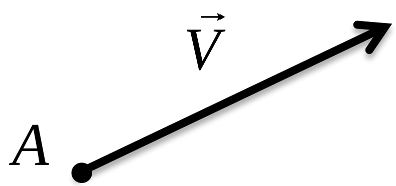
Chapitre 1 : Les torseurs

1.Définitions :

1.1 Pointeur :

Un pointeur est un vecteur $\vec{V}$ lié à un point A. On le note $\left(A,\vec{V}\right)$.



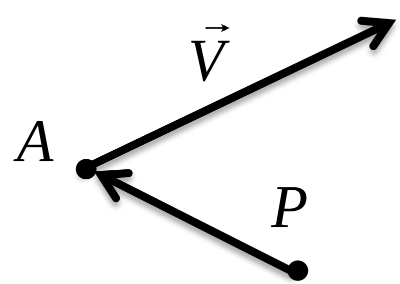
Chapitre 1 : Les torseurs

1.Définitions :

1.1 Pointeur :

On appelle Moment en P du pointeur $\left(A,\vec{V}\right)$ le vecteur :

$$\vec{M}_P\left(A,\vec{V}\right)=\overrightarrow{PA}\wedge\vec{V}$$

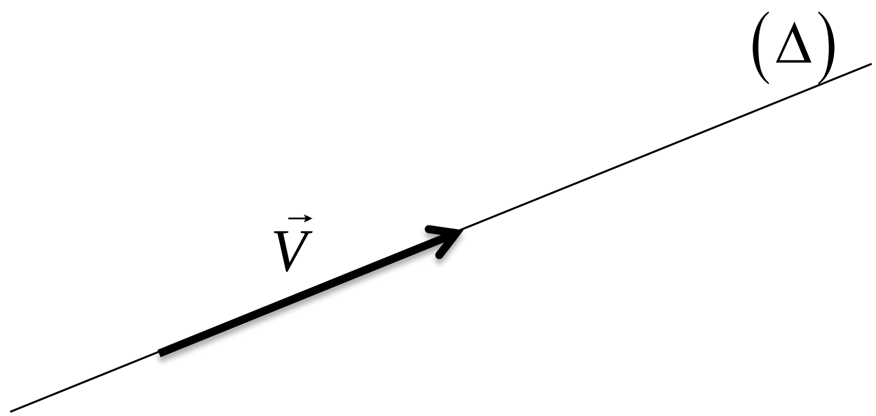


Pr. Hajaji Anas

1.Définitions :

1.2 Vecteur glissant :

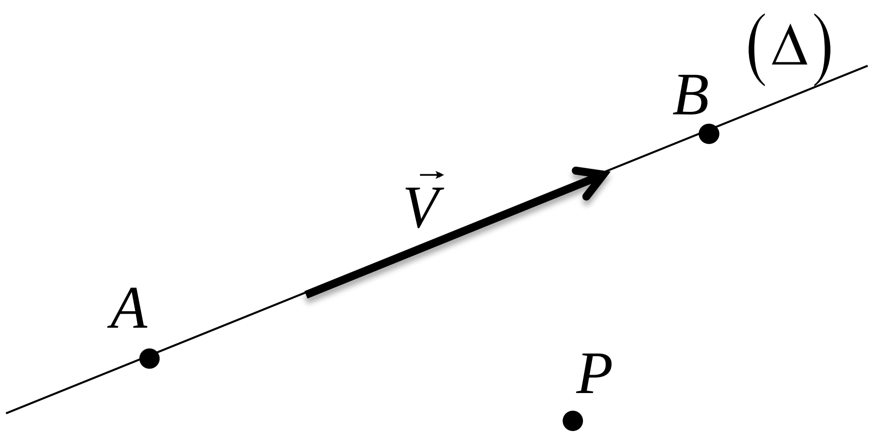
Un vecteur glissant est un vecteur $\vec{V}$ lié à une droite $\Delta \,||\, \vec{V}$. On le note $\left(\Delta, \vec{V}\right)$.



1.Définitions :

1.2 Vecteur glissant :

Considérons une droite $\Delta \parallel \vec{V}$, et deux poins A et B appartenant à l'axe (Δ).
et un point P quelconque.



1.Définitions :

1.2 Vecteur glissant :

On peut écrire :

$$\forall\ \mathrm{A,B}\ \in \Delta\ \ \vec{M}_P(A,\vec{V}) = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{V} = \left(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BA}\right) \wedge \vec{V}$$

$$= \left(\overrightarrow{PB} + \lambda\vec{V}\right) \wedge \vec{V} = \overrightarrow{PB} \wedge \vec{V}$$

$$= \vec{M}_P(B,\vec{V})$$

1.Définitions :

1.2 Vecteur glissant :

On appelle Moment en P du vecteur glissant $\left(\Delta,\vec{V}\right)$ le vecteur :

$$\vec{M}_P\left(\Delta,\vec{V}\right)=\overrightarrow{PA}\wedge\vec{V} \qquad \mathrm{A}\in\Delta$$

1.Définitions :

1.3 Relation entre les vecteurs moments:

$$\forall P, Q \qquad \vec{M}_Q\left(A,\vec{V}\right)=\overrightarrow{QA}\wedge\vec{V}=\left(\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PA}\right)\wedge\vec{V}$$

$$=\overrightarrow{QP}\wedge\vec{V}+\overrightarrow{PA}\wedge\vec{V}$$

$$=\overrightarrow{PA}\wedge\vec{V}+\overrightarrow{QP}\wedge\vec{V}$$

Donc : $$\vec{M}_Q\left(A,\vec{V}\right)=\vec{M}_P\left(A,\vec{V}\right)+\overrightarrow{QP}\wedge\vec{V}$$

Chapitre 1 : Les torseurs

1.Définitions :

1.4 Torseurs:

Soit $C = \left\{ \left(\left(A_i, \vec{V}_i \right), \vec{V}_i \right), i = 1..n \right\}$ un champ de vecteurs glissants.

