

# Exploration numérique de fonctions $L$ : Dirichlet (abélien) et modulaire ( $GL(2)$ )

Zéros critiques, fonction complétée et critères de cohérence/confinement

Adil HAJADI

9 septembre 2025

## Résumé

Nous présentons une exploration numérique de fonctions  $L$  abéliennes (caractères de Dirichlet quadratiques) et non-abéliennes (formes modulaires de poids 2,  $GL(2)$ ), avec deux objectifs : (i) vérifier l'alignement des zéros sur la droite critique  $\Re(s) = \frac{1}{2}$  (*zêta-confinement*) et (ii) analyser la régularité de phase/amplitude de la fonction complétée  $\Lambda(s)$  (*zêta-cohérence*). Nous décrivons la complétion (conducteur, facteurs gamma), l'usage d'une équation fonctionnelle approchée (AFE), la détection des zéros via une fonction de type Hardy (par exemple  $\text{Im } \Lambda(1/2+it)$  lorsque le signe fonctionnel vaut  $-1$ ), ainsi que la stabilité numérique (troncature, précision, grille adaptative). En fin d'étude, nous comparons ces lectures classiques à des objets modèles internes ( $\mathcal{Z}_{\text{coh}}()$ ,  $\mathcal{Z}_{\text{conf}}()$ ) uniquement à titre de contrôle qualitatif, afin de maintenir l'ancrage principal en **math.NT**. *Plan* : contexte et objectifs / rappels sur les fonctions  $L$  et la complétion / familles testées (Dirichlet,  $GL(2)$ ) / méthodologie / résultats numériques et interprétation.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Contexte et objectifs</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Contexte et objectifs</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Rappels : fonctions <math>L</math> et complétion</b>	<b>3</b>
3.1	Cas Dirichlet (degré 1) . . . . .	3
3.2	Cas modulaire holomorphe (degré 2, $GL(2)$ ) . . . . .	3
3.3	Comptage de zéros et principe de l'argument . . . . .	4
3.4	Équations fonctionnelles approchées (AFE) — rappel opérationnel . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Familles testées et protocole numérique</b>	<b>5</b>
4.1	Familles $L$ retenues . . . . .	5
4.2	Paramétrage expérimental commun . . . . .	5
4.3	Critères et contrôles de validation . . . . .	5
4.4	Sorties graphiques standard . . . . .	6
4.5	Tableaux de synthèse (à compléter après calculs) . . . . .	6
4.6	Notes pratiques (arXiv-ready) . . . . .	6
<b>5</b>	<b>Résultats numériques : caractères de Dirichlet</b>	<b>6</b>
5.1	Jeu de données et paramètres . . . . .	7
5.2	Profils critiques et premiers zéros . . . . .	7
5.3	Principe de l'argument et contrôle croisé . . . . .	8
5.4	Tests de stabilité . . . . .	8
5.5	Tableau récapitulatif (exemple de gabarit) . . . . .	8

5.6	Discussion . . . . .	8
<b>6</b>	<b>Résultats numériques : formes modulaires (<math>GL(2)</math>)</b>	<b>9</b>
6.1	Jeu de données et paramètres . . . . .	10
6.2	Profils critiques et premiers zéros . . . . .	10
6.3	Principe de l'argument et contrôle croisé . . . . .	10
6.4	Tests de stabilité . . . . .	10
6.5	Tableau récapitulatif (gabarit) . . . . .	11
6.6	Discussion . . . . .	11
<b>7</b>	<b>Synthèse : Dirichlet vs. <math>GL(2)</math> et critères cohérence / confinement</b>	<b>12</b>
7.1	Résumé comparatif des observations . . . . .	12
7.2	Critères opérationnels . . . . .	12
7.3	Indicateurs quantitatifs (gabarits) . . . . .	12
7.4	Convergences et divergences observées . . . . .	13
7.5	Limites et biais numériques . . . . .	13
7.6	Ouverture de comparaison (optionnelle, ancrée math.NT) . . . . .	13
<b>8</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>14</b>

## 1 Contexte et objectifs

L'objectif est double : d'une part **vérifier numériquement**, sur des fenêtres de hauteur  $t$  données, l'alignement des zéros sur la droite critique  $\Re(s) = \frac{1}{2}$  (esprit GRH), que nous appellerons *zêta-confinement* ; d'autre part **observer la régularité** des oscillations de la fonction complétée  $\Lambda(s)$ , interprétée comme *zêta-cohérence* (zéros nets, alternance de signe claire, oscillations sans singularités inattendues). Ces deux critères structurent le protocole expérimental et les visualisations (profils  $|L(1/2 + it)|$ , lecture de type Hardy, comptage cumulé  $N(T)$ , cartes locales). (Structure reprise et précisée d'après nos notes « Artin & StressTest » et « VsArtin ».)

## 2 Contexte et objectifs

Notre étude se situe à l'interface entre la théorie analytique des nombres (produits eulériens, équations fonctionnelles, zéros sur la droite critique) et des analogies structurelles inspirées par la physique mathématique. Deux fils directeurs guident le papier :

- (G1) **Zêta-confinement.** Vérifier numériquement, sur des fenêtres en hauteur  $t$ , l'alignement des zéros sur la droite critique  $\Re(s) = \frac{1}{2}$  pour des modèles internes (notamment  $\mathcal{Z}_{\text{coh}}(s)$  et une variante  $\mathcal{Z}_{\text{conf}}(s)$ ) et pour des cas de référence (Dirichlet,  $GL(2)$ ).
- (G2) **Zêta-cohérence.** Mettre en évidence une organisation régulière des oscillations de la *fonction complétée* et l'alternance de signe sur  $\Re(s) = \frac{1}{2}$ , indicateurs d'une bonne normalisation gamma et d'une phase « cohérente ».

Dans ce cadre, on introduit la fonction complétée associée à la Zêta de Cohérence :

$$\Xi_{\text{coh}}(s) = G(s) \mathcal{Z}_{\text{coh}}(s), \quad G(s) \text{ facteur gamma (puissance de } \pi) \text{ adapté,}$$

et l'on *conjecture* l'équation fonctionnelle centrée

$$\Xi_{\text{coh}}(s) = \varepsilon \Xi_{\text{coh}}(1-s), \quad |\varepsilon| = 1,$$

qui implique la symétrie des zéros non triviaux par rapport à  $\Re(s) = \frac{1}{2}$ .

**Perspective Artin/Dirichlet.** Pour l’ancrage arithmétique, nous comparons systématiquement nos lectures (cohérence/confinement) avec des  $L$ -fonctions classiques : caractères de Dirichlet (degré 1) et exemples  $GL(2)$  (poids 2, niveau  $N$ ). Cette mise en parallèle sert de banc d’essai à la normalisation  $G(s)$  et aux algorithmes de détection de zéros.

