利用距离矩阵求绝对中心及绝对重心的讨论 (p = 1)

陈伯成

(清华大学经管学院信息系, 北京 100084)

摘要　给出了一种用最小距离矩阵和最优路径矩阵计算网络给对中心 (p = 1) 的方法, 同 Hakimi 的图解的方法相比, 本方法有计算简便, 直观的优点, 本文也给出了对绝对重心 (p = 1) 的讨论。

关键词　网络选址　厂址选择

Study of Searching an Absolute Center and an Absolute Median by Using Distance Matrix

Chen Bocheng

(School of Economics & Management, Tsinghua University, Beijing 100084)

Abstract　A method is given, in the paper, to search a network's absolute center (p = 1) by using the least distance matrix and its optimum path matrix, comparing with the Hakimi's method, this one is direct perception, simple, easy using. A discussion is also given to search absolute median (p = 1) by using above two matrixes

Keywords　location; network location

1　引言

最小距离矩阵在运筹学领域中用途较广, 许多涉及网络的运筹学问题都可以以该矩阵为平台进行研究。网络选址也已经有许多的讨论, 但因应用的条件不同, 始终是个研究的热点[1,2]。

一般公认是 S. L. Hakimi 开创了网络选址的工作, 他建立了绝对中心及绝对重心的概念; 并给出了关于求绝对中心及绝对重心的部分结果[3,4]。

网络选址通常指假设某地有 n 个需求点, 各需求点以道路相接构成网络, 考虑同时在网络上建立 m 个工厂, 使其生产的产品满足这些需求点的需求, 主要讨论 p-中心、p-重心问题。

对一个网络图, 其数学上的表达形式之一就是距离矩阵, 该矩阵包括了该网络的全部结构和数值的信息, 可以作为对该图计算的基点, 而最小距离矩阵是对距离矩阵的优化结果, 使用最小距离距阵分析网络问题的好处是可以将 p-中心、p-重心、覆盖、有容量的覆盖等这些不同的, 但又是选址的基本问题统一在一个平台上讨论, 为了讨论方便, 给出几个名词的说明:

绝对中心: 在网络上选某点为厂址备选点, 使得各需求点至这些需求点的最大距离最小, 该点就是该网络的绝对中心。

绝对半径: 绝对中心至各最远的顶点的最短距离称为该网络的绝对半径。

绝对重心: 在网络上选某个点为厂址备选点, 使得各需求点至该厂址备选点的距离和为最小, 该点就

◦ 本文于 1995 年 7 月 6 日收到

是该网络的绝对重心。

S. L. Hakimi 给出了利用图解方式求网络的绝对中心的方法[3], 但图解虽直观, 但计算不方便, 本文就利用距离矩阵和最优路径矩阵求网络的绝对中心($p=1$)进行了讨论, 给出一种简单、直观、方便的计算绝对中心($p=1$)的方法, 并利用以上两个矩阵对网络的绝对重心($p=1$)求取进行了讨论。

2 Hakimi 的结果

求绝对中心:

设图 G 中有 n 个顶点, v_i 是其中的一个, 点 s 是另外两个顶点 v_p, v_q 中间联线上的一点, $d(v_p, v_q)$ 为 v_p, v_q 之间的最短距离, 长度为 L, 取 v_p 至 s 点的距离是 x (图 2.1)。

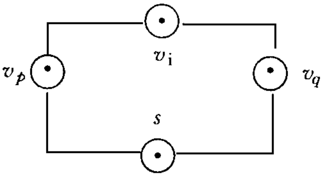

图 2.1 网络图 G

则有
$$\begin{aligned} d(v_i, s) &= \min(d(v_i, v_p) + d(v_p, s), d(v_i, v_q) \\ &\quad + d(v_q, s)) \\ &= \min(f_1(x), f_2(x)) \end{aligned}$$

其中 $f_1(x) = x + d(v_i, v_p)$; $f_2(x) = L - x + d(v_i, v_q)$

将上式采用图解方式, 求出 $f_1(x), f_2(x)$ 中最小一个, 并检验所有其他各顶点至 s 点的距离, 取最大值作为局部半径, 以每个线段为对象, 得到各对应的最大值, 将这些值比较后, 取最小值, 作为绝对半径, 其对应点为绝对中心。图解比较麻烦。

3 最小距离矩阵

对给定的有 n 个顶点的图 G, 可以得到其距离矩阵 A

$$A = \left|\begin{array}{ccccc} 0 & 1(v_1, v_2) & 1(v_1, v_3) & \cdots & 1(v_1, v_n) \\ & 0 & 1(v_2, v_3, & \cdots & 1(v_2, v_n) \\ & & 0 & \cdots & 1(v_3, v_n) \\ & & & \cdots & \\ & \text{与右上角对称} & & & 0 \end{array}\right| \tag{3.1}$$