On définit le torseur $\{\mathrm{T}\}$ associé au champ C au point P par :

$$\{\mathrm{T}\} = \begin{cases} \vec{R} = \sum_i \vec{V}_i \\ \overrightarrow{M}_P = \sum_i \overrightarrow{M}_P\left(\Delta_i, \vec{V}\right) = \sum_i \overrightarrow{PA_i} \wedge \vec{V}_i \end{cases}$$

Avec $\Delta_i = \left(A_i, \vec{V} \right)$

Chapitre 1 : Les torseurs

1.Définitions :

1.4 Torseurs:

$\vec{R}$ est la résultante du torseur $\{T\}$ et $\overrightarrow{M}_P$ le moment résultant en P.

$\vec{R}$ et $\overrightarrow{M}_P$ sont les éléments de réduction du torseur $\{T\}$.

1.Définitions :

1.4 Torseurs:

Relation entre les vecteurs moments en deux points P et Q :

$$\overrightarrow{M}_Q\{T\} = \overrightarrow{M}_P\{T\} + \vec{R}\{T\} \wedge \overrightarrow{PQ}$$

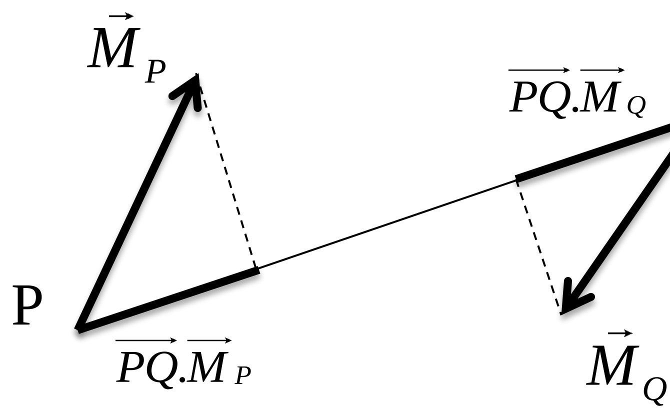
<u>Remarque</u> : Un torseur est défini de manière unique si l'on donne ses éléments de réduction en un point.

1.Définitions :

1.4 Torseurs:

a) Propriétés des vecteurs-moments

Les deux vecteurs-moments aux point P et Q ont la même projection sur la droite PQ : on dit que le champ des vecteurs-moments est équiprojectif.



1.Définitions :

1.4 Torseurs:

a) Propriétés des vecteurs-moments

Démonstration :

$$\forall P,Q \qquad \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{M}_Q = \overrightarrow{PQ}\cdot\left(\overrightarrow{M}_p + (\vec{R}\wedge\overrightarrow{PQ})\right)$$

$$= \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{M}_p + \overrightarrow{PQ}\cdot(\vec{R}\wedge\overrightarrow{PQ})$$

Chapitre 1 : Les torseurs

1.Définitions :

1.4 Torseurs:

a) Propriétés des vecteurs-moments

Démonstration :

Avec $\overrightarrow{PQ} \perp (\vec{R} \wedge \overrightarrow{PQ})$ soit : $\overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{R} \wedge \overrightarrow{PQ}) = 0$

Ainsi: $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{M}_Q = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{M}_p$

Cette relation exprime que les vecteurs $\overrightarrow{M}_Q$ et $\overrightarrow{M}_p$ ont même projection sur la droite PQ.

2. Opérations sur les torseurs

2.1 Egalité de deux torseurs

L'égalité entre deux torseurs en un point P donné :

$$\{T_1\} = \{T_2\}$$

est donc équivalente à l'ensemble de deux égalités vectorielles :

$$\begin{cases} \vec{R}\{T_1\} = \vec{R}\{T_2\} \\ \overrightarrow{M}_p\{T_1\} = \overrightarrow{M}_p\{T_2\} \end{cases}$$

2. Opérations sur les torseurs
2.2 Somme de deux torseurs

Le torseur somme de deux torseurs $\{T_1\}$ et $\{T_2\}$, noté :$\{T\} = \{T_1\} + \{T_2\}$ a pour éléments de réduction en un point P :

$$\begin{cases} \vec{R}\{T_1\} = \vec{R}\{T_1\} + \vec{R}\{T_2\} \\ \overrightarrow{M}_p\{T\} = \overrightarrow{M}_p\{T_1\} + \overrightarrow{M}_p\{T_2\} \end{cases}$$

2. Opérations sur les torseurs
2.3 Multiplication par un scalaire

Le torseur noté : $\{T\}=\lambda\{T_1\}$ a pour éléments de réduction en un point P :

$$\begin{cases} \vec{R}\{T\} = \lambda \vec{R}\{T_1\} \\ \overrightarrow{M}_p\{T\} = \lambda \overrightarrow{M}_p\{T_1\} \quad \forall\, P \in (D) \end{cases}$$

2. Opérations sur les torseurs
2.4 Torseur nul

Le torseur nul noté $\{0\}$ est l'élement neutre pour l'addition des deux torseurs :

$$\begin{cases} \vec{R}\{0\} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M}_p\{0\} = \vec{0} \quad \forall\, P \in (D) \end{cases}$$

2. Opérations sur les torseurs

2.4 Invariant scalaire d'un torseur

L'invariant scalaire d'un torseur $I\{T\}$ est par définition le produit scalaire des éléments de réduction en un point quelconque du torseur considéré $\{T\}$.

$$I\{\tau\} = \vec{R} \cdot \overrightarrow{M}_P\{\tau\}$$

2. Opérations sur les torseurs
2.4 Invariant scalaire d'un torseur

En passant par le point Q :

$$I\{\tau\} = \vec{R} \cdot \overrightarrow{M}_P\{\tau\} = \vec{R} \cdot \left(\overrightarrow{M}_Q\{\tau\} + \vec{R}\{\tau\} \wedge \overrightarrow{QP} \right)$$

$$= \vec{R} \cdot \overrightarrow{M}_Q\{\tau\} + \vec{R}\{\tau\} \cdot (\vec{R}\{\tau\} \wedge \overrightarrow{QP})$$

$$= \vec{R} \cdot \overrightarrow{M}_Q\{\tau\}$$

L'invariant scalaire est bien indépendant du point considéré.

