur  $L$ .

### 4.3.2 Le déterminant de Cayley-Menger

On s'intéresse dans cette partie la représentation du volume d'un polyèdre à partir d'un déterminant d'une matrice dont les éléments sont carrés des longueurs des arêtes.

**Définition 4.10 (Déterminant de Cayley-Menger).** Soient  $p_0, p_1, \dots, p_n$  des points de  $\mathbb{R}^N$  et pour  $1 \leq i, j \leq n$ , soit  $d_{ij} := \|p_i - p_j\|$ . Le déterminant de Cayley-Menger des  $p_i$  est défini par :

$$CM(p_0, p_1, \dots, p_n) := \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & d_{01}^2 & d_{02}^2 & \dots & d_{0n}^2 \\ 1 & d_{01}^2 & 0 & d_{12}^2 & \dots & d_{1n}^2 \\ 1 & d_{02}^2 & d_{12}^2 & 0 & \dots & d_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & d_{0n}^2 & d_{1n}^2 & d_{2n}^2 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Le lemme suivant montre que, à un coefficient près, ce déterminant donne le carré du volume du simplexe de dimension  $n$  dont les sommets sont les  $p_i$ .

**Lemme 4.11.** Soit  $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et soient  $p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^N$ . Alors :

$$CM(p_0, p_1, \dots, p_n) = (-1)^{n+1} 2^n (n!)^2 \text{vol}_n^2(\Sigma(p_0, p_1, \dots, p_n))$$

où  $\Sigma(p_0, p_1, \dots, p_n)$  est le simplexe dont les sommets sont les  $p_i$ , et  $\text{vol}_n$  est le volume orienté  $n$ -dimensionnel.

La démonstration complète de ce lemme est donnée dans [2], on donne ici l'idée générale de la preuve.

*Idée de preuve.* L'idée de preuve s'appuie sur le déterminant de la matrice de Gram des vecteurs  $\overrightarrow{p_0 p_1}, \overrightarrow{p_0 p_2}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_n}$ , en montrant d'abord que :

$$\det(\text{Gram}(\overrightarrow{p_0 p_1}, \overrightarrow{p_0 p_2}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_n})) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} CM(p_0, p_1, \dots, p_n)$$

Puis, comme la matrice de Gram des vecteurs  $\overrightarrow{p_0 p_1}, \overrightarrow{p_0 p_2}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_n}$  est égal au volume de la parallélotope  $P(p_0, \dots, p_n)$  qui est égal encore à  $n!$  fois le volume du simplexe  $\Sigma(p_0, p_1, \dots, p_n)$ , on en obtient le résultat attendu.  $\square$

Maintenant, en prenant  $n = 3$ , on déduit que le volume d'un tétraèdre de  $\mathbb{R}^3$  est une fonction polynomiale des carrés des longueurs de ses arêtes :

**Corollaire 4.12.** Soient  $p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^3$ . Alors :

$$CM(p_0, p_1, p_2, p_3) = 2(12 \text{vol}(\Sigma(p_0, p_1, p_2, p_3)))^2.$$

**Corollaire 4.13.** Soient  $p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^3$ . Alors  $12 \text{vol}(\Sigma(p_0, p_1, p_2, p_3))$  est entier sur l'anneau engendré par les carrés des longueurs des distances entre les  $p_i$ .

*Démonstration.* On a :

$$CM(p_0, p_1, p_2, p_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{01}^2 & d_{02}^2 & d_{03}^2 \\ 1 & d_{01}^2 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 \\ 1 & d_{02}^2 & d_{12}^2 & 0 & d_{23}^2 \\ 1 & d_{03}^2 & d_{13}^2 & d_{23}^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Après le calcul, on trouve que :

$$CM(p_0, p_1, p_2, p_3) = 2\{d_{23}^2 d_{01}^2 (d_{12}^2 + d_{13}^2 + d_{02}^2 + d_{03}^2 - d_{23}^2 - d_{01}^2) + \\ d_{12}^2 d_{03}^2 (d_{23}^2 + d_{13}^2 + d_{02}^2 + d_{01}^2 - d_{12}^2 - d_{03}^2) + \\ d_{13}^2 d_{02}^2 (d_{23}^2 + d_{12}^2 + d_{01}^2 + d_{03}^2 - d_{13}^2 - d_{02}^2) \\ - d_{23}^2 d_{12}^2 d_{13}^2 - d_{12}^2 d_{02}^2 d_{01}^2 - d_{23}^2 d_{02}^2 d_{03}^2 - d_{13}^2 d_{01}^2 d_{03}^2\}$$

