Limbaje regulare. Echivalente

- putere de exprimare

  AF: AFN ⇔ AFD

  AF ⇔ (m.regulare ⇔ expr.reg.)

  AF ⇔ gr.regulare

Obs.: vom studia aceste echivalente mai in detaliu pe parcursul semetrului

Gramatica

Cursul anterior

O gramatica este un cvadruplu **G = (N, Σ , P, S)**

- **N** este un alfabet de simboluri ***neterminale***
- Σ este un alfabet de simboluri ***terminale***
- $N \cap \Sigma = \phi$
- $\mathbf{P} \subseteq (\mathbf{N} \cup \Sigma)^* \mathbf{N} (\mathbf{N} \cup \Sigma)^* \times (\mathbf{N} \cup \Sigma)^*$

  P multime finitã (multimea regulilor de productie)
- $\mathbf{S} \in \mathbf{N}$ (simbolul de start - simbolul initial)

Notatie:

$(\alpha , \beta) \in P$ se noteaza: $\alpha \to \beta$

(α se înlocuieste cu β)

Notatii

Cursul anterior

- la nivel abstract (exemple matematice, specificari)
  - Σ: a,b,… litere mici de la inceputul alfabetului
  - N: A,B,.. litere mari de la inceputul alfabetului
  - Σ sau N: X,Y,…litere mari de la sfarsitul alfabetului
  - Σ^* : x,y,… litere mici de la sfarsitul alfabetului
  - $(\Sigma \cup N)^*$: $\alpha,\beta,\ldots$ litere grecesti
- nu se folosesc spatii cand avem nevoie de mai multe caractere pentru a specifica un simbol (terminal sau neterminal)

Cursul anterior

- Gramatica regulara:

  reg. prod. sunt de forma

  - $A \rightarrow aB$
  - $A \rightarrow b$ unde $A,B \in N$ si $a,b \in \Sigma$

  caz special: $\mathbf{S} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}$ poate $\in$. P In acest caz S nu apare în membrul drept al nici unei reguli de productie.

- …

Tipuri de gramatici

Multimi regulare

Fie Σ un alfabet.

Multimile regulare peste Σ se definesc recursiv astfel:

1. Φ este o m. reg. peste Σ
2. {ε}
3. {a} daca: a ∈ Σ
4. RUS daca R,S – multimi regulare peste Σ +
5. RS daca R,S – multimi regulare peste Σ
6. R* daca R – multime regulara peste Σ
7. Orice alta multime regulara se obtine aplicand de un numar finit de ori reg. 1-6

Multimi regulare si expresii regulare

- Expresii regulare
  1. Φ expr. reg. coresp. m.reg. Φ
  2. ε $\{\varepsilon\}$
  3. a daca: $a \in \Sigma$ $\{a\}$
  4. r+s daca r,s – expresii regulare **r | s** RUS
  5. rs daca r,s – expresii regulare RS
  6. r* daca r – expresie regulara R*
  7. **Orice alta expr. reg. se obtine aplicand de un numar finit de ori reg. 1-6**
- Expresii regulare egale:
  – mult. regulare reprezentate de acestea sunt egale

Expresii regulare

- expresiile regulare – secv. obtinute prin concatenarea de simb. din

  $\Sigma \cup \{\Phi, \varepsilon, +, *, (\ ,\ )\}$ **(… prioritate …)**
- multimile regulare asociate expresiilor regulare sunt limbaje regulare

Deci: ***Orice expresie regulara peste Σ descrie un limbaj regular peste Σ***

Proprietati de inchidere ale limbajelor regulare

Teorema:

Daca

L_1, L_2 sunt limbaje regulare peste alfabetul Σ

atunci:

$\mathbf{L_1 \cup L_2, L_1 \cap L_2, L_1L_2, L_1^*}$, **complement**($\mathbf{L_1}$)

sunt limbaje regulare peste alfabetul Σ

Lema de pompare pt. limbaje regulare

- Daca L este un limbaj regular,
- atunci $\exists\, p \in \mathbf{N}^*$ (fix pt. un limbaj dat)

  (oricat de mare)
- astfel incat:

  $\forall\, w \in L$ de lungime cel putin p

  exista o descompunere de forma w=xyz,

  unde $0 < |y| \leq p$

  cu proprietatea ca: $xy^iz \in L, \forall\, i \in \mathbf{N}$

Lema de pompare pt. limbaje regulare

Observatii:

- Lema da o conditie necesara dar nu suficienta
- daca un limbaj satisface conditiile lemei nu inseamna ca este regular
- folosim negatia lemei de pompare pt. a dem. ca un limbaj nu este regular

Lema de pompare pt. limbaje regulare

De ce se intampla asa:

- Daca L – limb. reg.

$\Rightarrow$ exista G – gram. reg. a.i. L(G) = L (def.)

$\Rightarrow$ exista M – AF a.i. L(M) = L (teorema)

- Fie p – nr. de stari ale lui M
- daca |w|>=p si w –acceptat

$\Rightarrow$ $\exists$ un drum in graful asociat lui M a.i. etichetele arcelor sunt simb. din w

$\Rightarrow$ drumul e de lung. p ; adica trece prin p + 1 noduri din graf

$\Rightarrow$ $\exists$ un nod prin care se trece de cel putin 2 ori

$\Rightarrow$ ciclu/bucla – care se poate repeta de oricate ori !!

$\Rightarrow$ se poate repeta sirul etichetelor arcelor din bucla !!