2. Opérations sur les torseurs

2.5 Produit de deux torseurs

On appelle produit de deux torseurs $\{T_1\}$ et $\{T_2\}$, le réel défini par :

$$\{T_1\} \cdot \{T_2\} = \vec{R}\{T_1\} \cdot \overrightarrow{M}_P\{T_2\} + \overrightarrow{M}_P\{T_1\} \cdot \vec{R}\{T_2\}$$

Le produit est indépendant du point P choisi

2. Opérations sur les torseurs
2.5 Produit de deux torseurs

En effet :

$$\begin{aligned}\{T_1\}\cdot\{T_2\} &= \vec{R}\{T_1\}\cdot\overrightarrow{M}_P\{T_2\}+\overrightarrow{M}_P\{T_1\}\cdot\vec{R}\{T_2\}\\ &= \vec{R}\{T_1\}\cdot\left(\overrightarrow{M}_Q\{T_2\}+\left(\vec{R}\{T_2\}\wedge\overrightarrow{QP}\right)\right)+\vec{R}\{T_2\}\cdot\left(\overrightarrow{M}_Q\{T_1\}+\left(\vec{R}\{T_1\}\wedge\overrightarrow{QP}\right)\right)\\ &= \vec{R}\{T_1\}\cdot\overrightarrow{M}_Q\{T_2\}+\vec{R}\{T_1\}\cdot\left(\vec{R}\{T_2\}\wedge\overrightarrow{QP}\right)+\vec{R}\{T_2\}\cdot\overrightarrow{M}_Q\{T_1\}+\vec{R}\{T_2\}\cdot\left(\vec{R}\{T_1\}\wedge\overrightarrow{QP}\right)\end{aligned}$$

Montrer que : $\vec{R}\{T_1\}\cdot\left(\vec{R}\{T_2\}\wedge\overrightarrow{QP}\right)=-\vec{R}\{T_2\}\cdot\left(\vec{R}\{T_1\}\wedge\overrightarrow{QP}\right)$

2.6 Produit de deux torseurs

Par permutation circulaire :

$$\vec{R}\{\tau_1\}\cdot\left(\vec{R}\{\tau_2\}\wedge\overrightarrow{QP}\right)=\vec{R}\{\tau_2\}\cdot\left(\overrightarrow{QP}\wedge\vec{R}\{\tau_1\}\right)=-\vec{R}\{\tau_2\}\cdot\left(\vec{R}\{\tau_1\}\wedge\overrightarrow{QP}\right)$$

Soit :

$$\{\tau_1\}\cdot\{\tau_2\}=\vec{R}\{\tau_1\}\cdot\overrightarrow{M}_Q\{\tau_2\}++\vec{R}\{\tau_2\}\cdot\overrightarrow{M}_Q\{\tau_1\}$$

Le produit est bien indépendant du point *P* choisi.

2.7 Axe central d'un torseur

Définition :

L'axe centrale d'un torseur est l'ensemble des points P où le moment est colinéaire à la résultante du torseur, soit :

$$\vec{M}_P\{\tau\} = \alpha\vec{R}\{\tau\} \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}$$

2.7 Axe central d'un torseur

.

Ceci se traduit par l'expression suivante :

$$\overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{M}_P = \vec{0}$$

2.7 Axe central d'un torseur

Soit un point *O* de référence de l'espace géométrique. On peut Écrire :

$$\vec{M}_P = \vec{M}_O + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP}$$

La condition de colinéarité s'écrit alors :

$$\vec{R} \wedge \vec{M}_P = \vec{R} \wedge \vec{M}_O + \vec{R} \wedge (\vec{R} \wedge \overrightarrow{OP}) = \vec{0}$$

:

2.7 Axe central d'un torseur

La propriété du double produit vectoriel implique :

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3)\vec{V}_2 - (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)\vec{V}_3$$

Ainsi :

$$\vec{R} \wedge (\vec{R} \wedge \overrightarrow{OP}) = \left(\vec{R} \cdot \overrightarrow{OP}\right)\vec{R} - \left(\vec{R} \cdot \vec{R}\right)\overrightarrow{OP}$$

2.7 Axe central d'un torseur

Donc :

$$\vec{R} \wedge \vec{M}_O + (\vec{R} \cdot \overrightarrow{OP})\vec{R} - \vec{R}^2 \overrightarrow{OP} = \vec{0}$$

2.7 Axe central d'un torseur

Soit encore :

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{\vec{R}^2} + \frac{\vec{R} \cdot \overrightarrow{OP}}{\vec{R}^2}\vec{R} = \vec{V}_0 + \lambda \vec{R}$$

avec :

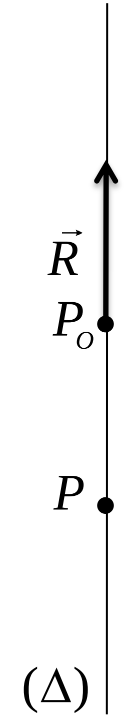
$$\vec{V}_0 = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{\vec{R}^2} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{\vec{R} \cdot \overrightarrow{OP}}{\vec{R}^2}$$

Propriété :

L'axe central d'un torseur est l'ensemble des points où le moment de ce torseur a un module minimum

Répartition des moment autour l'axe central et ses parallèles :

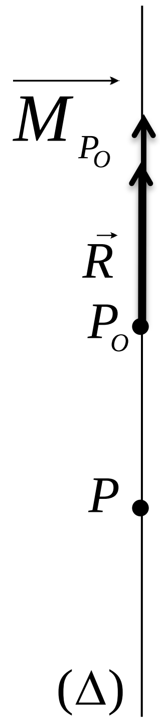
Soit $\Delta = \left(P_0, \vec{R}\right)$ l'axe central du torseur $\{T\}$.



