◦ Yang-Mills theory, QCD, and color-ordering.

Yang-Mills Lagrangian は，

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \frac{ig}{\sqrt{2}}[A_\mu A_\nu].$$

$$A_\mu = A_\mu^a T^a \quad (G = SU(N))$$

$$\mathrm{Tr}\, T^a T^b = \delta^{ab}. \quad [T^a, T^b] = i\tilde{f}^{abc}T^c$$

~~(◎~~ $\tilde{f}$ ~~は~~ $\tilde{e}$ ~~のようなもので，"正しい" normalization の~~ f から $\tilde{f} = \sqrt{2} f$ の関係にある.)

Feynman rule を出すには，ゲージ固定の必要がある。amplitude で便利なのは，
~~Gervais-Neveu gauge~~

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(H_\mu{}^\mu)^2,$$

$$H_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \frac{ig}{\sqrt{2}} A_\mu A_\nu$$

である. このとき

$$\mathcal{L} = \mathrm{Tr}\Big(-\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - i\sqrt{2}g\,\partial^\mu A^\nu A_\nu A_\mu + \frac{g^2}{4}A^\mu A^\nu A_\mu A_\nu\Big)$$

となる。すると，gluon propagator は $\delta^{ab}\frac{\eta^{\mu\nu}}{p^2}$ で，3-，4-gluon
~~vertex は~~ $\tilde{f}^{abc}$ ~~及び~~ $\tilde{f}^{abx}\tilde{f}^{xcd}$ ~~+(perms)，に適切な kinematic~~
factor をくっつけたもの である.
これらの Feynman rule でつくった amplitude は，~~別のゲージ群へと移せる~~
それぞれ別のゲージ群の足を持ったかたまりに分けられる．たとえば"s-，t-，u-channel"の 4 gluon tree amplitude は

$$c_s \equiv \tilde{f}^{a_1a_2b}\tilde{f}^{ba_3a_4},\quad c_t \equiv \tilde{f}^{a_1a_3b}\tilde{f}^{ba_4a_2}$$

$$c_u \equiv \tilde{f}^{a_1a_4b}\tilde{f}^{ba_2a_3}$$

で、4点の contact term も $C_{s,t,u}$ の combination で書ける。
また、これらの factor は Jacobi id. でつながる。

color factは、 $C_s + C_t + C_u = 0$
以下は、トレースをつかって見ることができる。まず、

$$if^{abc} = Tr(T^a T^b T^c) - Tr(T^b T^a T^c)$$

一般に、generationの積は、Fierzすることができる。

$$T^a{}_i{}^j T^a{}_k{}^\ell = \delta_i^\ell \delta_k^j - \frac{1}{N}\delta_i^j \delta_k^\ell.$$

以上より、たとえば、

$$f^{a_1 a_2 b} f^{b a_3 a_4} \propto Tr(T^{a_1} T^{a_2} T^{a_3} T^{a_4}) - Tr(T^{a_1} T^{a_2} T^{a_4} T^{a_3})$$
$$- Tr(T^{a_1} T^{a_3} T^{a_4} T^{a_2}) + Tr(T^{a_1} T^{a_4} T^{a_3} T^{a_2})$$

よって、4-gluon amplitudeは、

$$A_4^{\text{full, tree}} = g^2 \Big(A_4[1234]\, Tr(T^{a_1} T^{a_2} T^{a_3} T^{a_4}) + \text{perms of } (2.3.4) \Big)$$

と書ける。ただし、$A_4[1234]$, などは color-ordered amplitude と呼ぶ。多点関数にも一般化できて、

$$A_n^{\text{full, tree}} = g^{n-2} \sum_{\text{perms } \sigma} A_n[1\sigma(2\cdots n)]\, Tr(T^{a_1} T^{\sigma(a_2} \cdots T^{a_n)})$$

となる。(loopの場合、multi-trace が出てくる。)

color-ordered amplitudeは、次の Feynman rule で直接計算できる。

3-gluon $V^{\mu_1\mu_2\mu_3}(p_1 p_2 p_3) = -\sqrt{2}\,(\eta^{\mu_1\mu_2} p_1^{\mu_3} + \eta^{\mu_2\mu_3} p_2^{\mu_1} + \eta^{\mu_3\mu_1} p_3^{\mu_2})$

4-gluon $V^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1 p_2 p_3 p_4) = \eta^{\mu_1\mu_3}\eta^{\mu_2\mu_4}$

color-ordered amplitude ~~は~~ $A_n(12\cdots n)$ は、line crossing なく、1.2.3…n の順にならんだ外線の graph で計算される。

ためしに simplest case である 3-gluon amplitude を考えよう。
3点の vert. rule より、

$$A_3[1\,2\,3] = -\sqrt{2}\Big((\epsilon_1\epsilon_2)(\epsilon_3 p_1) + (\epsilon_2\epsilon_3)(\epsilon_1 p_2) + (\epsilon_3\epsilon_1)(\epsilon_2 \cdot p_3)\Big)$$

