# Polyèdres flexibles et théorème du soufflet

Vu Thi Hai Yen Hassina Krim
Encadrant : Stéphane Sabourau

**Université Paris-Est Créteil**

5 mars 2019

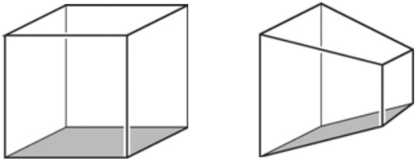
# Table des matières

# Le théorème de rigidité de Cauchy

# Théorème de rigidité de Cauchy

**Définition (Equivalence combinatoire)**

Deux polyèdres $P$ et $P'$ sont **combinatoirement équivalents** s'il existe une bijection qui envoie les faces de $P$ sur les faces de $P'$ et qui conserve la dimension et les inclusions entre les faces.



*2 polyèdres combinatoirement équivalents*

# Théorème de rigidité de Cauchy

**Théorème (Cauchy, 1812)**

*Si deux polyèdres convexes de dimension trois appelés $P$ et $P'$ sont combinatoirement équivalents et si les facettes de $P$ et $P'$ qui se correspondent sont congruentes, alors les angles entre les paires correspondantes de facettes adjacentes sont égaux (et donc $P$ et $P'$ sont congruents).*

**Remarque**

Ce théorème affirme qu'un polyèdre convexe est déterminé *seulement* par sa combinatoire et ses faces.

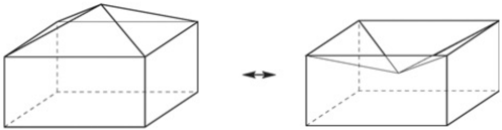
**Remarque**

L'hypothèse sur la convexité est indispensable.

# Théorème de rigidité de Cauchy

**Théorème (Cauchy, 1812)**

*Si deux polyèdres convexes de dimension trois appelés $P$ et $P'$ sont combinatoirement équivalents et si les facettes de $P$ et $P'$ qui se correspondent sont congruentes, alors les angles entre les paires correspondantes de facettes adjacentes sont égaux (et donc $P$ et $P'$ sont congruents).*

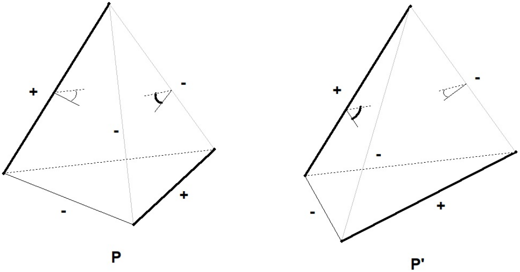


*Deux polyèdres ayant les faces congruentes et la même combinatoire mais ne sont pas congruents*

# Schéma de la preuve

## 1 - Coloriage des arêtes

- Noire (ou positive) : Angle intérieur dans $P'$ est plus grand que dans $P$ ;
- Blanche (ou négative) : Angle intérieur dans $P'$ est plus petit que dans $P$.



# Schéma de la preuve

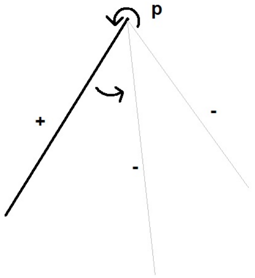
## 2 - Existence d'un sommet $p$ avec au plus deux changements de couleurs

**Lemme**

*Soit $G$ un graphe plan simple non vide an sommets. Si les arêtes de $G$ sont 2-coloriées, alors il existe un sommet de $G$ qui présente au plus deux changements de couleurs relativement a l'ordre cyclique des arêtes défini autour de ce sommet.*

# Schéma de la preuve

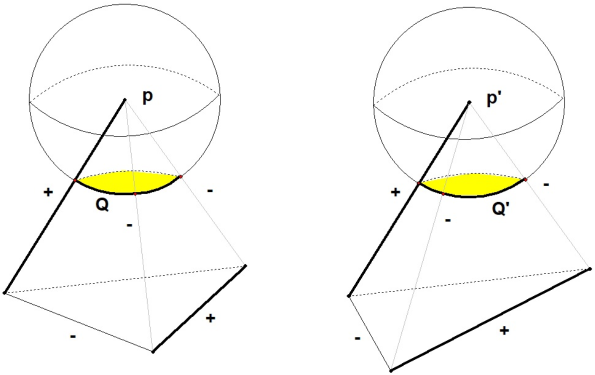
## 2 - Existence d'un sommet $p$ avec au plus deux changements de couleurs