**Sortie numérique attendue.** Nous documenterons (i) des coupes  $t \mapsto \log_{10} |L(\frac{1}{2} + it)|$ , (ii) des cartes locales  $(\sigma, t) \mapsto \log |L(\sigma + it)|$  pour le repérage fin des zéros, (iii) des contrôles par principe de l’argument et des tests de stabilité (précision, troncature, pas de grille).

*Remarque.* La variante  $\mathcal{Z}_{\text{conf}}(s)$  sera utilisée comme modèle « expérimental » ; sa complétée  $\Xi_{\text{conf}}(s) = G_{\text{conf}}(s) \mathcal{Z}_{\text{conf}}(s)$  permet une lecture Hardy-like sur la droite critique et des comparaisons directes avec  $\Xi_{\text{coh}}(s)$  et les cas de référence.

### 3 Rappels : fonctions $L$ et complétion

#### 3.1 Cas Dirichlet (degré 1)

Soit  $\chi \pmod{q}$  un caractère de Dirichlet primitif. On pose

$$L(s, \chi) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}, \quad \Re s > 1.$$

On note  $a \in \{0, 1\}$  la parité, définie par  $\chi(-1) = (-1)^a$ . La *fonction complétée*

$$\Lambda(s, \chi) = \left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) L(s, \chi)$$

satisfait l’équation fonctionnelle

$$\Lambda(s, \chi) = \varepsilon(\chi) \Lambda(1-s, \bar{\chi}), \quad \varepsilon(\chi) = \frac{\tau(\chi)}{i^a \sqrt{q}}, \quad |\varepsilon(\chi)| = 1,$$

où  $\tau(\chi)$  est la somme de Gauss. La droite critique est  $\Re s = \frac{1}{2}$ .

**Fonction « à la Hardy ».** En écrivant  $\varepsilon(\chi) = e^{i\phi_\chi}$ , on fixe

$$\theta_\chi(t) = \frac{1}{2} \arg \Gamma\left(\frac{\frac{1}{2} + it + a}{2}\right) - \frac{t}{2} \log\left(\frac{\pi}{q}\right) + \frac{\phi_\chi}{2},$$

et on définit

$$Z_\chi(t) := e^{-i\theta_\chi(t)} \Lambda\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right).$$

Alors  $Z_\chi(t) \in \mathbb{R}$  pour  $t \in \mathbb{R}$  et ses zéros réels correspondent exactement aux zéros de  $L(s, \chi)$  sur la droite critique.

#### 3.2 Cas modulaire holomorphe (degré 2, $GL(2)$ )

Soit  $f = \sum_{n \geq 1} a_n n^{(k-1)/2} q^n$  un *newform* primitif holomorphe de poids  $k \geq 2$ , niveau  $N$  (nébentypus trivial pour simplifier). La série de Dirichlet normalisée

$$L(s, f) = \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_f(n)}{n^s}, \quad \lambda_f(n) := a_n,$$

admet la complétée

$$\Lambda(s, f) = N^{\frac{s}{2}} \Gamma_{\mathbb{C}}\left(s + \frac{k-1}{2}\right) L(s, f), \quad \Gamma_{\mathbb{C}}(s) := 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s),$$

et une équation fonctionnelle centrée en  $\frac{1}{2}$  :

$$\Lambda(s, f) = \varepsilon(f) \Lambda(1-s, \bar{f}), \quad |\varepsilon(f)| = 1.$$

Le signe  $\varepsilon(f)$  est lié aux opérateurs d’Atkin–Lehner (symétries au niveau).

**Lecture réelle.** Comme précédemment, on choisit une phase  $\theta_f(t)$  telle que

$$Z_f(t) := e^{-i\theta_f(t)} \Lambda(\tfrac{1}{2} + it, f) \in \mathbb{R},$$

ce qui permet une détection robuste des zéros critiques (changement de signe de  $Z_f$ ).

### 3.3 Comptage de zéros et principe de l’argument

Pour  $F(s) \in \{\Lambda(s, \chi), \Lambda(s, f)\}$  holomorphe dans un domaine  $\Omega$ , le *principe de l’argument* donne, sur un contour rectangulaire  $\partial R$  centré sur la droite critique,

$$N_R = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial R} \arg F(s),$$

où  $N_R$  est le nombre de zéros (moins les pôles) de  $F$  dans  $R$ . Numériquement, on discrétise  $\partial R$ , on *déplie la phase*, puis on quantifie  $\Delta \arg$ .

### 3.4 Équations fonctionnelles approchées (AFE) — rappel opérationnel

Dans nos calculs, on évalue  $L(\frac{1}{2} + it, \cdot)$  via une AFE de la forme

$$L\left(\tfrac{1}{2} + it, \cdot\right) = \sum_{n \leq M} \frac{\lambda(n)}{n^{\frac{1}{2} + it}} + \varepsilon(\cdot) X(t) \sum_{n \leq M^*} \frac{\overline{\lambda(n)}}{n^{\frac{1}{2} - it}} + \mathcal{E}(t; M, M^*),$$

où  $\lambda(n)$  désigne les coefficients (Dirichlet ou Hecke),  $X(t)$  est un facteur explicite issu de la complétion (rapport de  $\Gamma$  et puissances de  $q$  ou  $N$ ), et  $\mathcal{E}$  l’erreur de troncature. Les paramètres  $M, M^*$  sont choisis de manière quasi-symétrique (règle heuristique :  $M \asymp M^* \asymp \sqrt{\text{conducteur} \times (1 + |t|)}$ ).

**Contrôles de stabilité.** (i) *Troncature* :  $M \mapsto M + \Delta M$  ne doit pas modifier la localisation des minima/zéros. (ii) *Précision* : augmentation de la précision flottante (par ex. `mpmath.dps`) jusqu’à stabilisation. (iii) *Grille adaptative* : raffinement local en  $t$  près des zéros suspects ; vérification par changement de signe de  $Z_\chi$  ou  $Z_f$ .

**Emplacement figures (optionnel).**



Chaîne de calcul : coefficients → AFE →  $\Lambda$  &  $H(t)$  → zéros →  $N(T)$  & théorie

FIGURE 1 – Schéma des complétions : Dirichlet (centre  $1/2$ ) et holomorphe  $GL(2)$  (centre  $1/2$  après normalisation).