(de 0 sau mai multe ori)

Exemplu:

Fie L - limbajul regular corespunzator expresiei regulare:

aa^*b^*

1) fie w = ab ;

Puteti identifica o descompunere w=xyz a.i. xy^iz in L ?

2) fie w = aa ;

Puteti identifica o descompunere w=xyz a.i. xy^iz in L ?

Analog pt.: $a(ba)^*$

si w = aba

Analog pt.: L={a,b} si w = a

Proprietati de inchidere ale limbajelor regulare

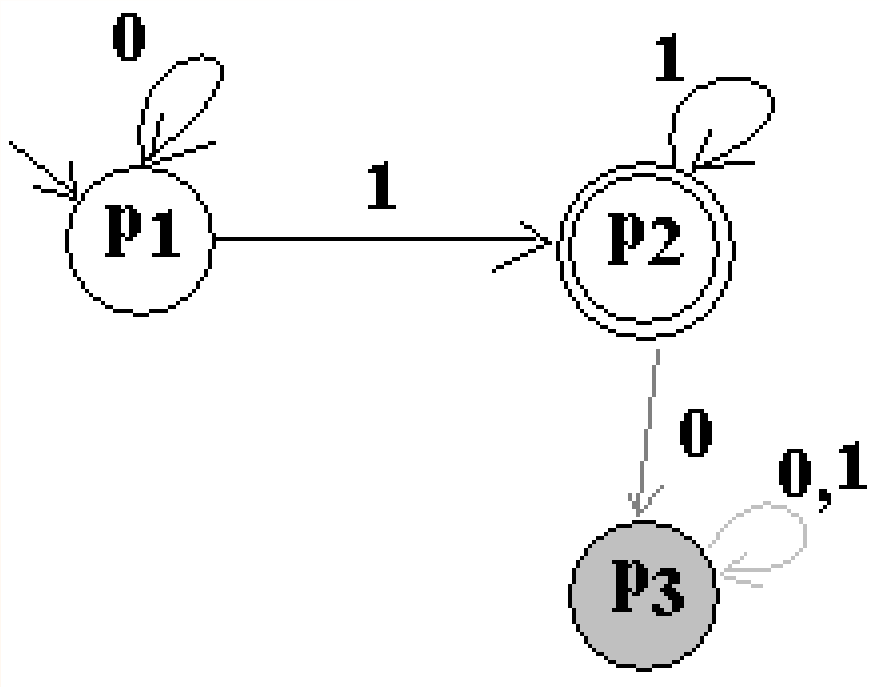
$L_1 \cap L_2$

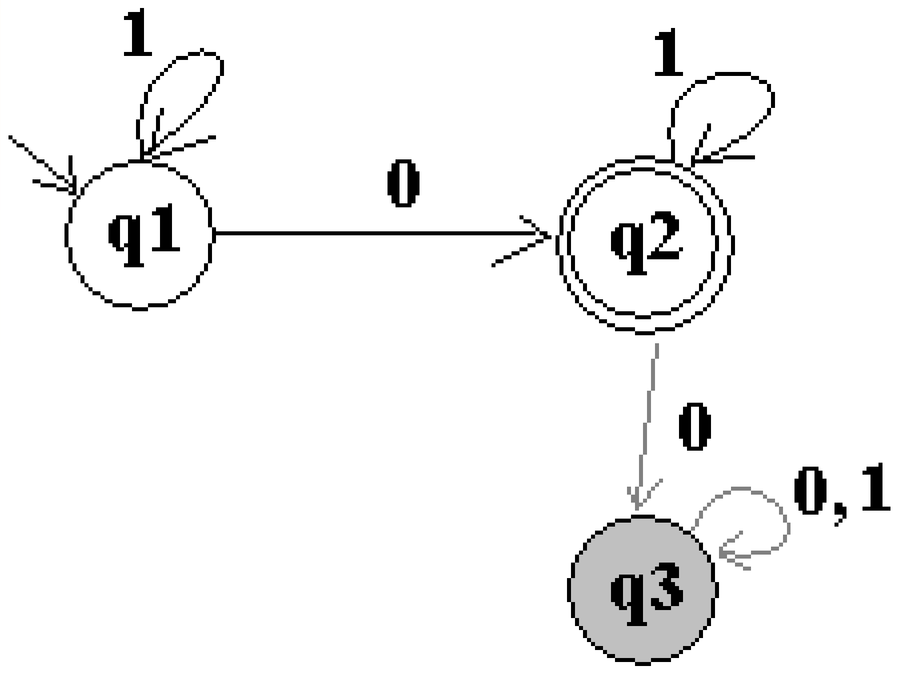
- $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{01}, F_1)$
- $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_{02}, F_2)$
- ? $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

PP. ca aut. M_1 si M_2 sint deterministe, complet definite !

(alg. de constr. !!)

- $\delta((q_1,q_2),a) = (\delta_1(q_1,a),\delta_2(q_2,a))$
- $M = (Q_1 x Q_2, \Sigma , \delta, (q_{01},q_{02}), F_1 x F_2)$


0
1
1
p1
p2
0
0,1
p3


1
1
0
q1
q2
0
0, 1
q3

Proprietati de inchidere ale limbajelor regulare

complement(L_1)

- $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{01}, F_1)$
- ? $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

PP. ca aut. M_1 este determinist complet definit !

(alg. de constr.)

- $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{01}, Q_1\text{-}F_1)$