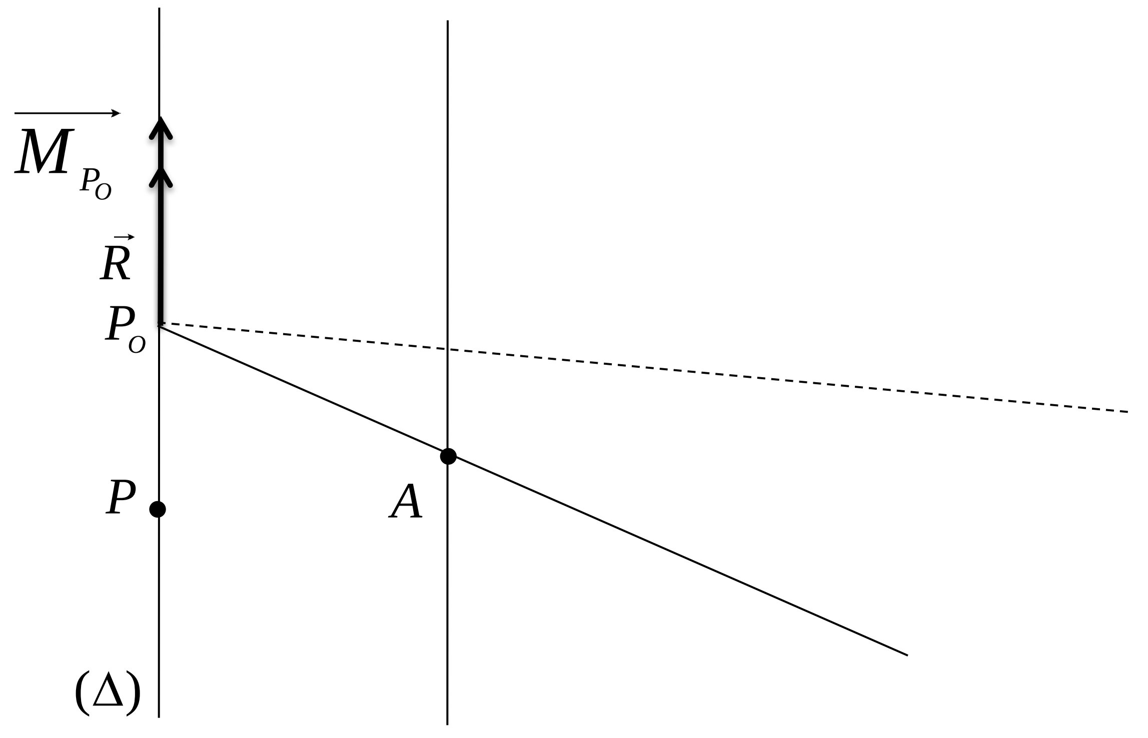
Répartition des moment autour l'axe central et ses parallèles :

- Le champ de moment est invariant le long de l'axe central.

Soit $\Delta = \left(P_0, \vec{R}\right)$ l'axe central du torseur $\{T\}$.



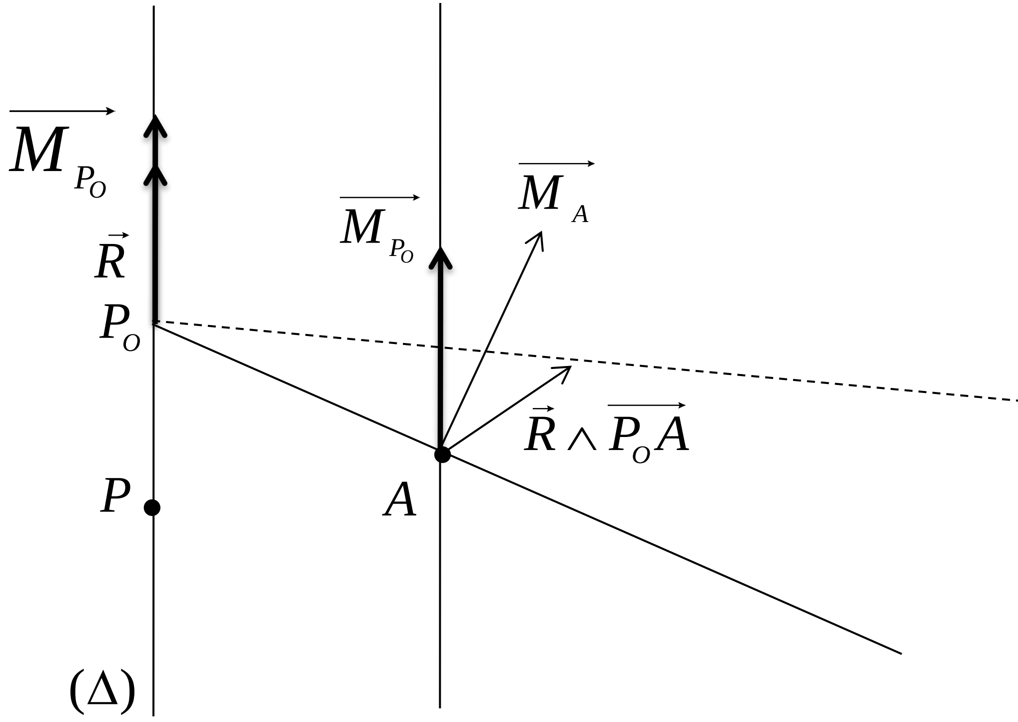
Répartition des moment autour l'axe central et ses parallèles :



Répartition des moment autour l'axe central et ses parallèles :

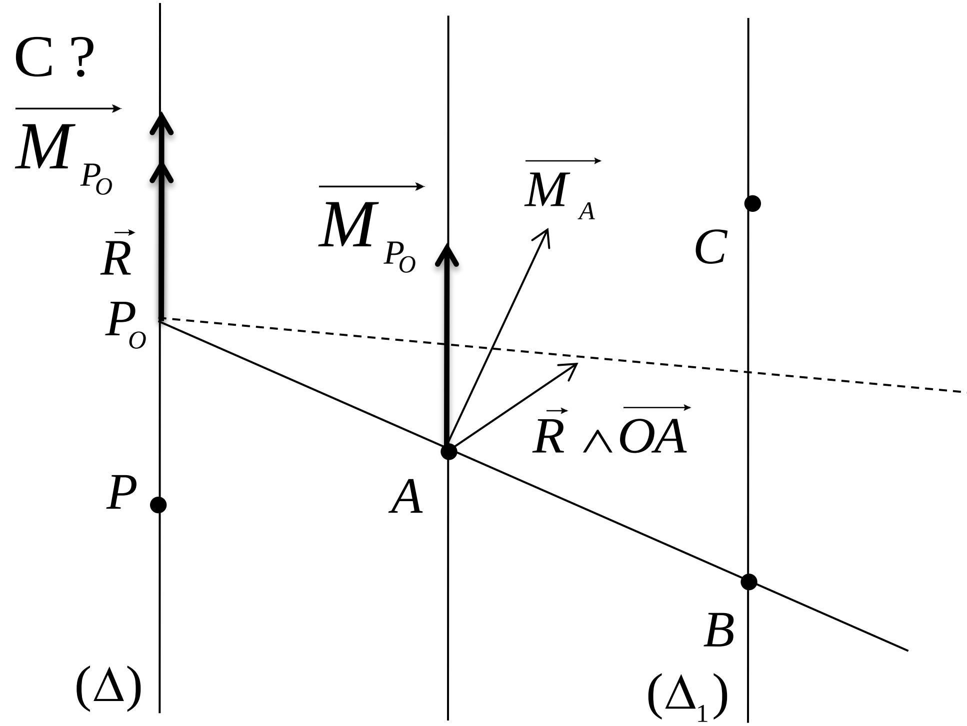
Déterminer le moment au point A ?