其中: $1(v_i, v_j)$ 表示当 v_i, v_j 之间有直接连线时 v_i 至 v_j 的距离, 当两点之间没有直接联结时, $1(v_i, v_j)$ 为 ∞, A 矩阵为对称矩阵, 该矩阵包括了图 G 的所有的信息。

由距离矩阵 A, 可以求得最小距离阵 S 和最佳路径阵 P。

$$S = \left|\begin{array}{ccccc} 0 & d(v_1, v_2) & d(v_1, v_3) & \cdots & d(v_1, v_n) \\ & 0 & d(v_2, v_3, & \cdots & d(v_2, v_n) \\ & & 0 & \cdots & d(v_3, v_n) \\ & & & \cdots & \\ & \text{与右上角对称} & & & 0 \end{array}\right| \tag{3.2}$$

其中: $d(v_i, v_j)$ 表示顶点 v_i 至顶点 v_j 的最短距离, 这是我们以后讨论的基点, 该矩阵是对称矩阵, 最小距离矩阵相当于 Hakimi 在其论文中使用的距离矩阵。

$$P = \left|\begin{array}{ccccc} 0 & p(v_1, v_2) & p(v_1, v_3) & \cdots & p(v_1, v_n) \\ p(v_2, v_1) & 0 & p(v_2, v_3) & \cdots & d(v_2, v_n) \\ p(v_3, v_1) & p(v_3, v_2) & 0 & \cdots & d(v_3, v_n) \\ & & & \vdots & \\ p(v_n, v_1) & p(v_n, v_2) & p(v_n, v_3) & \cdots & 0 \end{array}\right| \tag{3.3}$$

其中: $p(v_i, v_j)$ 表示顶点 v_i 至顶点 v_j 的最优路径, 有时两点间会有两条以上的最优路径。

4　用最小距离矩阵求绝对中心问题 ($p = 1$)

取 ($p = 1$), 即讨论在网络上寻找一个绝对中心点的问题。

如果已经给定网络 G, 则可得到距离矩阵 A, 求得最小距离矩阵 S, 以及最优路径矩阵 P。

S 矩阵中的第 i 列 R_i (式 4.1) 中的各个元素表示图 G 中各顶点至顶点 i 的最短距离。对于这个局部, 可以在顶点 v_i 及通向其它各顶点的连线上找到一个点, 使该点至离其最远的顶点的最大距离最小, 这个点称为局部中心, 而这个值则是该局部中心的局部半径。

$$R_i = (\underset{1}{d(v_1, v_i)} \quad \underset{2}{d(v_2, v_i)} \quad \cdots \quad \underset{i}{0} \quad \underset{n}{d(v_n, v_i)})^T \tag{4.1}$$

通常, 向量 R_i 中距离的最大值不是局部半径, v_i 这个顶点也不是局部中心点, 而是仅考虑各个顶点作为厂址备选点的局部中心点和局部半径[3]。真正的局部中心点往往出现在顶点之间的连线上, 显然, 对图 G 的每个顶点找出相应的局部半径, 取其最小者就是图 G 的绝对半径, 其相对应的局部中心就是绝对中心。实际上对每一个顶点作这样的讨论的过程, 就是将图 G 这个一般网络选址讨论转变成为 n 个星型网络上选址的讨论, 其中, v_i 是中心 ($i = 1, \cdots, n$), 各最远点是星形网络的终点。

每个星型网络的路径是由最优路径矩阵 P 的对应向量 P_i (式 4.2) 中的各元素决定的, 这些元素分别表示顶点 v_i ($i = 1, 2, \cdots, n$) 到其它各顶点的最短距离所走的路径, 对最优路径不止一条的情况可以按不同的路径分别进行讨论。

$$P_i = (\underset{1}{p(v_1, v_i)} \quad \underset{2}{p(v_2, v_i)} \quad \cdots \quad \underset{i}{0} \quad \underset{n}{p(v_n, v_i)})^T \tag{4.2}$$