*un point $p$ avec 2 changements de couleurs*

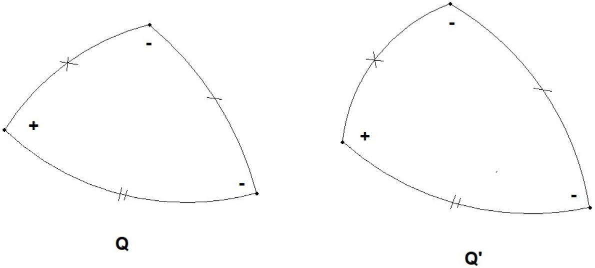
# Schéma de la preuve

## 3 - Découpe des polyèdres par un sphère de rayon $\epsilon$



# Schéma de la preuve

## 3 - Découpe des polyèdres par un sphère de rayon $\epsilon$

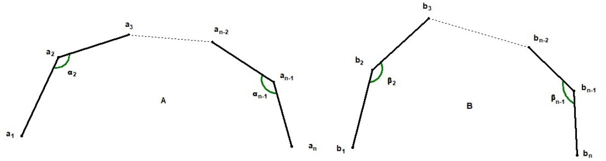



*2 polygones sphériques convexes dont les arêtes correspondants sont égaux obtenus en coupant les deux polyèdres par un sphère de rayon* $\epsilon$

# Schéma de la preuve

## 4 - Application du lemme du Bras de Cauchy

### Lemme (Lemme du Bras de Cauchy)




*A et B 2 n-gones convexes (planaires ou sphériques) tels que :*

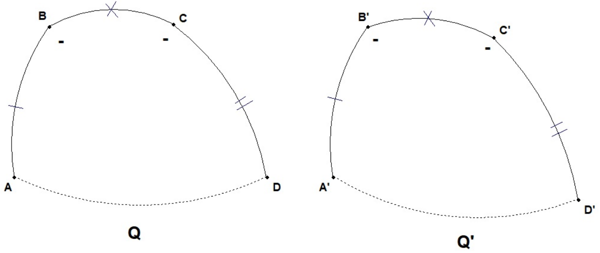
$$\overline{a_i a_{i+1}} = \overline{b_i b_{i+1}},\ 1 \leq i \leq n-1 \text{ et } \alpha_i \leq \beta_i,\ 2 \leq i \leq n-1.$$

*Alors :* $\overline{a_1 a_n} \leq \overline{b_1 b_n}$ *et* $\overline{a_1 a_n} = \overline{b_1 b_n}$ *si et seulement si* $\alpha_i = \beta_i$ *; pour tout* $i$.

# Schéma de la preuve

**4 - Application du lemme du Bras de Cauchy**

**- Cas 1 : Il n'y a qu'un seul type de signes :**

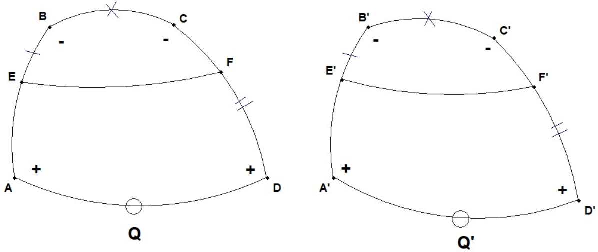



*D'après le lemme,* $A'D' < AD$

# Schéma de la preuve

**4 - Application du lemme du Bras de Cauchy**

**- Cas 2 : Il y a deux types de signes. Il existe une ligne de séparation $EF$ tel que $BE = B'E'$ et $CF = C'F'$.**




*D'après le lemme,* $E'F' < EF < E'F'$

# Les polyèdres flexibles et le théorème de Connelly

# Les polyèdres flexibles

## Définition (Polyèdre flexible)

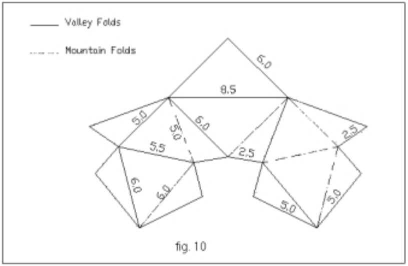
Un polyèdre $P$ de l'espace Euclidien $\mathbb{E}$ est flexible s'il existe une application continue $g\colon [0,1] \times P \to E$, notée $g_t(x)$, telle que :
1) Pour tout t de $[0,1]$, $P_t :\ = g_t(P)$ est un polyèdre.
2) L'application $g_t\colon P \to P_t$ est bijective.
3) L'application $g_0\colon P \to P_0$ est une isométrie.
4) L'application $g_1\colon P \to P_1$ n'est pas une isométrie.
La restriction $f_t$ de $g_t$ à la frontière $\delta P$ de P est telle que
5) $f_t\colon \partial P \to \partial P_t$ est bijective.
6) Pour toute face F du polyèdre P, $f_t(F)$ est une face de $P_t$ et la restriction de $f_t$ à la face F est une isométrie de F sur $f_t(F)$.
En d'autres termes, un polyèdre est flexible s'il y a une *flexion non-triviale* (différent de la fonction constante).