Ainsi, on voit bien que  $(12\text{vol}(\Sigma(p_0, p_1, p_2, p_3)))^2$  est dans l'anneau engendré par les carrés des longueurs entre les  $p_i$ , et le résultat suit de la définition d'élément entier.  $\square$

### 4.3.3 Un lemme sur les pyramides

Le coeur de la preuve est constitué du lemme suivant. Il indique que si une place  $\phi$  est finie en tous les carrés des longueurs des arêtes d'un polyèdre, on peut toujours «extraire» de ce polyèdre un tétraèdre  $\Sigma$  tel que  $\phi$  soit finie sur le volume au carré de  $\Sigma$ .

Dans la suite on identifiera les éléments de  $\{1, 2, \dots, n\}$  avec  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , ce qui revient à identifier de manière cyclique  $n + 1$  à 1.

**Lemme 4.14.** *Soit  $n \geq 4$  et soient  $q, p_1, \dots, p_n$  des points de  $\mathbb{R}^3$ . Pour tous  $i, j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , notons :  $d_i = d(q, p_i)$  et  $d_{i,j} = d(p_i, p_j)$ . Soit  $\phi$  une place sur  $\mathbb{R}$ , supposons que pour tout  $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  on a  $\phi((d_i)^2)$  et  $\phi((d_{i,i+1})^2)$  sont finis. Alors il existe  $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  tel que  $\phi((d_{i,i+2})^2)$  soit fini.*

**Exemple 4.15 (Cas d'une pyramide).** Commençons par une pyramide  $\Pi$  dont la base est un quadrilatère  $(abcd)$ . Soit  $\phi$  une place sur  $\mathbb{R}$ , qui est finie sur l'anneau engendré par les carrés des longueurs des côtés. D'après le lemme 4.14,  $\phi$  est finie aussi sur l'une des diagonales ; c'est-à-dire soit  $[ac]$ , soit  $[bd]$ . Décomposons la pyramide en ajoutant cette arête, son volume apparaît alors comme la somme des volumes de deux simplexes  $S_1$  et  $S_2$ . D'après le corollaire 4.13,  $f$  est finie sur  $12\text{vol}(S_1)$  et sur  $12\text{vol}(S_2)$ , et donc aussi sur  $\text{vol}(\Pi)$  par la corollaire 4.9. Parce que c'est vrai pour toute  $\phi$ , le lemme 4.8 montre que le théorème 4.5 est vrai pour  $\Pi$ .

En fait cet argument s'applique essentiellement à n'importe quelle pyramide  $\Pi$ . Quand la base a plus de quatre côtés, il faut appliquer le lemme 4.14 des pyramides pour montrer que étant donné une place  $\phi$ , on peut retirer un simplexe à  $\Pi$  en faisant apparaître une nouvelle arête  $a$  telle que  $\phi$  soit finie sur le carré de la longueur de  $a$ . Un argument de récurrence sur le nombre de côtés de la base montre ensuite que  $\phi$  est finie sur  $12\text{vol}(\Pi)$ , et le lemme 4.8 permet à nouveau de conclure.

On revient maintenant à la démonstration du lemme 4.14.

*Preuve du lemme 4.14.* On va procéder par l'absurde en supposant l'hypothèse suivante :

$$(H) \quad \forall i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \phi(d_{i,i+2}^2) \text{ est infini.}$$

On va utiliser  $(H)$  pour montrer, par récurrence sur  $i$ , que, pour tout  $3 \leq i \leq n$ , on a :

$$(H_i) \quad \phi(d_{1,i}^2) \text{ et } \phi(d_{1,i-1}^2) \text{ sont infinis.}$$

$(H_n)$  fournira une contradiction puisqu'on a supposé que  $\phi(d_{1,n}^2)$  est fini.