である。ここで polarization が $--+$ の場合、

$$A_3[1^-2^-3^+] = \frac{1}{2}\left(\frac{2\langle 12\rangle[q_1 q_2]\langle q_3|1|3]}{[q_1 1][q_2 2]\langle q_3 3\rangle} + \frac{2\langle 2 q_3\rangle[q_2 3]\langle 1|2|q_1]}{[q_1 1][q_2 2]\langle q_3 3\rangle} + \frac{2\langle q_3 1\rangle[3 q_1]\langle 2|3|q_2]}{[q_1 1][q_2 2]\langle q_3 3\rangle}\right)$$

$$= -\frac{\langle 12\rangle[q_1 q_2]\langle q_3 1\rangle[13] + \langle 2 q_3\rangle[q_2 3]\langle 12\rangle[2 q_1] + \langle q_3 1\rangle[3 q_1]\langle 23\rangle[3 q_2]}{[q_1 1][q_2 2]\langle q_3 3\rangle}$$

となる。
さて、QED の時と同様に、3-particle special kinematics を考える。$|1\rangle \propto |2\rangle \propto |3\rangle$ ($\langle 12\rangle = \langle 23\rangle = \langle 31\rangle = 0$) でだと、このamplitudeは0なので、$|1] \propto |2] \propto |3]$ とする。
第一項のみ消えて、

$$A_3^{--+} = -\frac{\langle 2 q_3\rangle[q_2 3]\langle 12\rangle[2 q_1] + \langle q_3 1\rangle[3 q_1]\langle 23\rangle[3 q_2]}{[q_1 1][q_2 2]\langle q_3 3\rangle}$$

momentum cons.

$$= -[3 q_1][3 q_2]\frac{\langle 13\rangle\langle 2 q_3\rangle + \langle 23\rangle\langle q_3 1\rangle}{[q_1 1][q_2 2]\langle q_3 3\rangle}$$

Shouten id.

$$= -[3 q_1][3 q_2]\frac{\langle 12\rangle\langle 3 q_3\rangle}{[q_1 1][q_2 2]\langle q_3 3\rangle}$$

より

$$A_3^{--+} = \frac{[3 q_1][3 q_2]\langle 12\rangle}{[q_1 1][q_2 2]}$$

ただしは

$$[3 q_2] = \frac{\langle 13\rangle [3 q_2]}{\langle 13\rangle} = \frac{\langle 12\rangle [q_2 2]}{\langle 13\rangle}$$

なので より、

$$A_3^{--+} = \frac{\langle 12\rangle\langle 21\rangle\langle 12\rangle}{\langle 13\rangle\langle 23\rangle}$$

$$= \frac{\langle 12\rangle^3}{\langle 23\rangle\langle 31\rangle}$$

同様に、

$$A_3^{++-} = \frac{[12]^3}{[23][31]}$$

<u>Exercise 2.19</u>

$$A_3(1^+2^+3^-) = -\sqrt{2}\Big((\epsilon_{1+}\,\epsilon_{2+})(\epsilon_{3-}\,p_1) + (\epsilon_{2+}\,\epsilon_{3-})(\epsilon_{1+}\,p_2) + (\epsilon_{3-}\,\epsilon_{1+})(\epsilon_{2+}\,p_3)\Big)$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\,\frac{[12]\langle q_1 q_2\rangle\langle 31\rangle[1 q_3] + [2 q_3]\langle q_2 3\rangle\langle q_1 2\rangle[21] + [q_3 1]\langle 3 q_1\rangle\langle q_2 3\rangle[3\ldots}{\langle q_1 1\rangle\langle q_2 2\rangle[q_3 3]}$$

3-particle kin. より $[\cdot\cdot]=0$ or $\langle\cdot\cdot\rangle=0$ にとる必要があるが、$\langle\cdots\rangle=0$ にとる。第一項のみ消えて、

$$A_3^{++-} = -\frac{[2 q_3]\langle q_2 3\rangle\langle q_1 2\rangle[21] + [q_3 1]\langle 3 q_1\rangle\langle q_2 3\rangle[32]}{\langle q_1 1\rangle\langle q_2 2\rangle[q_3 3]}$$

momentum cons.

$$= -\langle 3 q_1\rangle\langle q_2 3\rangle\frac{[31][2 q_3] + [32][q_3 1]}{\langle q_1 1\rangle\langle q_2 2\rangle[q_3 3]}$$

Shouten id.

$$= -\langle 3 q_1\rangle\langle q_2 3\rangle\frac{[12][q_3 3]}{\langle q_1 1\rangle\langle q_2 2\rangle[q_3 3]}$$