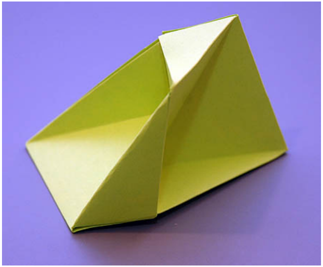
# Le théorème de Connelly

**Théorème (Connelly, 1977)**

*Il existe des polyèdre (non-convexes) flexibles.*

# Le flexaèdre plongé de Klaus Steffen



*Le flexaèdre plongé de Klaus Steffen.*

# La conjecture du soufflet

# Conjecture de soufflet

**Théorème (La conjecture du soufflet)**

*Soit $P$ un polyèdre flexible dans $R^3$. Lors d'une flexion de $P$, son volume ne change pas.*

# Conjecture de soufflet

# Théorème de Sabitov

**Théorème (Formule de Héron)**

*Soit $T$ un triangle euclidien, et soient $a$ ; $b$ et $c$ les longueurs de ses côtés. Soit $p = (a+b+c)/2$ le demi-périmètre de $T$, alors son aire $A$ vérifie l'équation :*

$$A^2 - p(p-a)(p-b)(p-c) = 0.$$

# Théorème de Sabitov

## Théorème (Sabitov, 1997)

*Soit $[P]$ l'ensemble des polyèdres dans $\mathbb{R}^3$ , à faces triangulaires, avec la même structure combinatoire $K$ et avec des arêtes correspondantes de mêmes longueurs $(l_1,\ldots,l_e)$ où $e$ correspond au nombre d'arêtes. Alors il existe un polynôme unitaire :*

$$Q(l,V) = V^{2N} + a_1(l)V^{2N2} + \cdots + a_{N1}(l)V^2 + a_N(l),$$

*tel que le volume généralisé de tout polyèdre de $[P]$ est racine de ce polynôme.*
*Les coefficients $a_i(l), 1 \leq i \leq N$, de ce dernier sont eux-mêmes des polynômes en les carrés des longueurs des arêtes du polyèdre dont les coefficients numériques ne dépendent que de la structure du polyèdre .*

# Théorème de Connelly, Sabitov, Walz, 1997

**Définition (Élément entier)**

Soit $L$ un corps et $R \subset L$ est un sous anneau, un élément $x \in L$ est dit **entier** sur $R$ s'il existe un polynôme unitaire à coefficients dans $R$ dont $x$ est racine.

**Théorème (Connelly, Sabitov, Walz, 1997)**

*Soit $P$ un polyèdre dans $\mathbb{R}^3$ dont la structure combinatoire et les coordonnées sont données. Alors $12\mathrm{vol}(P)$ est* **entier** *sur l'anneau engendré par les carrés des longueurs des arêtes de $P$.*

## Définition (Place sur un corps)

Soient $L$ et $F$ des corps , une place sur $L$ à valeurs dans $F$ est une application $\phi\colon L \to F \cup \{\infty\}$ telle que , pour tous $x, y \in L$ :

- $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$
- $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$
- $\phi(1) = 1$

## Lemme (Lemme d'entier)

*Soit $L$ un corps contenant un anneau $R$. Un élément $x \in L$ est* **entier** *sur $R$ si et seulement si toute place sur $L$ qui est finie sur $R$ est finie en $x$.*