$$\overrightarrow{M}_A = \overrightarrow{M}_{P_O} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{P_O A}$$



Répartition des moment autour l'axe central et ses parallèles :

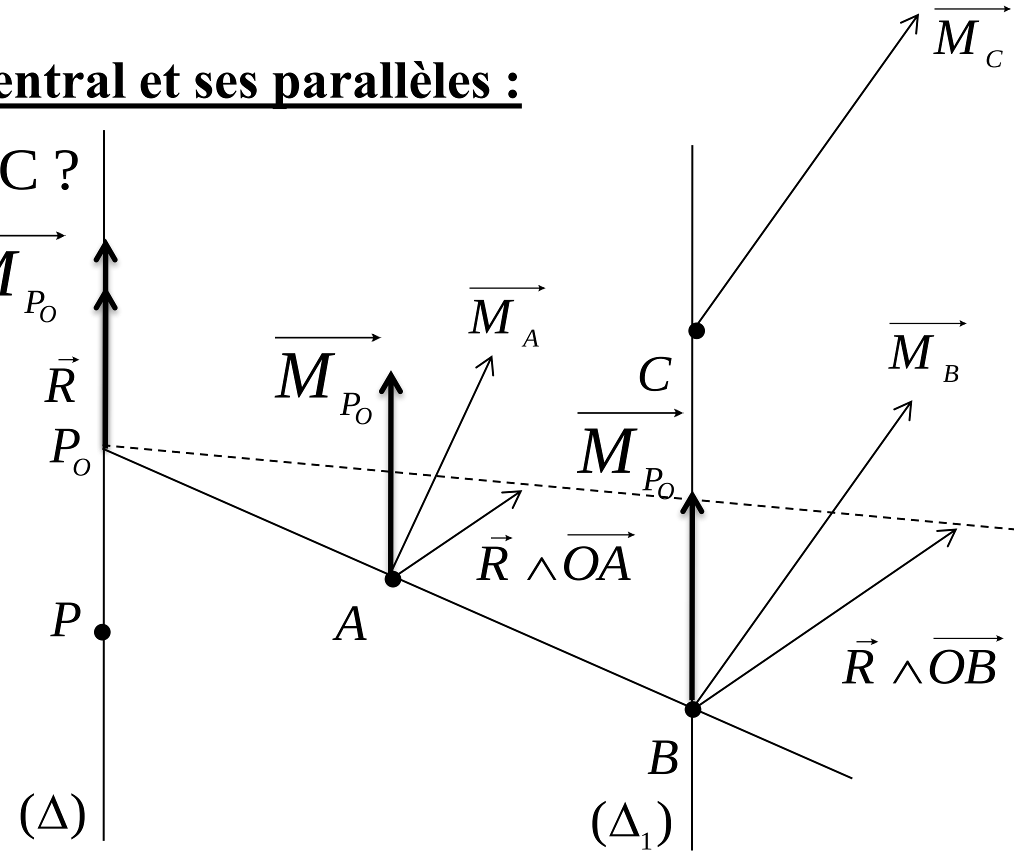
Déterminer le moment aux point B et C ?



Répartition des moment autour l'axe central et ses parallèles :

Déterminer le moment aux point B et C ?

$$\overrightarrow{M}_C = \overrightarrow{M}_B + \vec{R} \wedge \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{M}_B = \overrightarrow{Cte}$$



Répartition des moment autour l'axe central et ses parallèles :

Conclusion :

- Le champ de moment est invariant le long de l'axe central et ses parallèles.

- Le module du moment est minimum le long de l'axe central.

3. Classification des torseurs

3.1.Torseur glisseur

Définition : un torseur de résultante non nulle est un glisseur, si et seulement si, son invariant scalaire est nul. Soit :

$$\{\tau\} \text{ est un glisseur} \Leftrightarrow \begin{cases} I\{\tau\} = \vec{R}\{\tau\} \cdot \overrightarrow{M}_P\{\tau\} = 0 \quad \forall P \in (D) \\ \vec{R} \neq 0 \end{cases}$$

3. Classification des torseurs

3.1. Torseur glisseur

<u>Moment en un point d'un glisseur</u> : Considérons un glisseur. Il existe au moins un point où le moment du glisseur est nul. Soit A ce point :

$$\overrightarrow{M}_A\{\tau\} = \vec{0}$$

3. Classification des torseurs

3.1. Torseur glisseur

Le moment en un point P quelconque s'écrit :

$$\overrightarrow{M}_P\{\tau\} = \vec{M}_A\{\tau\} + \vec{R}\{\tau\} \wedge \overrightarrow{AP}$$

Soit : $$\overrightarrow{M}_P\{\tau\} = \vec{R} \wedge \overrightarrow{AP}$$

3. Classification des torseurs

3.1. Torseur glisseur

Axe central d'un glisseur : On appelle axe central d'un glisseur, l'ensemble des points K en lesquels le moment du torseur est nul. Soit :

$$\overrightarrow{M}_k\{\tau\} = \vec{R}\{\tau\} \wedge \overrightarrow{AK} = \vec{0} \qquad \vec{R} \neq \vec{0}$$

3. Classification des torseurs

3.2. Torseur Couple

__Définition :__ Un torseur non nul est un torseur-couple si et seulement si, sa résultante est nulle. Soit :

$$\{\tau\} \text{ est un torseur couple} \Leftrightarrow \begin{cases} I = \vec{R}\{\tau\} \cdot \overrightarrow{M}_P\{\tau\} = 0 \\ \vec{R}\{\tau\} = 0 \\ \exists \text{ un point } P \text{ tel que } \overrightarrow{\mathrm{M}}_P \neq \vec{0} \end{cases}$$

3. Classification des torseurs

3.2. Torseur Couple

<u>Propriétés du vecteur moment :</u> Le vecteur moment d'un torseur-couple est indépendant du point considéré. Ceci implique :

$$\overrightarrow{M}_Q\{\tau\} = \overrightarrow{M}_P\{\tau\} = \overrightarrow{M}$$

où $\overrightarrow{M}$ est un vecteur indépendant des points P et Q.