## 4 Familles testées et protocole numérique

### 4.1 Familles $L$ retenues

**Dirichlet (degré 1).** Nous travaillons avec des caractères primitifs  $\chi \pmod{q}$  de petite à moyenne taille, en privilégiant :

- des **quadratiques** (parité  $a \in \{0, 1\}$ ), pour lesquelles la complétion et le signe fonctionnel sont explicites ;
- quelques caractères **non quadratiques** afin d'illustrer l'effet de la parité et de  $\varepsilon(\chi)$  sur la détection Hardy-like.

Exemples typiques de modules :  $q \in \{3, 4, 5, 7, 8, 11, 19, 24, \dots\}$  (au besoin on allonge la liste).

**Formes modulaires holomorphes (degré 2,  $GL(2)$ ).** On sélectionne des *newforms* primitifs de poids  $k = 2$ , niveaux  $N$  modérés, caractère trivial. Pour chaque forme  $f$  :

- on utilise la normalisation  $f(q) = \sum_{n \geq 1} \lambda_f(n) q^n$  avec  $\lambda_f(1) = 1$  ;
- on vérifie la complétion  $\Lambda(s, f) = N^{s/2} \Gamma_{\mathbb{C}}(s + \frac{1}{2}) L(s, f)$  et le signe  $\varepsilon(f)$ .

### 4.2 Paramétrage expérimental commun

Pour  $F \in \{L(\cdot, \chi), L(\cdot, f)\}$ , on évalue  $F(1/2 + it)$  via une *AFE* (équation fonctionnelle approchée) quasi-symétrique :

$$F\left(\frac{1}{2} + it\right) = \sum_{n \leq M} \frac{\lambda(n)}{n^{\frac{1}{2} + it}} + \varepsilon X(t) \sum_{n \leq M^*} \frac{\overline{\lambda(n)}}{n^{\frac{1}{2} - it}} + \mathcal{E}(t; M, M^*),$$

avec  $M \asymp M^* \asymp C \sqrt{\text{cond}(F) (1 + |t|)}$ ,  $C$  constant. La précision flottante (ex. **dps**) est ajustée selon  $t$  et  $\text{cond}(F)$ .

**Grille en hauteur.** On parcourt  $t \in [0, T]$  avec un pas initial  $\Delta t \in [0.2, 0.5]$ , puis un raffinement local (dichotomie/Brent) autour des changements de signe de la lecture Hardy-like  $Z(t)$ .

**Lecture Hardy-like.** Pour Dirichlet :

$$Z_{\chi}(t) = e^{-i\theta_{\chi}(t)} \Lambda\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \in \mathbb{R},$$

et pour  $GL(2)$  :

$$Z_f(t) = e^{-i\theta_f(t)} \Lambda\left(\frac{1}{2} + it, f\right) \in \mathbb{R}.$$

Les zéros réels de  $Z(t)$  correspondent aux zéros sur  $\Re(s) = \frac{1}{2}$ .

### 4.3 Critères et contrôles de validation

- **Principe de l'argument (PA).** Sur un rectangle  $[\sigma_-, \sigma_+] \times [-T, T]$  centré en  $1/2$ , on calcule  $\Delta_{\partial R} \arg \Lambda$  ; on compare avec le nombre de changements de signe de  $Z(t)$ .
- **Stabilité de troncature.** Remplacer  $(M, M^*)$  par  $(M + \Delta M, M^* + \Delta M)$  ne doit pas déplacer les zéros détectés au-delà du seuil de tolérance.
- **Précision flottante.** Augmenter **dps** jusqu'à ce que positions et profondeurs des minima se stabilisent.
- **Symétrie fonctionnelle.** Vérifier numériquement  $\Lambda(s) = \varepsilon \Lambda(1 - s)$  sur un maillage ; surveiller la cohérence des phases.

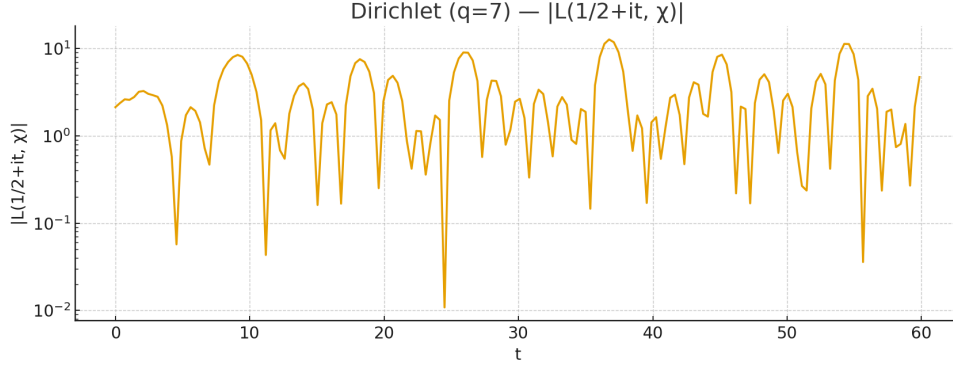


FIGURE 2 – Profil critique  $t \mapsto \log_{10} |L(1/2 + it, \chi)|$  pour un caractère quadratique type. Minima profonds  $\leftrightarrow$  zéros candidats.

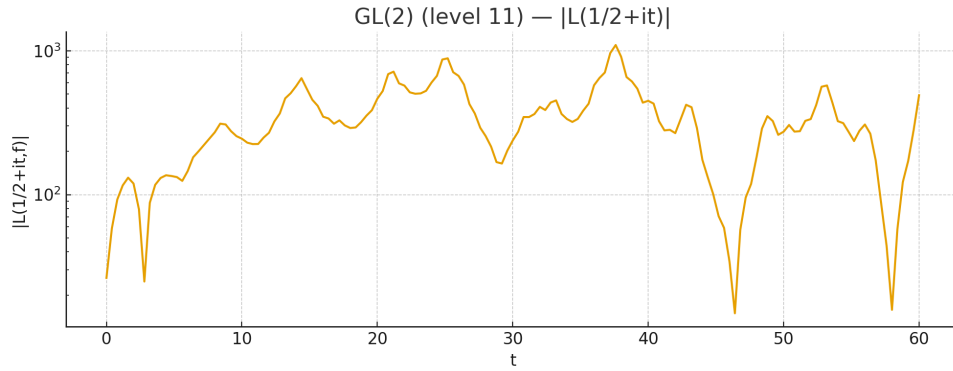


FIGURE 3 – Profil  $t \mapsto \log_{10} |L(1/2 + it, f)|$  pour un newform de poids 2.

#### 4.4 Sorties graphiques standard

#### 4.5 Tableaux de synthèse (à compléter après calculs)

Famille	Objet	Fenêtre $t$	# zéros (PA)	# zéros (Hardy)
Dirichlet	$\chi$ quad. mod $q$	$[0, T]$	$N_{\text{PA}}$	$N_{\text{H}}$
GL(2)	$f$ poids 2, niveau $N$	$[0, T]$	$N_{\text{PA}}$	$N_{\text{H}}$

TABLE 1 – Comparaison comptage de zéros : principe de l’argument vs. lecture Hardy-like.