下面是以 v_i 为中心的星型网络的结构图 (图 4.1),

为了表达方便, 下图采用了另外一套表示符号。

v_i 为向量 R_i 中的中心顶点;

v_f 为向量 R_i 中最大的元素, 即离 v_i 最远的点;

v_{ff} 为向量 R_i 中不在 v_i, v_f 最优路径上的最远的点;

v_{fff} 为向量 R_i 中不在 v_i, v_f 或 v_i, v_{ff} 最优路径上的最远点;

v_x 是厂址备选点的位置。

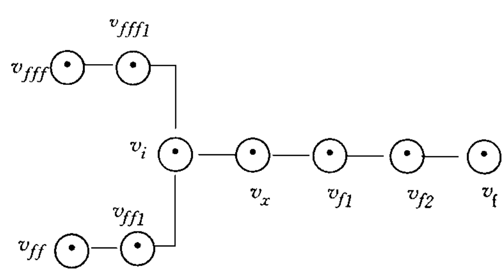

图 4.1　以 v_i 为中心的星型网络

$v_{fj}, v_{ffk}, v_{fffl}$, ($j = 1, 2, \cdots,\ k = 1, 2, \cdots,\ l = 1, 2, \cdots,$) 是 v_i 至各最远点途经的各个顶点。顶点 v_{ff}, v_{fff} 需要参考 最优路径矩阵 P 后得到, 还可以有更多的支线 (每一个最远点), 构成以 v_i 为心的星型网络, 根据图 4.1, 有以下结论;

结论 1: 对顶点 v_i, 局部半径只由 v_f 和 v_{ff} 之间的距离决定, 而与至其他顶点的距离无关, 并且局部半径为:

$$r_i = (d(v_{ff}, v_i) + d(v_i, v_f))/2 \tag{4.3}$$

因为 v_f 是离 v_i 最远点, 并有

$$d(v_i, v_f) \geq d(v_{ff}, v_i) \tag{4 4}$$

$$d(v_{ff}, v_i) \ge d(v_{fff}, v_i) \tag{4 5}$$

实际上, $d(v_i, v_f)$ 就是以 v_i 为中心的半径, 为减小该半径, 备选点必须向 v_f 点移动。但是, 这种移动的所能移动的距离要受到该连线的另一个端点 v_{ff} 的限制, 减小 $d(v_i, v_f)$ 实际上是在增加 $d(v_{ff}, v_i)$。因此, 绝对半径是由 v_f, v_{ff} 这两个点决定, 所以该半径应该是 $d(v_f, v_{ff})$ 的一半, 对于每一列, 可以求出一个局部半径, 绝对半径为其中最小的。

$$r = \min(r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n)$$

该半径对应的局部中心就是绝对中心。

结论 2 当厂址备选点 v_x 由 v_i 向 v_f 移动时, 备选点右面的各点至备选点的距离都在减小, 而左面的各点至备选点的距离都在增加。(备选点至最优路径上的需求点的距离都在减少, 至其他点的距离都在增加)。

由图 4. 1 可以看出: v_x 左边的点至 v_x 的距离为各点至 v_i 的距离加上 $d(v_i, v_x)$;

$$d(v_{ffj}, v_x) = d(v_{ffj}, v_i) + d(v_i, v_x) \tag{4 6}$$

$$d(v_{fffj}, v_x) = d(v_{fffj}, v_i) + d(v_i, v_x) \tag{4 7}$$

其中 $j = 1, 2, \cdots$。

v_x 的右面点至 v_x 的距离为各点至 v_i 的距离减去 $d(v_i, v_x)$;

$$d(v_{fj}, v_x) = d(v_{fj}, v_i) - d(v_i, v_x) \tag{4 8}$$

其中 $j = \ , 1, 2, \cdots$。

$d(v_{fj}, v_x)$ 可能会出现负值, 其物理意义是厂址备选点已移到该点的右侧。此时厂址备选点至各顶点的距离为:

$$\begin{vmatrix} d(v_1, v_x) \\ d(v_2, v_x) \\ \vdots \\ d(v_{n-1}, v_x) \\ d(v_n, v_x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d(v_1, v_i) \\ d(v_2, v_i) \\ \vdots \\ d(v_{n-1}, v_i) \\ d(v_n, v_i) \end{vmatrix} + g(x) d(v_i, v_x) \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \tag{4.9}$$

其中:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{该顶点不在 } v_i, v_f \text{ 最优轨迹上;} \\ -1 & \text{该顶点在 } v_i, v_f \text{ 的最优轨迹上。} \end{cases} \tag{4.10}$$

结论 3 局部中心一定出现在 v_i 至 v_f 的连线上。

由结论 1 可知, 局部半径由 v_f 至 v_{ff} 之间的距离决定。而

$$d(v_i, v_f) \ge d(v_{ff}, v_i)$$

所以 $d(v_i, v_f)$ 的中心点一定在 v_i, v_f 的连线上, 如果:

$$d(v_i, v_f) = d(v_{ff}, v_i)$$

则 v_i 点就是局部中心, 而 $d(v_i, v_f)$ 就是局部半径。

结论 4 网络的绝对中心可以不止一个。

虽然绝对半径只有一个, 但两点之间的最优路径可以不止一条。因局部中心一定在 v_i 至 v_f 连线上, 如果此时 v_i 至 v_f 的最优路径不止一条, 则网络局部中心也多于一个。当这个局部半径为绝对半径时, 绝对中心的个数也多于一个。