4. Décomposition centrale d'un torseur :

4.1 Décomposition d'un torseur couple

Soit $\{T_C\}$ le torseur couple$\left(\vec{0}, \vec{M}\right)$. Ce torseur couple peut être décomposé en la somme de deux glisseurs $\{T_1\}$ et $\{T_2\}$:

$$\{\tau_c\} = \{\tau_1\} + \{\tau_2\}$$

4. Décomposition centrale d'un torseur :

4.1 Décomposition d'un torseur couple

Où les éléments des glisseurs $\{T_1\}$ et $\{T_2\}$ sont définis somme suit :

$$\begin{cases} \vec{R}\{\tau_1\} + \vec{R}\{\tau_2\} = \vec{0} \\ \vec{M}_P\{\tau_1\} + \overrightarrow{M}_P\{\tau_2\} = \vec{M} \quad \forall P \\ I\{\tau_1\} = 0, \quad I\{\tau_2\} = 0 \end{cases}$$

Pr. Hajaji Anas

4. Décomposition centrale d'un torseur :

4.1 Décomposition d'un torseur couple

1. Nous choisissons le glisseur $\{\tau_1\}$ en donnant :

- Sa résultante $\vec{R}\{\tau_1\}$

- Son axe (Δ_1) est déterminé par un point P_1 : $(\Delta_1)=\left(P_1,\vec{R}\{\tau_1\}\right)$

Pr. Hajaji Anas

4. Décomposition centrale d'un torseur :

4.1 Décomposition d'un torseur couple

2. Le glisseur $\{\tau_2\}$ est alors défini ainsi :

- Sa résultante : $\vec{R}\{\tau_2\} = -\vec{R}\{\tau_1\}$

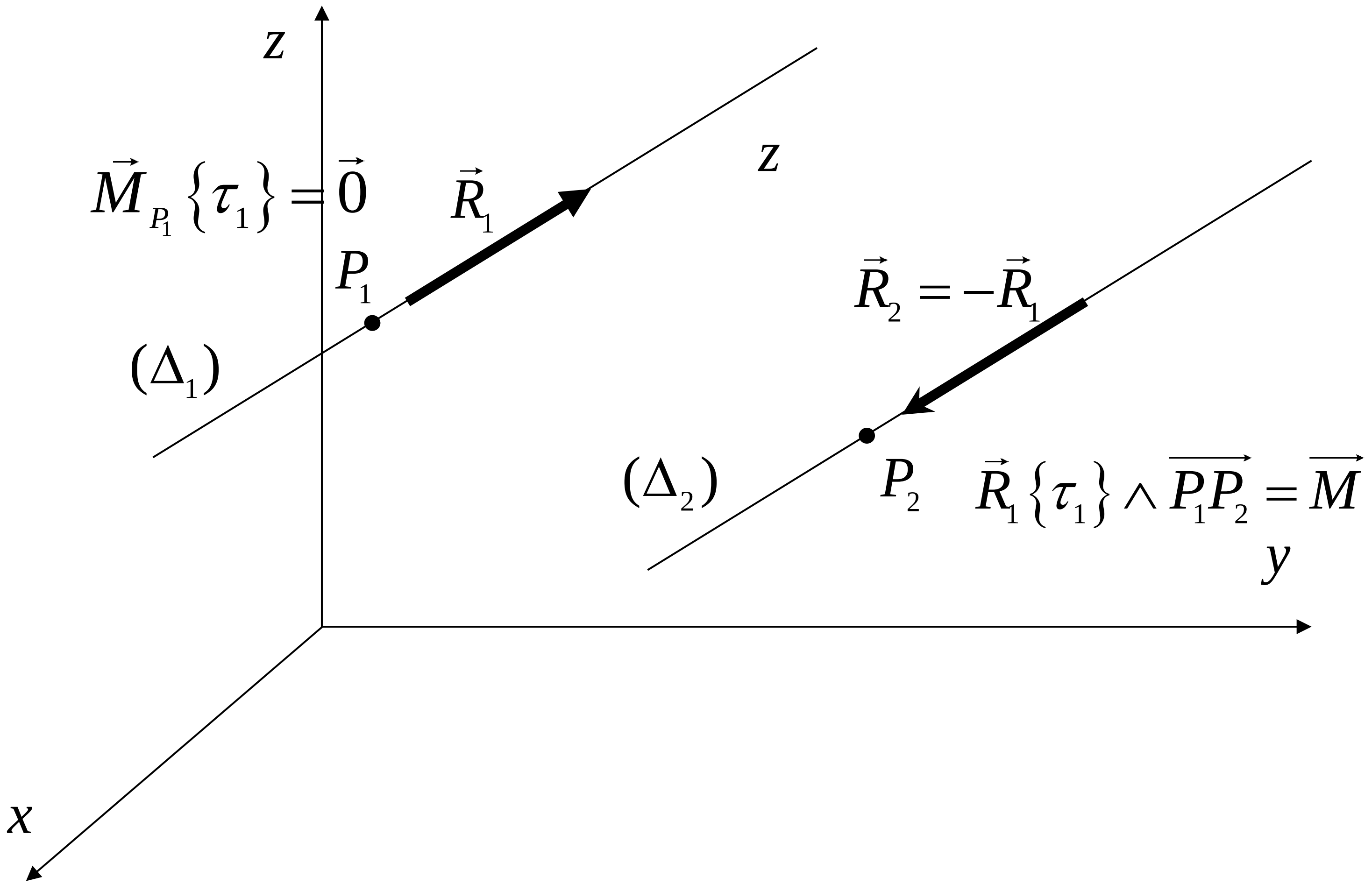
- Son axe $(\Delta_2) = \left(P_2, \vec{R}\{\tau_2\}\right)$