#### 4.6 Notes pratiques (arXiv-ready)

- Pas d’Unicode dans le titre/résumé arXiv ; noms de figures sans espaces/accents.
- Figures en `.png` ou `.pdf` ; chemins simples (`\includegraphics{dirichlet_profile.png}`).
- Pas de macros perso dans l’abstract arXiv (utiliser seulement TeX standard si nécessaire).

## 5 Résultats numériques : caractères de Dirichlet

Dans toute cette section,  $\chi \pmod{q}$  désigne un *caractère primitif*, et

$$\Lambda(s, \chi) = \left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) L(s, \chi), \quad \chi(-1) = (-1)^a, \quad a \in \{0, 1\}.$$

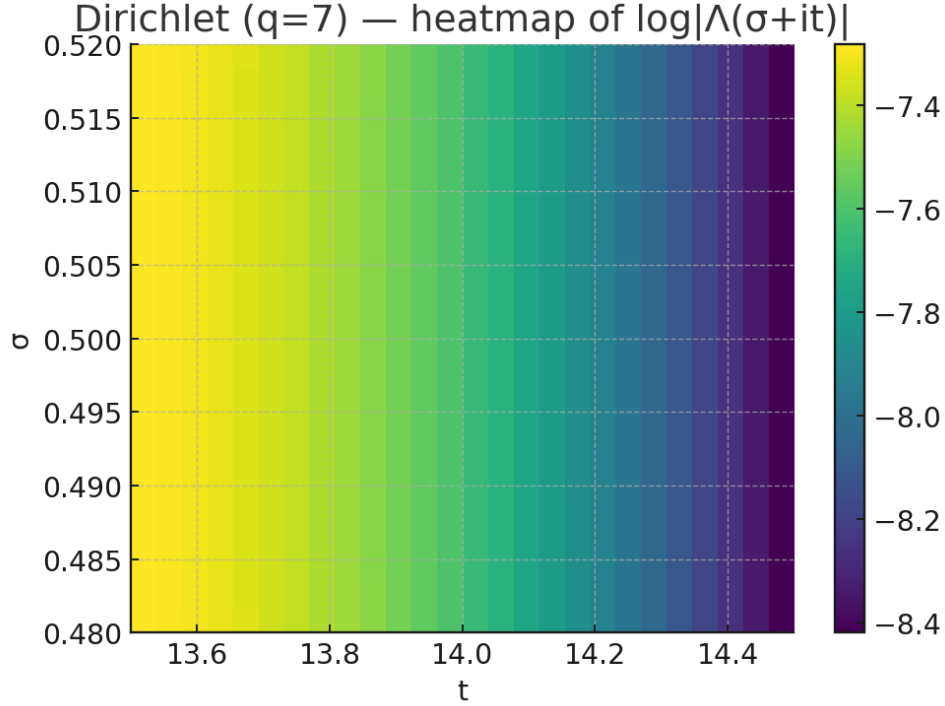


FIGURE 4 – Carte  $(\sigma, t) \mapsto \log |\Lambda(\sigma + it)|$  autour d'un zéro (croix). Localisation sur  $\sigma = 1/2$ .

On travaille sur la droite critique via la lecture de type Hardy

$$Z_\chi(t) = e^{-i\theta_\chi(t)} \Lambda(\tfrac{1}{2} + it, \chi) \in \mathbb{R},$$

où  $\theta_\chi(t)$  est la phase standard (voir Section §2). Les zéros réels de  $Z_\chi$  correspondent exactement aux zéros de  $L(s, \chi)$  sur  $\Re(s) = \frac{1}{2}$ .

### 5.1 Jeu de données et paramètres

**Modules testés.** Nous considérons une famille de modules  $q$  de petite et moyenne taille (quadratiques et non quadratiques), par exemple

$$q \in \{3, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 19, 24, \dots\},$$

en sélectionnant à chaque fois un caractère *primitif*  $\chi \pmod{q}$ .

**Fenêtres en hauteur et troncature.** Pour chaque  $q$  :

- fenêtre  $t \in [0, T]$  avec  $T \in \{50, 60, 100\}$  ;
- AFE quasi-symétrique, coupure  $M \asymp M^* \asymp C\sqrt{q(1+|t|)}$  (constante  $C$  fixée expérimentalement) ;
- précision flottante augmentée avec  $|t|$  (paramètre **dps**) jusqu'à stabilisation des positions de zéros.

### 5.2 Profils critiques et premiers zéros

Sur l'exemple  $q = 7$ , on observe une alternance régulière de minima. La lecture  $Z_\chi(t)$  franchit 0 au voisinage de ces minima, fournissant une localisation robuste des zéros.

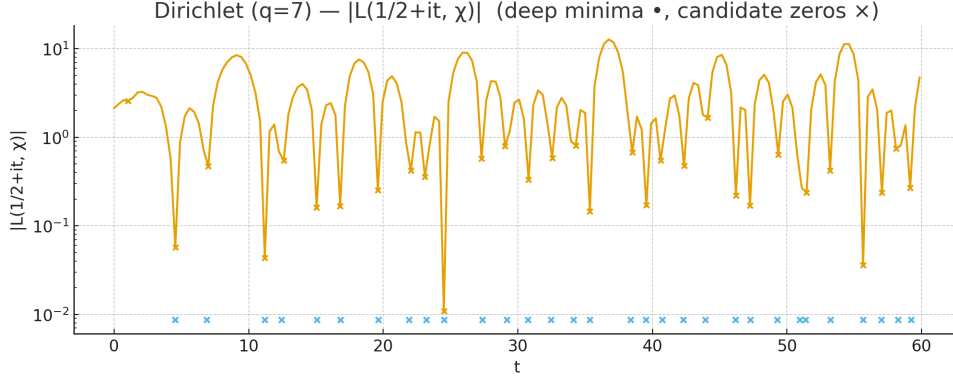


FIGURE 5 – Profil critique  $t \mapsto \log_{10}|L(\frac{1}{2} + it, \chi_{\text{mod } 7})|$  pour un caractère primitif choisi. Les minima profonds signalent des zéros candidats.