分析:

1. 如果在向量 R_i 中有一个以上的数据值相同的最大值时, 则该星形网络的局部心的就是 v_i 点, 局部半径就是这个最大值。

因为在同一条最优路径上, 不会同时出现两个或两个以上的最大值。

2. 如果在对应 v_i 顶点的向量中有一个以上的数值相同的次最大值, 该值可直接用作 v_{ff}。

国为在同一条件最优路径上, 不同会同时出现两个或两个以上的次最大值, 必有一个不在最大值的最优路径上。

作法:

1. 取第 i 列的最大元素 v_f;

2. 取该列的次最大元素 v_{ff};

3. 根据 P 阵判断 v_{ff} 是否在由 v_i 至 v_f 的最佳种径上, 如不在, 执行 4.1, 计算局部半径; 如在, 回 2. 取下一个次最大元素, 顺序执行;

4. 计算局部半径　$r_i = (v_f + v_{ff})/2$;

5. 对每一列按前四步打各自的 $r_i (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$;

6. 计算绝对半径　$r = \min(r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n)$

7. 计算绝对中心的位置;

8. 计算各顶点至绝对中心的位置(式 4.9)。实际上, 使用时只需找出每一列的两个不在同一最优路径上的最大值相加除 2, 可得局部半径。

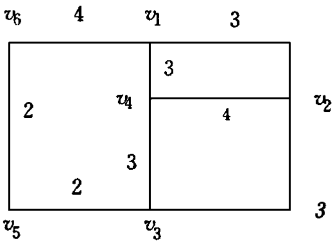

图 4.2　网络及其参数

例　图 4.2[3]

距离阵:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 3 & \infty & 3 & \infty & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & 3 & 0 & 3 & 2 & \infty \\ 3 & 4 & 3 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & 0 & 2 \\ 4 & \infty & \infty & \infty & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

最小距离矩阵:

$$S = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 & 3 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 5 & 7 \\ 6 & 5 & 2 & 5 & 0 & 2 \\ 4 & 7 & 4 & 7 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

最佳路径矩阵:

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 12 & 123(143) & 14 & 165 & 16 \\ 21 & 0 & 23 & 24 & 235 & 216(2356) \\ 321(341) & 32 & 0 & 34 & 35 & 356 \\ 41 & 42 & 43 & 0 & 435 & 416(4356) \\ 561 & 532 & 53 & 534 & 0 & 56 \\ 61 & 612(6532) & 653 & 614(6534) & 65 & 0 \end{vmatrix}$$

由 S 矩阵的各列的元素:

$r_1 = (6+6)/2 = 6$　　(分析 1)

$r_2 = (7+4)/2 = 5.5$　　(取路径 216 时半径 $r_2 = (7+5)/2$, 因此, 取路径 2356)

$r_3 = (6+4)/2 = 5$　　(不在最优路径上的最大值是 4)

$r_4 = (7+4)/2 = 5.5$　　(值 5 在路径 4356 上)

$r_5 = (6+5)/2 = 5.5$　　(分析 2)

$r_6 = (7+7)/2 = 7$　　(分析 1)

绝对半径:　$r = \min(r_1, r_2, r_3, r_4, f_5, f_6) = 5$

绝对中心 v_x 在 v_3 至 v_1 的连线上距离 v_3:　$6 - 5 = 1$ 的位置上

此时: v_x 点至各点的距离为:

$$(6, 3, 0, 3, 2, 4) + (-1, -1, -1, 1, 1, 1) = (5, 2, -1, 4, 3, 5)$$

(取路径 123, 绝对中心在 $v1$, $v2$ 之间的连线上)

$$(6, 3, 0, 3, 2, 4) + (-1, -1, -1, 1, 1, 1) = (5, 4, -1, 2, 3, 5)$$

(取路径 143, 绝对中心在 v_1, v_4) 之间的连线上)

