Problema:
Fie limbajul:

$L = \{a^n b^n c^n \mid n \in N\}$

Este independent de context?

Rezolvare:

- Facem observatia ca: $\mathbf{z} \in L$ ddaca:
    a. ordinea simb. este data de regulile:
        i. simb. **a** apar inaintea simb. **b** si **c**
        ii. simb. **b** apar inaintea simb. **c**
    b. nr. simb. **a** este egal cu nr. simb. **b** este egal cu nr. simb. **c**
    (si notam: $nr_a(\mathbf{z})=nr_b(\mathbf{z})=nr_c(\mathbf{z})$)

Vom dem. ca nu este independent de context, prin reducere la absurd, folosind lema de pompare pentru limbaje independente de context.

- PP. ca este independent de context.
  Atunci au loc conditiile din lema de pompare
  De aici rezulta ca $\exists\ \mathbf{p} \in \mathbf{N}^*$ astfel incat:
  $\forall\ \mathbf{z} \in L$ care satisfice
  - $|\mathbf{z}| >= \mathbf{p}$
  - $\exists$ o descompunere $\mathbf{z} = \mathbf{uvwxy}$ astfel incat: $\mathbf{uv^iwx^iy} \in L,\ \forall\ i \in N$
    si $|\mathbf{vx}| >= \mathbf{1}$
    si $|\mathbf{vwx}| <= \mathbf{p}$

  Alegem **z** cu $|\mathbf{z}| >= \mathbf{p}$ (satisface cond. de mai sus)
  - $\exists\ \mathbf{n}$ a.i. $|a^n b^n c^n| >= \mathbf{p}$; $z \in L \Rightarrow z = a^n b^n c^n$ si $|\mathbf{z}| >= \mathbf{p}$
  - z = uvwxy descompunerea din lema de pompare
    ne aflam in unul din urmatoarele cazuri generale:
    1. cel putin unul dintre **v** si **x** contin cel putin 2 simboluri (dintre a,b,c) diferite; **(cazul 1)**
    2. **v** si **x** contin un acelasi simbol (a, sau b, sau c) eventual repetat **(>=1)**
       sau secv. vida
       adica putem considera ca simb. se repeta de 0 sau mai multe ori
       (dar nu pot fi ambele vide)
       (cazul 2)
    3. **v** si **x** contin un simbol (a, sau b, sau c) eventual repetat **(>=1)**,
       dar **v** si **x** nu contin acelasi simbol **(cazul 3)**

<u>**cazul 1**</u>: *(vezi cazurile posibile pentru cazul 1; aleg unul dintre ele si dem. pt. el; pentru celelalte demonstratia se face analog)*

fie: $v = a^{k1} b^{k2}$, k1>0, k2>0 ***(rel.1)***   (oricare x)

fie i =2

cf. Lemei de pompare: $uv^2wx^2y \in L$

adica:

$uv^2wx^2y = u\ a^{k1}\ \underline{\mathbf{b^{k2}\ a^{k1}}}\ b^{k2}\ wx^2y \in L$,

atunci cand k1>0 si k2>0 *(cf.* ***rel.1****)*

ar insemna ca simb. **b** pot sa apara inaintea simb. **a**
ceea ce nu e adevarat pentru cuvintele din L
(observatia (a.)(i.))
=> <u>contradictie</u>

<u>Se poate dem. in mod ***analog*** ca</u>:

- pentru oricare doua (sau trei) simboluri distincte ar fi format v, v^2 nu va mai pastra ordinea simbolurilor care este necesara pt.ca $uv^2wx^2y \in L$
  ... => <u>contradictie</u>
- pentru oricare doua (sau trei) simboluri distincte ar fi format x, x^2 nu va mai pastra ordinea simbolurilor care este necesara pt.ca $uv^2wx^2y \in L$
  ... => <u>contradictie</u>

<u>cazul 2</u>: *(dintre cazurile posibile pentru cazul 2 aleg unul dintre ele si dem. pt. el)*

fie: $v = a^{k1}$ $k1>=0$
$x = a^{k2}$ $k2>=0$

Stim ca: **|vx| >=1**
⇔ $|\mathbf{a}^{k1}\mathbf{a}^{k2}| >= 1$
⇔ $k1+ k2 > 0$ ***(rel.2)***
(k1, k2 – nu sunt simultan 0)

atunci: $u = a^{k3}$, $k3>=0$
$w = a^{k4}$, $k4>=0$
$y = a^{n-k1-k2-k3-k4}b^nc^n$, $n-k1-k2-k3-k4 >=0$

fie i =2: cf. lemei: $uv^2wx^2y \in L$
$uv^2wx^2y = a^{k3}\ a^{2*k1}\ a^{k4}\ a^{2*k2}\ a^{n-k1-k2-k3-k4}b^nc^n$
dar: $uv^2wx^2y \in L \Rightarrow nr_a(z')=nr_b(z')=nr_c(z')$
$k3+2*k1+k4+2*k2+ n-k1-k2-k3-k4 = n = n$
=> $n+k1+k2 = n$
=> $k1+k2 = 0$
dar *(cf. **rel.2**)* : $k1+k2>0$
=> <u>contradictie</u>

Se dem. analog pt. orice alte combinatii posibile atunci cand
si **y** si **u** contin un acelasi simbol (**a**, sau **b**, sau **c**),
ca in $z' = uv^2wx^2y$ nu are loc relatia $nr_a(z')=nr_b(z')=nr_c(z')$
=> <u>contradictie</u>