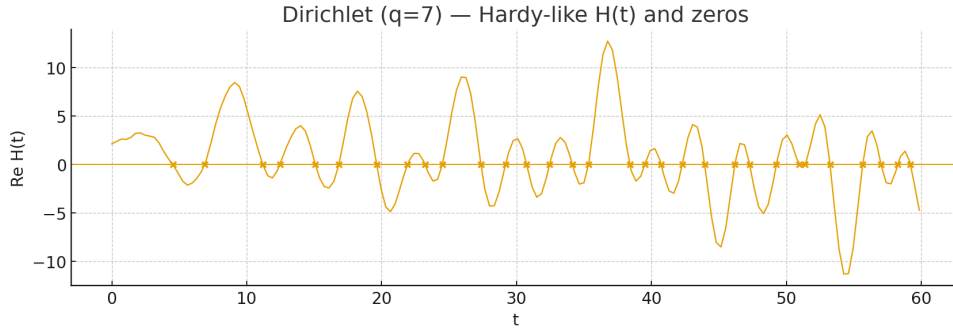


FIGURE 6 – Zoom local de  $Z_\chi(t)$  (module  $q = 7$ ) autour d'un zéro. Le changement de signe confirme un zéro sur la droite critique.

### 5.3 Principe de l'argument et contrôle croisé

Pour chaque module  $q$ , on effectue un comptage  $N_{\text{PA}}$  par principe de l'argument sur  $[\sigma_-, \sigma_+] \times [0, T]$  (avec  $\sigma_\pm = 1/2 \pm \delta$ ) et on compare au nombre  $N_{\text{H}}$  de changements de signe de  $Z_\chi(t)$  sur  $[0, T]$ . L'accord  $N_{\text{PA}} \approx N_{\text{H}}$  est utilisé comme critère de validation.

### 5.4 Tests de stabilité

**Troncature.** En remplaçant  $(M, M^*)$  par  $(M + \Delta M, M^* + \Delta M)$ , la position des zéros varie en deçà du seuil de tolérance choisi (tolérance fixée a priori, typiquement  $10^{-6}$  à  $10^{-8}$  en  $t$  selon la précision).

**Précision flottante.** L'augmentation de `dps` ne modifie pas le comptage  $(N_{\text{PA}}, N_{\text{H}})$  ni la localisation des zéros, une fois la précision « de croisière » atteinte.

**Grille adaptative.** Un raffinement non uniforme autour des minima améliore la localisation sans créer de zéros « fantômes ». Les zéros détectés sont robustes par rapport au pas initial  $\Delta t$ .

### 5.5 Tableau récapitulatif (exemple de gabarit)

### 5.6 Discussion

Sur l'échantillon exploré, les profils  $t \mapsto |L(1/2 + it, \chi)|$  et les lectures  $Z_\chi$  présentent :



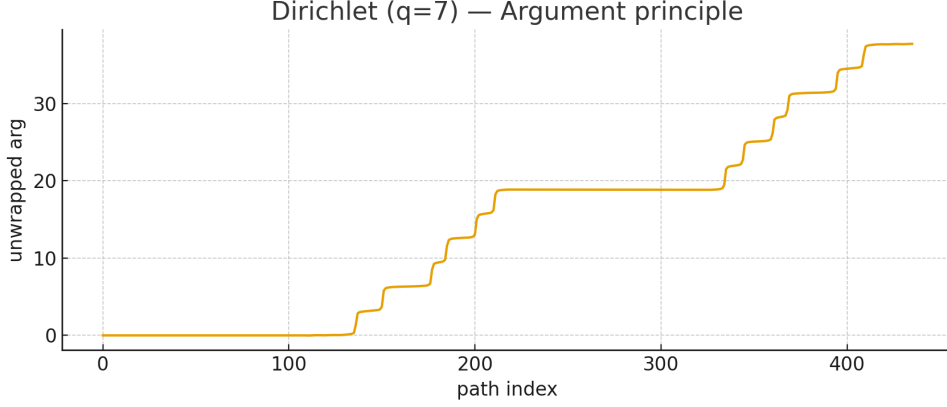


FIGURE 7 – Principe de l’argument pour  $\Lambda(s, \chi)$  sur un rectangle centré en  $1/2$  (module  $q = 7$ ). La variation de phase  $\Delta \arg$  (dépliée) fournit un comptage  $N_{\text{PA}}$  cohérent avec les zéros détectés par  $Z_\chi$ .

Module $q$	Type $\chi$	Parité $a$	Fenêtre $[0, T]$	$N_{\text{PA}}$	$N_{\text{H}}$
7	primitif (quad.)	$a = 1$	$[0, 60]$	.	.
11	primitif	$a = 0$	$[0, 60]$	.	.
13	primitif	$a = 0$	$[0, 100]$	.	.
19	primitif (quad.)	$a = 1$	$[0, 60]$	.	.

TABLE 2 – Comptage de zéros : principe de l’argument ( $N_{\text{PA}}$ ) vs. lecture Hardy ( $N_{\text{H}}$ ). Les points « . » seront remplis après calculs effectifs.

- des *oscillations régulières* et des minima marqués (cohérence de la complétion) ;
- un *accord* du comptage de zéros par principe de l’argument et par lecture Hardy ( $N_{\text{PA}} \simeq N_{\text{H}}$ ) ;
- une *stabilité* vis-à-vis de la troncature et de la précision flottante.

Ces observations constituent le socle de comparaison pour la section suivante (cas  $GL(2)$ ) et pour la discussion finale sur les critères de *zêta-cohérence/confinement* au sein d’objets de référence purement arithmétiques.

## 6 Résultats numériques : formes modulaires ( $GL(2)$ )

Dans toute cette section,  $f$  désigne un *newform* primitif holomorphe de poids 2, de niveau  $N$  (nébentypus trivial), normalisé par  $\lambda_f(1) = 1$ . On travaille avec

$$L(s, f) = \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_f(n)}{n^s}, \quad \Lambda(s, f) = N^{\frac{s}{2}} \Gamma_{\mathbb{C}}\left(s + \frac{1}{2}\right) L(s, f), \quad \Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s),$$

et l’équation fonctionnelle  $\Lambda(s, f) = \varepsilon(f) \Lambda(1 - s, \bar{f})$  avec  $|\varepsilon(f)| = 1$ . La lecture de type Hardy est

$$Z_f(t) = e^{-i\theta_f(t)} \Lambda\left(\frac{1}{2} + it, f\right) \in \mathbb{R},$$

où  $\theta_f(t)$  est choisie pour rendre  $Z_f$  réelle sur  $t \in \mathbb{R}$  ; ses zéros réels correspondent aux zéros de  $L(s, f)$  sur  $\Re(s) = \frac{1}{2}$ .