可以看出, 本例有两个绝对中心。

5 求绝对重心

求一个绝对重心问题是讨论求网络上的一点, 使各顶点至该点的距离和为最小。其物理意义是讨论各需求点至厂址备选点的距离和最小。

由前面的讨论可知, 对最小距离矩阵的每一列计算时实际上是讨论在以 v_i 为中心的星型网络中找寻局部重心, 然后从中取最小者为绝对重心(图 5.1)。

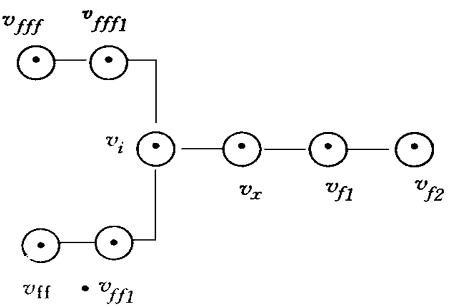

图 5.1

对于向量 R_i

$$R_i = (d(v_1, v_i)\ d(v_2, v_i)\ \cdots\ 0\ d(v_{n-1}, v_i)\ d(v_n v_i))^T \quad (7.1)$$

1 2 i $n-1$ n

各顶点至 v_i 点的距离和为:

$$D_0 = d(v_1, v_i) + d(v_2, v_i) + \cdots + 0 + \cdots + d(v_{n-1}, v_i) + d(v_n, v_i) = \sum_{j=1}^{n} d(v_j, v_i)$$

因为 v_f 是本局部的最远点, 当厂址备选点沿着 v_i, v_f 线左移以减少半径时, v_i 左边的点至 v_x 的距离都在增加, 而 v_i 右边的点至 v_x 点的距离都在减少, 总距离

$$\begin{aligned} D_x &= (d(v_i, v_i) + g(v_1) * x) + (d(v_2, v_i) + g(v_2) * x) \cdots + x + \cdots (d(v_n, v_i) + g(v_n) * x) \\ &= D_0 + (n_1 - n_2 + 1) * x \end{aligned}$$

其中
$$g(v_j) = \begin{cases} 1 & v_j \text{ 为 } v_i \text{ 左边的点} \\ -1 & v_j \text{ 为 } v_i \text{ 右边的点} \quad j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

n_1 为备选点左边的点的数目; n_2 为备选点右边的点的数目; x 为 v_x 离开 v_i 的距离。

分析:

1. 显然要 $D_x < D_0$ 即: 向右移动备选点使原总距离减少, 必须 $n_2 > n_1 + 1$ 即: 备选点右边的顶点数目比左边的顶点数目多两个或两个以上时, 右移才会使总距离和减少。

2. 总距离的变化与每段连线上备选点移动距离 x 有关, 因为此时 $n_1 - n_2 + 1$ 为常数。当 x 增大时 D_x 与 D_0 差别就会增大。但是, x 在每段线上的最大值就是该段的另一个顶点, 因此, 为使 D_x 与 D_0 在某一段中有最大的差值, x 应取该顶点至 v_1 的距离, 也就是备选点处于顶点时 x 有最大值。

3. n_i 是顶点的个数, 为整数。因此总距离的变化量 x 只应整倍数的增加或减少。

根据以上分析, 得到以下结论:

1. 局部重心点只会出现在网络的各顶点上[3]。

x 取现顶点至 v_i 的距离, n_i 是顶点数, 为整数, 即: 局部重心只与各顶点的位置有关, 与 v_x 在连线上的位置无关。因此, 在寻找绝对重心时, 只需要考虑各顶点至 v_i 的距离即可。

2. 网络上至少有一个绝对重心。

由于绝对重心只与各顶点的位置有关, 将最小距离矩阵的各列相加(以各顶点为局部重心), 相比较, 至少能找寻到一个最小值, 其对应的局部重心就是绝对重心。

该结论同 Hakimi 的结构论是相同的[3]。

6　结束语

本文给出了利用最小距离矩阵和最优路径矩阵求网络的($p = 1$)绝对中心方法, 该方法比 Hakimi 的图解的方法直观, 计算简便。本文也利用距离矩阵讨论了文献[3]求绝对重心的结论 ($p = 1$)。

当决策人员在计算机屏幕地图上利用鼠标将本地区的需求点标出, 就相当于建立了距离矩阵, 在此基础上, 可以进行多种选址问题的研究, 一个直观简便的计算绝对中心和绝对重心的方法将会给定性定量选址决策的支持带来方便。

参 考 文 献

1　Brandeau M L, Chiu S S. An overview of Repesentative Problems in Location Research. Management Science, 1989, 35(6).

2　Current J, Min H Schilling D. Multiobjective analysis of facility location decisions. Eur Joural Ops Res, 1990, (49): 295- 307.

3　Hakimi S L. Optimal location of switching centers and the absolute centers and medians of a graph. Ops Res, 1964, (12): 450- 459.

4　Hakimi S L. Optimum distribution of switching centers in a communication netwrk and some related graph theoretic problems. Ops Res, 1965, (13): 642- 475.