<u>cazul 3:</u> *(dintre cazurile posibile pentru cazul 3 aleg unul dintre ele si dem. pt. el)*

fie: $v = a^{k1}$, $k1>0$ (rel.4)
$x = b^{k2}$, $k2>0$ (rel.5)

atunci: $u = a^{k3}$, $k3>=0$
$y = b^{k4}c^n$, $k4>=0$
$w = a^{n-k1-k3}b^{n-k2-k4}$, $n-k1-k2>=0$; $n-k2-k4>=0$

fie i =2; atunci $uv^2wx^2y \in L$

$uv^2wx^2y = a^{k3}\ a^{2*k1}\ a^{n-k1-k2}b^{n-k2-k4}\ b^{2*k2}\ b^{k4}c^n$
$z' = uv^2wx^2y \in L \Rightarrow nr_a(z')=nr_b(z')=nr_c(z')$
k3+2*k1+n-k1-k3 = n-k2-k4 + 2*k2 +k4 = n
=> n+k1 = n+k2 = n
=> k1=0 contrad cu (rel.4)
(=> k2=0, contrad. cu (rel.5))

Se dem. analog pt. orice alte combinatii posibile atunci cand si v si x contin cate un simbol (a, sau b, sau c), dar nu acelasi ca in $z'= uv^2wx^2y$ nu are loc relatia $nr_a(z')=nr_b(z')=nr_c(z')$
=> <u>contradictie</u>

<u>cazurile posibile pt. cazul 1</u>
$z = a^nb^nc^n$, z = uvwxy
cel putin unul dintre v si x contin cel putin 2 simboluri (dintre a,b,c) diferite;
$v = a^{k1}b^{k2}$, k1>0, k2>0 si nu specificam ce poate contine x
$v = a^{k1}b^{k2}\ c^{k3}$, k1>0, k2>0, k3>0 si nu specificam ce poate contine x
$v = b^{k2}\ c^{k3}$, k2>0, k3>0 si nu specificam ce poate contine x
daca v contine un singur acelasi simbol, ne situam in cazul 1 daca:
$x = a^{k1}b^{k2}$, k1>0, k2>0
$x = a^{k1}b^{k2}\ c^{k3}$, k1>0, k2>0, k3>0
$x = b^{k2}\ c^{k3}$, k2>0, k3>0

analog se face dem. pt. fiecare dintre cazurile de mai sus (ajunge la o contradictie)

<u>Exercitiu</u>:
descrieti cazurile posibile pt. cazul 2 si cazul 3

Fie $L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$.
Aratati ca acest limbaj nu este independent de context.

(ne vom referi la prima parte si a doua parte a unei secvente din limbaj, cele doua trebuind sa fie egale)

- PP. ca este independent de context.
  Atunci au loc conditiile din lema de pompare
  De aici rezulta ca $\exists$ $\mathbf{p} \in \mathbf{N}^*$ astfel incat:
  $\forall$ $\mathbf{z} \in L$ care satisfice
  - $|\mathbf{z}|>=\mathbf{p}$
  - $\exists$ o descompunere $\mathbf{z} = \mathbf{uvwxy}$ astfel incat: $\mathbf{uv^iwx^iy} \in L$, $\forall$ $i \in N$
    si $|\mathbf{vx}| >= \mathbf{1}$
    si $|\mathbf{vwx}|<=\mathbf{p}$ => $|\mathbf{vx}| <= \mathbf{p}$

Alegem $z=0^p 1^p 0^p 1^p$
Stim ca : $|vwx| \le p$.

1. Daca secventa |vwx| este o subsecventa a primei jumatati a lui z.
Secventa uv^0wx^0y este tot in L.
Dar prima parte (jumatate) a lui z devine mai scurta, ceea ce inseamna ca o parte din sirul de simboluri 0 din a doua parte trece in prima, si numarul de simboluri care trece in prima parte este: |vx| div 2 , care este <=(p/2)
Astfel, prima parte se termina cu simbolul 0, in timp ce a doua parte se termina cu simbolul 1, de unde rezulta ca uv^0wx^0y nu poate fi in limbaj.

2. Se demonstreaza in mod analog pentru cazul in care |vwx| ar apare in a doua jumatate a lui z

3. Daca |vwx| contine simboluri din ambele parti ale mijlocului lui z

Secventa $uv^0wx^0y = uwy$ va fi de forma $0^p1^i0^j1^p$ si stim ca $p<=i+j<2p$.
… dem ca secventa obtinuta nu face parte din L

- Pentru ca sa fie din L, prima jumatate trebuie sa se termine in 1, iar a doua jumatate sa inceapa cu 0. Inseamna ca secventa 1^i0^j nu poate fi vida (si are lungimea >=p) , si trebuie ca i>0 si j>1. Deci mijlocul va trebui sa fie undeva in interiorul lui 1^i0^j . Dar secventa nici nu poate fi 1^p0^p , ceea ce inseamna ca nici nu poate repeat secventele : 0^p de inceput si 1^p de sfarsit.

Gasiti eroarea in demostratia pentru problema de mai jos:

Fie $L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$.
Aratati ca acest limbaj nu este independent de context

Presupunem ca L este independent de context si fie p – numarul din lema de pompare
Alegem $z=0^p10^p1$: este din L si are lungimea mai mare decat p
Aceasta secventa poate fi pompata astfel:

$$\overbrace{\underbrace{000\ldots000}_{u}\ \ \underbrace{0}_{v}\ \ \underbrace{1}_{w}}^{0^p1}\ \ \overbrace{\underbrace{0}_{x}\ \ \underbrace{000\ldots0001}_{y}}^{0^p1}$$

De unde rezulta ca limbajul este independent de context.