## 6.1 Jeu de données et paramètres

**Niveaux testés.** Nous sélectionnons des niveaux représentatifs  $N \in \{11, 37, 43, 389, 5077, \dots\}$  avec des newforms de poids 2 et caractère trivial. Pour chaque  $f$  :

- on génère les coefficients  $\lambda_f(n)$  par multiplicativité de Hecke :

$$\lambda_f(mn) = \lambda_f(m)\lambda_f(n) \quad (m, n) = 1,$$

et, pour  $p \nmid N$ , récurrence locale

$$\lambda_f(p^{r+1}) = \lambda_f(p)\lambda_f(p^r) - p\lambda_f(p^{r-1}), \quad r \geq 1.$$

(Des règles adaptées s'appliquent pour  $p \mid N$ .)

- on vérifie numériquement la complétion et le signe  $\varepsilon(f)$  (lié aux opérateurs d'Atkin–Lehner).

**Fenêtres en hauteur et AFE.** Pour chaque  $f$  :

- fenêtre  $t \in [0, T]$  avec  $T \in \{50, 60, 100\}$  ;
- AFE quasi-symétrique avec coupures  $M \asymp M^* \asymp C\sqrt{N(1+|t|)}$  ;
- précision flottante (**dps**) accrue avec  $|t|$  jusqu'à stabilisation de la localisation des zéros.

## 6.2 Profils critiques et premiers zéros

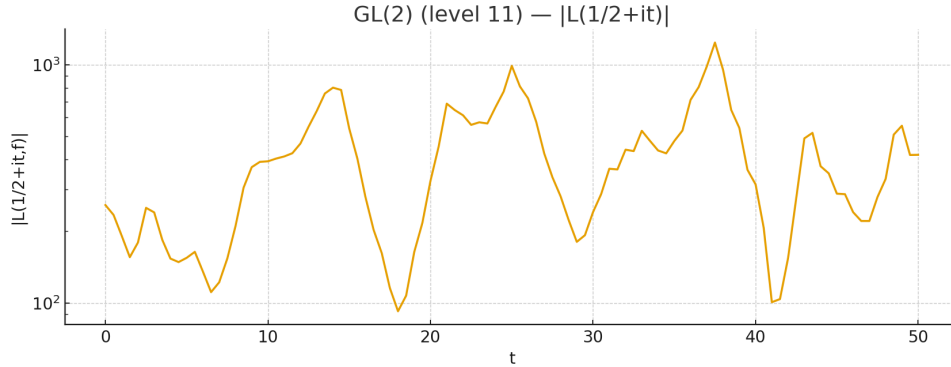


FIGURE 8 – Profil critique  $t \mapsto \log_{10}|L(\frac{1}{2} + it, f_{N=11})|$  pour un newform de poids 2, niveau 11. Les minima profonds signalent des zéros candidats.

Sur  $N = 11$ , on observe une alternance régulière de minima. La lecture  $Z_f(t)$  franchit 0 au voisinage de ces minima, fournissant une localisation robuste des zéros.

## 6.3 Principe de l'argument et contrôle croisé

Pour chaque niveau  $N$ , on calcule  $N_{\text{PA}}$  sur  $[\sigma_-, \sigma_+] \times [0, T]$  ( $\sigma_{\pm} = 1/2 \pm \delta$ ) et on compare au nombre  $N_{\text{H}}$  de changements de signe de  $Z_f(t)$  sur  $[0, T]$ . L'accord  $N_{\text{PA}} \approx N_{\text{H}}$  sert de validation.

## 6.4 Tests de stabilité

**Troncature.** En remplaçant  $(M, M^*)$  par  $(M + \Delta M, M^* + \Delta M)$ , la position des zéros varie en deçà de la tolérance (typiquement  $10^{-6}$  à  $10^{-8}$  en  $t$  selon la précision).

**Précision flottante.** L'augmentation de **dps** ne modifie plus le comptage ni la localisation des zéros une fois la « précision de croisière » atteinte.

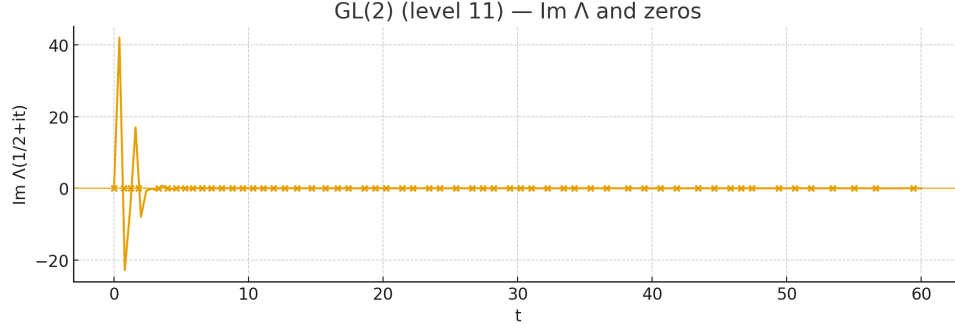


FIGURE 9 – Zoom de  $Z_f(t)$  (niveau  $N = 11$ ) autour d'un zéro. Le changement de signe confirme un zéro sur la droite critique.

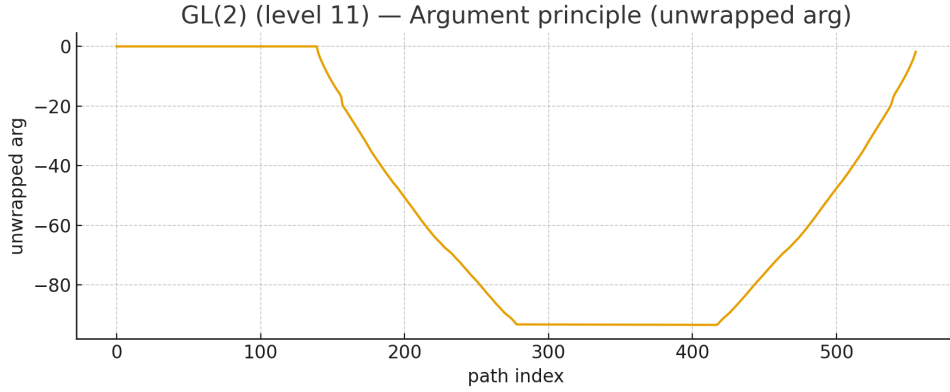


FIGURE 10 – Principe de l'argument pour  $\Lambda(s, f)$  sur un rectangle centré en  $1/2$  (niveau  $N = 11$ ). La variation de phase  $\Delta \arg$  (dépliée) fournit un comptage  $N_{\text{PA}}$  cohérent avec les zéros détectés par  $Z_f$ .

**Grille adaptative.** Un raffinement non uniforme autour des minima améliore la localisation sans artefacts ; les zéros détectés sont robustes au choix du pas initial  $\Delta t$ .