. Le point P_2 est tel que : $\overrightarrow{M}_{P_2}\{\tau_1\} + \overrightarrow{M}_{P_2}\{\tau_2\} = \overrightarrow{M}_{P_2}\{\tau_1\} = \overrightarrow{M}$

Soit : $\vec{R}\{\tau_1\} \wedge \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{M}$

4. Décomposition centrale d'un torseur :

4.1 Décomposition d'un torseur couple



Exercices d'application

Exercice 1 :

Dans un repère $(O;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, on considère les trois glisseurs suivants :

$$\{\tau_1\}=\begin{cases}\vec{R}_1=(1,0,-1)\\ \overrightarrow{M_A}=\vec{0}\end{cases}\quad \{\tau_2\}=\begin{cases}\vec{R}_2=(1,2,2)\\ \overrightarrow{M_B}=\vec{0}\end{cases}\quad \{\tau_3\}=\begin{cases}\vec{R}_2=(\alpha,\beta,\gamma)\\ \overrightarrow{M_C}=\vec{0}\end{cases}$$

Avec : $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ et $C(0,0,1)$

Soit $\{\tau\}$ la somme des trois torseurs $\{\tau_1\}$, $\{\tau_2\}$ et $\{\tau_3\}$.

Chapitre 1 : Les torseurs

1) Déterminer (α, β, γ) pour que le torseur $\{\tau\}$ soit un couple. Trouver son moment.

2) Déterminer la relation qui doit lier α , β , γ pour que le torseur $\{\tau\}$ soit un glisseur.

3) Dans le cas $(\alpha, \beta, \gamma) = (-2, 0, -1)$, trouver l'équation de l'axe central du torseur $\{\tau\}$. Que peut-on dire de la direction de l'axe central.

Chapitre 1 : Les torseurs

Exercice 2 :

On considère un cube de côtés $O_1A = O_1B = O_1C = 1$ par rapport un repère orthonormé direct fixe $R(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$. A tout instant, les projections des vecteurs vitesses des points A, B et C sont telles que :

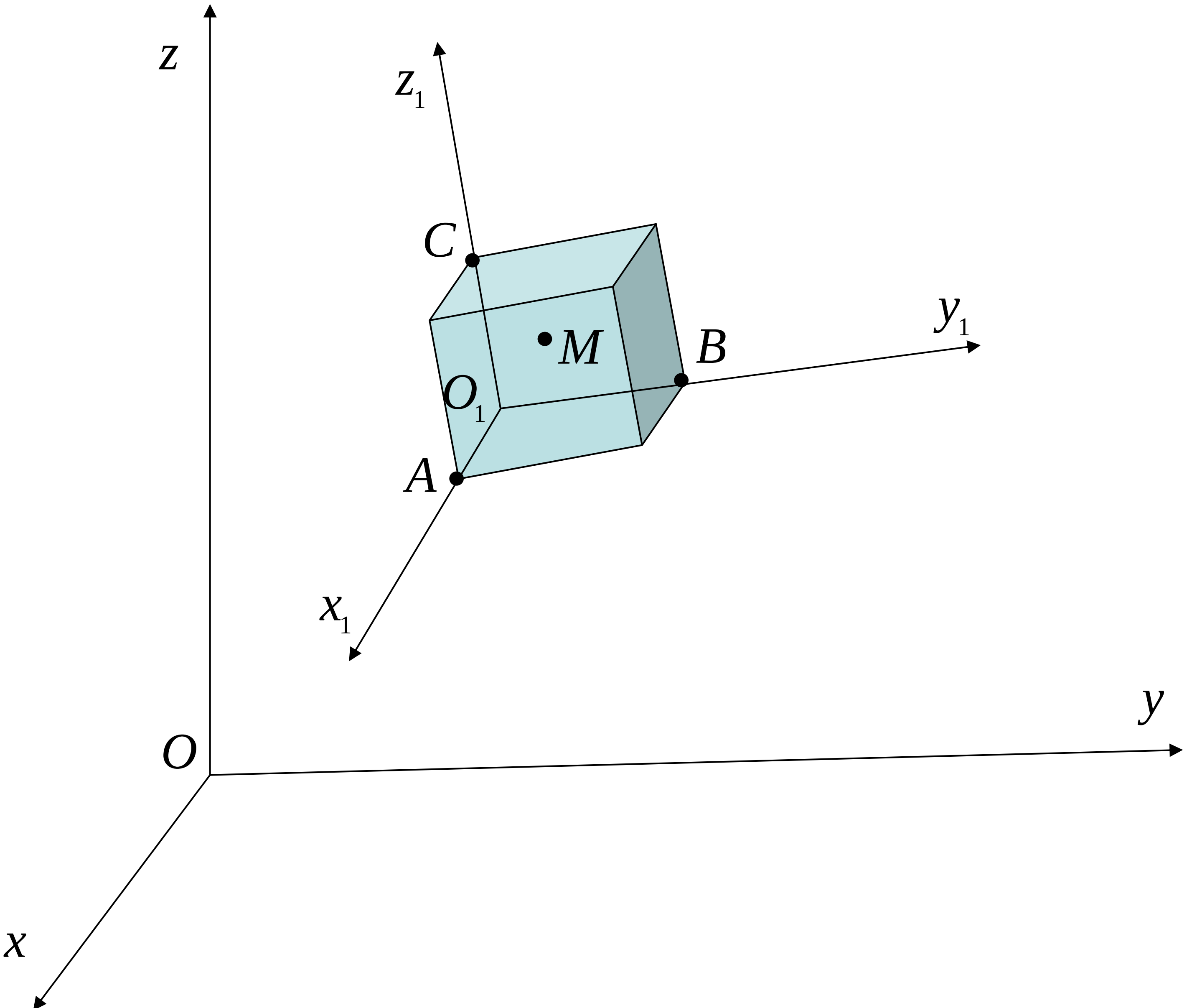
$$\vec{v}(A/R)\cdot\overrightarrow{O_1B} = 2\omega \quad \text{et} \quad \vec{v}(A/R)\cdot\overrightarrow{O_1C} = \omega$$

$$\vec{v}(B/R)\cdot\overrightarrow{O_1C} = \omega \quad \text{et} \quad \vec{v}(A/R)\cdot\overrightarrow{O_1A} = 0$$

$$\vec{v}(C/R)\cdot\overrightarrow{O_1A} = \omega \quad \text{et} \quad \vec{v}(A/R)\cdot\overrightarrow{O_1B} = \omega$$

Soit $R_1(O_1,\vec{e}_{x1},\vec{e}_{y1},\vec{e}_{z1})$ le repère lié au cube dans son mouvement par rapport à $R(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$, avec $\overrightarrow{e_{x1}} = \overrightarrow{O_1A}$, $\overrightarrow{e_{y1}} = \overrightarrow{O_1B}$ et $\overrightarrow{e_{z1}} = \overrightarrow{O_1C}$.