Il est clair que  $(H)$  implique  $(H_3)$ . On suppose donc  $(H_i)$  vrai, pour montrer  $(H_{i+1})$ . Il suffit alors de montrer que  $\phi(d_{1,i+1}^2/(d_{1,i}d_{1-i,1+i})^2)$  est non nul. D'après  $(H)$ , il suit que  $\phi(d_{1,i+1}^2/d_{1,i}^2)$  est infini, puis, avec  $(H_i)$ , que  $\phi(d_{1,i+1}^2)$  est infini. Pour obtenir ce résultat, on raisonne à nouveau par l'absurde et on suppose que

$$\phi(d_{1,i+1}^2/(d_{1,i}d_{1-i,1+i})^2) = 0.$$

On applique d'abord le corollaire 4.9 aux points  $p_1, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}$  et  $q$ , et on obtient que :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{1,i-1}^2 & d_{1,i}^2 & d_{1,i+1}^2 & d_1^2 \\ 1 & d_{1,i-1}^2 & 0 & d_{i-1,i}^2 & d_{i-1,i+1}^2 & d_{i-1}^2 \\ 1 & d_{1,i}^2 & d_{i-1,i}^2 & 0 & d_{i,i+1}^2 & d_i^2 \\ 1 & d_{1,i+1}^2 & d_{i-1,i+1}^2 & d_{i,i+1}^2 & 0 & d_{i+1}^2 \\ 1 & d_1^2 & d_{i-1}^2 & d_i^2 & d_{i+1}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On divise la deuxième ligne et la deuxième colonne par  $d_{1,i}^2$ , et la cinquième ligne et la cinquième colonne par  $d_{i-1,i+1}^2$ . On obtient ainsi que :

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{d_{1,i}^2} & 1 & 1 & \frac{1}{d_{i-1,i+1}^2} & 1 \\ \frac{1}{d_{1,i}^2} & 0 & \frac{d_{1,i-1}^2}{d_{1,i}^2} & 1 & \frac{d_{1,i+1}^2}{(d_{1,i}d_{i-1,i+1})^2} & \frac{d_1^2}{d_{1,i}^2} \\ 1 & \frac{d_{1,i-1}^2}{d_{1,i}^2} & 0 & d_{i-1,i}^2 & 1 & d_{i-1}^2 \\ 1 & 1 & d_{i-1,i}^2 & 0 & \frac{d_{i,i+1}^2}{d_{i-1,i+1}^2} & d_i^2 \\ \frac{1}{d_{i-1,i+1}^2} & \frac{d_{1,i+1}^2}{(d_{1,i}d_{i-1,i+1})^2} & 1 & \frac{d_{i,i+1}^2}{d_{i-1,i+1}^2} & 0 & \frac{d_{i+1}^2}{d_{i-1,i+1}^2} \\ 1 & \frac{d_1^2}{d_{1,i}^2} & d_{i-1}^2 & d_i^2 & \frac{d_{i+1}^2}{d_{i-1,i+1}^2} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On compose alors cette égalité par  $\phi$ . D'après  $(H_i)$ ,  $\phi(d_{1,i-1}^2/d_{1,i}^2) = \phi(1/d_{1,i}^2) = 0$  et  $(H)$  indique que  $\phi(1/d_{i-1,i+1}^2) = 0$ . Ainsi :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \phi(d_{i-1,i}^2) & \mathbf{1} & \phi(d_{i-1}^2) \\ 1 & \mathbf{1} & \phi(d_{i-1,i}^2) & 0 & 0 & \phi(d_i^2) \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \phi(d_{i-1}^2) & \phi(d_i^2) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \phi(0) = 0.$$

Tous les éléments de ce déterminant sont finis. Pour le développer, on voit que les deuxième ligne et deuxième colonne, ainsi que les cinquièmes ligne et colonne, ne contiennent qu'un seul élément non nul (en gras). Ainsi le déterminant est égal à

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

d'où la contradiction recherchée. □

#### 4.3.4 Découpages d'un polyèdre

Soit  $P$  un polyèdre dans  $\mathbb{R}^3$ , et soit  $\phi$  une place sur  $\mathbb{R}$ , qui prend des valeurs finies aux carrés des longueurs de  $P$ . Soit  $q$  un sommet de  $P$  par lequel ne passe aucun chemin fermé composé de

trois arêtes de  $P$  qui ne bordent pas de face (figure 6). Soient  $p_1, p_2, \dots, p_n$  les sommets adjacents à  $q$ . D'après le lemme 4.14, il existe alors  $i_0 \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  tel que  $\phi(d(p_{i_0-1}, p_{i_0+1})^2)$  soit fini.