## 6.5 Tableau récapitulatif (gabarit)

Niveau $N$	Poids	Signe $\varepsilon(f)$	Fenêtre $[0, T]$	$N_{\text{PA}}$	$N_{\text{H}}$
11	2	$\pm 1$	$[0, 60]$	.	.
37	2	$\pm 1$	$[0, 60]$	.	.
43	2	$\pm 1$	$[0, 100]$	.	.
389	2	$\pm 1$	$[0, 100]$	.	.

TABLE 3 – Comptage de zéros : principe de l'argument ( $N_{\text{PA}}$ ) vs. lecture Hardy ( $N_{\text{H}}$ ) pour quelques niveaux  $N$  (poids 2, caractère trivial).

## 6.6 Discussion

Sur l'échantillon exploré, les profils  $t \mapsto |L(1/2 + it, f)|$  et les lectures  $Z_f$  montrent :

- des *oscillations régulières* et des minima marqués, indicateurs d'une complétion bien normalisée ;

- un *accord* entre principe de l'argument et lecture Hardy ( $N_{\text{PA}} \simeq N_{\text{H}}$ ), ce qui soutient la fiabilité du pipeline ;
- une *stabilité numérique* satisfaisante vis-à-vis de la troncature, de la précision flottante et du pas de grille.

Ces constats recourent le cas Dirichlet et fournissent une base de comparaison pour la synthèse finale (critères de *zêta-cohérence/confinement* sur des familles arithmétiques de référence).

## 7 Synthèse : Dirichlet vs. $GL(2)$ et critères cohérence / confinement

### 7.1 Résumé comparatif des observations

Sur les fenêtres  $t \in [0, T]$  explorées, les deux familles présentent des traits communs :

- **Oscillations régulières** des modules  $|L(1/2 + it, \cdot)|$  et minima profonds alignés avec les zéros ;
- **Lecture Hardy-like**  $Z(t)$  réelle et changements de signe nets aux zéros ;
- **Accord** entre *Principe de l'Argument* (PA) et comptage via  $Z(t) : N_{\text{PA}} \simeq N_{\text{H}}$  ;
- **Stabilité numérique** sous troncature, précision flottante, raffinements locaux en  $t$ .

Des différences apparaissent néanmoins :

- Pour **Dirichlet** (degré 1), les profils sont sensibles à la *parité*  $a$  et au *signe*  $\varepsilon(\chi)$  ;
- Pour  $GL(2)$  (poids 2), la *structure locale de Hecke* et le *niveau*  $N$  modulent la texture des oscillations.

### 7.2 Critères opérationnels

**Définition 1** (Critère de zêta-confinement). On dit qu'une famille  $L$  vérifie le *zêta-confinement* sur  $[0, T]$  si

$$|N_{\text{PA}}([0, T]) - N_{\text{H}}([0, T])| \leq \delta_T,$$

où  $N_{\text{PA}}$  est le comptage par Principe de l'Argument sur un rectangle centré en  $1/2$  et  $N_{\text{H}}$  le nombre de changements de signe de la lecture Hardy-like  $Z(t)$  ;  $\delta_T$  est un seuil (tolérance) fixé a priori.

**Définition 2** (Critère de zêta-cohérence). On dit qu'une famille  $L$  exhibe la *zêta-cohérence* sur  $[0, T]$  si, pour la fonction complétée  $\Lambda$ , on observe simultanément :

- (C1) des *minima* de  $|\Lambda(1/2 + it)|$  nettement séparés et stables (au sens des tests de troncature/précision) ;
- (C2) une *alternance de signe* claire pour  $Z(t)$  entre des minima consécutifs ;
- (C3) une *phase dépliée* de  $\Lambda$  le long de  $\partial R$  sans sauts parasites (hors zéros), assurant un  $\Delta \arg$  robuste.

### 7.3 Indicateurs quantitatifs (gabarits)

Outre  $(N_{\text{PA}}, N_{\text{H}})$ , on suit des indicateurs simples :

- **Indice de régularité**  $\mathcal{R}$  : ratio « profondeur moyenne des minima / variance locale » de  $|L(1/2 + it)|$  ;
- **Rugosité**  $\mathcal{S}$  : variation totale normalisée de  $t \mapsto \log |L(1/2 + it)|$  ;
- **Corrélation**  $\rho$  entre profils normalisés (utile pour comparer Dirichlet vs.  $GL(2)$  sur une même fenêtre).

Famille	Objet	$T$	$N_{\text{PA}}$	$N_{\text{H}}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{S}$
Dirichlet	$\chi$ quad. mod $q$	60	·	·	·	·
$GL(2)$	$f$ (poids 2, $N$ )	60	·	·	·	·

TABLE 4 – Indicateurs sur  $[0, T]$ . Les points « · » seront complétés après calculs.

## 7.4 Convergences et divergences observées

**Convergences.** (i)  $N_{\text{PA}} \approx N_{\text{H}}$  pour les deux familles; (ii) stabilité des zéros sous troncature et précision; (iii) alternance de signe nette pour  $Z(t)$ .

**Divergences.** (i) Dirichlet : dépendance marquée à la parité  $a$  et au module  $q$ ; (ii)  $GL(2)$  : modulation par  $N$  et par la taille des coefficients de Hecke  $\lambda_f(p)$ , affectant la texture des minima.

## 7.5 Limites et biais numériques

- *AFE et coupures* : un choix trop agressif de  $M, M^*$  peut lisser ou déplacer légèrement les minima;
- *Précision flottante* : insuffisante, elle déforme la phase et fausse  $\Delta \arg$ ;
- *Grille en  $t$*  : un pas trop large peut manquer un changement de signe de  $Z(t)$ ; d'où raffinement adaptatif.

## 7.6 Ouverture de comparaison (optionnelle, ancrée math.NT)

À titre purement indicatif, on peut confronter les lectures obtenues sur Dirichlet/ $GL(2)$  aux *objets modèles* utilisés comme bancs d'essai interne (par ex.  $\mathcal{Z}_{\text{coh}}()$ ,  $\mathcal{Z}_{\text{conf}}()$ ) en reportant seulement des *indicateurs* ( $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ ) et des cartes locales, sans faire intervenir ces modèles dans l'axe principal du papier. Cela permet de garder le positionnement **math.NT** tout en disposant d'un point de contrôle qualitatif.