Chapitre 1 : Les torseurs



Chapitre 1 : Les torseurs

1) Déterminer par rapport à $R(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$, les vecteurs vitesses des points A, B et C.

2) En déduire l'expression du vecteur rotation instantané $\vec{\omega}(R_1/R)$ dans la base $(\vec{e}_{x1},\vec{e}_{y1},\vec{e}_{z1})$.

3) Déterminer le vecteur vitesse du point O_1 par rapport à $R(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$.

4) Déterminer l'invariant scalaire du torseur cinématique décrivant le mouvement du cube par rapport à $R(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$.

5) Déterminer la vitesse $\vec{v}(M/R)$ d'un point M quelconque appartenant au cube. En déduire l'axe instantané de rotation du cube.

Chapitre 1 : Les torseurs

Dans un repère $R\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ orthonormé et direct, on considère les torseurs $\{T_1\}$ et $\{T_2\}$ dont les éléments de réduction au point O sont définis par :

$$\{T_1\} = \begin{cases} \vec{R}_1 = \cos\alpha\vec{i} - \sin\alpha\vec{j} \\ \overrightarrow{M_1}(O) = -\alpha\sin\alpha\vec{i} - \alpha\cos\alpha\vec{j} \end{cases} \quad \text{et} \quad \{T_2\} = \begin{cases} \vec{R}_2 = \cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{j} \\ \overrightarrow{M_2}(O) = -\alpha\sin\alpha\vec{i} + \alpha\cos\alpha\vec{j} \end{cases}$$

Où a et α sont des constantes non nulles.

1) Déterminer l'invariant scalaire des torseurs $\{T_1\}$ et $\{T_1\}$. Que peut-on conclure ?

2) Déterminer le moment $\overrightarrow{M_1}(O_1)$ au point O_1 ayant comme coordonnées $(0,1,1)$.

3) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles le torseur $\{T\} = \{T_1\} + \{T_2\}$ est un glisseur.

Chapitre 1 : Les torseurs

1) Déterminer (α, β, γ) pour que le torseur $\{\tau\}$ soit un couple. Trouver son moment.

$$\{\tau\} = \{\tau_1\} + \{\tau_2\} + \{\tau_3\}$$

Avec :

$$\{\tau\} = \begin{cases} \vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{R}_3 \\ \vec{M}_O = \vec{M}_O^1 + \vec{M}_O^2 + \vec{M}_O^3 \end{cases}$$

$$\vec{M}_O^1 = \vec{M}_O\{\tau_1\} = \vec{M}_A + \vec{R}_1 \wedge \overrightarrow{OA} = \vec{R}_1 \wedge \overrightarrow{OA}$$

$$\vec{M}_O^2 = \vec{M}_O\{\tau_2\} = \vec{M}_B + \vec{R}_1 \wedge \overrightarrow{OB} = \vec{R}_2 \wedge \overrightarrow{OB}$$

$$\vec{M}_O^3 = \vec{M}_O\{\tau_3\} = \vec{M}_C + \vec{R}_1 \wedge \overrightarrow{OC} = \vec{R}_3 \wedge \overrightarrow{OC}$$

Chapitre 1 : Les torseurs

Le torseur $\{\tau\}$ est un couple implique : $\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{R}_3 = (\alpha + 2, \beta + 2, \gamma + 1) = 0$

Donc : $\alpha = -2, \beta = -2$ et $\gamma = -1$

Chapitre 1 : Les torseurs

Le moment du torseur $\{\tau\}$:

Le moment est indépendant du point choisi :

$$\overrightarrow{M_O} = \vec{M}_O^1 + \vec{M}_O^2 + \vec{M}_O^3 = \left(2-\beta, 1+\alpha, -1\right) = \left(4, -1, -1\right)$$

Chapitre 1 : Les torseurs

2) Déterminer la relation qui doit lier α , β , γ pour que le torseur $\{\tau\}$ soit un glisseur.

Chapitre 1 : Les torseurs

2) Déterminer la relation qui doit lier α , β , γ pour que le torseur $\{\tau\}$ soit un glisseur.

Pour avoir un glisseur il suffit d'avoir :

$$\vec{R} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{R} \bullet \vec{M}_P = \vec{R} \bullet \left(\vec{M}_O + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP} \right) = \vec{R} \bullet \vec{M}_O = \vec{0}$$

$$\vec{R} \neq \vec{0} \quad \Rightarrow \quad (\alpha, \beta, \gamma) \neq (-2, -2, -1)$$

$$\vec{R} \bullet \vec{M}_O = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad 4\alpha - \beta - \gamma + 5 = 0$$

3) Dans le cas $(\alpha,\beta,\gamma)=(-2,0,-1)$, trouver l'équation de l'axe central du torseur $\{\tau\}$. Que peut-on dire de la direction de l'axe central.

Chapitre 1 : Les torseurs

3) Dans le cas $(\alpha,\beta,\gamma)=(-2,0,-1)$, trouver l'équation de l'axe central du torseur $\{\tau\}$. Que peut-on dire de la direction de l'axe central.

L'axe central du torseur $\{\tau\}$ est $P(x,y,z)$ l'ensemble des points $P(x,y,z)$ tels que : $\overrightarrow{M}_P \,||\, \vec{R}$ soit $\overrightarrow{M}_P \wedge \vec{R} = \vec{0}$ avec $\overrightarrow{M}_P = \vec{M}_O + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP}$

On trouve : $z=-1$ et $x=-1/2$

L'axe central est parallèle à l'axe $\vec{y}$ et passant par le point $(-1, y, -1/2)$