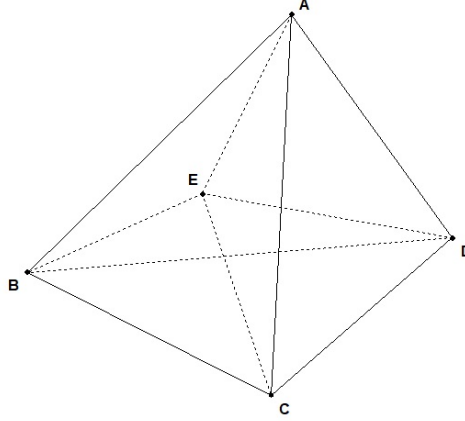


FIGURE 6 – Chaque 3-cycle qui passe par  $A$  forme forcément une face, alors que d'autres sommets sont compris dans un 3-cycle à l'intérieur de face  $(BCDE)$ .

On appelle  $P'$  le polyèdre obtenu en « enlevant » à  $P$  le simplexe de sommets  $q, p_{i_0}$  et  $p_{i_0+1}$  : on supprime le sommet  $q$  et les arêtes et faces qui lui sont adjacentes, et on ajoute un triangle dont les sommets sont  $p_{i_0-1}, p_{i_0}, p_{i_0+1}$ .

On obtient ainsi en utilisant le corollaire 4.13 l'énoncé suivant :

**Corollaire 4.16.** *Si  $12\phi(\text{vol}(P'))$  est fini, alors  $12\phi(\text{vol}(P))$  est fini.*

*Remarque.* Il faut noter pour la suite que, quand on passe de  $P$  à  $P'$ , la valence du sommet  $q$  diminue d'une unité.

*Démonstration.* Il est clair que  $\phi$  prend aussi des valeurs finies aux carrés des autres longueurs du simplexe  $\Sigma$  de sommets  $q, p_{i_0-1}, p_{i_0}$  et  $p_{i_0+1}$ . Donc, d'après le corollaire 4.13,  $\phi$  prend une valeur finie en  $12\text{vol}(\Sigma)$ . Comme  $\phi(12\text{vol}(P'))$  est aussi fini, on déduit du corollaire 4.9 que  $\phi(12\text{vol}(P))$  est fini.  $\square$

#### 4.3.5 Argument de récurrence

Grâce aux résultats obtenus précédemment et à la définition de la « complexité » d'un polyèdre que l'on donnera tout de suite, on peut alors construire une suite de polyèdres dont la complexité diminue et appliquer ces résultats au polyèdre de base.

**Définition 4.17 (Relation d'ordre de la complexité des polyèdres).** *On associe à chaque polyèdre  $P$ , non nécessairement connexe, le quadruplet  $(g, n, c, v)$ , où  $g$  est la somme des genres des composantes connexes de  $P$ ,  $c$  le nombre de ses composantes connexes,  $n$  le nombre de ses sommets, et  $v$  la valence minimale de ses sommets. Étant donné deux polyèdres  $P$  et  $P_0$ , de quadruplets associés  $(g, c, n, v)$  et  $(g', c', n', v')$  respectivement, on dira que  $P$  est **moins complexe** que  $P'$  si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

- $g < g'$  ;
- $g = g'$ , et  $c > c'$ .
- $g = g'$ ,  $c = c'$ , et  $n < n'$ .
- $g = g'$ ,  $c = c'$ ,  $n = n'$  et  $v < v'$

Soit maintenant  $P$  un polyèdre, on va construire une suite de polyèdres  $P_0 = P, P_1, \dots, P_N$ , avec  $N \in \mathbb{Z}$ , non nécessairement connexes, tel que :