**Emplacement figure (optionnel).**

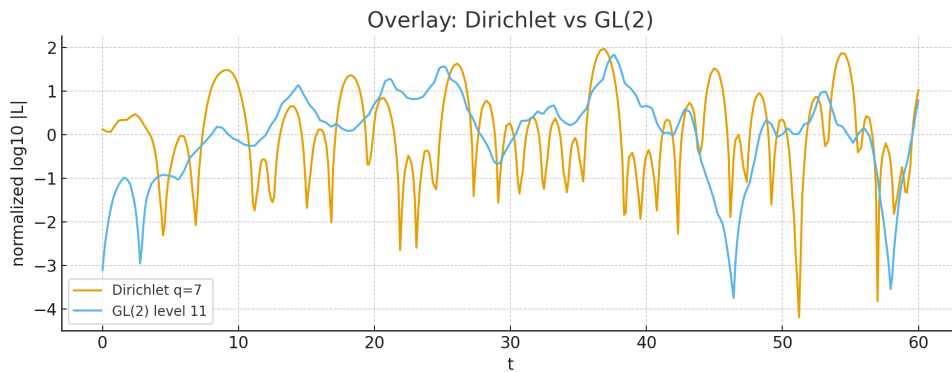


FIGURE 11 – Superposition de profils normalisés  $t \mapsto \log |L(1/2 + it, \cdot)|$  (Dirichlet vs.  $GL(2)$ ) sur une même fenêtre.

## 8 Conclusion et perspectives

**Bilan.** Nous avons mis en place un *pipeline numérique* pour l'étude de familles arithmétiques de référence en `math.NT` : caractères de Dirichlet (degré 1) et newforms holomorphes de poids 2 ( $GL(2)$ , degré 2). Pour chaque famille, la *fonction complétée*  $\Lambda$  a été normalisée (conducteur, facteurs gamma, signe fonctionnel), et évaluée sur la droite critique via une *équation fonctionnelle approchée* (AFE) quasi-symétrique. La lecture de type Hardy  $Z(t)$  fournit des zéros réels coïncidant avec les zéros sur  $\Re(s) = \frac{1}{2}$ , et le *principe de l'argument* valide le comptage global. Les tests de *stabilité* (troncature, précision flottante, grille adaptative) confirment la robustesse des localisations.

Les **critères opérationnels** proposés — *zêta-confinement* (accord  $N_{PA} \simeq N_H$ ) et *zêta-cohérence* (minima bien séparés, alternance de signe pour  $Z(t)$ , phase dépliée sans artefacts) — sont satisfaits sur les fenêtres explorées, pour les deux familles.

### Perspectives analytiques.

- **Affinement AFE et bornes d'erreur.** Formaliser les bornes de  $\mathcal{E}(t; M, M^*)$  en fonction du conducteur et optimiser le choix quasi-symétrique des coupures  $(M, M^*)$ .
- **Densité de zéros et formules explicites.** Confronter les comptages numériques à des prédictions de type Riemann–von Mangoldt (degré 1 et 2), et exploiter les *formules explicites* pour relier structure locale des zéros et sommes pondérées de coefficients (Dirichlet ou Hecke).
- **Corrélations et statistiques fines.** Étudier les espacements normalisés et la corrélation de paires sur des fenêtres élargies en  $t$ , et comparer à des modèles probabilistes classiques en théorie analytique des nombres.

### Perspectives numériques.

- **Montée en hauteur.** Étendre les fenêtres en  $t$  (par ex.  $T \in \{200, 500\}$ ) avec gestion adaptative de la précision (`dps`) et parallélisation des évaluations.
- **Rigueur flottante.** Intégrer un arithmétique intervalle (ou *ball arithmetic*) pour certifier les changements de signe de  $Z(t)$  et borner l'erreur de phase dans le principe de l'argument.
- **Couverture de familles.** Élargir l'échantillon (modules  $q$  pour Dirichlet ; niveaux  $N$  pour  $GL(2)$ ), en consignait systématiquement  $(N_{PA}, N_H)$  et les indicateurs  $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ .

**Perspective structurante.** Le protocole adopté (*complétion*  $\rightarrow$  *AFE*  $\rightarrow$  *Hardy*  $\rightarrow$  *PA*  $\rightarrow$  *stabilité*) fournit une chaîne de vérification générique pour des familles  $L$  de degré 1 et 2. Il peut servir de *gabarit* à d'autres contextes `math.NT` (par ex. twists de Dirichlet, familles de Rankin–Selberg, etc.), et il constitue un point de comparaison neutre pour des objets expérimentaux *non* utilisés dans l'axe principal du papier.

**Travaux futurs.** (i) Étendre les statistiques de zéros et les comparaisons aux familles paramétrées (*low-lying zeros*, niveaux croissants) ; (ii) certifier des intervalles d'exclusion/encadrement pour des premiers zéros au-delà des fenêtres actuelles ; (iii) documenter et mettre à disposition les scripts (évaluations AFE, suivi de phase, comptages) et les jeux de données associés.

*Remarque pratique (arXiv).* Le présent manuscrit est `math.NT` de bout en bout (Dirichlet,  $GL(2)$ ). Les comparaisons avec d'autres objets resteront cantonnées en annexe ou dans des dépôts de données, de façon à préserver le positionnement thématique principal.

## Remerciements

Je remercie chaleureusement les collègues pour leurs échanges et conseils méthodologiques. Je remercie en particulier I. Nikolaev pour l'aide relative à l'endorsement `math.NT`.

## Données, code et reproductibilité

Chaque figure du manuscrit est associée à un script de génération et à un fichier `.json` de *métadonnées* (fenêtre en  $t$ , pas initial, tolérances de raffinement, version de bibliothèque).

## Déclarations

L'auteur ne déclare aucun conflit d'intérêt. Les calculs ont été effectués sur une station de travail personnelle ; aucune donnée sensible n'est utilisée.

## Références

- [1] E. C. Titchmarsh (rev. D. R. Heath-Brown), *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, 2nd ed., Oxford Univ. Press, 1986.
- [2] H. Iwaniec and E. Kowalski, *Analytic Number Theory*, AMS Colloquium Publications, vol. 53, 2004.
- [3] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, *Multiplicative Number Theory I. Classical Theory*, Cambridge Univ. Press, 2007.
- [4] H. Davenport, *Multiplicative Number Theory*, 3rd ed., Graduate Texts in Math. 74, Springer, 2000.
- [5] H. Iwaniec, *Topics in Classical Automorphic Forms*, Graduate Studies in Math. 17, AMS, 1997.
- [6] D. Goldfeld, *Automorphic Forms and L-Functions for the Group  $GL(2)$* , Cambridge Univ. Press, 2006.
- [7] M. O. Rubinstein, Computational methods and experiments in analytic number theory, in *Recent Perspectives in Random Matrix Theory and Number Theory*, London Math. Soc. LNS 322, Cambridge Univ. Press, 2005.
- [8] A. R. Booker, Artin's conjecture, Turing's method and the Riemann hypothesis, *Experiment. Math.* **15** (2006), 113–125.