# Le déterminant de Cayley-Menger

## Définition (Déterminant de Cayley-Menger)

Soient $p_0$, $p_1$,..., $p_n$ des points de $\mathbb{R}^N$ et pour $1 \leq i, j \leq n$, soit $d_{ij} : = ||p_i - p_j||$. Le déterminent de Cayley-Manger des $p_i$ est défini par :

$$CM(p_0, p_1, ..., p_n) : = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & d_{01}^2 & d_{02}^2 & \dots & d_{0n}^2 \\ 1 & d_{01}^2 & 0 & d_{12}^2 & \dots & d_{1n}^2 \\ 1 & d_{02}^2 & d_{12}^2 & 0 & \dots & d_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & d_{0n}^2 & d_{1n}^2 & d_{2n}^2 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$CM(p_0, p_1, ..., p_n) = (-1)^{n+1} 2^n (n\,!)^2 \mathrm{vol}_n^2 \Sigma(p_0, p_1, \dots, p_n)$$

### Corollaire

*Soient* $p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^3$. *Alors :*

$$CM(p_0, p_1, ..., p_n) = 2(12\mathrm{vol}(\Sigma(p_0, p_1, p_2, p_3)))^2.$$

### Corollaire

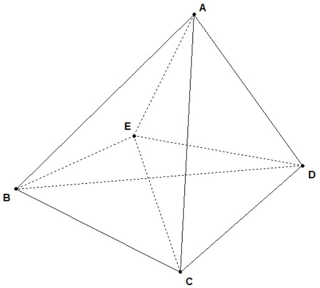
*Soient* $p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^3$. *Alors* $12\mathrm{vol}(\Sigma(p_0, p_1, p_2, p_3))$ *est entier sur l'anneau engendré par les carrés des longueurs des distances entre les* $p_i$.

# Un lemme sur les pyramides

**Lemme**

*Soit $n \geq 4$ et soient $q, p_1, ..., p_n$ des points de $\mathbb{R}^3$. Pour tous $i, j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, notons : $d_i = d(q, p_i)$ et $d_{i,j} = d(p_i, p_j)$. Soit $\phi$ une place sur $\mathbb{R}$, supposons que pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ on a $\phi\left((d_i)^2\right)$ et $\phi\left((d_{i,i+1})^2\right)$ sont finis. Alors il existe $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $\phi\left((d_{i,i+2})^2\right)$ soit fini.*

# Découpage d'un polyèdre




*Chaque 3-cycle qui passe par A forme forcement une face, alors que d'autres sommets sont compris dans un 3-cycle à l'intérieur de face (BCDE).*

# Découpage d'un polyèdre

On appelle $P'$ le polyèdre obtenu en « enlevant » à $P$ le simplexe de sommets $q, p_{i_0}$ et $p_{i_0+1}$ : on supprime le sommet $q$ et les arêtes et faces qui lui sont adjacentes, et on ajoute un triangle dont les sommets sont $p_{i_0-1}, p_{i_0}, p_{i_0+1}$.
On obtient ainsi le en utilisant le corollaire précédent :

**Corollaire**

*Si $12\phi(\mathrm{vol}(P'))$ est fini, alors $12\phi(\mathrm{vol}(P))$ est fini.*

## Argument de récurrence

Grâce au résultats obtenus précédemment et à la définition de la ≪ complexité ≫ d'un polyèdre, on peut alors construire une suite de polyèdres dont la complexité diminue et appliquer ces résultats au polyèdre de base.

# Preuve du théorème de Connelly, Sabitov, Walz, 1997

Soit $P$ un polyèdre dans $\mathbb{R}^3$, et soit $\phi$ une place qui est finie sur l'ensemble des carrés des longueurs des arêtes de $P$. Soit $P_0 = P, P_1, ..., P_N$ la suite de polyèdres définie plus haut.
Par construction, $P_N$ est une réunion disjointe de simplexes, alors $\phi$ est finie sur les carrés des longueurs des ses arêtes. Ainsi $\phi(12\text{vol}(P_N))$ est fini d'après le corollaire précédant.
La construction de $P_i$ permet ensuite de montrer par récurrence inverse sur $i$ , que $\phi 12(\text{vol}(P_i))$ est fini pour tout $i \in \{0, 1, ..., N\}$, et ceci en particulière vrai pour $P$.
Le théorème suit donc par un application du lemme d'entier.

# conclusion

On a vu que ce problème s'énonce très simplement : lors de la déformation d'un flexaèdre, le volume de ce dernier reste constant. De plus, bien que ce résultat soit essentiellement géométrique, sa démonstration repose sur des éléments algébriques. Ceci nous a permis de vraiment comprendre que les mathématiques ne peuvent pas être compartimentées ; il n'est pas possible de faire uniquement de la géométrie. Quant à l'application dans la vie quotidienne, on peut se demander si dans un avenir lointain ce résultat sera utilisé lors de la construction de grandes structures.