1.  $P_0 = P$
2.  $P_{i+1}$  est contruite à partir de  $P_i$  en appliquant tant que c'est possible l'une des opérations suivantes :
  - S'il existe sur  $P_i$  un chemin fermé composé de trois arêtes, et qui ne borde pas de face, on coupe  $P_i$  suivant le triangle dont le bord est ce chemin. On obtient ainsi un polyèdre  $P_{i+1}$ , qui peut avoir soit un genre total inférieur à celui de  $P_i$ , soit une composante connexe de plus que  $P_i$ .
  - Sinon on choisit un sommet  $q$  de  $P_i$  de valence minimale, et on lui applique le corollaire 4.16 ; on appelle  $P_{i+1}$  le polyèdre  $P'$  obtenu.

Il est facile de vérifier que, dans les deux cas,  $P_{i+1}$  est moins complexe que  $P_i$  :

- Dans le premier cas,  $P_{i+1}$  a soit un genre total inférieur, soit un nombre de composantes connexes supérieur à ceux de  $P_i$  ;
- Dans le deuxième cas, la valence minimale des sommets de  $P_{i+1}$  est inférieure d'une unité à celle des sommets de  $P_i$ .

Finalement, on vérifie que  $P_N$  est nécessairement une réunion disjointe de simplexes, sinon on pourrait toujours trouver un polyèdre  $P_{N+1}$  moins complexe que  $P_N$  par l'une des opérations décrites ci-dessus.

On a enfin obtenu tous les éléments nécessaires pour la démonstration du théorème 4.5.

*Preuve du théorème 4.5.* Soit  $P$  un polyèdre dans  $\mathbb{R}^3$ , et soit  $\phi$  une place qui est finie sur l'ensemble des carrés des longueurs des arêtes de  $P$ . Soit  $P_0 = P, P_1, \dots, P_N$  la suite de polyèdres définie plus haut (qui dépend de  $\phi$ ). Par construction,  $P_N$  est une réunion disjointe de simplexes, alors  $\phi$  est finie sur les carrés des longueurs des ses arêtes. Ainsi  $\phi(12\text{vol}(P_N))$  est fini d'après le corollaire 4.13.

La construction de  $P_i$  permet ensuite de montrer par récurrence inverse sur  $i$ , que  $\phi(12\text{vol}(P_i))$  est fini pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, N\}$ , et ceci en particulière vrai pour  $P$ .

Le théorème suit donc par un application du lemme 4.8. □

## 5 Conclusion

On a vu que ce problème s'énonce très simplement : lors de la déformation d'un flexaèdre, le volume de ce dernier reste constant. De plus, bien que ce résultat soit essentiellement géométrique, sa démonstration repose sur des éléments algébriques. Ceci nous a permis de vraiment comprendre que les mathématiques ne peuvent pas être compartimentées ; il n'est pas possible de faire uniquement de la géométrie. Quant à l'application dans la vie quotidienne, on peut se demander si dans un avenir lointain ce résultat sera utilisé lors de la construction de grandes structures.

## Références

- [1] Thierry Lambre. *Les polyèdres flexibles et la conjecture du soufflet*, <https://www.apmep.fr/IMG/pdf/APM1.pdf>.
- [2] Charlotte Debargue, Viatcheslav Kharlamov. *Volume des polyèdres, conjecture du soufflet*, <http://irma.math.unistra.fr/fock/Memoires-2014/Debargue.pdf>.
- [3] Martin Aigner, Günter M. Ziegler. *Raisonnements divins*, Springer.
- [4] Robert Connelly. *A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra*, Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 47 (1977), p. 333-338.
- [5] R. Bricard, *Memoire sur la theorie de Poctaedre articule*, J. Math. Pures Appl. (5), 3 (1897), 113-148.
- [6] Jean-Marc Schlenker, *La conjecture des soufflets*, Séminaire Bourbaki : volume 2002/2003, exposés 909-923, Astérisque, no. 294 (2004), Exposé no. 912, p. 77-96.
- [7] S. Lang, *Introduction to Algebraic Geometry*, Addison-Wesley, Massachusetts, 1972.
- [8] <https://nptel.ac.in/courses/111104026/lecture39.pdf>